UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Primož Pušnik

Konci grup

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2012

Kazalo

Konci grup

Povzetek

V diplomskem seminarju se bomo podrobneje lotili geometrijske teorije grup. Dokazali bomo, da je $\mathbb{R}^n$ kvazi-izometričen $\mathbb{R}^m$ natanko tedaj, ko je $m = n$. Grupi bomo priredili Cayleyjev graf, iz katerega se bo dala razbrati prezentacija grupe. Dokazali bomo najpomembnejšo lemo geometrijske teorije grup, to je Švarc-Milnorjeva lema. Posledica Švarc-Milnorjeve leme je, da je podgrupa končnega indeksa končno generirane grupe tudi sama končno generirana. Pokazali bomo, da sta kvazi-izometrični grupi, ki sta končno generirani, bodisi obe končno prezentirani bodisi ni nobena izmed njiju. Metrične prostore bomo skušali ločiti do kvazi-izometrije natančno s pomočjo koncev grup. Pokazali bomo, da ima vsaka končno generirana grupa $0, 1, 2$ ali neskončno mnogo koncev. Karakterizirali bomo vse grupe z 0 ali 2 koncema.

Ends of groups

Abstract

In the graduate seminar we will learn the basics of geometric group theory. We will prove that $\mathbb{R}^n$ is quasi-isometric to $\mathbb{R}^m$ if and only if $m = n$. To every group we will associate a Cayley graph, from which we will be able to tell a lot about the presentation of the group. We will prove the Svarc-Milnor lemma, which is one of the most important tools in geometric group theory. Using this lemma, we will prove that a group is quasi-isometric to every of its finite index subgroup. We will show that quasi-isometric finitely generated groups are all finitely presented or none of them is. We will try to distinguish metric spaces up to quasi-isometry using ends of groups. We will show that every finitely generated group has either $0, 1, 2$ or infinitely many ends. We will also characterize all groups with 0 or 2 ends.

Math. Subj. Class. (2010): 20F65, 57M07

Ključne besede: grupa, delovanje, kvazi-izometrija, Cayleyjev graf, končno generirana grupa, končno prezentirana grupa

Keywords: group, group action, quasi-isometry, Cayley graph, finitely generated group, finitely presented group

1. Uvod

Geometrijska teorija grup je relativno mlado področje v matematiki, ki se je začelo razvijati ob koncu osemdesetih let. Geometrijska teorija grup je v tesni povezavi s hiperbolično geometrijo, algebraično topologijo, nizkodimenzionalno topologijo, računsko teorijo grup in geometrijsko analizo. Razvila se je iz kombinatorične teorije grup, ki je preučevala diskretne grupe preko njihovih prezentacij okoli leta 1880. V prvi polovici dvajsetega stoletja pa so Dehn, Nielsen, Reidemeister, Schreier, Whitehead in van Kampen vpeljali topološko-geometrijske ideje pri preučevanju diskretnih grup. Nato se je področje začelo razvijati, prelomnica pa je bilo leto 1987, ko je Gromov objavil delo *Hyperbolic groups* [6], ki predstavi idejo, da imajo končno generirane grupe v pogledu od daleč negativno ukrivljenost. V članku *Asymptotic Invariants of Infinite Groups* [5] pa je preučeval grupe do kvazi-izometrije natančno. Kmalu potem so geometrijsko teorijo grup priznali kot novo področje matematike. Geometrijska teorija grup preučuje predvsem končno generirane grupe s pomočjo geometrijskih in topoloških lastnosti prostorov, na katerih grupe delujejo. Pogosto pa bomo kar na grupo samo gledali kot na geometrični objekt. Zato bomo grupi vedno priredili metrični prostor (natančneje geodetski prostor), to bo kar njej prirejen Cayleyjev graf, ki bo imel naravno strukturo metričnega prostora. S pomočjo geometričnih lastnosti grafa, prirejenega grupi, bomo lahko veliko povedali o algebraični strukturi same grupe.

2. Kvazi-izometrije

Preden bomo končno generirani grupi priredili metrični prostor, uvedimo tip preslikave med metričnimi prostori, ki zelo lepo ohranja geometrijske lastnosti metričnih prostorov.

Definicija 2.1. Naj bosta (X, d_X) in (Y, d_Y) metrična prostora in $f\colon X \longrightarrow Y$ neka preslikava.

- Preslikava f je *kvazi-izometrična vložitev*, če obstajata taki pozitivni konstanti b in c, da za poljubna $x, x' \in X$ velja

$$\frac{1}{c} d_X(x, x') - b \leq d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leq c d_X(x, x') + b. \tag{1}$$

- Naj bo $f'\colon X \longrightarrow Y$. Pravimo, da sta f in f' *neločljivi*, kadar obstaja taka pozitivna konstanta d, da je

$$d_X\big(f(x), f'(x)\big) \leq d \text{za vsak } x \in X. \tag{2}$$

- Če obstaja $M > 0$, da za vsak $y \in Y$ obstaja $x \in X$, da je $d_Y\big(f(x), y\big) \leq M$, pravimo, da je f *kvazi-gosta*.
- Kvazi-gosti izometrični vložitvi rečemo na kratko *kvazi-izometrija*.

Opomba 2.2. V definiciji imamo opravka s tremi konstantami b, c in M. Izkaže se, da lahko predpostavimo, da so vse tri konstante enake največji med njimi. Naj bodo konstante kot v definiciji in definirajmo $m = \max\{b, c, M\}$. Sedaj velja

$$\begin{aligned}\frac{1}{m} d_X(x, x') - m &\leq \frac{1}{c} d_X(x, x') - b \\ &\leq d_Y\big(f(x), f(x')\big) \\ &\leq c d_X(x, x') + b \leq m d_X(x, x') + m.\end{aligned}$$

Hkrati pa za vsak $y \in Y$, obstaja $x \in X$, da je

$$d_Y\big(f(x), y\big) \leq M \leq m.$$

Torej lahko po potrebi predpostavimo, da so b, c in M enaki. V tem primeru konstanto, ki nastopa v definiciji, imenujemo *kvazi-izometrična konstanta*. Posebej lahko predpostavimo tudi, da sta po dve od omenjenih konstant paroma enaki, tretja pa različna. To sledi iz naših sklepov.

Definicijo kvazi-izometrične vložitve bi lahko zamenjali z ekvivalentno zahtevo, da obstajajo pozitivne konstante c, p in q, da velja

$$\frac{1}{c} d_X(x, x') - p \leq d_Y\big(f(x), f(x')\big) \leq c d_X(x, x') + q.$$

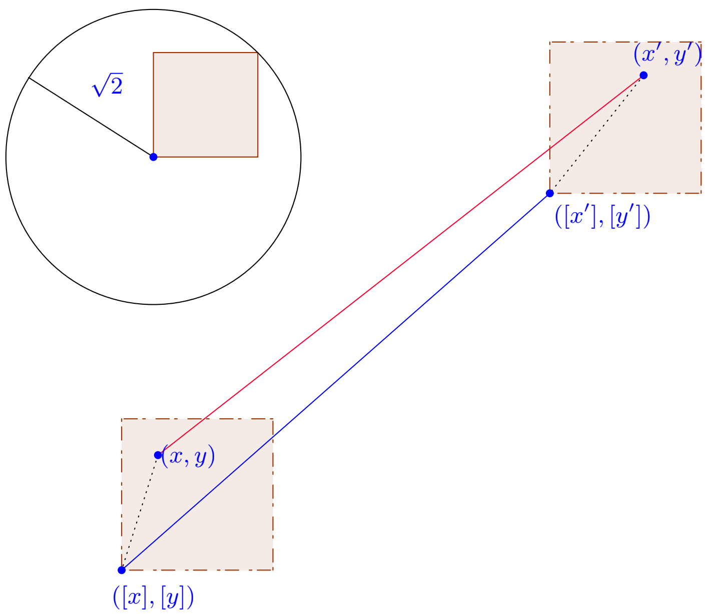
Prvotna definicija očitno implicira zgornjo. Zgornja pa tudi prvotno, saj lahko izberemo $b = \max\{p, q\}$.

Primer 2.3. Preslikava $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$, podana s predpisom $x \mapsto [x]$, je kvazi-izometrija. Res, saj je

$$|x - x'| - 1 \leq |[x] - [x']| \leq |x - x'| + 1$$

za poljubna $x, x' \in \mathbb{R}$. Hkrati za vsak $x \in \mathbb{Z}$ obstaja $x' \in \mathbb{R}$, da je $|x - [x']| \leq 1$. Kvazi-izometrična konstanta je v tem primeru 1.

Primer 2.4. Preslikava $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$, podana s predpisom $(x, y) \mapsto \big([x], [y]\big)$, je tudi kvazi-izometrija.



Iz slike po trikotniški neenakosti sledi

$$d\big((x, y), (x', y')\big) - 2\sqrt{2} \leq d\big(([x], [y]), ([x'], [y'])\big) \leq d\big((x, y), (x', y')\big) + 2\sqrt{2}.$$

Poleg tega za vsak $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ obstaja $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, da je

$$\sqrt{(x-[x'])^2+(y-[y'])^2} \leq \sqrt{2}.$$

V tem primeru lahko za kvazi-izometrično konstanto izberemo $2\sqrt{2}$.

Trditev 2.5. *Vsaka kvazi-izometrija $f\colon X \longrightarrow Y$ ima* kvazi-inverz, *tj. obstaja $g\colon Y \longrightarrow X$, da sta id_X in $g \circ f$ ter id_Y in $f \circ g$ neločljivi.*

Dokaz. Ker je f kvazi-izometrija, obstaja taka konstanta $c > 0$, da je

$$\frac{1}{c}d_X(x,x') - c \leq d_Y\big(f(x),f(x')\big) \leq c d_X(x,x') + c \tag{3}$$

za vsaka $x,x' \in X$. Ker je f kvazi-gosta za vsak $y \in Y$, obstaja nek $x_y \in X$, da je

$$d_Y\big(f(x_y),y\big) \leq c. \tag{4}$$

Torej lahko definiramo preslikavo $g\colon Y \longrightarrow X$, ki $y \mapsto x_y$. Trdimo, da je g kvazi-inverz za f.

Po konstrukciji je

$$d_Y\Big(f\big(g(y)\big),y\Big) = d_Y\big(f(x_y),y\big) \leq c,$$

torej sta id_Y in $f \circ g$ neločljivi. Po točki (3) je

$$d_X(x_{f(x)},x) \leq c \cdot d_Y\big(f(x_{f(x)}),f(x)\big) + c^2. \tag{5}$$

Ocena

$$d_X\Big(g\big(f(x)\big),x\Big) = d_X(x_{f(x)},x) \overset{(5)}{\leq} c \cdot d_Y\big(f(x_{f(x)}),f(x)\big) + c^2 \overset{(4)}{\leq} c^2 + c^2 = 2c^2 \tag{6}$$

nam pove, da sta tudi id_X in $g \circ f$ neločljivi. Dokažimo še, da je tudi g kvazi-izometrija. Ocenimo

$$\begin{aligned}
d_X\big(g(y),g(y')\big) &= d_X(x_y,x_{y'}) \\
&\overset{(5)}{\leq} c \cdot d_Y\big(f(x_y),f(x_{y'})\big) + c^2 \\
&\overset{\Delta}{\leq} c \cdot \Big(d_Y\big(f(x_y),y\big) + d_Y(y,y') + d_Y\big(f(x_{y'}),y'\big)\Big) + c^2 \\
&\overset{(4)}{\leq} c \cdot (d_Y(y,y') + 2c) + c^2 \\
&= c \cdot d_Y(y,y') + 3c^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_X\big(g(y),g(y')\big) &= d_X(x_y,x_{y'}) \\
&\geq \frac{1}{c} \cdot d_Y\big(f(x_y),f(x_{y'})\big) - c \\
&\overset{\Delta}{\geq} \frac{1}{c} \cdot \Big(d_Y(y,y') - d_Y\big(f(x_y),y\big) - d_Y\big(f(x_{y'}),y'\big)\Big) - c \\
&\overset{(4)}{\geq} \frac{1}{c} \cdot (d_Y(y,y') - c - c) - c \\
&= \frac{1}{c}d_Y(y,y') - 2 - c.
\end{aligned}$$

Povzemimo:
$$\frac{1}{c}d_Y(y,y') - 2 - c \le d_X\big(g(y, g(y')\big) \le c d_Y(y,y') + 3c^2.$$
Torej je tudi g kvazi-izometrična vložitev. Po oceni (6) je jasno, da je preslikava g tudi kvazi-gosta, torej kvazi-izometrija. ☐

Opomba 2.6. Da bo preslikava g dobro definirana, vsakemu y priredimo natanko en x_y, kar je možno po aksiomu izbire.

