

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Karmen Bezljaj
Chaikinov algoritem

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Emil Žagar

Ljubljana, 2013

KAZALO

1. Uvod	4
2. Chaikinov algoritem	4
2.1. Opis Chaikinovega algoritma	4
2.2. Primeri uporabe Chaikinovega algoritma	5
3. Kardinalni B-zlepki	10
3.1. Lastnosti kardinalnih B-zlepkov	11
3.2. Prostor kardinalnih zlepkov	12
3.3. Kardinalni B-zlepki stopnje 0, 1 in 2	13
3.4. Kardinalni zlepki in subdivizija	14
4. Konvergenca	17
5. Dodatek	21
Literatura	23

Chaikinov algoritem

POVZETEK

Chaikinov algoritem uvrščamo na področje računalniške grafike in je eden prvih algoritmov, ki uporablja tako imenovano metodo "rezanja kotov". Gre za linearno subdivizijo, ki je del numerične aproksimacije krivulj. V tem diplomskem seminarju bomo predstavili Chaikinov algoritem in dokazali, da kontrolni poligoni, ki jih generira, konvergirajo proti zvezno odvedljivi krivulji.

Chaikin's algorithm

ABSTRACT

Chaikin's algorithm is used in computer graphics and it is one of the first algorithms, that uses the so called "corner cutting" method. It is a linear subdivision, which is a part of numeric approximation of curves. In this thesis we will present Chaikin's algorithm and prove that the control polygons, which are generated by the algorithm, converge to a smooth curve.

Math. Subj. Class. (2010): 65D07, 65D17, 65D18

Ključne besede: Chaikinov algoritem, linearna subdivizija, kardinalni B-zlepek

Keywords: Chaikin's algorithm, linear subdivision, cardinal B-spline

1. UVOD

Chaikinov algoritem je leta 1974 na univerzi v Utahu predstavil George Chaikin. Uvrščamo ga predvsem na področje računalniške grafike, zanimiv pa je tudi, ker je eden prvih algoritmov, ki uporablja tako imenovane metode “rezanja kotov”. Gre za linearno subdivizijo, ki sodi v numerično aproksimacijo. Večinoma ga uporabljamo za generiranje navidezno gladkih ravninskih krivulj.

Diplomski seminar je sestavljen iz treh delov. V prvem delu se seznanimo s Chaikinovim algoritmom in nekaj primeri. V drugem delu opišemo kardinalne B-zlepke, ki nam služijo kot orodje za dokaz konvergence Chaikinovega algoritma. Slednjo dokažemo v zadnjem delu.

Z algoritmom lahko generiramo tudi krivulje v več dimenzionalnih prostorih. V tem diplomskem seminarju obravnavamo Chaikinov algoritem za krivulje v ravnini.

2. CHAIKINOV ALGORITEM

Za osnovno razumevanje algoritma ne potrebujemo veliko matematičnega znanja, le sposobnost branja iterativnega algoritma, zato si Chaikinov algoritem pogledjmo z geometrijskega zornega kota. V nadaljevanju pa bomo definirali pojme, potrebne za teorijo, ki se skriva v ozadju tega algoritma, in ni tako preprosta, kot algoritem sam. Chaikinov algoritem je iterativni postopek, ki ga uvrščamo med subdivizijske sheme. Kot podatek dobimo kontrolne točke, iz katerih tvorimo začetni kontrolni poligon.

Definicija 2.1. Zaporedju točk $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^m$, $i \in \mathbb{Z}$, rečemo *kontrolne točke*. S povezavo zaporednih kontrolnih točk dobimo poligon v \mathbb{R}^m , ki ga imenujemo *kontrolni poligon* in označimo s

$$\mathcal{P} = \dots \mathbf{c}_{-2}\mathbf{c}_{-1}\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1\mathbf{c}_2 \dots$$

Formalno je zaporedje neskončno. V praksi je podanih samo končno mnogo točk $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^m$, kar vpliva le na implementacijo algoritma. V tem poglavju bomo predpostavili periodičnost zaporedja kontrolnih točk. Torej obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $\mathbf{c}_k = \mathbf{c}_{k+n}$, $k \in \mathbb{Z}$. Namesto celega zaporedja kontrolnih točk lahko obravnavamo samo del zaporedja dolžine $n + 1$, recimo $\mathbf{c}_0\mathbf{c}_1 \dots \mathbf{c}_n$.

2.1. Opis Chaikinovega algoritma. Opišimo sedaj Chaikinov algoritem. Začnimo s kontrolnimi točkami $\mathbf{c}_j^0 := \mathbf{c}_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, in kontrolnim poligonom

$$\mathcal{P}^0 = \mathbf{c}_0^0\mathbf{c}_1^0 \dots \mathbf{c}_n^0.$$

Iz kontrolnega poligona \mathcal{P}^{k-1} , $k \geq 1$, tvorimo kontrolni poligon na k -tem nivoju

$$\mathcal{P}^k = \mathbf{c}_0^k\mathbf{c}_1^k \dots \mathbf{c}_{2n}^k,$$

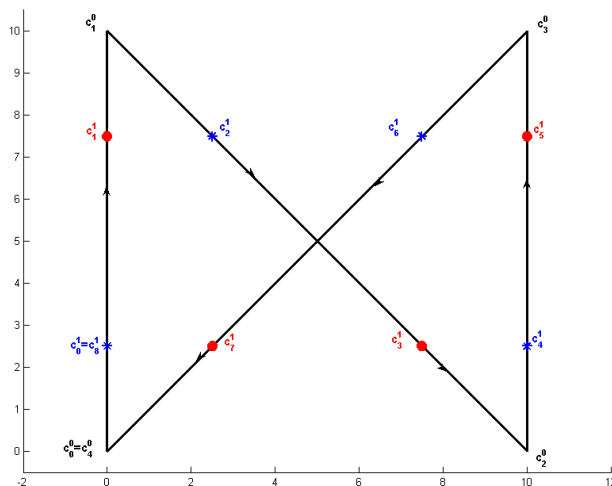
kjer nove kontrolne točke dobimo po shemi

$$(2.1) \quad \mathbf{c}_{2i}^k := \frac{3}{4}\mathbf{c}_i^{k-1} + \frac{1}{4}\mathbf{c}_{i+1}^{k-1},$$

$$(2.2) \quad \mathbf{c}_{2i+1}^k := \frac{1}{4}\mathbf{c}_i^{k-1} + \frac{3}{4}\mathbf{c}_{i+1}^{k-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

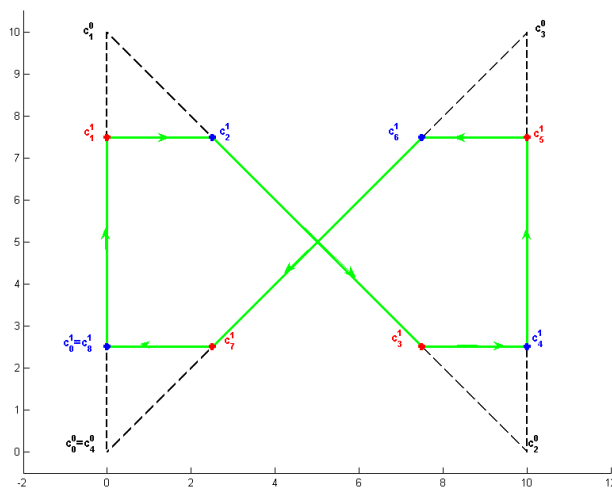
$$(2.3) \quad \mathbf{c}_{2n}^k := \mathbf{c}_0^k.$$

Algoritem ponavljamo, dokler se točke ne zgostijo toliko, da kontrolni poligon izgleda navidezno gladek. V tem diplomskem seminarju bomo z besedo gladkost poimenovali vsaj enkrat zvezno odvedljivo krivuljo.



SLIKA 1. Kontrolni poligon \mathcal{P}^0 in točke na prvem nivoju.