Trditev 2.7. *Naj bosta $f\colon X \longrightarrow Y$ in $g\colon Y \longrightarrow Z$ kvazi-izometriji. Tedaj je tudi $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ kvazi-izometrija.*

Dokaz. Označimo kvazi-izometrični konstanti z m_f in m_g, kjer indeks f (oziroma g) označuje, kateri preslikavi pripada. Sedaj postavimo $m = \max(m_f, m_g, 1)$. Izberimo si $x, x' \in X$. Po definiciji kvazi-izometrije je
$$\frac{1}{m}d_X(x,x') - m \le d_Y\big(f(x), f(x')\big) \le m d_X(x,x') + m$$
in
$$\begin{aligned}\frac{1}{m}d_Y\big(f(x), f(x')\big) - m &\le d_Z\Big(g\big(f(x)\big), g\big(f(x')\big)\Big)\\ &\le m d_Y\big(f(x), f(x')\big) + m.\end{aligned}$$
Poračunamo lahko še
$$\frac{1}{m^2}d_X(x,x') - m - 1 \le d_Z\Big(g\big(f(x)\big), g\big(f(x')\big)\Big) \le m^2 d_X(x,x') + m^2 + m.$$
Ocenimo lahko
$$\begin{aligned}\frac{1}{m^2+m}d_X(x,x') - m^2 - m &\le \frac{1}{m^2}d_X(x,x') - m - 1\\ &\le d_Z\Big(g\big(f(x)\big), g\big(f(x')\big)\Big)\\ &\le m^2 d_X(x,x') + m^2 + m\\ &\le (m^2+m) d_X(x,x') + m^2 + m.\end{aligned}$$
Sedaj lahko pišemo $\gamma = m^2 + m$ in dobimo
$$\frac{1}{\gamma}d_X(x,x') - \gamma \le d_Z\Big(g\big(f(x)\big), g\big(f(x')\big)\Big) \le \gamma d_X(x,x') + \gamma.$$
Torej je tudi $g \circ f$ kvazi-izometrična vložitev. Pokažimo še, da je preslikava $g \circ f$ kvazi-gosta. Izberimo si poljuben $z \in Z$. Ker je g kvazi-gosta, obstaja $y \in Y$, da je $d_Z\big(g(y), z\big) \le m$. Ker je tudi preslikava f kvazi-gosta, obstaja $x \in X$, da je $d_Y\big(f(x), y\big) \le m$. Ker je preslikava g kvazi-izometrična vložitev, je
$$\frac{1}{m}d_Y(x,x') - m \le d_Z\big(g(x), g(x')\big) \le m d_Y(x,x') + m,$$
kar nam da
$$d_Z\Big(g\big(f(x)\big), g(y)\Big) \le m d_Y\big(f(x), y\big) + m \le m^2 + m.$$
Po trikotniški neenakosti je
$$d_Z\Big(g\big(f(x)\big), z\Big) \le d_Z\Big(g\big(f(x)\big), g(y)\Big) + d_Z\big(g(y), z\big) \le m^2 + 2m,$$
torej je $g \circ f$ tudi kvazi-gosta in s tem kvazi-izometrija. ☐

Definicija 2.8. Metrična prostora X in Y sta *kvazi-izometrična*, kadar obstaja kvazi-izometrija med njima. V tem primeru bomo pisali $X \overset{Q.I.}{\simeq} Y$.

Primer 2.9. Vrnimo se na primera 2.3 in 2.4. Prostora v vsakem primeru posebej sta kvazi-izometrična, sama konstrukcija kvazi-izometrij pa je zahtevala nekaj dela. Opazimo, da bi bilo dovolj poiskati kvazi-izometriji iz $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{R}$ oz. iz $\mathbb{Z}^2$ v $\mathbb{R}^2$. Lahko bi izbrali kar inkluziji, ki sta očitno kvazi-izometriji. Na ta način si lahko zelo poenostavimo iskanje konkretne kvazi-izometrije.

Da je zgornja oznaka res smiselna, nam pove naslednja posledica.

Posledica 2.10. *Kvazi-izometričnost je ekvivalenčna relacija.*

Dokaz. Identična preslikava je jasno kvazi-izometrija, torej je $X \overset{Q.I.}{\simeq} X$ za poljuben metrični prostor X. Če je $X \overset{Q.I.}{\simeq} Y$, tedaj je $Y \overset{Q.I.}{\simeq} X$, saj za vsako kvazi-izometrijo obstaja kvazi-inverz. Ker je kvazi-izometričnost tranzitivna relacija, sledi, da je kvazi-izometričnost ekvivalenčna relacija. □

Primer 2.11. Pokazali smo že, da je $\mathbb{R} \overset{Q.I.}{\simeq} \mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}^2 \overset{Q.I.}{\simeq} \mathbb{R}^2$.

Primer 2.12. Vsi neprazni omejeni metrični prostori so kvazi-izometrični točki. Res, naj bo

$$\begin{aligned} f\colon X &\longrightarrow \{0\}, \\ f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Tako definirana preslikava je jasno kvazi-izometrija, saj lahko za kvazi-izometrično konstanto izberemo kar $\operatorname{diam}(X) + 1$.

Na primerih lahko vidimo, da kvazi-izometrije v splošnem niso zvezne, niso injektivne, niti surjektivne. Kvazi-izometrična prostora sta lahko celo prostora različnih kardinalnosti, kot sta to $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$. Oglejmo si še primer kvazi-neizometričnih prostorov.

Primer 2.13. Omejen metrični prostor ne more biti kvazi-izometričen $\mathbb{R}$. Dovolj je, da pokažemo, da točka ni kvazi-izometrična $\mathbb{R}$.

Denimo, da je točka kvazi-izometrična $\mathbb{R}$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $\mathbb{R} \overset{Q.I.}{\simeq} \{0\}$. Tedaj obstaja $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{0\}$, da je za vsaka $x, x' \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{c} d_{\mathbb{R}}(x, x') - b \leq d_{\{0\}}\big(f(x), f(x')\big) \leq c d_{\mathbb{R}}(x, x') + b$$

za neka fiksna pozitivna b in c. Edina izbira za f je kar ničelna preslikava, torej je za vsaka $x, x' \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{c} d_{\mathbb{R}}(x, x') - b \leq 0 \leq c d_{\mathbb{R}}(x, x') + b.$$

Ker je $\mathbb{R}$ neomejen metrični prostor, lahko izberemo x in x', da je

$$d_{\mathbb{R}}(x, x') \geq 2bc.$$

Sedaj pa nas ocena

$$0 < b \leq \frac{1}{c} d_{\mathbb{R}}(x, x') - b \leq 0$$

privede do protislovja.

Opomba 2.14. V zgornjem dokazu lahko $\mathbb{R}$ zamenjamo s poljubnim neomejenim metričnim prostorom, torej neomejen metrični prostor ne more biti kvazi-izometričen omejenemu.

Primer 2.15. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definirana kot $f(x) = e^{2\pi i x}$. Ta preslikava je seveda zvezna, ni pa kvazi-izometrija, saj je $\mathbb{R}$ neomejen, $\mathbb{S}^1$ pa omejen metrični prostor. Torej ni vsaka zvezna preslikava že nujno kvazi-izometrija.

Naj bo $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ podana s $f(x) = \tan(x)$. Ta preslikava je homeomorfizem, ni pa kvazi-izometrija, zopet ker je prvi prostor omejen, drugi pa neomejen.

Primer 2.13 je le poseben primer splošnega izreka. Da pa bomo lahko dokazali tega, najprej brez dokaza navedimo zelo znan Borsuk-Ulamov izrek.

Izrek 2.16. *Naj bo $g\colon \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zvezna preslikava. Tedaj obstaja $x \in \mathbb{S}^n$, da je $g(x) = g(-x)$.*

Dokaz zgornjega izreka bomo izpustili, saj zahteva več predznanja iz algebraične topologije. Lahko pa ga najdete v [7].

Izrek 2.17. *Prostor $\mathbb{R}^n$ je kvazi-izometričen $\mathbb{R}^m$ natanko tedaj, ko je $m = n$.*

Dokaz. Predpostavimo, da je $n > m$. Naj bo $\phi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ kvazi-izometrija. Naj bodo točke

$$x_0, x_1, \ldots, x_{\rho(k)} = x_0$$

enakomerno porazdeljene na sferi $\mathbb{S}_k^{n-1}$ s polmerom $k \geq n$. Število točk $\rho(k)$ izberimo tako, da bo vsaka točka imela sosednjo na razdalji največ π. To število je res končno, saj je sfera kompaktna. Sedaj krivočrtno triangulirajmo (razdelimo na $(n-1)$ dimenzionalne krivočrtne simplekse) sfero $\mathbb{S}_k^{n-1}$ s pomočjo izbranih točk (če jih je bilo premalo, jih lahko brez težav še končno mnogo dodamo).

Preslikava ϕ je kvazi-izometrija, torej obstaja $c > 0$, da je

$$\frac{1}{c}||x - x'|| - c \leq ||\phi(x) - \phi(x')|| \leq c||x - x'|| + c \tag{7}$$

za vsaka $x, x' \in \mathbb{R}^n$. Če je $||x_i - x_j|| \leq \pi$, je po enačbi (7)

$$||\phi(x_i) - \phi(x_j)|| \leq c||x_i - x_j|| + c \leq c(\pi + 1).$$

Torej je omejena tudi razlika $||\phi(x_i) - \phi(x_j)||$.

Definirajmo zvezno preslikavo $f\colon \mathbb{S}_k^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, da je $f(x_i) = \phi(x_i)$ in simpleks, ki ga napenjajo točke $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$, preslikamo na krivočrtni simpleks, ki ga napenjajo točke $f(x_{i_1}), f(x_{i_2}), \ldots, f(x_{i_n})$. Indekse $i_1, i_2, \ldots i_n$ smo izbrali tako, da točke $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}$ napenjajo krivočrtni simpleks iz začetne krivočrtne simplicialne strukture sfere $\mathbb{S}_k^n$. Po Borsuk-Ulamovem izreku obstaja $x \in \mathbb{S}_k^{n-1}$, da je $f(x) = f(-x)$. Izberimo si indeks i tako, da je x_i najbližje temu x. Zato velja $||x - x_i|| = ||(-x) - (-x_i)|| \leq \pi$. Torej sta

$$||f(x) - f(x_i)|| \leq c(\pi + 1)$$

in

$$||f(-x) - f(-x_i)|| \leq c(\pi + 1).$$

Nadalje lahko ocenimo

$$\begin{aligned}||\phi(x_i) - \phi(-x_i)|| &= ||f(x_i) - f(-x_i)|| \\ &= ||f(x_i) - f(-x) + f(-x) - f(-x_i)|| \\ &\leq ||f(x_i) - f(-x)|| + ||f(-x) - f(-x_i)|| \\ &= ||f(x_i) - f(x)|| + ||f(-x) - f(-x_i)|| \\ &\leq 2c(\pi + 1).\end{aligned}$$

Sledi, da je

$$c^2(2\pi + 3) \geq c||\phi(x_i) - \phi(-x_i)|| + c^2 \geq ||x_i - (-x_i)|| = 2||x_i|| = 2k \tag{8}$$

omejeno. Konstanta c je odvisna le od m in n, nič pa od k, ki si ga lahko prosto izberemo. Seveda si lahko izberemo $k \in \mathbb{N}$ poljubno velik, kar je protislovje z oceno (8). Sledi, da je $n \leq m$. Če zamenjamo vlogi m in n, analogno dobimo $m \leq n$, od koder sledi $m = n$. Očitno je $\mathbb{R}^n \overset{Q.I.}{\simeq} \mathbb{R}^n$. □

3. Cayleyjevi grafi

Navedimo nekaj osnovnih dejstev o grafih, grupah in delovanju grup na grafih. Večino trditev v tem poglavju smo v dosedanjem študiju že obravnavali, zato jih bomo le zapisali, dokaze pa izpustili.

Definicija 3.1. *Delovanje* grupe G na množici S je preslikava $G \times S \longrightarrow S$, ki paru (g, x) priredi element $g \cdot x$, da za vse $x \in S$ in $g_1, g_2 \in G$ velja

$$e \cdot x = x$$

in

$$(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x).$$

Rečemo, da grupa G *deluje* na množici S. Da bomo delovanje lahko ločili od navadnega grupnega množenja, bomo, kadar gre za delovanje, pisali $\cdot$, pri grupnem množenju pa bomo $\cdot$ izpuščali.

Primer 3.2. Najosnovnejši primer delovanja je levo množenje podgrupe H na grupi G

$$h \cdot g = hg \text{ za vse } h \in H, g \in G.$$

Ta primer velja omeniti, saj je to naravno delovanje podgrupe na Cayleyjev graf $\mathrm{Cay}(G, S)$.

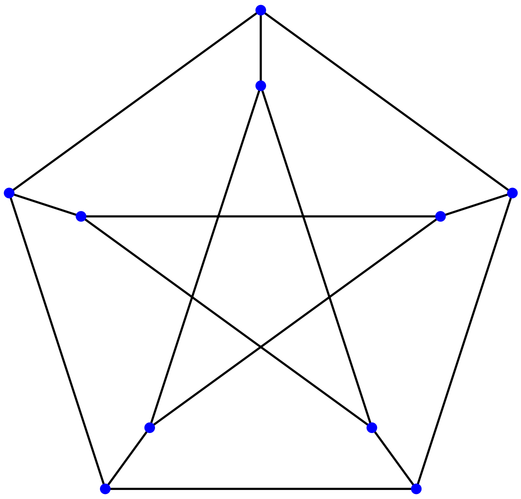
Opomba 3.3. Na delovanje grupe G na S lahko gledamo kot na grupni homomorfizem $\phi\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(S)$. Delovanje grupe G na S je torej družina avtomorfizmov $\{f_g\}_{g \in G}$ množice S, tako da je

$$f_g \circ f_h = f_{g \cdot h} \text{ za vse } g, h \in G.$$

Definicija 3.4. Naj bo V neprazna množica in E poljubna družina dvoelementnih podmnožic množice V. Paru $\Gamma = (V, E)$ pravimo *graf na množici točk* (tudi vozlišč) $V = V(\Gamma)$ z *množico povezav* $E = E(\Gamma)$. Če je $\{u, v\}$ povezava grafa Γ, tedaj pravimo, da sta točki u in v *sosednji.* Hkrati pravimo, da sta točki u in v *krajišči* povezave $\{u, v\}$. Povezavo $\{u, v\}$ pišemo krajše kot uv in vu.

Stopnja točke u v grafu Γ, označimo jo z $\deg_\Gamma(u)$, je enaka številu povezav grafa Γ, ki imajo točko u za svoje krajišče. Graf je *lokalno končen*, kadar je stopnja vsake točke grafa končna. Cikel grafa je podgraf, homeomorfen krožnici. Kadar navajamo cikel le z vozlišči, po vrsti navedemo vsa vozlišča na ciklu.

Primer 3.5. Na sliki najdemo primer *Petersenovega grafa.* Graf ima vsa vozlišča stopnje 3. Grafom, ki imajo vsa vozlišča enake stopnje, pravimo *regularni grafi.*



Opomba 3.6. Včasih dopuščamo tudi grafe, ki imajo med nekaterimi pari točk več povezav (vzporedne povezave), ali pa imajo povezave, ki imajo obe krajišči enaki (zanke). Takim grafom pravimo *multigrafi*, mi pa se bomo ukvarjali le z navadnimi grafi, saj bodo grafi, ki nas bodo zanimali, brez zank in vzporednih povezav.

Primer 3.7. Oglejmo si primer delovanja grupe $\mathbb{Z}$ na ciklu $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0\}$. Delovanje predpišimo takole

$$g \cdot v_i = v_{g+i \ (mod\ n)}.$$

Zlahka se prepričamo, da zgornji predpis zadošča vsem zahtevam delovanja. V tem primeru je delovanje z grupnim elementom rotacija cikla.

Definicija 3.8. Naj grupa G deluje na množici S (lahko tudi graf, topološki prostor ...). Naj bo $s \in S$, tedaj lahko definiramo *stabilizator* elementa s

$$\mathrm{Stab}(s) = \{g \in G | g \cdot s = s\}.$$

Primer 3.9. Stabilizator cikla za delovanje v primeru 3.7 je $n\mathbb{Z}$.

Trditev 3.10. *Naj grupa G deluje na množici S in naj bo $s \in S$ poljuben element. Stabilizator* $\mathrm{Stab}(s)$ *je podgrupa grupe G.*

Definicija 3.11. Naj grupa G deluje na množici S in naj bo $s \in S$. *Orbita* elementa s je

$$\mathrm{Orb}(s) = \{g \cdot s | g \in G\} = G \cdot s.$$

Primer 3.12. Orbita vsakega elementa iz primera 3.7 je kar celotni cikel.

Izrek 3.13. *Naj bo $f\colon G \longrightarrow H$ homomorfizem grup, tedaj je*

$$G/\operatorname{Ker}(f) \cong \operatorname{Im}(f).$$

Definicija 3.14. Naj bo G grupa in S neka njena podmnožica. Pravimo, da S *generira* G, če lahko vsak element grupe G zapišemo kot produkt elementov S in njihovih inverzov. Grupa G je *končno generirana*, kadar obstaja končna množica S, ki generira G. Množici S pravimo *generatorska množica.*

Primer 3.15. Aditivna grupa $\mathbb{Z}$ je generirana z $\{1\}$. Generatorska množica pa ni enolična, saj tudi $\{2, 3\}$ generira aditivno grupo $\mathbb{Z}$. Generatorska množica za $\mathbb{Z}$ je lahko kar cela grupa. Zato ponavadi iščemo čim manjše generatorske množice, v primerih, ko obstajajo, imamo najraje končne.

Definicija 3.16. *Usmerjeni graf* je graf, kjer vsaki povezavi predpišemo smer. Smer ponavadi označimo s puščico.

Definicija 3.17. Naj bo G grupa in S njena končna generatorska množica. *Cayleyjev graf* grupe G glede na generatorsko množico S je usmerjen graf $\mathrm{Cay}(G, S)$, kjer je

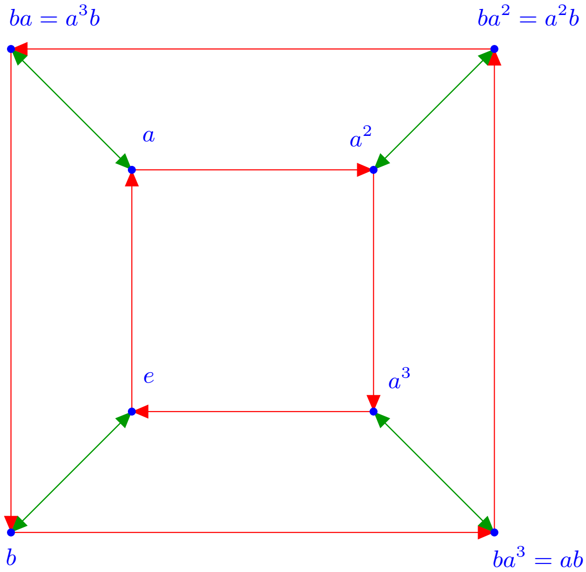
$$V\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big) = G$$
$$E\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big) = \{\{g, gs\} | g \in G, s \in S - \{e\}\}.$$

Dve vozlišči u in v v Cayleyjevem grafu sta torej povezani natanko tedaj, ko obstaja $s \in S \cup S^{-1}$, da je $u = vs$.

Na vozlišča grafa $\mathrm{Cay}(G, S)$ bomo pogosto gledali kot na grupo G. Iz definicije je jasno, da je Cayleyjev graf regularen, saj imajo vsa vozlišča enako stopnjo $|S \cup S^{-1}|$. Cayleyjev graf je lokalno končen natanko tedaj, ko je generatorska množica S končna.

Definicija 3.18. Naj bosta Γ in Γ' grafa. Bijektivni preslikavi $\phi\colon V(\Gamma) \longrightarrow V(\Gamma')$, za katero je $uv \in E(\Gamma)$ natanko tedaj, ko je $\phi(u)\phi(v) \in E(\Gamma')$, pravimo *izomorfizem grafov*.

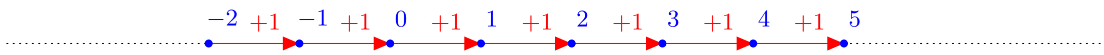
Primer 3.19. Naj bo D_4 diedrska grupa z generatorjema a, b, kjer je $a^4 = e, b^2 = e$ in $ba = a^3b$. Rdeče puščice pomenijo množenje z leve z a, zelene pa z b.



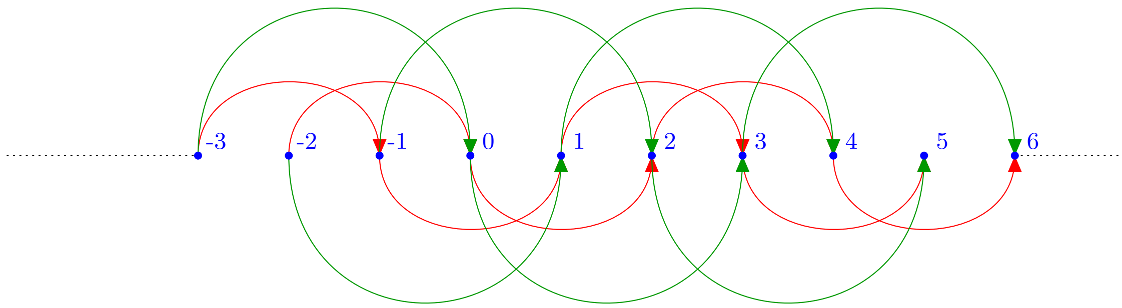
Denimo, da bi imeli pred seboj le zgornji graf, za katerega vemo le, da je Cayleyjev graf neke grupe. Takoj ugotovimo, da je ta grupa končno generirana in ima dva generatorja, saj je najvišja stopnja vozlišča 3. Iz vsakega vozlišča gre povezava za generator in njegov inverz. Ker so vozlišča lihe stopnje, je nek generator sam svoj inverz, torej reda 2. Takoj lahko razberemo, kateri generator je reda 2; to je tisti, ki ima na povezavi puščici v obe smeri, torej zeleni. Ostale povezave predstavljajo množenje z drugim generatorjem. Na koncu si oglejmo še vse cikle, v njih so zakodirane relacije med elementi. Iz srednjega cikla je jasno, da je drugi generator reda

4, iz stranskih pa zaradi simetrije dobimo le eno relacijo, ki nam pove, da gre za diedrsko grupo. Vidimo, da nam že sam graf pove veliko o strukturi grupe, kateri je prirejen. Zato bomo na grafe, bolj kot na kombinatorični objekt, gledali kot na topološki in algebraičen objekt. Vsak Cayleyjev graf lahko gledamo le kot upodobitev grupe, kjer lahko relacije med elementi razberemo neposredno iz grafa. Zato bomo vsakemu grafu kasneje priredili metriko.

Primer 3.20. Prva slika prikazuje primer Cayleyjevega grafa grupe $\mathbb{Z}$ glede na generatorsko množico $\{1\}$.



Na drugi sliki pa je $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{2,3\})$, kjer zelena povezava pomeni prištevanje oz. odštevanje 3, rdeča pa prištevanje oz. odštevanje 2.

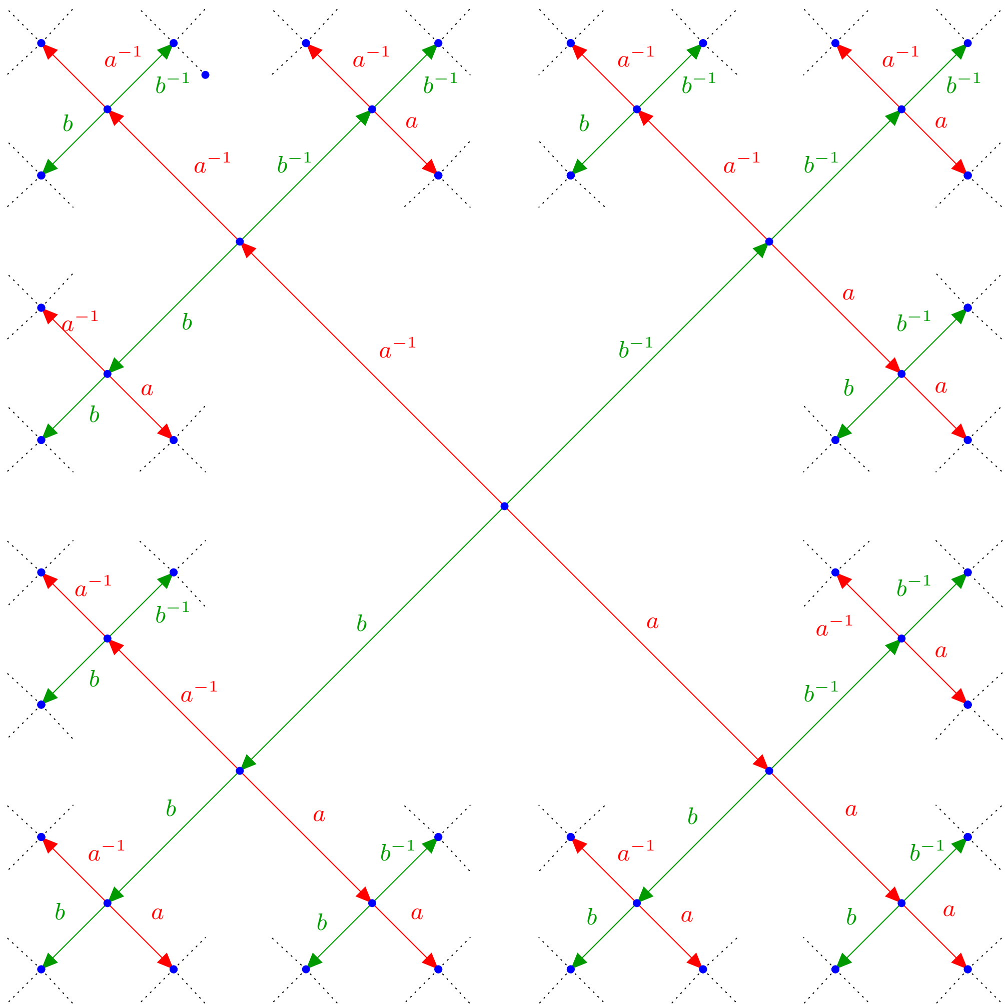


Zgornja Cayleyjeva grafa sta neizomorfna, saj so v grafu $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{1\})$ vse točke stopnje 2, v $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{2,3\})$ pa je 0 stopnje 4. Izomorfizem grafov ohranja stopnje točk, torej grafa ne moreta biti izomorfna, zato tudi nista homeomorfna.

Primer 3.21. Spodnja slika prikazuje Cayleyjev graf proste grupe $\mathbb{F}_2 = \langle a, b \rangle$. Puščice predstavljajo množenje z elementi, točke pa posamezne elemente. Točka, do katere pridemo preko puščic $a_1, a_2, \ldots, a_n$, če začnemo v enoti, je $a_n a_{n-1} \ldots a_1$.