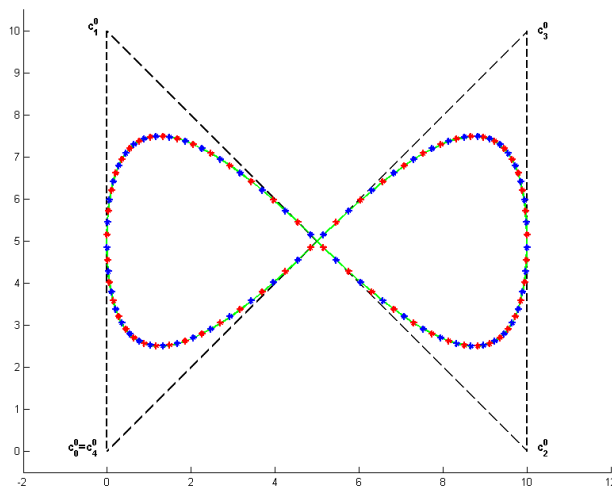
Pa si pogledjmo delovanje Chaikinovega algoritma na nekaj primerih.



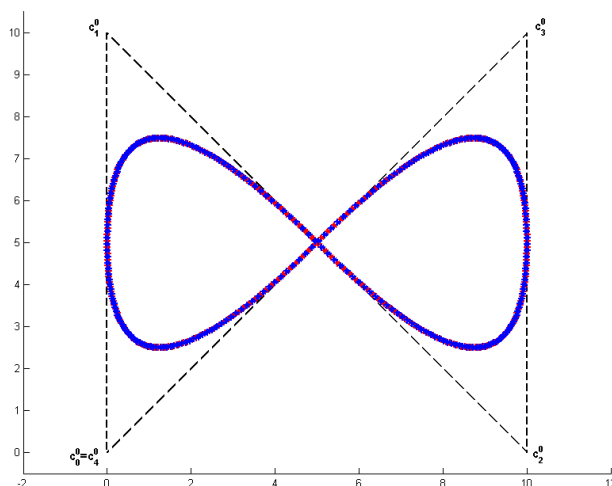
SLIKA 2. Kontrolni poligon \mathcal{P}^1 .

2.2. **Primeri uporabe Chaikinovega algoritma.** Recimo, da si izberemo točke

$$\mathbf{c}_0^0 = (0, 0), \mathbf{c}_1^0 = (0, 10), \mathbf{c}_2^0 = (10, 0), \mathbf{c}_3^0 = (10, 10), \mathbf{c}_4^0 = \mathbf{c}_0^0$$



SLIKA 3. Kontrolni poligon \mathcal{P}^5 .



SLIKA 4. Kontrolni poligona \mathcal{P}^7 .

in tvorimo kontrolni poligon \mathcal{P}^0 . Na sliki 1 je narisani kontrolni poligon \mathcal{P}^0 (pentlja) ter kontrolne točke na prvem nivoju. Pri tem smo ločili točke glede na predpis, po katerem smo jih dobili. Točke, dobljene s predpisom (2.1), smo obarvali rdeče,

točke, dobljene s predpisom (2.2), modro. Izračunajmo točki

$$\mathbf{c}_0^1 = \frac{3}{4}\mathbf{c}_0^0 + \frac{1}{4}\mathbf{c}_1^0 = \frac{3}{4}(0, 0) + \frac{1}{4}(0, 10) = (0, 2.5)$$

in

$$\mathbf{c}_1^1 = \frac{1}{4}\mathbf{c}_0^0 + \frac{3}{4}\mathbf{c}_1^0 = \frac{1}{4}(0, 0) + \frac{3}{4}(0, 10) = (0, 7.5).$$

To sta prvi dve kontrolni točki kontrolnega poligona \mathcal{P}^1 . Celoten kontrolni poligon \mathcal{P}^1 pa je sestavljen iz kontrolnih točk

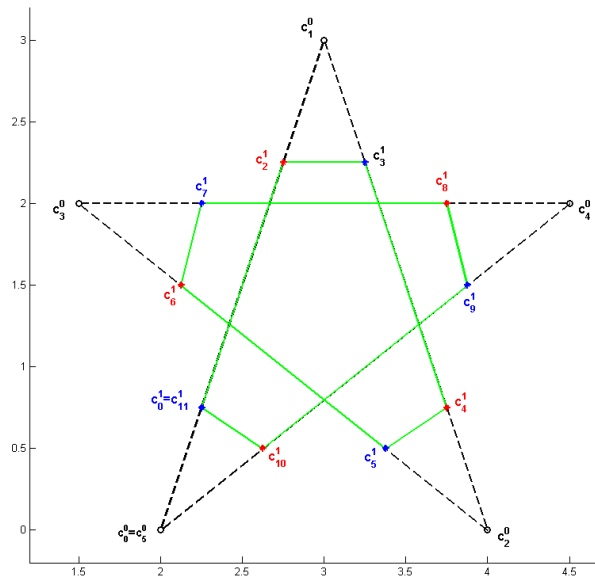
$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0^1 &= (0, 2.5), \mathbf{c}_1^1 = (0, 7.5), \mathbf{c}_2^1 = (2.5, 7.5), \mathbf{c}_3^1 = (7.5, 2.5), \\ \mathbf{c}_4^1 &= (10, 2.5), \mathbf{c}_5^1 = (10, 7.5), \mathbf{c}_6^1 = (7.5, 7.5), \mathbf{c}_7^1 = (2.5, 2.5), \mathbf{c}_8^1 = \mathbf{c}_0^1. \end{aligned}$$

Če te kontrolne točke povežemo tako, da vzamemo zaporedno eno rdečo in eno modro točko, dobimo kontrolni poligon \mathcal{P}^1 . Na sliki 2 je obarvan zeleno, slika pa vsebuje tudi začetne kontrolne točke in začetni kontrolni poligon. Začetni kontrolni poligon bomo od sedaj naprej risali na vsaki sliki in sicer s črtkano črno črto.

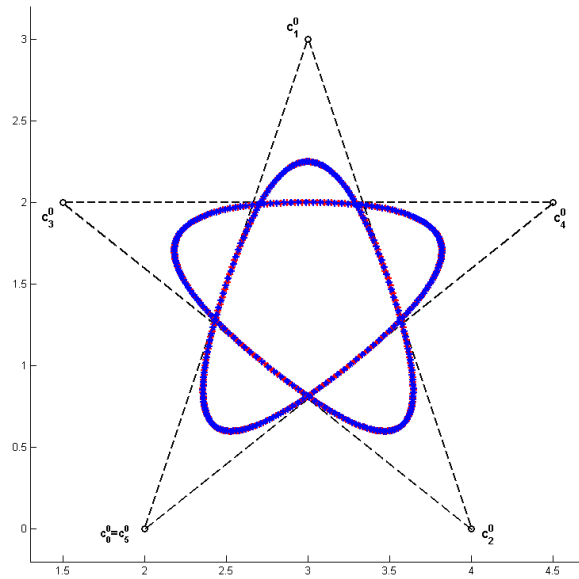
S pomočjo slik se bomo prepričali, da kontrolni poligoni konvergirajo h gladki krivulji.

Poglejmo si sliko 3. Poligon \mathcal{P}^5 na sliki izgleda kot niz točk zelene barve, dobro pa še razločimo kontrolne točke, ki so modre in rdeče barve, število le teh je 128. Vendar pa krivulja še ni videti gladka. Kaj pa \mathcal{P}^7 ? Na sliki 4 smo prikazali kontrolni poligon \mathcal{P}^7 , torej sedmi nivo Chaikinovega algoritma na začetnem kontrolnem poligonu \mathcal{P}^0 . Imamo že 512 kontrolnih točk in krivulja izgleda gladka. Formalnega dokaza za to, da kontrolni poligoni res konvergirajo proti gladki krivulji, na tem mestu še ne moremo podati, saj potrebujemo še teorijo, ki jo bomo predstavili v naslednjih poglavjih.

Poglejmo si še nekaj primerov začetnih poligonov ter krivulj, ki jih dobimo po nekaj korakih Chaikinovega algoritma.



SLIKA 5. Slika poligona \mathcal{Z}^1 .