Iz zgornjega primera vidimo, da lahko grupi, glede na različne generatorske množice, priredimo neizomorfne grafe. Topološki ekvivalent izomorfnosti grafov je homeomorfnost grafov kot topoloških prostorov. Cayleyjev graf pa nam lahko pove zelo veliko o strukturi same grupe. Kot smo že omenili, je Cayleyjev graf lokalno končen natanko tedaj, kadar je generatorska množica S končna. Torej lahko iz topološke lastnosti Cayleyjevega grafa povemo nekaj o generatorski množici, oziroma relacijah med generatorji. Lahko pa s pomočjo Cayleyjevih grafov testiramo, če neka končna množica generira grupo, kateri je graf prirejen. To storimo tako, da najprej najdemo poljuben Cayleyjev graf za grupo G. Seveda za to potrebujemo vsaj eno končno generatorsko množico, torej ta postopek deluje le, če že imamo neko končno generatorsko množico. Sedaj pa moramo pokazati, da lahko preko poti, ki jih določajo elementi te končne množice, dosežemo vse točke v začetnem Cayleyjevem grafu grupe G. To nam je pogosto lažje, saj lahko že iz slike grafa včasih hitro vidimo, če dosežemo vse točke ali ne.

Primer 3.22. Znano je, da $\{2,3\}$ generira $\mathbb{Z}$. Lahko pa to dejstvo preverimo še s pomočjo Cayleyjevega grafa $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{2,3\})$. Graf je očitno povezan s potmi po konstrukciji (taki so vsi Cayleyjevi grafi). Preveriti moramo le, če so res vsa cela števila oglišča grafa. Seveda so vsa soda števila oglišča grafa. Posledično so tudi



vsa števila oblike $2k+3,\ k \in \mathbb{Z}$, torej so tudi vsa liha števila oglišča grafa. Graf je lokalno končen, vsa oglišča so stopnje 4, torej je $\{2,3\}$ res generatorska množica za $\mathbb{Z}$.

Da bi lahko povedali kaj več o končni generiranosti grup s pomočjo Cayleyjevih grafov, potrebujemo nekaj priprave. Znano je, da je vsaka grupa slika neke proste grupe. Dejanskemu opisu te slike pravimo prezentacija.

Definicija 3.23. *Prezentacija grupe G* je epimorfizem $\pi\colon F \longrightarrow G$, kjer je F prosta grupa. Jedro $\operatorname{Ker}(\pi)$ je podgrupa edinka in $F/\operatorname{Ker}(\pi) \simeq G$. Elementom jedra pravimo prezentacijske relacije oz. krajše *relacije*. Podmnožica $R \subset \operatorname{Ker}(\pi)$ je *množica relacij*, če je najmanjša podgrupa edinka grupe G, ki vsebuje R, kar $\operatorname{Ker}(\pi)$. Če je R množica relacij, lahko vsak element iz $\operatorname{Ker}(\pi)$ zapišemo kot končen produkt konjugirank elementov iz R in njihovih inverzov.

Končno generirana grupa je *končno prezentirana*, če obstaja končna množica relacij R. Prezentacijo grupe G zapišemo kot

$$G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \big| r_1, r_2, \ldots, r_k \rangle,$$

kjer je $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ generatorska množica in $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$.

Primer 3.24. Po naši definiciji ima ciklična grupa reda n prezentacijo $C_n = \langle a \big| a^n \rangle$ in včasih pišemo $\langle a \big| a^n = e \rangle$.

Diedrska grupa

$$D_{2n} = \langle r, z \big| r^n, z^2, (rz)^2 \rangle.$$

Neskončna diedrska grupa

$$\langle r, z \big| z^2, (rz)^2 \rangle.$$

Primera produktov grup sta:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \big| aba^{-1}b^{-1} \rangle,$$

$$\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n = \langle a, b \big| a^m, b^n, ab = ba \rangle.$$

Če je G končna grupa, jo lahko prezentiramo kot $G = \langle g_1, g_2, \ldots, g_n \big| R \rangle$, kjer je R kar tabela množenja elementov grupe G.

Iskanje prezentacij grupe je v splošnem zelo težek problem, zato navedimo dokaz le za en primer.

Primer 3.25. Dokažimo, da je $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a, b \big| aba^{-1}b^{-1} \rangle$. Naj bo

$$\phi\colon F(a, b) \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

homomorfizem, podan z

$$\phi(a) = (1, 0), \phi(b) = (0, 1).$$

Seveda

$$\phi(aba^{-1}b^{-1}) = \phi(a)\phi(b)\phi(a)^{-1}\phi(b)^{-1} = (0, 0),$$

torej je $aba^{-1}b^{-1} \in \mathrm{Ker}(\phi)$.

Naj bo N najmanjša edinka grupe G, ki vsebuje $\langle aba^{-1}b^{-1}q \rangle$. Naj bo

$$w = a^{k_1} b^{m_1} \cdots a^{k_n} b^{m_n} \in \mathrm{Ker}(\phi).$$

Upoštevamo, da je ϕ homomorfizem, torej mora biti

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} m_i = 0.$$

Hkrati v kvocientni grupi $F(a, b)/N$ velja $ab = ba$, torej je $[w] = 1 \in F(a, b)/N$. Sledi, da je $N = \mathrm{Ker}(\phi)$ in $\langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle$ je prezentacija grupe $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Niso pa vse končno generirane grupe tudi končno prezentirane. Veliko o prezentaciji grupe lahko razberemo iz njenega Cayleyjevega grafa, oziroma obratno. Relacije, ki podajajo prezentacijo grupe, nam določajo cikle v njim prirejenih Cayleyjevih grafih in obratno. Iz ciklov v Cayleyjevih grafih lahko določimo relacije med grupnimi elementi. Kasneje bomo dokazali, da je končna prezentiranost zelo povezana z geometrijskimi lastnostmi grupe.

Primer 3.26. S pomočjo Cayleyjevega grafa lahko zelo preprosto razberemo, če dva elementa komutirata. Izberemo si bazno točko x_0. Nato pa si oglejmo poti abx_0 in bax_0. Če nas privedeta do iste točke, potem a in b komutirata, sicer pa ne.

4. Metrične in algebraične lastnosti grafov

Navedimo še nekaj že znanih lastnosti o grafih, katerih dokaze prav tako že poznamo, ali pa niso težki.

Definicija 4.1. Zaporedje točk $v_0, v_1, \ldots, v_k$ grafa Γ je *sprehod* dolžine k, če sta točki v_i in v_{i+1} sosednji za $0 \leq i < k$. Sprehod je *enostaven*, če so vse povezave na njem različne. Sprehod, na katerem so vse točke različne, je *pot*.

Trditev 4.2. *Če med točkama grafa obstaja sprehod dolžine k, potem med njima obstaja tudi pot dolžine največ k.*

Definicija 4.3. Za dve točki u in v rečemo, da sta *v isti komponenti za povezanost s potmi*, če med njima obstaja pot. Relacija biti v isti komponenti je ekvivalenčna relacija. Njenim ekvivalenčnim razredom rečemo *povezane komponente* grafa. Graf je *povezan*, če ima eno samo povezano komponento.

Definicija 4.4. *Razdaljo* $d_\Gamma(u, v)$ med točkama u in v v grafu Γ definiramo kot dolžino najkrajše poti od u do v v Γ. Če taka pot ne obstaja je, $d_\Gamma(u, v) = \infty$. Hkrati za povezave privzamemo, da so dolžine 1.

S tako definirano razdaljo postane množica točk povezanega grafa metrični prostor. Največji razdalji med parom vozlišč grafa pravimo *premer* grafa in označimo

$$\operatorname{diam}(\Gamma) = \sup\{d_\Gamma(u, v) | u, v \in V(\Gamma)\}.$$

Primer 4.5. Petersonov graf je premera 3. Cayleyjev graf, prirejen aditivni grupi $\mathbb{Z}$ glede na generatorsko množico $\{1\}$, ima neskončen premer. Velja omeniti, da je to edina smiselna definicija premera za Cayleyjeve grafe, saj nam sama algebraična struktura ne določa vložitve grafa v evklidski prostor $\mathbb{R}^2$.

Tako smo metriko grafa definirali neposredno preko njegove kombinatorične strukture. Lahko bi se pa definicije metrike lotili čisto po topološko, preko *CW* kompleksov, s čimer bi lahko povsem formalno dodali metriko tudi na povezave. Ker pa v našem razmišlanju ne bomo šli v tako splošnost, se bomo zadovoljili z že definirano metriko.

Kadar imamo opravka s Cayleyjevimi grafi, je metrika, inducirana s kombinatorično podlago, ekvivalentna (celo enaka) metriki, ki jo porodi grupna struktura na grupi in njeni generatorski množici prirejenem Cayleyjevem grafu.

Definicija 4.6. Naj bo G grupa in S (neka) množica generatorjev te grupe. Metrika d_S, inducirana na G z množico S, je za poljubna $g, h \in G$ definirana kot

$$d_S(g, h) = \min\{n \in \mathbb{N} | g^{-1}h = s_1 s_2 \cdots s_n; s_1, s_2, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1} \setminus \{e\}\}.$$

Tako definirana metrika na grupi G se seveda ujema z grafovsko metriko grafa $\operatorname{Cay}(G, S)$, če identificiramo vozlišča in grupne elemente.

Definicija 4.7. Naj grupa G deluja na množici S. Če je za nek element $s \in S$ $\operatorname{Stab}(s) = \{e\}$, tedaj pravimo, da G *prosto* deluje na s. Delovanje grupe G na S je *prosto*, če je $\operatorname{Stab}(s) = \{e\}$ za vsak $s \in S$.

Za grafe pa lahko definiramo naslednje.

Definicija 4.8. Delovanje grupe G na grafu Γ je *prosto*, če je prosto na vozliščih in povezavah.

Trditev 4.9. *Naj bo G grupa in S njena generatorska množica. Delovanje z levim množenjem na* $\mathrm{Cay}(G,S)$ *je prosto natanko tedaj, ko S ne vsebuje elementov reda 2.*

Dokaz. Delovanje na vozliščih je le grupno množenje, ki je injektivno, torej prosto. Dovolj je preveriti, kdaj je delovanje na povezavah prosto. Denimo, da delovanje ni prosto. Potem obstaja $g \in G$ in povezava vw v grafu $\mathrm{Cay}(G,S)$, da je $\{v,w\} = g\{v,w\} = \{gv, gw\}$. Pišemo lahko $w = vs$, kjer je $s \in S \cup S^{-1} \setminus \{e\}$. Sedaj ločimo dve možnosti. V prvem primeru imamo $gv = v$ in $vw = w$. Ker je delovanje na vozliščih prosto, je $g = e$. V drugem primeru pa je $gv = w$ in $gw = v$. Tedaj dobimo

$$v = gw = g(vs) = (gv)s = ws = \big((vs)s\big) = vs^2.$$

Ker pa je delovanje na vozliščih prosto, je $s^2 = e$. Ker je $s \neq e$, je s reda 2.

Če pa obstaja $s \in S$ reda 2, tedaj s pribije povezavo $es \in \mathrm{Cay}(G,S)$. □

V geometrijski teoriji grup je zelo pomembno prosto delovanje grupe na grafih. V posebnem je eno izmed pomembnejših dejstev, da je grupa prosta natanko tedaj, ko prosto deluje na nekem drevesu [10].

5. Kvazi-izometrije med grupami

Sedaj bomo pokazali, da je bila prireditev Cayleyjevega grafa končno generirani grupi zelo smiselna. Iz geometričnih lastnosti Cayleyjevih grafov bomo lahko veliko povedali o strukturi končno generirane grupe, kateri je bil prirejen. Caylejevi grafi se zelo lepo obnašajo glede na kvazi-izometrije, kar nam pove naslednja trditev.

Trditev 5.1. *Naj bo G končno generirana grupa s končnima generatorskima množicama S in S'. Tedaj sta metrična prostora* $\mathrm{Cay}(G,S)$ *in* $\mathrm{Cay}(G,S')$ *kvazi-izometrična.*

Dokaz. Ker je množica S končna, obstaja $c = \max\limits_{s \in S \cup S^{-1}} \{d_{S'}(e,s)\}$. Izberimo si poljubna $g, h \in G$. Naj bo $n = d_S(g,h)$. Sedaj vemo, da je $g^{-1}h = s_1 s_2 \cdots s_n$ za neke $s_1, s_2, \ldots, s_n \in S \cup S^{-1}$. Z uporabo trikotniške neenakosti lahko ocenimo

$$\begin{aligned} d_{S'}(g,h) &= d_{S'}(g, g s_1 s_2 \cdots s_n) \\ &\leq d_{S'}(g, g s_1) + d_{S'}(g s_1, g s_1 s_2) + \ldots + d_{S'}(g s_1 \cdots s_{n-1}, g s_1 s_2 \cdots s_n) \\ &= d_{S'}(e, s_1) + d_{S'}(e, s_2) + \cdots + d_{S'}(e, s_n) \leq cn \\ &= c d_S(g,h). \end{aligned}$$

Podobno lahko ocenimo, da je

$$d_S(g,h) \leq b d_{S'}(g,h)$$

za vsak $g, h \in G$, za $b = \max\limits_{s \in S' \cup S'^{-1}} \{d_S(e,s)\}$. Torej je

$$\frac{1}{b} \cdot d_S(g,h) \leq d_{S'}(g,h) \leq c \cdot d_S(g,h).$$

Pokazali smo, da je

$$id\colon (G, d_S) \longrightarrow (G, d_{S'})$$

kvazi-izometrična vložitev. Jasno je, da je ta preslikava tudi kvazi-gosta, saj je $d_{S'}(y,y) \leq 1$ za vsak $y \in G$. Torej je $id\colon (G, d_S) \longrightarrow (G, d_{S'})$ kvazi-izometrija, iz česar sledi trditev. □

S pomočjo trditve 5.1 lahko takoj najdemo zelo velike družine kvazi-izometričnih prostorov. Že kar pri grupi $\mathbb{Z}$ najdemo neskončno mnogo kvazi-izometričnih grafov $\{\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{p, q\})\}_{p,q\in\mathbb{K}}$. Množica $\mathbb{K}$ vsebuje praštevila, tako da nobena dvojica števil iz množice $\mathbb{K}$ ne da iste vsote. Oglejmo si te Caylejeve grafe kot navadne neusmerjene grafe. Jasno je, da je dolžina najkrajšega cikla v grafu $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}, \{p, q\})$ kar $p + q$. Ker so vse dvojice vsot različne, nimata nobena dva grafa enako dolgega najkrajšega cikla. Sledi, da nobena dva grafa nista izomorfna.