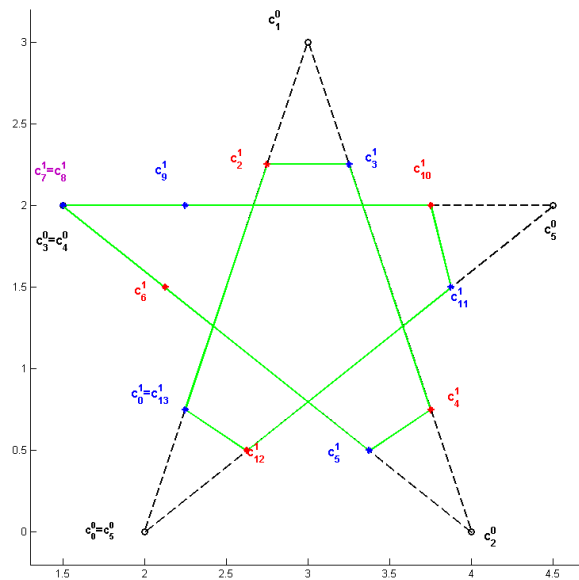


SLIKA 6. Kontrolni poligon \mathcal{Z}^7 .

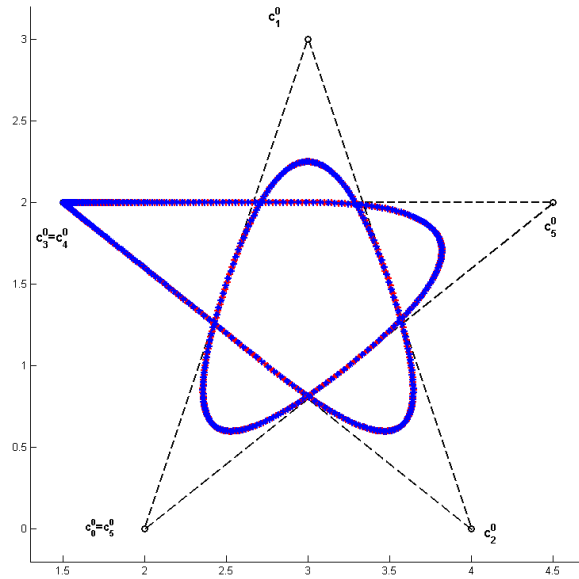
Vzemimo

$$\mathbf{c}_0^0 = (2, 0), \mathbf{c}_1^0 = (3, 3), \mathbf{c}_2^0 = (4, 0), \mathbf{c}_3^0 = (1.5, 2), \mathbf{c}_4^0 = (5, 2), \mathbf{c}_5^0 = \mathbf{c}_0^0.$$

S temi točkami tvorimo začetni kontrolni poligon \mathcal{Z}^0 (zvezda) na petih kontrolnih točkah, prikazan na sliki 5 skupaj s prvim nivojem in na sliki 6 skupaj s sedmim nivojem.



SLIKA 7. Kontrolni poligon \mathcal{S}^1 .



SLIKA 8. Kontrolni poligon \mathcal{S}^7 .

Vzemimo

$$\mathbf{c}_0^0 = (2, 0), \mathbf{c}_1^0 = (3, 3), \mathbf{c}_2^0 = (4, 0), \mathbf{c}_3^0 = (1.5, 2), \mathbf{c}_4^0 = (1.5, 2), \mathbf{c}_5^0 = (5, 2), \mathbf{c}_6^0 = \mathbf{c}_0^0.$$

Kontrolni poligon na izbranih točkah označimo s \mathcal{S}^0 (spremenjena zvezda). Dobljeni kontrolni poligon je podoben kontrolnemu poligonu \mathcal{Z}^0 , le da je kontrolna točka $\mathbf{c}_3^0 = (1.5, 2)$ podvojena. Poglejmo si sedaj obnašanje Chaikinovega algoritma v podvojeni točki. Na sliki 7 je narisana kontrolni poligon \mathcal{S}^1 . Kontrolna točka $(1.5, 2)$ se na novem nivoju ponovno pojavi dvakrat zaporedoma:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_7^1 &= \frac{3}{4}\mathbf{c}_3^0 + \frac{1}{4}\mathbf{c}_4^0 = \frac{3}{4}\mathbf{c}_3^0 + \frac{1}{4}\mathbf{c}_3^0 = \mathbf{c}_3^0, \\ \mathbf{c}_8^1 &= \frac{1}{4}\mathbf{c}_3^0 + \frac{3}{4}\mathbf{c}_4^0 = \frac{3}{4}\mathbf{c}_3^0 + \frac{1}{4}\mathbf{c}_3^0 = \mathbf{c}_3^0. \end{aligned}$$

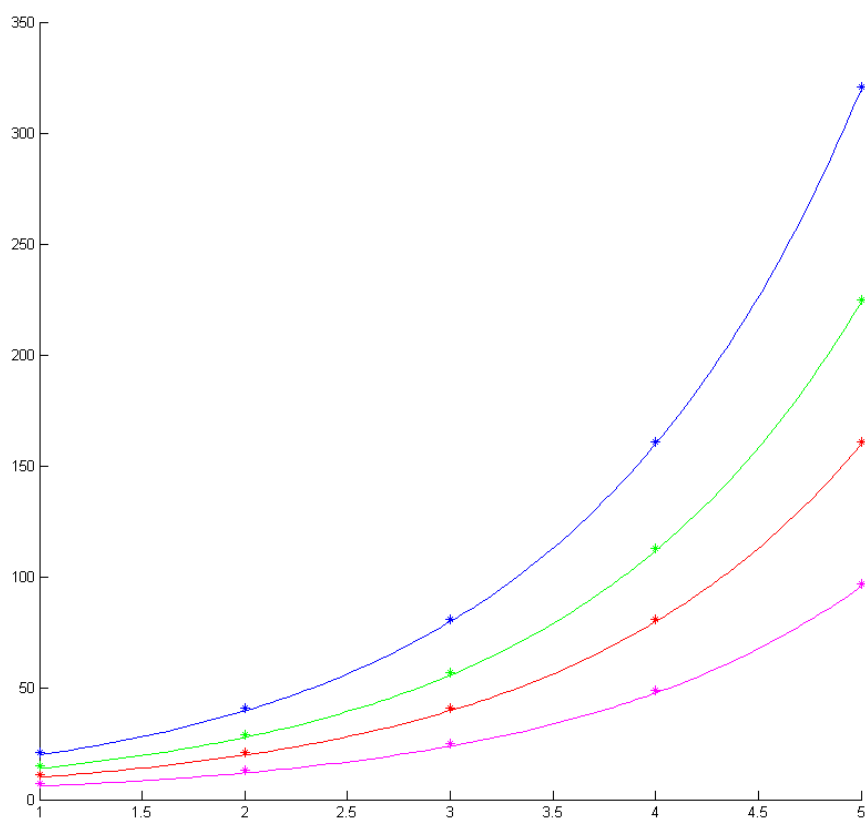
Torej je daljica med njima točka. Algoritem deluje torej tudi v primeru podvojenih točk. Vendar pa je iz slike 8 razvidno, da v primeru podvojenih točk v splošnem ne dobimo gladke krivulje, temveč le zvezdo. Enako se zgodi, če neko točko uporabimo zaporedoma n -krat, kjer je $n > 1$. Pri uporabi algoritma v praksi lahko to dobro izkoristimo, v teoriji se s tem ne bomo ukvarjali. V nadaljevanju predpostavimo, da sta dve zaporedni točki vedno različni. V primeru, ko se podvojita nesosednji točki, težave z gladkostjo ni.

Pri Chaikinovem algoritmu število kontrolnih točk hitro narašča. Če začnemo z n kontrolnimi točkami imamo na k -tem nivoju že kar $2^k n$ kontrolnih točk. Torej narašča število točk eksponentno. Za nekaj n si lahko v tabeli 1 in na sliki 9 pogledamo naraščanje števila kontrolnih točk po nivojih. Na sliki 9 imamo narisane grafe funkcij $2^k n$, za $n = 3$ (roza), $n = 5$ (rdeča), $n = 7$ (zelena), $n = 10$ (modra) in na njih označeno število kontrolnih točk od nivoja 1 do nivoja 5.