Opomba 5.2. Trditev 5.1 nam pove, da je kvazi-izometričen tip končno generirane grupe neodvisen od izbire končne generatorske množice. Zato lahko grupe ločimo do kvazi-izometrije natančno. Sedaj se seveda pojavi vprašanje, ali lahko nekako povemo, katere grupe so med seboj kvazi-izometrične, oziroma katere niso.

Trditev 5.3. *Končno generirana grupa je kvazi-izometrična končni grupi natanko tedaj, ko je končna.*

Dokaz. Ker so vsi neprazni omejeni metrični prostori med seboj kvazi-izometrični, so vse končne grupe med seboj kvazi-izometrične.

Denimo sedaj, da je neka neskončna grupa kvazi-izometrična končni grupi. Ker je grupa neskončna in končno generirana, ima $\mathrm{Cay}(G, S)$ neskončen premer in po primeru 2.13 ne more biti kvazi-izometričen Cayleyjevem grafu kočne grupe, ki ima končen premer. □

Definicija 5.4. Naj bosta $\epsilon, \delta > 0$ neki realni števili. Podmnožica A metričnega prostora X je $(\epsilon, \delta)-$*mreža*, če za vsak $x \in X$ obstaja $a \in A$, da je $d_X(x, a) \le \epsilon$ in za poljuben $b \in A$ velja $d_X(a, b) \ge \delta$.

Trditev 5.5. *Vsak metrični prostor vsebuje mrežo.*

Dokaz. Naj bo $\epsilon < \mathrm{diam}(X)$. Naj bo $\mathbb{T} = \{A \subseteq X | a \ne b \in A \Rightarrow d_X(a, b) > \epsilon\}$. Množica $\mathbb{T}$ je neprazna, saj vsebuje vsako točko prostora X. Izberimo poljubno naraščajočo verigo $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ v $\mathbb{T}$. Očitno je unija $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ zgornja meja te naraščajoče verige in leži v $\mathbb{T}$. Po Zornovi lemi obstaja maksimalni element $\mathbb{M} \in \mathbb{T}$. Vzemimo $x \in X$. Če je $d_X(x, \mathbb{M}) > \epsilon$, potem dodamo točko x v $\mathbb{M}$ in $(\mathbb{M} \cup \{x\}) \in \mathbb{T}$. Zadnje pa je protislovje z maksimalnostjo množice $\mathbb{M}$. Sledi, da je $\mathbb{M}$ $(\epsilon, \epsilon)-$mreža. □

Trditev 5.6. *Če je A $(\epsilon, \delta)-$mreža metričnega prostora X, potem je $A \overset{Q.I.}{\simeq} X$.*

Dokaz. Naj bo $i\colon A \hookrightarrow X$ vložitev. Za kvazi-izometrično konstanto λ izberimo $\lambda \ge \max\{\epsilon, 1\}$. Sedaj lahko ocenimo

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, y) - \lambda \le d_X(x, y) \le \lambda d_X(x, y) + \lambda.$$

Kar po definiciji mreže pa sledi, da je vložitev tudi kvazi-gosta, torej je kvazi-izometrija. □

Primer 5.7. Očitno je $\mathbb{Z}$ mreža v $\mathbb{R}$.

Opomba 5.8. Pogosto mrežo definiramo brez pogoja, da morajo biti točke v mreži oddaljene med seboj za vsaj δ. S tako definicijo še vedno velja vse, kar smo napisali o mrežah, pa tudi iskanje kvazi-izometričnih prostorov se poenostavi.

Definicija 5.9. Grupa G deluje na metričnem prostoru X z *izometrijami*, kadar je $d_X(a, b) = d_X(g \cdot a, g \cdot b)$ za vsaka $a, b \in X$ in vsak $g \in G$.

Definicija 5.10. Naj grupa G deluje na metričnem prostoru X. Delovanje je *povsem nezvezno*, če je za vsako kompaktno podmnožico $K \subseteq X$ množica

$$\{g \in G | g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$$

končna.

Primer 5.11. Delovanje grupe $\mathbb{Z}$ s translacijami na $\mathbb{R}$ je povsem nezvezno, saj je $\{n \in \mathbb{Z} | n + K \cap K \neq \emptyset\}$ vedno končna, ker so vsi kompakti omejeni.

Podobno je delovanje z levim množenjem končno generirane grupe G na svojem Cayleyjevem grafu $\mathrm{Cay}(G, S)$ povsem nezvezno, saj so vsi kompakti omejeni.

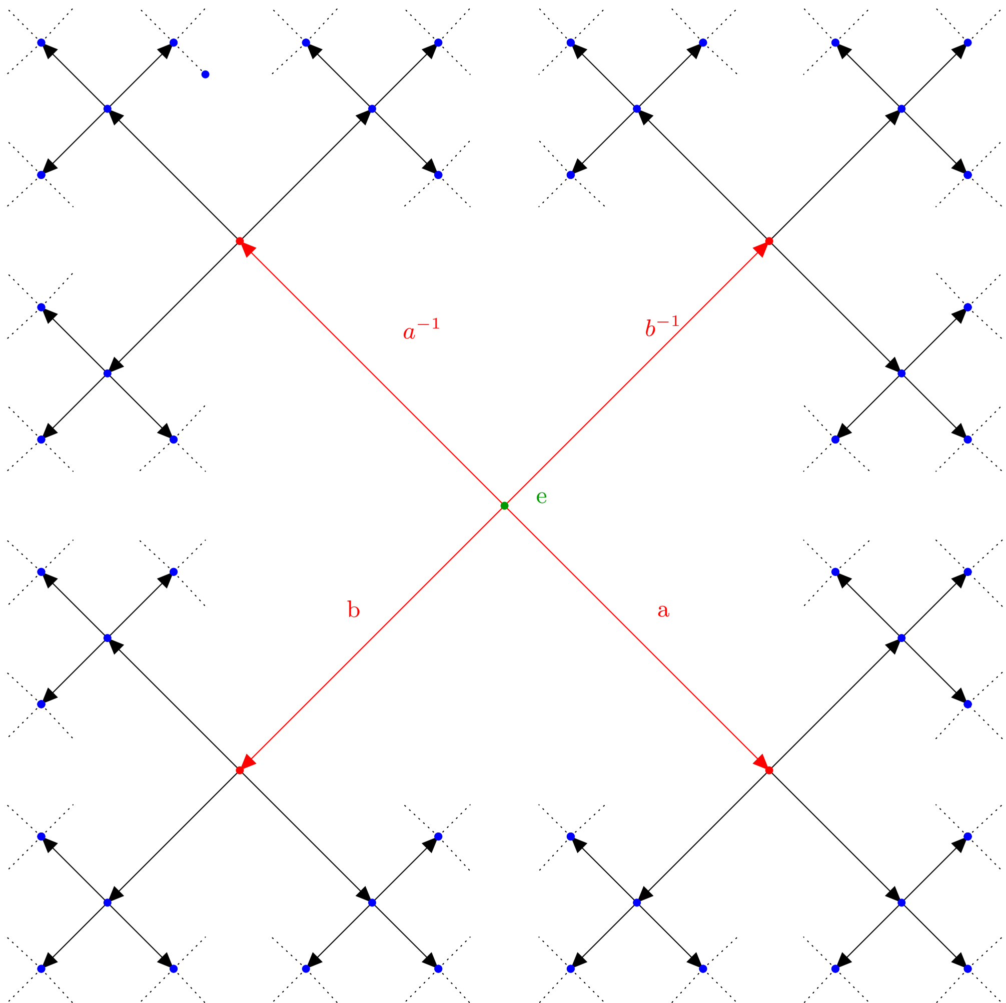
Definicija 5.12. Naj grupa G deluje na metričnem prostoru X. Delovanje je *kokompaktno*, če obstaja kompaktna množica $K \subseteq X$, da je

$$\bigcup_{g \in G} g \cdot K = X.$$

Primer 5.13. Delovanje grupe $\mathbb{Z}$ s translacijami na $\mathbb{R}$ je kokompaktno. Res, saj je

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n + [0, 1]).$$

Delovanje končno generirane grupe G na svojem Cayleyjevem grafu $\mathrm{Cay}(G, S)$ je kokompaktno, saj je $G \cdot \Delta = \mathrm{Cay}(G, S)$, kjer je Δ enota grupe skupaj s povezavami iz nje in vozlišči na teh povezavah, ki je očitno kompaktna. Na primeru grupe $\mathbb{F}_2$ je Δ obarvana rdeče.



Dokažimo sedaj enega najpomembnejših rezultatov geometrijske teorije grup, **Švarc-Milnorjevo lemo**.

Lema 5.14. *Naj bo X graf. Če grupa G deluje na X z izometrijami, povsem nezvezno in kokompaktno, tedaj veljata naslednji trditvi.*

(1) *Grupa G je končno generirana.*
(2) *Če je S končna generatorska množica za G, tedaj je preslikava*
$$f\colon V\big(\operatorname{Cay}(G,S)\big) \longrightarrow X, g \mapsto g\cdot x_0$$
kvazi-izometrija za vsak izbrani x_0.

Dokaz. Naj bo K_r krogla s središčem v x_0 in polmerom r. Konstanto $r>0$ izberimo tako, da bo
$$\bigcup_{g\in G} g\cdot K_r = X.$$
Ker je delovanje grupe G povsem nezvezno, je množica
$$S=\{g\in G | d_X(x_0, g\cdot x_0)\le 2r+1\}$$
končna. Pokažimo, da množica S generira grupo G. Oglejmo si pot γ med x_0 in $g\cdot x_0$. Označimo
$$d_X(x_0, g\cdot x_0)=k.$$
Naj bodo $x_1, x_2, \ldots, x_k = g\cdot x_0$ točke na poti γ, da je $d(x_i, x_{i+1}) = 1$, za vse $i=0,1,\ldots,k-1$. Ker je delovanje grupe kokompaktno, obstajajo točke $g_i\in G$, $i=1,2,\ldots,k-1$, da je $d_X(g_i\cdot x_0, x_i)\le r$. Po trikotniški neenakosti sledi
$$d_X(g_i\cdot x_0, g_{i+1}\cdot x_0)\le d_X(g_i\cdot x_0, x_i)+d_X(x_i,x_{i+1})+d_X(x_{i+1}, g_{i+1}\cdot x_0)\le 2r+1.$$
Ker grupa G deluje z izometrijami, je
$$d_X(g_i^{-1}g_{i+1}\cdot x_0, x_0)\le 2r+1,$$
zato je $g_i^{-1}g_{i+1}\in S$ za vse $i=0,1,2,\ldots,k-1$. Postavimo lahko $g_0=e$ in $g_k=g$ ter poračunamo
$$g=g_k=(eg_1)(g_1^{-1}g_2)\cdots(g_{k-2}^{-1}g_{k-1})(g_{k-1}^{-1}g_k). \tag{9}$$
Tako smo g zapisali kot produkt elementov iz S, zato je S res generatorska množica za grupo G.

S pomočjo enakosti (9) lahko ocenimo
$$d_X(g\cdot x_0, x_0)\ge d_S(g,e).$$
Naj bo $d_S(g,e)=n$, zato je $g=s_1s_2\ldots s_n$, kjer je $s_i\in S\cup S^{-1}$, za $i=1,2,\ldots,n$. Tedaj je
$$\begin{aligned}d_X(g\cdot x_0, x_0) &= d_X(s_1s_2\cdots s_n\cdot x_0, x_0)\\ &\le d_X(s_1s_2\cdots s_n\cdot x_0, s_1s_2\cdots s_{n-1}\cdot x_0)+\cdots+d_X(s_1\cdot x_0, x_0)\\ &\le (2r+1)n=(2r+1)d_S(g,e).\end{aligned}$$
Sledi, da je preslikava $g\mapsto g\cdot x_0$ kvazi-izometrija med $\operatorname{Cay}(G,S)$ in $G\cdot x_0$, saj je očitno kvazi-gosta.

Naj bo $x\in X$. Tedaj obstaja $g\in G$, da je $x\in g\cdot K_r$. Torej je $d_X(x, g\cdot x_0)\le r$. Zato je vložitev $G\cdot x_0$ v X kvazi-gosta, ker je, kot smo že pokazali, še kvazi-izometrična vložitev, sledi, da sta prostora kvazi-izometrična. Torej je preslikava iz točke (2) v lemi 5.14 res kvazi-izometrija. ∎

Brez dokaza navedimo še splošnejšo verzijo Švarc-Milnorjeve leme [9].

Lema 5.15. *Naj grupa G deluje na pravem, geodetskem metričnem prostoru X z izometrijami, povsem nezvezno in kokompaktno. Potem je za vsak $x_0 \in X$ preslikava*

$$f\colon G \longrightarrow X, g \mapsto g \cdot x_0,$$

kvazi-izometrija, grupa G pa je končno generirana.

Opomba 5.16. Metrični prostor je *pravi*, če so vse zaprte krogle kompaktne. Za geodetski metrični prostor glej definicijo 6.3.

Trditev 5.17. *Naj bo G končno generirana in H njena končno generirana podgrupa končnega indeksa. Tedaj sta G in H kvazi-izometrični.*

Dokaz. Oglejmo si delovanje grupe H na $\mathrm{Cay}(G, S)$ z levim množenjem, za neko izbrano končno generatorsko množico S. Ker je $[G : H] < \infty$, je delovanje tudi kokompaktno. Levo množenje je izometrija, saj je $d_S(xa, xb) = ||a^{-1}x^{-1}xb|| = ||a^{-1}b|| = d_S(a, b)$. Delovanje je povsem nezvezno, saj že G deluje povsem nezvezno na $\mathrm{Cay}(G, S)$. Torej delovanje ustreza vsem pogojem Švarc-Milnorjeve leme 5.14. Sledi, da sta grupi G in H kvazi-izometrični po točki (2). □

Predpostavka o končni generiranosti grupe H pa je odveč, kar nam pove naslednji izrek.

Izrek 5.18. *Naj bo H podgrupa grupe G končnega indeksa. Grupa H je končno generirana natanko tedaj, ko je G končno generirana.*

Dokaz. Če sledimo dokazu prejšnjega izreka, nam točka (1) Švarc-Milnorjeve leme pove, da če je G končno generirana (to zagotavlja obstoj $\mathrm{Cay}(G, S)$), je tudi H končno generirana. Sedaj dokažimo še obratno smer. Naj bo $\{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$ končna generatorska množica za grupo H. Ker je H končnega indeksa v G, lahko G zapišemo kot končno unijo odsekov $G = H \cup g_1H \cup g_2h \cup \ldots \cup g_nH$. Torej lahko vsak $g \in G$ zapišemo kot $g = g_ih$, za nek $h \in H$. Torej lahko vsak $g \in G$, izrazimo kot produkt elementov iz

$$\{g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m\}$$

in njihovih inverzov. □

Opomba 5.19. Zelo znan izrek teorije grup, ki pa ga najlažje dokažemo s topološkimi sredstvi, pravi, da je podgrupa proste grupe zopet prosta. Analogen rezultat pa ne velja za končno generirane grupe, saj ni nujno vsaka podgrupa končno generirane grupe tudi te vrste. Komutatorska podgrupa proste grupe $\mathbb{F}_2$ ni končno generirana, čeprav je podgrupa končno generirane grupe, ki je celo prosta.

Trditev 5.20. *Naj bo G končno generirana grupa in N končna podgrupa edinka. Potem je $G/N \overset{Q.I.}{\simeq} G$.*

Dokaz. Naj grupa G deluje z levim množenjem na poljubnem Cayleyjevem grafu grupe G/N. Le-ta obstaja, saj je G/N končno generirana. Grupa G deluje povsem nezvezno. Res, naj bo K poljuben kompakt v G/N. Ker je grupa diskreten metrični prostor (z definirano metriko), mora biti K končna množica. Sledi $K = \{g_1N, \ldots, g_nN\}$. Seveda je $h \cdot K \cap K \neq \emptyset, h \in G$ natanko tedaj, ko je $hg_iN = g_jN$ za neka $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Zadnje je res natanko tedaj, ko je $g_j^{-1}hg_i \in N$ oziroma $h \in g_jNg_i^{-1}$. Ker je množenje z leve in desne v grupi bijekcija, ima $g_jNg_i^{-1}$ enako število elementov kot N, torej $g_j N g_i^{-1}$ je končna. Za g_i in g_j imamo le končno mnogo izbir. Ker je

$$\{h \big| h \in G, h \cdot K \cap K \neq \emptyset\} \subseteq \bigcup_{i=1,j=1}^{n} g_j N g_i^{-1}$$

in je večja množica končna unija končnih množic, je delovanje res povsem nezvezno. Ker je

$$G/N = \bigcup_{g \in G} gN,$$

je delovanje kokompaktno.

Izberimo si poljubne $a, b, g \in G$. Poračunajmo

$$\begin{aligned} d_{G/N}\big(g(aN), g(bN)\big) &= d_{G/N}(gaN, gbN) \\ &= \min_{n_1, n_2 \in N} d_G(gan_1, gbn_2) \\ &= \min_{n_1, n_2 \in N} ||(gan_1)^{-1} gbn_2||_G \\ &= \min_{n_1, n_2 \in N} ||n_1^{-1} a^{-1} g^{-1} gbn_2||_G \\ &= \min_{n_1, n_2 \in N} ||(an_1)^{-1} bn_2||_G \\ &= \min_{n_1, n_2 \in N} d_G(an_1, bn_2) \\ &= d_{G/N}(aN, bN). \end{aligned}$$

Sledi, da grupa G deluje z izometrijami na G/N. Torej je po Švarc-Milnorjevi lemi $G/N \overset{Q.I.}{\simeq} G$. □

Trditev 5.21. *Naj bosta Γ in Γ' kvazi-izometrična grafa. Tedaj obstaja zvezna kvazi-izometrija med njima.*

Dokaz. Ker sta grafa Γ in Γ' kvazi-izometrična, sta tudi množici oglišč $V(\Gamma)$ in $V(\Gamma')$ kvazi-izometrični. Naj bo $f\colon V(\Gamma) \longrightarrow V(\Gamma')$ kvazi-izometrija. Za vsako (neusmerjeno) povezavo ab v Γ izberemo najkrajšo pot α od $f(a)$ do $f(b)$ in $f'\colon \Gamma \longrightarrow \Gamma'$ definiramo tako, da ab preslikamo v α. Preslikava f' je zvezna, ker je zvezna na povezavah in se na ogliščih predpisi ujemajo. Naj bo λ kvazi-izometrična konstanta za f. Za $x, y \in \Gamma$, $d_\Gamma(x, y) \leq 1$, velja $d_{\Gamma'}\big(f(x), f(y)\big) \leq 2\lambda$. Izberimo si poljubni točki $a, b \in \Gamma$. Naj bosta $x, y \in V(\Gamma)$ taka, da je $d_\Gamma(a, x) \leq 1$ in $d_\Gamma(b, y) \leq 1$. Velja torej

$$\begin{aligned} d_{\Gamma'}\big(f'(a), f'(b)\big) &\leq d_{\Gamma'}\big(f'(a), f'(x)\big) + d_{\Gamma'}\big(f'(x), f'(y)\big) + d_{\Gamma'}\big(f'(y), f'(b)\big) \\ &\leq 2\lambda + \lambda d_\Gamma(x, y) + \lambda + 2\lambda \\ &\leq \lambda(d_\Gamma(a, b) + 2) + 5\lambda \\ &\leq \lambda d_\Gamma(a, b) + 7\lambda. \end{aligned}$$

V drugo smer lahko ocenimo

$$\begin{aligned}
d_\Gamma(a,b) &\leq d_\Gamma(a,x) + d_\Gamma(x,y) + d_\Gamma(y,b) \\
&\leq 1 + d_\Gamma(x,y) + 1 \\
&= 2 + d_\Gamma(x,y) \\
&\leq \lambda d_{\Gamma'}\big(f'(x), f'(y)\big) + \lambda + 2 \\
&\leq \lambda\Big(d_{\Gamma'}\big(f'(x), f'(a)\big) + d_{\Gamma'}\big(f'(a), f'(b)\big) + d_{\Gamma'}\big(f'(b), f'(y)\big)\Big) + \lambda + 2 \\
&\leq 4\lambda^2 + 2\lambda d_{\Gamma'}\big(f'(a), f'(b)\big) + \lambda + 2.
\end{aligned}$$

Oziroma

$$\frac{1}{2\lambda} d_\Gamma(a,b) - \frac{4\lambda^2 + \lambda + 2}{2\lambda} \leq d_{\Gamma'}\big(f'(a), f'(b)\big).$$

Torej je f' kvazi-izometrična vložitev. Izberimo si še $x \in \Gamma'$. Tedaj obstaja $y \in V(\Gamma')$, da je $d_{\Gamma'}(x,y) \leq 1$. Ker je preslikava f kvazi-gosta, obstaja $a \in \Gamma$, da je $d_{\Gamma'}\big(y, f(a)\big) \leq \lambda$. Po definiciji je $f(a) = f'(a)$. Ocenimo še

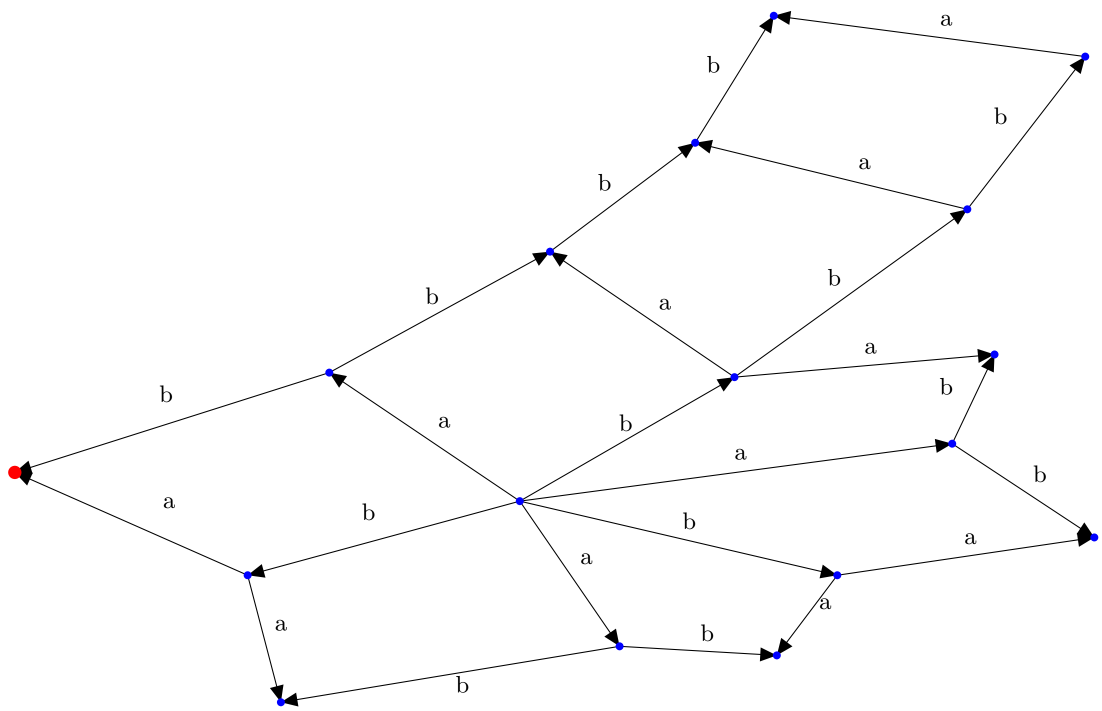
$$d_{\Gamma'}\big(x, f'(a)\big) \leq d_{\Gamma'}(x,y) + d_{\Gamma'}\big(y, f(a)\big) \leq 1 + \lambda.$$

Torej je f' tudi kvazi-gosta. Sledi, da je f' zvezna kvazi-izometrija med Γ in Γ'. $\square$

Definicija 5.22. Naj bo $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ cikel v $\mathrm{Cay}(G,S)$. *Van Kampenov diagram* cikla je v ravnino vložen usmerjeni graf $\mathbb{K}$ brez oglišč stopnje 1, brez zank in vzporednih povezav, skupaj s tako preslikavo $\phi\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathrm{Cay}(G,S)$, da se zunanji cikel grafa $\mathbb{K}$ preslika na cikel $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. V vložitvi $\mathbb{K}$ si eno izmed oglišč na robu (zunanjem ciklu) grafa $\mathbb{K}$ izberemo za bazno točko.

Van Kampenov diagram ima vse povezave označene z generatorji grupe, kateri je prirejen.

Primer 5.23. Na spodnji sliki je primer van Kampenovega diagrama za grupo $\langle a, b \big| aba^{-1}b^{-1}\rangle$. Zunanji cikel je beseda $b^{-1}b^3a^{-1}b^{-2}ab^{-1}ba^{-1}ab^{-1}ba^{-1}a$. Bazna točka je označena z rdečo barvo.



Brez dokaza navedimo naslednjo lemo [8].