Sedaj, ko algoritem dobro razumemo, se posvetimo matematičnemu ozadju. Dokazali bomo, da Chaikinov algoritem v limiti generira gladko parametrično krivuljo.

Št. kontrolnih točk	1. nivo	2. nivo	3. nivo	5. nivo	10. nivo	20. nivo
3	6	12	24	96	3.072	3.145.728
5	10	20	40	160	5.120	5.242.880
7	14	28	56	224	7.168	7.340.032
10	20	40	80	320	10.240	10.485.760

TABELA 1. Naraščanje števila kontrolnih točk po nivojih, kjer je začetno število kontrolnih točk $n = 3, 5, 7, 10$.



SLIKA 9. Graf naraščanja števila kontrolnih točk za začetno število kontrolnih točk $n=3,5,7,10$.

Znamo jo tudi eksplicitno zapisati, gre namreč za znani kvadratični kardinalni zlepek reda gladkosti 1. Oglejmo si najprej bazne ali tako imenovane kardinalne B-zlepke.

3. KARDINALNI B-ZLEPKI

Za obravnavo kardinalnih B-zlepkov (baznih zlepcev) se odločimo, ko opazimo, da Chaikinov algoritem konvergira k enaki krivulji, kot jo generira kardinalni zlepek stopnje 2. Kardinalne B-zlepke definiramo induktivno.

Definicija 3.1. *B-zlepek* za $n = 0$ je karakteristična funkcija $\chi_{[0,1)}$, torej

$$B_0(t) = \chi_{[0,1)}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & \text{sicer,} \end{cases}$$

za $n \geq 1$ pa

$$B_n(t) = \int_0^1 B_{n-1}(t-s) ds.$$

3.1. Lastnosti kardinalnih B-zlepkov. B-zlepke si podrobno lahko ogledamo v [7], mi pa si pogledajmo nekaj najpomembnejših lastnosti kardinalnih B-zlepkov. Z uporabo osnovnega izreka analize lahko izpeljemo odvod kardinalnega B-zlepka stopnje $n \geq 2$

$$(3.1) \quad B'_n(t) = B_{n-1}(t) - B_{n-1}(t-1), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Vzemimo formulo

$$B_n(t) = \int_0^1 B_{n-1}(t-s) ds$$

in spremenimo integracijsko spremenljivko. Zamenjamo $(t-s) = x$, $-ds = dx$, tako dobimo novi meji t pri 0 in $t-1$ pri 1. Torej je

$$\begin{aligned} B_n(t) &= - \int_t^{t-1} B_{n-1}(x) dx \\ &= \int_{t-1}^t B_{n-1}(x) dx. \end{aligned}$$

To enačbo odvajamo ter uporabimo osnovni izrek analize in dobimo

$$B'_n(t) = B_{n-1}(t) - B_{n-1}(t-1).$$

□

Interval $[0, n+1]$ je *nosilec* kardinalnega B-zlepka stopnje n . Torej je interval $[0, n+1]$ zaprtje množice, na kateri je kardinalni B-zlepek stopnje n različen od nič, pravzaprav je pozitiven, saj so kardinalni B-zlepki nenegativne funkcije. Slednje se enostavno prepričamo, saj je karakteristična funkcija $\chi_{[0,1)}$ nenegativna funkcija in je integral nenegativne funkcije nenegativna funkcija.

Kardinalni zlepek B_n za $n \geq 1$ lahko definiramo tudi s konvolucijo karakteristične funkcije in B-zlepka nižje stopnje, natančneje

$$B_n(t) = \chi_{[0,1)}(t-s) * B_{n-1}(s) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1)}(t-s) B_{n-1}(s) ds.$$

To definicijo B-zlepkov smo navedli, ker nam poenostavi dokaz naslednjega izreka.

Izrek 3.2. *Za B-zlepek stopnje n velja*

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_n(t-i) = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo na stopnjo zlepka n . Za $n = 0$ je $B_0(\cdot - i)$ karakteristična funkcija $\chi_{[0,1)}(\cdot - i)$, ki je različna od 0 (enaka 1) za $i = \lfloor t \rfloor$, torej res velja

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \chi_{[0,1)}(t-i) = 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Predpostavimo, da izrek velja za $n \in \mathbb{N}_0$ in dokažimo, da velja za $n + 1$. Velja

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(t-s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(t-s) \cdot 1 ds. \end{aligned}$$

Uporabimo indukcijsko predpostavko in dobimo

$$1 = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(t-s) \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_n(s-i) ds.$$

Zamenjamo vrstni red integracije in seštevanja. To smemo, saj je nosilec funkcije končen in členov vsote različnih od nič le končno mnogo, torej je vsota končna. Dobimo

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(t-s) B_n(s-i) ds \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(t-(s-i)-i) B_n(s-i) ds. \end{aligned}$$

Uporabimo definicijo s konvolucijo in dobimo

$$1 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_{n+1}(t-i).$$

S tem smo zgornji izrek dokazali. □

3.2. Prostor kardinalnih zlepkov. Iz formule za odvod (3.1) sledi, da je B-zlepek stopnje n ($n-1$)-krat zvezno odvedljiva funkcija in polinom stopnje n na vsakem intervalu $[i, i+1)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Izkaže se, da so B-zlepki baza prostora kardinalnih zlepkov.

Definicija 3.3. Naj bo $n \in \mathbb{N}_0$. Potem s S_n označimo linearen prostor vseh tistih ravninskih krivulj $\mathbf{f} := (f_x, f_y)$, ki so ($n-1$)-krat zvezno odvedljive na \mathbb{R} in je njihova skrčitev na vsak interval $[i, i+1)$ za $i \in \mathbb{Z}$ polinom stopnje največ n . Prostor S_n imenujemo *prostor kardinalnih zlepkov ravninskih krivulj* in ga formalno opišemo kot

$$S_n = \{\mathbf{f} | f_x, f_y|_{[i, i+1)} \in \mathbb{P}_n \text{ in } \mathbf{f} \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), i \in \mathbb{Z}\}.$$

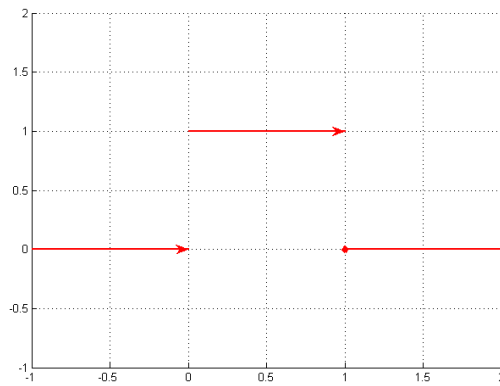
Pri tem je S_0 razred stopničastih funkcij zveznih z desne, s stičnimi točkami v celih številih.

Prostor S_n karakterizira naslednji izrek.

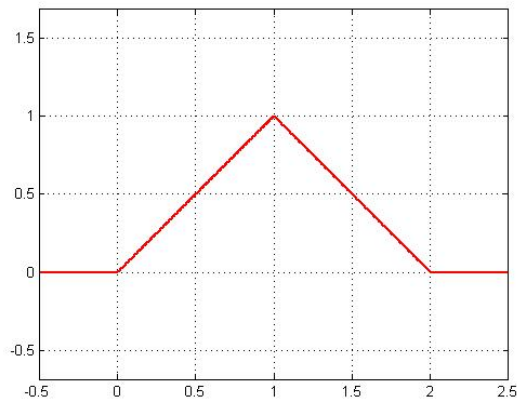
Izrek 3.4. Funkcija \mathbf{f} je iz S_n natanko tedaj, ko obstajajo enolično določene konstante $\mathbf{c}_i, i \in \mathbb{Z}$, za katere velja

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_i B_n(t-i).$$

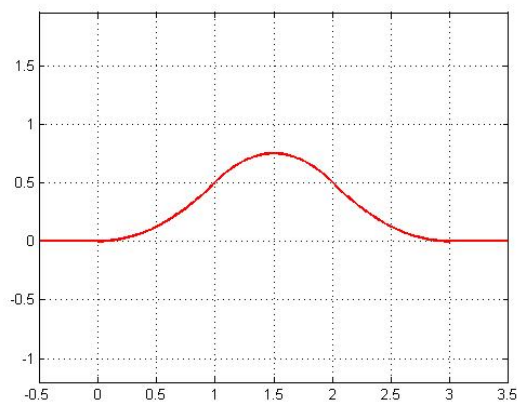
Ta vsota je končna, saj je neničelnih konstant \mathbf{c}_i le ($n+1$). Dokaz bomo izpustili in si ga lahko bralec ogleda v knjigi [7].