Lema 5.24. *Končno generirana grupa G je končno prezentirana natanko tedaj, ko obstaja konstanta $m > 0$, da za vsak cikel v $\mathrm{Cay}(G, S)$ obstaja van Kampenov diagram, ki ima notranje cikle dolžine manjše od m.*

Trditev 5.25. *Naj bo G končno prezentirana grupa in naj bo H končno generirana grupa, ki je kvazi-izometrična grupi G. Tedaj je tudi H končno prezentirana.*

Dokaz. Naj bosta G in H končno generirani in kvazi-izometrični $G = \langle S \big| R\rangle$ in $H = \langle T \big| P\rangle$. Denimo, da je G končno prezentirana. Naj bo $f\colon \mathrm{Cay}(G, S) \longrightarrow \mathrm{Cay}(H, T)$ kvazi-izometrija s kvazi-izometrično konstanto λ. Izberimo relacijski cikel $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ v $\mathrm{Cay}(H, T)$. Ker je funkcija f kvazi-gosta, obstajajo $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$, da je $d_H\big(f(y_i), x_i\big) \leq \lambda$, za $i = 1, 2, \ldots, n$. Pokažimo, da obstaja cikel $\mathbb{M}$, ki vsebuje $f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)$. Velja omeniti, da ta cikel lahko vsebuje še precej več točk, kot le naštete. Ker je f kvazi-izometrija, je

$$\begin{aligned} d_G(y_i, y_{i+1}) &\leq d_H\big(f(y_i), f(y_{i+1})\big) \\ &\leq d_H\big(f(y_i), x_i\big) + d_H(x_i, x_{i+1}) + d_H\big(x_{i+1}, f(y_{i+1})\big) \\ &\leq 2\lambda + 1. \end{aligned}$$

Sledi, da cikel $\mathbb{M}$, ki vsebuje točke $f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)$, res obstaja.

Naj bo $\mathbb{K}$ van Kampenov diagram, prirejen grafu $\mathrm{Cay}(G, S)$, z robnim ciklom, ki vsebuje točke $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$, tako da je $\phi(\tilde{y}_i) = y_i$, za $i = 1, 2, \ldots, n$. Preslikava $\phi\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathrm{Cay}(G, S)$ je vložitev iz definicije 5.22. Ker je grupa G končno prezentirana, po lemi 5.24 obstaja $m > 0$, da so vsi notranji cikli grafa $\mathbb{K}$ krajši od m. Naj bo $\tilde{a}$ poljubna povezava grafa $\mathbb{K}$. Ta se preslika na neko povezavo a grafa $\mathrm{Cay}(G, S)$. Kvazi izometrija f preslika a na sprehod dolžine $l(a) \leq 2\lambda$. Sedaj dodajmo na povezavo $\tilde{a}$ še $l(a) - 1$ točk. To naredimo z vsako povezavo grafa $\mathbb{K}$. Tako dobimo nov graf $\mathbb{J}$, ki ima še vedno vse notranje cikle omejene z $2\lambda m$, saj smo na vsako povezavo dodali le končno mnogo točk.

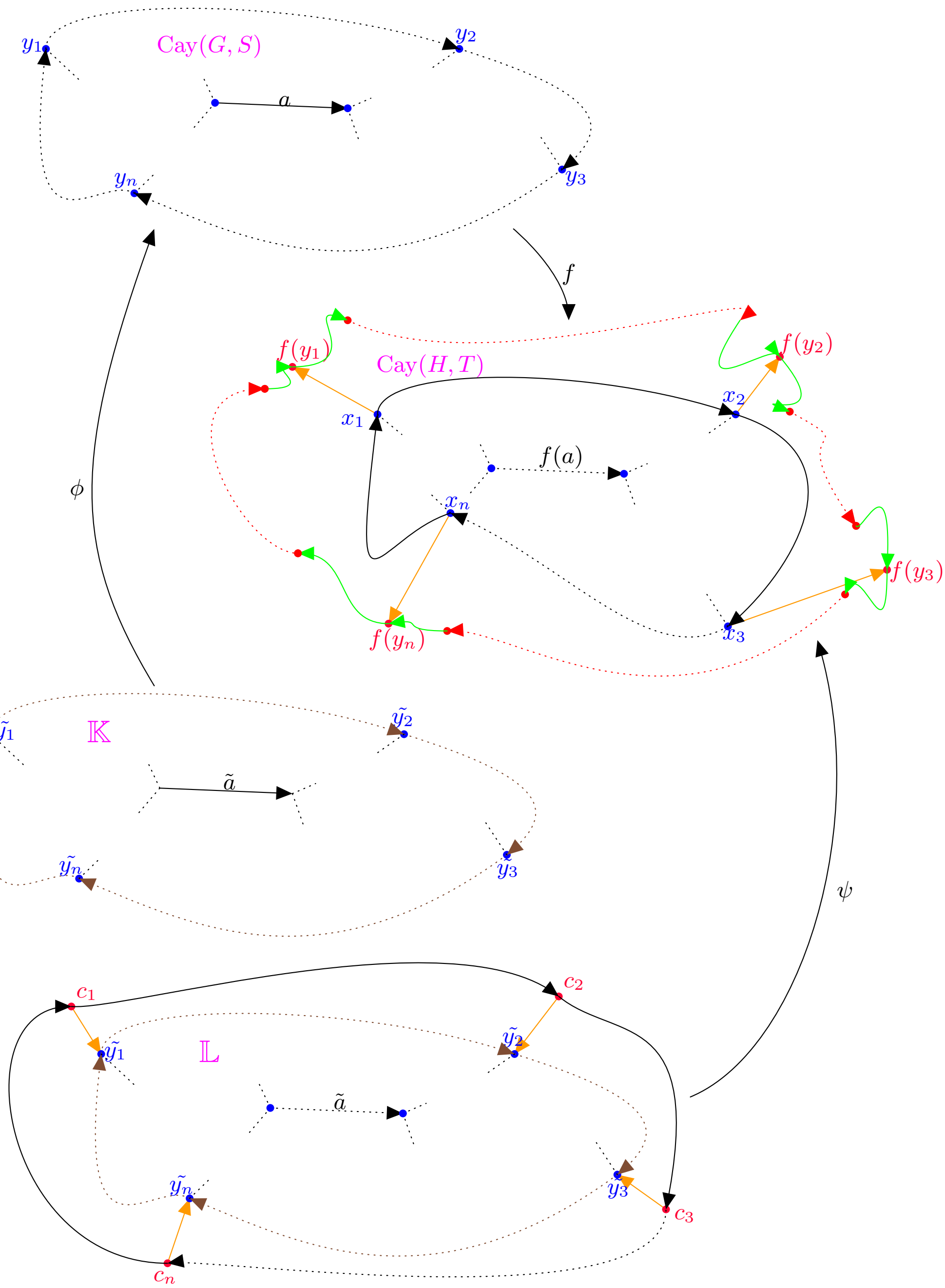
Tako dobljen graf pa še ni van Kampenov diagram grafa $\mathrm{Cay}(H, T)$. Dodajmo grafu $\mathbb{J}$ še zunanji cikel $c_1, \ldots, c_n$ tako, da sta c_i in $\tilde{y}_i$ sosednji za vse $i = 1, 2, \ldots, n$.

Označimo z $\mathbb{L}$ graf, ki ga dobimo tako, da grafu $\mathbb{J}$ dodamo vozlišča $\{c_1, \ldots, c_n\}$ in usmerjene povezave $c_i\tilde{y}_i$ in $c_{i-1}c_i$ za $i = 1, \ldots, n$ ter c_nc_1. Graf $\mathbb{L}$ je van Kampenov diagram grafa $\mathrm{Cay}(H, T)$ glede na cikel $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Vložitvena preslikava $\psi\colon \mathbb{L} \longrightarrow \mathrm{Cay}(H, T)$ je jasna iz konstrukcije diagrama $\mathbb{L}$. Ker so bili vsi notranji cikli grafa $\mathbb{J}$ omejeni z $2\lambda m$, so tudi vsi notranji cikli grafa $\mathbb{L}$ omejeni z $\max\{4, 2\lambda m\}$. Po lemi 5.24 sledi, da je tudi grupa H končno prezentirana. $\square$

6. Konci grup

Do sedaj smo našli veliko med seboj kvazi-izometričnih prostorov in tudi načine kako poiskati kvazi-izometrične prostore oz. kvazi-izometrije med njimi. V izreku 2.17 pa smo se zelo namučili, da smo pokazali, da neki prostori niso kvazi-izometrični med seboj. V zadnjem poglavju bomo poskusili ločiti prostore, ki med seboj niso kvazi-izometrični. Za prave geodetske prostore bomo uvedli dobro invarianto, ki nam jih bo pomagala ločiti med seboj. V primeru končno generiranih grup bomo šli pa še dlje, saj bomo vse končno generirane grupe karakterizirali glede na to invarianto.

Definicija 6.1. Naj bosta (X, d_X) in (Y, d_Y) metrična prostora in $f\colon X \longrightarrow Y$ preslikava med njima. Bijektivna preslikava f je *izometrija*, če za vsaka $x, x' \in X$,



velja

$$d_X(x,x') = d_Y\big(f(x), f(x')\big). \tag{10}$$

Definicija 6.2. Metrična prostora sta *izometrična*, kadar med njima obstaja izometrija.

Definicija 6.3. Naj bo (X,d) metrični prostor in $L \geq 0$. Slika neke izometrije $\gamma\colon [0,L] \longrightarrow X$ je *geodetka* z začetkom v $\gamma(0)$ in koncem $\gamma(L)$. Pravimo, da sta $\gamma(0)$ in $\gamma(L)$ povezani z *geodetko*. Metrični prostor, v katerem lahko vsaki dve točki povežemo z geodetko, je *geodetski metrični prostor*.

Primer 6.4. Naj bo $n \in \mathbb{N}$. Evklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je geodetski prostor. Geodetke so natanko vse daljice in poljubni dve točki lahko povežemo z daljico. Če $\mathbb{R}^2$ odvzamemo eno točko, ni več geodetski prostor, saj tedaj za poljubni točki na nasprotnih straneh premice skozi odvzeto točko ne obstaja geodetka, ki bi ju povezovala.

Velja še omeniti, da v naši definiciji zahtevamo, da so prostori izometrični globalno, medtem ko ponavadi zahtevamo lokalno izometričnost.

Definicija 6.5. Naj bo $f: X \longrightarrow Y$ preslikava med topološkima prostoroma X in Y. Če je praslika vsakega kompakta kompaktna množica, je preslikava f *prava* preslikava.

Definicija 6.6. Naj bo X geodetski prostor. Naj bosta $\gamma_1, \gamma_2: [0, \infty) \longrightarrow X$ zvezni pravi poti. Pravimo, da dve pravi poti γ_1 in γ_2 *konvergirata proti istemu koncu prostora* X, če za vsako kompaktno podmnožico $B \subseteq X$, obstaja tak $t \in [0, \infty)$, tako da $\gamma_1\big([t, \infty)\big)$ in $\gamma_2\big([t, \infty)\big)$ ležita v isti komponenti za povezanost s potmi prostora $X \setminus B$. S temi identifikacijami je določena ekvivalenčna relacija na množici zveznih pravih poti.

Če je $\gamma: [0, \infty) \longrightarrow X$ zvezna prava pot, lahko označimo z $[\gamma]$ njen ekvivalenčni razred, ki ga imenujemo *konec*. Množico ekvivalenčnih razredov

$$\mathrm{Ends}(X) = \{[\gamma] \mid \gamma: [0, \infty) \longrightarrow X \text{ je prava pot v } X\}$$

imenujemo *prostor koncev prostora* X. Število elementov množice $\mathrm{Ends}(X)$ bomo označili z $e(X)$.

Zaporedje koncev $\{[\gamma_n]\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira proti koncu $[\gamma]$ natanko tedaj, če za vsako kompaktno podmnožico $C \subseteq X$ obstaja zaporedje r_n, da $\gamma_n\big([r_n, \infty)\big)$ in $\gamma\big([r_n, \infty)\big)$ ležita v isti komponenti za povezanost s potmi prostora $X \setminus C$ za vsak dovolj velik $n \in \mathbb{N}$.

Opomba 6.7. Na množici $\mathrm{Ends}(X)$ lahko definiramo topologijo tako, da predpišemo zaprte množice. Množica $B \subset \mathrm{Ends}(X)$ je zaprta, če velja:

$$\text{če } [\gamma_n] \in B \text{ za vse } n \in \mathbb{N}, \text{ potem iz } [\gamma_n] \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} [\gamma] \text{ sledi } [\gamma] \in B.$$

Trditev 6.8. *Konvergirati k istemu koncu je ekvivalenčna relacija na množici pravih poti.*

Dokaz. Refleksivnost in simetričnost sta očitni. Pokažimo, da je relacija tranzitivna. Denimo, da pravi poti $\alpha: [0, \infty) \longrightarrow X$ in $\beta: [0, \infty) \longrightarrow X$ konvergirata k istemu koncu in poti $\beta: [0, \infty) \longrightarrow X$ ter $\gamma: [0, \infty) \longrightarrow X$ konvergirata k istemu koncu. Tedaj za poljubno kompaktno podmnožico X obstaja n_1, da sta $\alpha\big([n_1, \infty)\big)$ in $\beta\big([n_1, \infty)\big)$ v isti komponenti za povezanost s potmi. Obstaja še n_2, da sta $\beta\big([n_2, \infty)\big)$ in $\gamma\big([n_2, \infty)\big)$ v isti komponenti za povezanost s potmi. Ker je biti v isti komponenti za povezanost s potmi ekvivalenčna relacija, sta $\alpha\big([n_3, \infty)\big)$ in $\gamma\big([n_3, \infty)\big), n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, v isti komponenti za povezanost s potmi, torej je relacija konvergirati k istemu koncu tranzitivna. $\square$

Opomba 6.9. V definiciji koncev smo delali s pravimi potmi. To je potrebna predpostavka, sicer bi vsi omejeni metrični prostori imeli en konec, česar pa si ne želimo.