SLIKA 10. Kardinalni B-zlepek stopnje 0.



SLIKA 11. Kardinalni B-zlepek stopnje 1.



SLIKA 12. Kardinalni B-zlepek stopnje 2

3.3. **Kardinalni B-zlepki stopnje 0, 1 in 2.** Sedaj si bomo bolj podrobno pogledali kardinalne B-zlepke do stopnje 2. B_0 smo že spoznali, vidimo ga na sliki

10:

$$B_0(t) = \chi_{[0,1)}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

Izračunajmo sedaj B_1 , ki je prikazan na sliki 11. Dobimo

$$B_1(t) = \int_0^1 B_0(t-y)dy = \int_{t-1}^t B_0(s)ds = \begin{cases} t; & \text{za } t \in [0, 1], \\ 2-t; & \text{za } t \in [1, 2], \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases}$$

V izračunu smo uporabili substitucijo $t-y=s$ in ustrezno priredili meje integracije. To substitucijo uporabimo tudi pri izračunu kardinalnega B-zlepka stopnje 2, oziroma B_2 , ki ga vidimo na sliki 12. Z nekaj računanja dobimo

$$\begin{aligned} B_2(t) &= \int_{t-1}^t B_1(s)ds \\ &= \begin{cases} \int_0^t sds; & \text{za } t \in [0, 1], \\ \int_{t-1}^1 sds + \int_1^t (2-s)ds; & \text{za } t \in [1, 2], \\ \int_{t-1}^2 (2-s)ds; & \text{za } t \in [2, 3], \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} t^2/2; & \text{za } t \in [0, 1], \\ -t^2 + 3t - 3/2; & \text{za } t \in [1, 2], \\ (t-3)^2/2; & \text{za } t \in [2, 3], \\ 0; & \text{sicer.} \end{cases} \end{aligned}$$

Kot prikazuje slika 12, se lahko enostavno prepričamo, da je B_2 funkcija reda gladkosti 1.

Funkcija B_2 je torej zvezno odvedljiva. Vemo, da je B_2 polinom druge stopnje na intervalih $[0, 1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$ ter konstantno enaka nič na intervalih $(-\infty, 1)$, $[3, \infty)$ torej je tam neskončnokrat zvezno odvedljiva funkcija. Da pa bo B_2 zvezno odvedljiva povsod, pa zahtevamo, da se v stičnih točkah $\{0, 1, 2, 3\}$ ujema vrednosti ustreznih predpisov ter njihovi prvi odvodi. Za splošen B_n pa se morajo, v stičnih točkah, ustrezni predpisi ujemati v vrednostih ter v odvodih do vključno $(n-1)$ stopnje.

3.4. Kardinalni zlepki in subdivizija. Kardinalni zlepki in Chaikinov algoritem so del linearnih subdivizijskih shem.

Definicija 3.5. *Subdivizija* je postopek generiranja novih kontrolnih točk iz nabora prejšnjih. *Subdivizijska shema* je pravilo, po katerem na vsakem koraku izračunamo nov nabor gostejših kontrolnih točk. *Linearna stacionarna subdivizijska shema* je subdivizijska shema, ki izračuna nove kontrolne točke kot linearno kombinacijo kontrolnih točk prejšnjega nivoja (linearnost), predpis pa je za vsak nivo enak (stacionarnost).

Povejmo še, da subdivizije delimo na *interpolacijske*, to so tiste, ki na novem nivoju ohranjajo kontrolne točke prejšnjega nivoja, in *aproksimacijske*.

Glede na prejšnjo definicijo je Chaikinov algoritem očitno poseben primer linearne stacionarne subdivizijske sheme. Uvrščamo ga med aproksimacijske subdivizije, saj ne ohranja kontrolnih točk prejšnjega nivoja.

Teorija linearnih stacionarnih subdivizijskih shem je dobro razvita [2]. Znani so tudi postopki za dokazovanje konvergence takih shem.

V tem delu diplomskega seminarja bomo konvergenco Chaikinovega algoritma dokazali nekoliko drugače. Sledili bomo knjigi [7]. Osnovna ideja temelji na dejstvu, da lahko neko funkcijo $\mathbf{f} \in S_n$ zapišemo tudi kot element prostora S_n^1 , ki ga definiramo kot prostor zlepkov stopnje n s stičnimi točkami v $\mathbb{Z}/2 = \{i/2; i \in \mathbb{Z}\}$, torej

$$S_n^1 = \{\mathbf{g} : \mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(2t), t \in \mathbb{R}, \mathbf{f} \in S_n\}.$$

Radi bi funkcijo $\mathbf{f} \in S_n$

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_i B_n(t - i), \quad t \in \mathbb{R}$$

zapisali kot funkcijo $\mathbf{g} \in S_n^1$

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} \mathbf{d}_k B_n(2(t - k)), \quad \text{za } t \in \mathbb{R}.$$

To je gotovo mogoče, saj S_n^1 vsebuje prostor S_n . Iz izreka 3.4 vemo, da obstajajo konstante \mathbf{c}_i , $i \in \mathbb{Z}$. Z njimi bi radi izrazili \mathbf{d}_k , $k \in \mathbb{Z}/2$, da velja enakost

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_i B_n(t - i) = \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} \mathbf{d}_k B_n(2(t - k)), \quad \text{za } t \in \mathbb{R}.$$

Izpeljimo rekurzivno formulo za konstante \mathbf{d}_k , $k \in \mathbb{Z}/2$, v primeru kardinalnega zlepka stopnje n . Najprej priredimo nekaj oznak:

- $\mathbf{f}_n(t) := \mathbf{f}(t)$, z n poudarimo zapis funkcije z kardinalnim B-zlepka stopnje n ,
- preimenujmo \mathbf{d}_k v \mathbf{d}_k^n , da poudarimo odvisnost od stopnje kardinalnega zlepka n .

Pri izpeljavi rekurzije se lahko omejimo le na eno komponento krivulje \mathbf{f}_n , ki jo bomo pisali kot f_n . Iz definicije kardinalnih B-zlepkov sledi

$$f_{n+1}(t) = \int_0^1 f_n(t - s) ds,$$

torej smo dobili povezavo med funkcijo iz prostora S_n^1 in funkcijo iz prostora S_{n+1}^1 . Od tod pa dobimo zvezo med koeficienti d_k^n in d_k^{n+1} (podobno kot prej predstavlja d_k^n ustrezno izbrano komponento \mathbf{d}_k^n). Razdelimo

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) &= \int_0^1 f_n(t - s) ds \\ (3.2) \quad &= \int_0^{1/2} f_n(t - s) ds + \int_{1/2}^1 f_n(t - s) ds. \end{aligned}$$

Integracijo členov vsote želimo prevesti nazaj na interval $[0, 1]$, da bomo lahko uporabili f_n . Najprej si pogledjmo drugi člen vsote. Za premik intervala uporabimo linearno transformacijo $u = 2(s - \frac{1}{2})$, $ds = \frac{1}{2}du$, in dobimo

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^1 f_n(t - s) ds &= \int_0^1 f_n\left(t - \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 f_n\left(t - \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\right) du. \end{aligned}$$

Za prvi člen na enak način prestavimo interval integracije iz $[0, \frac{1}{2}]$ na $[0, 1]$ z uvedbo spremenljivke $u = 2s$, $ds = \frac{1}{2}du$,

$$\int_{1/2}^1 f_n(t-s) ds = \frac{1}{2} \int_0^1 f_n\left(t - \frac{u}{2}\right) du.$$

Enakost (3.2) se tako prepíše v

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^1 f_n\left(t - \frac{s}{2}\right) ds + \frac{1}{2} \int_0^1 f_n\left(t - \frac{s}{2} - \frac{1}{2}\right) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} d_k^n B_n(2(t-k) - s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} d_k^n B_n(2(t-k) - s - 1) ds. \end{aligned}$$

Zamenjamo vrstni red integracije in seštevanja in dobimo

$$\begin{aligned} f_{n+1}(t) &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} d_k^n \int_0^1 B_n(2(t-k) - s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} d_k^n \int_0^1 B_n(2(t-k) - s - 1) ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} d_k^n B_{n+1}(2(t-k)) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} d_k^n B_{n+1}\left(2\left(t - k - \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} d_k^n B_{n+1}(2(t-k)) + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} d_{k-1/2}^n B_{n+1}(2(t-k)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}/2} \frac{1}{2} (d_k^n + d_{k-1/2}^n) B_{n+1}(2(t-k)). \end{aligned}$$

Prišli smo do rekurzivne formule

$$\mathbf{d}_k^{n+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{d}_k^n + \mathbf{d}_{k-1/2}^n), \quad k \in \mathbb{Z}/2.$$

Po tej formuli dobimo subdivizijsko shemo za kardinalne B-zlepke. Subdivizijska shema za kardinalni B-zlepek stopnje 0 se glasi

$$\mathbf{d}_l^0 = \mathbf{d}_{l+1/2}^0 = \mathbf{c}_l, \quad l \in \mathbb{Z},$$

to pa je razvidno že iz zapisa za $\mathbf{f}_0(t) = \mathbf{d}_k^0$, za $k \leq t < k + \frac{1}{2}$, ki je element prostora S_0 . Za B-zlepek stopnje 1 dobimo predpis

$$\mathbf{d}_k^1 = \begin{cases} \mathbf{c}_l; & k = l + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(\mathbf{c}_l + \mathbf{c}_{l+1}); & k = l + 1, \end{cases}$$

za B-zlepek stopnje 2 pa

$$\mathbf{d}_k^2 = \begin{cases} \frac{3}{4}\mathbf{c}_l + \frac{1}{4}\mathbf{c}_{l-1}, & k = l + \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{4}\mathbf{c}_{l+1} + \frac{3}{4}\mathbf{c}_l, & k = l + 1. \end{cases}$$

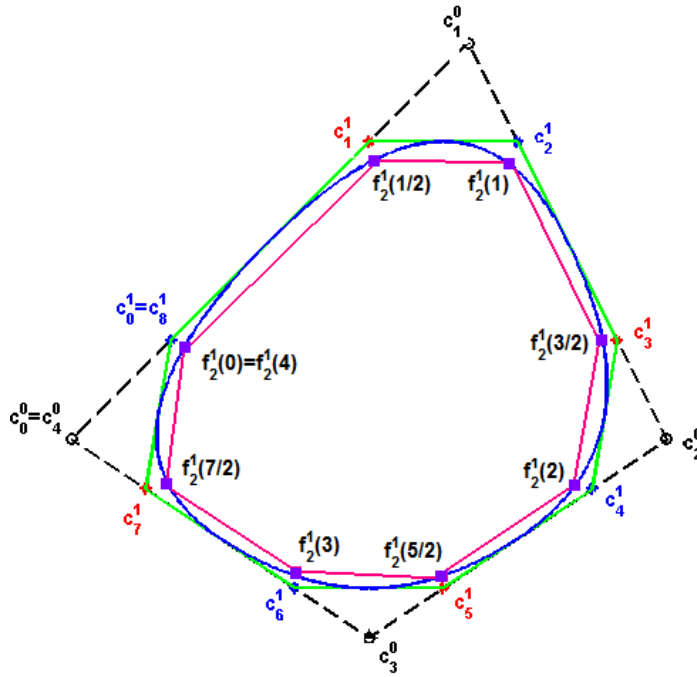
Če \mathbf{c}_l obravnavamo kot kontrolne točke, smo v primeru kardinalnega B-zlepka stopnje 2 dobili ravno Chaikinov algoritem. S tem smo uspeli pokazati, da sta si kardinalni B-zlepek stopnje 2 in Chaikinov algoritem sorodna.

4. KONVERGENCA

V tem poglavju bomo pokazali, da kontrolni poligoni Chaikinovega algoritma konvergirajo proti gladki krivulji, natančneje, proti kardinalnemu zlepku stopnje 2 s kontrolnimi točkami začetnega nivoja subdivizije. Privzemimo, da so na začetnem nivoju dane kontrolne točke $\mathbf{c}_j, j = 0, 1, \dots, N$. Označimo jih s $\mathbf{c}_j^0 := \mathbf{c}_j$, pri čemer, kot smo že vajeni, zgornji indeks pomeni nivo Chaikinovega algoritma. Dokazati želimo, da kontrolni poligoni $\mathcal{P}^r = \mathbf{c}_0^r, \mathbf{c}_1^r, \dots, \mathbf{c}_{2^r N}^r, r \rightarrow \infty$, konvergirajo proti funkciji $\mathbf{f}_2 : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{f}_2(t) = \sum_{i=0}^N \mathbf{c}_i^0 B_2(t-i).$$

Da bomo lahko primerjali posamezni kontrolni poligon z \mathbf{f}_2 , ga najprej parametrizirajmo.



SLIKA 13. Kontrolni poligon (črtkano črno ter zeleno), krivulja \mathbf{f}_2 (modro) in parametrizacija \mathbf{q}^1 (roza).

Definicija 4.1. Kontrolni poligon \mathcal{P}^r Chaikinovega algoritma na nivoju r parametriziramo kot $\mathbf{p}^r : [0, N] \rightarrow \mathbb{R}^2$, kjer je

$$\mathbf{p}^r(t) = \mathbf{c}_i^r(i+1-2^r t) + \mathbf{c}_{i+1}^r(2^r t - i), \quad t \in \left[\frac{i}{2^r}, \frac{i+1}{2^r} \right],$$

za vsak $i = 0, 1, \dots, 2^r N - 1$.

Definirajmo prostor S_2^r za $r \in \mathbb{Z}$:

$$S_2^r = \{\mathbf{g} : \mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(2^r t), t \in \mathbb{R}, \mathbf{f} \in S_2\}.$$

Med elementi prostora S_2 in prostorov S_2^r velja zveza

$$\mathbf{f}_2(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_i^0 B_2(t - i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{c}_i^r B_2(2^r t - i), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dokaz za splošen B-zlepek si lahko ogledamo v knjigi [7].

Iz [7] brez dokaza povzemimo naslednji izrek:

Izrek 4.2. Za vsak $i \in \mathbb{Z}$ in $r \in \mathbb{Z}_+$ velja neenakost

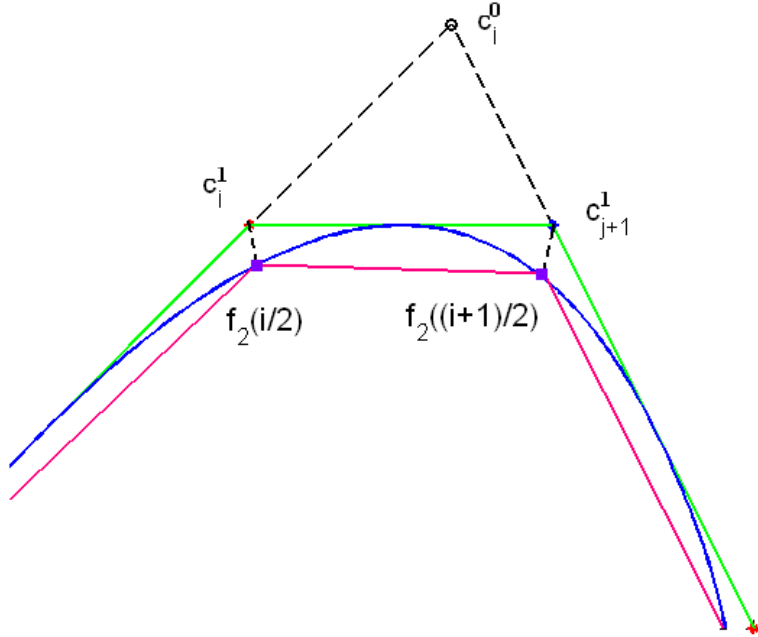
$$\left\| \mathbf{f}_2\left(\frac{i}{2^r}\right) - \mathbf{c}_{i-1}^r \right\| \leq \frac{1}{2^r} \|\Delta \mathbf{c}\|_\infty,$$

kjer je $\|\cdot\|_\infty$ l^∞ norma na zaporedjih in $(\Delta \mathbf{c})_i := \mathbf{c}_{i+1} - \mathbf{c}_i, i \in \mathbb{Z}$.

Zapišimo sedaj glavni izrek diplomskega seminarja.

Izrek 4.3. Kontrolni poligoni Chaikinovega algoritma konvergirajo k \mathbf{f}_2 , natančneje,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}_2 - \mathbf{p}^r\|_{\infty, [0, N]} = 0.$$



SLIKA 14. Približano dogajanje iz slike 13.

Dokaz. Definirajmo najprej kontrolni poligon \mathbf{q}^r , napet na točkah $\mathbf{f}_2\left(\frac{i}{2^r}\right)$, $i = 0, 1, \dots, 2^r N$,

$$\mathbf{q}^r(t) = \mathbf{f}_2\left(\frac{i}{2^r}\right)(i + 1 - 2^r t) + \mathbf{f}_2\left(\frac{i+1}{2^r}\right)(2^r t - i), \quad t \in \left[\frac{i}{2^r}, \frac{i+1}{2^r}\right],$$

za vsak $i = 0, 1, \dots, 2^r N - 1$.

Ideja dokaza je naslednja (glej slike 13 in 14). Primerjati želimo \mathbf{p}^r in \mathbf{f}_2 . To naredimo posredno, s primerjanjem \mathbf{p}^r s \mathbf{q}^r in nato \mathbf{q}^r z \mathbf{f}_2 .

Ocenimo

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{p}^r\|_{\infty, [0, N]} &= \max_{t \in [0, N]} \|\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{p}^r(t)\|_{\infty} \\
&= \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{p}^r(t)\|_{\infty} \right) \\
&= \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{q}^r(t) + \mathbf{q}^r(t) - \mathbf{p}^r(t)\|_{\infty} \right) \\
&\leq \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{q}^r(t)\|_{\infty} \right) \\
&\quad + \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{q}^r(t) - \mathbf{p}^r(t)\|_{\infty} \right).
\end{aligned}$$

Ocenimo vsak člen vsote posebej. Uporabimo izrek o napaki linearne interpolacije, ki sledi iz izreka o napaki interpolacijskega polinoma, ki ga najdemo v knjigi [5]. Torej je

$$\begin{aligned}
&\max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{q}^r(t)\|_{\infty} \right) \\
&\leq \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\frac{\|\mathbf{f}_2''(\xi_i)\|_{\infty}}{2} \max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \left| t - \frac{i}{2^r} \right| \left| t - \frac{i+1}{2^r} \right| \right) \\
&\leq \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\frac{\|\mathbf{f}_2''(\xi_i)\|_{\infty}}{2} \max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \left| \left(t - \frac{i}{2^r} \right) \left(t - \frac{i+1}{2^r} \right) \right| \right).
\end{aligned}$$

Ekstremi funkcije $g(t) := (t - \frac{i}{2^r})(t - \frac{i+1}{2^r})$ so doseženi na robu intervala ter v razpolovišču. Vemo, da maksimum ni dosežen na robu, torej imamo maksimum v $t_i = (\frac{2i+1}{2^{r+1}})$. To velja za vsak $i = 0, 1, \dots, 2^r N - 1$. Torej je ocena napake med funkcijama \mathbf{f}_2 in \mathbf{q}^r največja v točkah t_i , zato se osredotočimo na dogajanje v teh točkah. Dobimo

$$\begin{aligned}
&\max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{q}^r(t)\|_{\infty} \right) \\
&\leq \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\frac{\|\mathbf{f}_2''(\xi_i)\|_{\infty}}{2} \left| \left(\frac{2i+1}{2^{r+1}} - \frac{i}{2^r} \right) \left(\frac{2i+1}{2^{r+1}} - \frac{i+1}{2^r} \right) \right| \right) \\
&\leq \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\frac{\|\mathbf{f}_2''(\xi_i)\|_{\infty}}{2} \left| \frac{1}{2^{r+1}} \frac{1}{2^{r+1}} \right| \right).
\end{aligned}$$

Ker je \mathbf{f}_2 na intervalu $[\frac{i}{2^r}, \frac{i+1}{2^r}]$ parabola, je norma $\|\mathbf{f}_2''(\xi_i)\|$ omejena enakomerno po i s konstanto $M \geq 0$. Torej velja

$$\max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{q}^r(t)\|_{\infty} \right) \leq \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\frac{M}{2} \left| \frac{1}{2^{2r+2}} \right| \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Oglejmo si še drugi člen. Uporabili bomo oceno iz izreka 4.2. Vemo, da je razdalja med dvema daljicama največja v krajiščih. Tako \mathbf{q}^r kot \mathbf{p}^r sta na intervalu

$\left[\frac{i}{2^r}, \frac{i+1}{2^r}\right], i = 0, 1, \dots, 2^r N - 1$, daljici. Zato razdajo med parametrizacijama na odsekih gledamo samo v krajiščih (stičnih točkah). Torej

$$(4.1) \quad \begin{aligned} & \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{q}^r(t) - \mathbf{p}^r(t)\|_\infty \right) \\ & \leq \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left\{ \left\| \mathbf{c}_i^r - \mathbf{f}_2 \left(\frac{i}{2^r} \right) \right\|_\infty, \left\| \mathbf{c}_{i+1}^r - \mathbf{f}_2 \left(\frac{i+1}{2^r} \right) \right\|_\infty \right\}. \end{aligned}$$

Da bomo lahko uporabili izrek 4.2, moramo $\mathbf{f}_2 \left(\frac{i}{2^r} \right)$ izraziti s pomočjo $\mathbf{f}_2 \left(\frac{i+1}{2^r} \right)$, $\mathbf{f}_2 \left(\frac{i+1}{2^r} \right)$ pa s pomočjo $\mathbf{f}_2 \left(\frac{i+2}{2^r} \right)$. Po Taylorjevem izreku je

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2 \left(\frac{i}{2^r} \right) &= \mathbf{f}_2 \left(\frac{i+1-1}{2^r} \right) = \mathbf{f}_2 \left(\frac{i+1}{2^r} \right) - \frac{1}{2^r} \mathbf{f}'_2(\xi_1) - \frac{1}{2^{2r+1}} \mathbf{f}''(\xi) - \dots \\ \mathbf{f}_2 \left(\frac{i+1}{2^r} \right) &= \mathbf{f}_2 \left(\frac{i+2-1}{2^r} \right) = \mathbf{f}_2 \left(\frac{i+2}{2^r} \right) - \frac{1}{2^r} \mathbf{f}'_2(\xi_2) - \frac{1}{2^{2r+1}} \mathbf{f}''(\xi) - \dots \end{aligned}$$

Za oceno vzamemo prva dva člena Taylorjeve vrste, saj je napaka pri drugem ter višjih odvodih že zelo majhna.

Vrnimo se sedaj na (4.1) in upoštevajmo ta razvoj, uporabimo izrek 4.2 in upoštevajmo $\|\mathbf{f}'_2(\xi_i)\|_\infty \leq M, i = 1, 2$. Dobimo

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{q}^r(t) - \mathbf{p}^r(t)\|_\infty \right) \\ & \leq \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left\{ \left\| \mathbf{c}_i^r - \mathbf{f}_2 \left(\frac{i+1}{2^r} \right) + \frac{1}{2^r} \mathbf{f}'(\xi_1) \right\|_\infty, \right. \\ & \quad \left. \left\| \mathbf{c}_{i+1}^r - \mathbf{f}_2 \left(\frac{i+2}{2^r} \right) + \frac{1}{2^r} \mathbf{f}'(\xi_2) \right\|_\infty \right\} \\ & \leq \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left\{ \frac{1}{2^r} \|\Delta \mathbf{c}^0\|_\infty + \frac{1}{2^r} M, \frac{1}{2^r} \|\Delta \mathbf{c}^0\|_\infty + \frac{1}{2^r} M \right\} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Torej velja

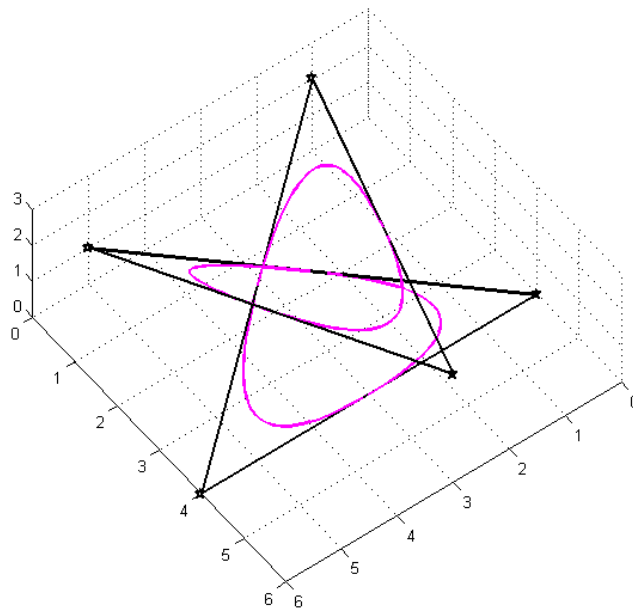
$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}_2 - \mathbf{p}^r\|_{\infty, [0, N]} &= \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{q}^r(t) + \mathbf{q}^r(t) - \mathbf{p}^r(t)\|_\infty \right) \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{f}_2(t) - \mathbf{q}^r(t)\|_\infty \right) \\ &\quad + \max_{0 \leq i \leq 2^r N - 1} \left(\max_{\frac{i}{2^r} \leq t \leq \frac{i+1}{2^r}} \|\mathbf{q}^r(t) - \mathbf{p}^r(t)\|_\infty \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

oziroma

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|\mathbf{f}_2 - \mathbf{p}^r\|_{\infty, [0, N]} = 0,$$

kar smo želeli dokazati. \square

Skozi diplomski seminar smo poudarjali, da obravnavamo Chaikinov algoritem za generiranje ravninskih krivulj. Pojavi pa se nam vprašanje, ali algoritem deluje tudi v poljubno dimenzionalnih prostorih. Ker smo dokazali konvergenco za vsako komponento kontrolnih točk posebej, sklepamo, da je vektor lahko iz prostora s poljubno dimenzijo. Algoritem lepo deluje tudi v prostoru, kar se lahko prepričamo tudi s sliko 15.



SLIKA 15. Primer uporabe Chaikinovega algoritma v prostoru.

5. DODATEK

Pri delu diplomskega seminarja sem za konstrukcijo slik naredila in uporabljala sledeča programa:

- *chaikin_risi.m*;
- *risi.m*.

Program *chaikin_risi.m* je namenjen risanju kontrolnega poligona na nivoju k . Zaradi preglednosti se izriše poleg poligona na nivoju k tudi začetni kontrolni poligon \mathcal{R} . Program deluje za risanje krivulj v ravnini (slike iz poglavja 2) kot tudi v prostoru (slika 15). V katerem prostoru bo risal, se odloči glede na začetni kontrolni poligon, če imajo točke po 2 komponenti, potem riše v ravnini, sicer v prostoru.

```
function M=chaikin_risi(R,k,t)
    % M=CHAIKIN(P) je program, ki nariše
    % k-ti nivo Chaikinovega algoritma
    % P je vektor vstopnih kontrolnih točk
    % M je vektor kontrolnih točk na k-tem nivoju
    % k je število korakov
    % t=1, potem v 2D primeru vidimo točke obarvane
    % glede na predpis(sicer krivulja)
    P=R';%P=(stolec x, stolpec y)
    while k>0
        P=[P;P(1,:)];
        [n,d]=size(P);
        M=zeros(2*n-1,d);
        M(2:2:end-1,:)=1/4*P(1:end-1,:)+3/4*P(2:end,:);%sodi
        M(1:2:end-2,:)=3/4*P(1:end-1,:)+1/4*P(2:end,:);%lihi
```

```

    P=M(1:end-1,:);
    M(end,:)=M(1,:);
    k=k-1;
end
risi(P,R,d,t)

```

Program *risi.m* je namenjen risanju poligonov \mathcal{P} in \mathcal{R} , kjer je \mathcal{R} začetni kontrolni poligon, \mathcal{P} pa končni. Omogoča nam risanje kontrolnih poligonov v ravnini in prostoru. V katerem prostoru naj riše, nam pove d . Imamo pa tudi sledečo možnost. Končni kontrolni poligon v primeru ravnine izrišemo tako, da so kontrolne točke obarvane glede na predpis, kot je to na vseh slikah v poglavju 2.

```

function risi(P,R,d,t)
    %RISI(P,R,d,t) je program, ki izriše
    %Chaikinov algoritem na R in P
    %R začetni kontrolni poligon,
    %P zadnji kontrolni poligon
    %d dimenzija risanja (ali 2D, če d=2 ali 3D, če d=3)
    %t če je t=0 v 2D rišemo kontrolne
    %točke obarvane po predpisu.
    hold on
    if d==2
        M=[P;P(1,:)];
        R=[R,R(:,1)];
        axis equal
        plot(R(1,:),R(2:,:), '--ko', 'LineWidth', 2);
        plot(R(1,1),R(2,1), 'y*', 'LineWidth', 2);
        if t==1
            RS=zeros(length(M)/2,2);
            RL=zeros(length(M)/2,2);
            for i=1:length(M)/2
                RS(i,:)=M(2*i,:);
                RL(i,:)=M(2*i-1,:);
            end
            plot(RS(:,1),RS(:,2), 'r*', 'LineWidth', 2);
            plot(RL(:,1),RL(:,2), 'b*', 'LineWidth', 2);
            plot(M(:,1),M(:,2), 'm', 'LineWidth', 2);
        else
            plot(R(1,:),R(2:,:), 'kp--', 'LineWidth', 2);
            plot(M(:,1),M(:,2), 'g', 'LineWidth', 2);
        end
    else
        M=[P;P(1,:)];
        R=[R,R(:,1)];
        plot3(R(1,:),R(2,:),R(3,:), 'kp--', 'LineWidth', 2);
        plot3(M(:,1),M(:,2),M(:,3), 'm', 'LineWidth', 2);
        grid on
        axis equal
    end
    hold off

```

LITERATURA

- [1] M. Ambrožič, *Implementacija nekaterih subdivizijskih shem*, diplomsko delo, Fakulteta za računalništvo in informatiko, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2011.
- [2] N. Dyn in D. Levin, *Subdivision schemes in geometric modelling*, Acta Numer. **11** (2002) 73–144.
- [3] K. Joy, *Chaikin's algorithm for curves*, [ogled 25. 8. 2013], dostopno na <http://www.idav.ucdavis.edu/education/CAGDNotes/Chaikins-Algorithm/Chaikins-Algorithm.html>.
- [4] B. Kovač, *Nelinearne subdivizijske sheme*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2011.
- [5] J. Kozak, *Numerična analiza*, Matematika – fizika **44**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.
- [6] M. Krajnc, *Subdivizijske sheme*, diplomsko delo, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2002.
- [7] C. A. Micchelli, *Mathematical aspect of geometric modeling*, CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics **65**, SIAM, Philadelphia, 1995.