Mi se s konci ne bomo ukvarjali v vsej splošnosti, ampak bomo dokazali vse trditve le za grafe. Zgornjo definicijo najlažje razumemo na sledeči način. Imejmo graf Γ in izberimo vozlišče $A \in \Gamma$. Naj bo $K_n = K(A, n)$ krogla s središčem v A in polmerom n. Sedaj si oglejmo množico krogel $\{K_n\}_{n\geq 1}$. Število koncev je tedaj enako

$$\lim_{n\to\infty} ||\Gamma \setminus K_n||,$$

kjer $||\Gamma\setminus K_n||$ označuje število neomejenih komponent za povezanost s potmi prostora $\Gamma \setminus K_n$.

Lema 6.10. *Naj bo Γ lokalno končen graf in $m < n$ naravni števili. Tedaj je*

$$||\Gamma \setminus K_m|| \leq ||\Gamma \setminus K_n||.$$

Dokaz. Naj bo C neomejena povezana komponenta grafa $\Gamma\setminus K_m$. Ko odstranimo K_n, ostane C bodisi povezana bodisi ne. Torej vsaka neomejena, povezana komponenta grafa $\Gamma\setminus K_m$ prispeva vsaj eno neomejeno, povezano komponento h grafu $\Gamma\setminus K_n$. □

Opomba 6.11. V lokalno končnem grafu Γ je $||\Gamma\setminus K_n||$ vedno končno število. Lema 6.10 implicira, da $\lim_{n\to\infty} ||\Gamma \setminus K_n||$ res obstaja, saj je $||\Gamma \setminus K_n||$ nepadajoče zaporedje naravnih števil. Sledi, da limita $\lim_{n\to\infty} ||\Gamma \setminus K_n||$ obstaja, ni pa nujno končna.

Trditev 6.12. *Naj bo Γ graf. Naj bo $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ množica krogel s središčem v točki $A \in V(\Gamma)$ in polmerom n. Število koncev grafa Γ je enako $\lim_{n\to\infty} ||\Gamma \setminus K_n||$.*

Dokaz. Naj bosta γ in γ' poti, ki predstavljata isti konec prostora Γ. Torej za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja t_n, da $\gamma\big([t_n, \infty)\big)$ in $\gamma'\big([t_n, \infty)\big)$ v $\Gamma \setminus K_n$ ležita v isti neomejeni komponenti za povezanost s potmi. Sledi, da je

$$e(\Gamma) \leq \lim_{n\to\infty} ||\Gamma \setminus K_n||.$$

Pokažimo še obratno neenakost. Naj bo bosta γ in γ' poti, za kateri obstaja zaporedje $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, da $\gamma\big([t_n, \infty)\big)$ in $\gamma'\big([t_n, \infty]\big)$ ležita v isti neomejeni komponenti za povezanost s potmi prostora $\Gamma\setminus K_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ (če ne bi obstajali, je neenakost na prazno izpolnjena). Naj bo B poljubna kompaktna množica. Ker so vse kompaktne množice omejene, obstaja dovolj velik $m \in \mathbb{N}$, da je $\gamma\big([t_m, \infty)\big), \gamma'\big([t_m, \infty)\big) \subset \Gamma \setminus K_n \subset \Gamma \setminus B$. Ker je bila množica B poljubna, sledi, da γ in γ' predstavljata isti konec prostora Γ. □

Posledica 6.13. *Število neomejenih komponent za povezanost s potmi $\lim_{n\to\infty} ||\Gamma\setminus K_n||$ je neodvisno od izbire točke A.*

Dokaz. Dokaz trditve 6.12 nam pove da je število komponent za povezanost s potmi neodvisno od izbire točke A. Iz tega pa je takoj jasno, da je tudi množica neomejenih komponent za povezanost s potmi $\lim_{n\to\infty} ||\Gamma \setminus K_n||$ neodvisna od izbire bazne točke A. □

Opomba 6.14. Zgornja trditev nam podaja ekvivalentno definicijo pojma števila koncev grafa Γ.

Konci grup so kvazi-izometrična invarianta, kar nam pove naslednja trditev.

Trditev 6.15. *Naj bosta X in Y grafa. Naj bo $f: X \longrightarrow Y$ kvazi-izometrija. Tedaj f inducira bijektivno preslikavo $F\colon \operatorname{Ends}(X) \longrightarrow \operatorname{Ends}(Y)$.*

Dokaz. Naj bo $\alpha\colon [0,\infty) \longrightarrow X$ zvezna prava pot v prostoru X in označimo njen ekvivalenčni razred kot $[\alpha] \in \mathrm{Ends}(X)$. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je kvazi-izometrija f zvezna. Naj bo $f(\alpha)$ slika poti α. Definirajmo $F\big([\alpha]\big) = [f(\alpha)]$. Najprej moramo preveriti, da je tako definirana preslikava F res dobro definirana. Naj bo λ kvazi-izometrična konstanta. Preslikava F je dobro definirana, saj se poti dolžine k preslikajo na poti dolžine največ $\lambda(k+1)$. Analogno definiramo preslikavo

$$G\colon Y \longrightarrow X,\ G\big([\beta]\big) = [g(\beta)],$$

kjer smo z g označili kvazi-inverz za f. Poračunamo lahko

$$G\big(F([\alpha])\big) = G\big([f(\alpha)]\big) = [g\big(f(\alpha)\big)] = [\alpha].$$

Analogno poračunamo še, da je $F \circ G = id$, torej je F bijekcija in imata X in Y res enako število koncev. □

Opomba 6.16. Trditev 6.15 velja tudi za prave geodetske prostore.

Posledica 6.17. *Kvazi-izometrični prostori imajo enako število koncev.*

Tako smo dobili neko invarianto, s pomočjo katere bomo poskusili ločiti različne prave geodetske prostore oziroma grupe.

Definicija 6.18. Naj bo G končno generirana grupa z množico generatorjev S. Naj bo $\mathrm{Cay}(G,S)$ njej prirejen Cayleyjev graf. Tedaj so $\mathrm{Ends}\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big)$ konci grupe G, glede na generatorsko množico S, ki jih bomo označili kar z $\mathrm{Ends}(G)$. Število koncev grupe G bomo označili z $e(G)$.

Prepričati se moramo še, da je zgornja definicija dobra, tj. $\mathrm{Ends}(G)$ je neodvisno od izbrane množice generatorjev S.

Trditev 6.19. *Naj bo G končno generirana grupa in S ter T dve končni množici generatorjev zanjo. Naj bosta $\mathrm{Cay}(G,S)$ in $\mathrm{Cay}(G,T)$ grupi G prirejena Cayleyjeva grafa. Tedaj je*

$$e\big(\mathrm{Cay}(G,T)\big) = e\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big).$$

Dokaz. To je posledica trditve 6.15, saj imajo kvazi-izometrični prostori enako število koncev. □

Posledica 6.20. *Definicija koncev grup je neodvisna od množice generatorjev, torej je dobro definirana.*

Opomba 6.21. Dobili smo geometrično invarianto, ki nam bo pomagala ločiti končno generirane grupe, tudi do izomorfizma natančno. Izomorfni grupi sta seveda kvazi-izometrični.

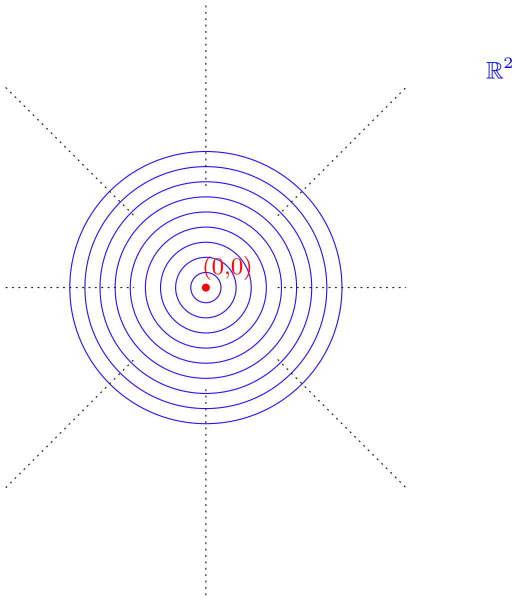
Izrek 6.22. *Naj bo G končno generirana grupa. Grupa G ima $0, 1, 2$ ali neskončno mnogo koncev.*

Dokaz. Če je grupa G končna, smo že pokazali, da ima 0 koncev. Predpostavimo torej, da je neskončna. Predpostavimo še, da ima grupa G natanko $k \in \mathbb{N}$ koncev in naj bo S neka njena končna generatorska množica. Torej obstaja $n \in \mathbb{N}$, da ima $\mathrm{Cay}(G,S) \setminus K_n$ natanko k neomejenih komponent za povezanost s potmi. Če bi v $\mathrm{Cay}(G,S) \setminus K_n$ bila še kaka omejena komponenta za povezanost s potmi, lahko le te odmislimo. Ker je grupa G neskončna in končno generirana, obstaja $g \in G$ v neki neomejeni komponenti za povezanost s potmi grafa $\mathrm{Cay}(G,S) \setminus K_n$, tako da je

$d(e,g) > 2n$. Tedaj je $gK_n \cap K_n = \emptyset$. Ker je množenje v Cayleyjevem grafu hkrati izomorfizem grafa samega nase, lahko sklepamo naslednje. Ker leži gK_n v neomejeni komponenti za povezanost s potmi grafa $\mathrm{Cay}(G,S) \setminus K_n$, razdeli to komponento na vsaj k komponent za povezanost s potmi, tako kot je to storila K_n v grafu $\mathrm{Cay}(G,S)$, od katerih je vsaj $k-1$ neomejenih. Omejena komponenta se lahko pojavi le med K_n in gK_n. Če postavimo $C = K_n \cup gK_n$, ima $e(\mathrm{Cay}(G,S) \setminus C)$ vsaj $2k-2$ neomejenih komponent za povezanost s potmi. Sledi, da je $e\big(\mathrm{Cay}(G,S)\big) \geq 2k-2 > k$ v primeru, ko je $k \geq 3$. Torej je $k \leq 2$.

Pokažimo še, da res obstajajo grupe z $0, 1, 2$ in neskončno mnogo konci.

- Vsaka končna grupa ima 0 koncev.
- Grupa $\mathbb{R}$ ima dva konca.
- Grupa $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \overset{Q.I.}{\simeq} \mathbb{R}^2$ ima en konec. Najlažje si dokaz te trditve predstavljamo geometrično. Izberimo si poljubni dve točki $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus K_n, n \in \mathbb{N}$. Tedaj očitno obstaja pot med njima, torej ima izbran prostor res natanko 1 konec.



- Prosta grupa $\mathbb{F}_2$ ima neskončno mnogo koncev. Res, za vsako zaporedje $s_1, s_2, \ldots, s_{2t} \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}, s_i s_{i+1} \neq 1, i = 1, 2, \ldots, 2t-1$ dobimo pot $s_1, s_2, \ldots, s_{2t}$. Te poti so v različnih komponentah za povezanost s potmi prostora $\mathrm{Cay}(\mathbb{F}_2, \{a,b\}) \setminus K_t$, sicer bi našli cikel oziroma relacijo med elementi, kar pa v prosti grupi ni mogoče. Ko večamo t, se veča število različnih komponent za povezanost s potmi (saj se veča število omenjenih poti), torej v limiti imamo neskončno mnogo komponent za povezanost s potmi, zato ima grupa $\mathbb{F}_2$ res neskončno mnogo koncev.

$\square$

Trditev 6.23. *Naj bo G končno generirana grupa. Grupa G ima 0 koncev natanko tedaj, kadar je množica vozlišč grafa $\mathrm{Cay}(G,S)$ končna.*

Dokaz. Denimo, da je G končna grupa. Tedaj je njen Cayleyjev graf končen, saj ima le končno mnogo vozlišč. Za kompaktno množico K si lahko izberemo cel graf, torej je $\mathrm{Cay}(G,S) \setminus K$ prazna, torej so vse poti v isti komponenti za povezanost s potmi. Sledi, da ima ta graf 0 koncev.

Naj bo graf $\mathrm{Cay}(G,S)$ brez koncev. Denimo, da je graf $\mathrm{Cay}(G,S)$ neomejen. Oglejmo si $\mathrm{Cay}(G,S) \setminus K$, kjer je K poljuben kompakt, ki je seveda omejen. Ker je lokalno končen, ima graf vsaj eno neomejeno komponento za povezanost s potmi za vsak kompakt K. Slednje pa ni možno, saj bi potem $\mathrm{Cay}(G, S)$ imel vsaj 1 konec. Sledi, da je $\mathrm{Cay}(G, S)$ omejen. Ker je lokalno končen, ima končno mnogo vozlišč. $\square$

Tako smo karakterizirali vse grupe z 0 konci. Presenetljivo pa lahko karakteriziramo tudi vse grupe z 2 in neskončno konci, posledično pa tudi vse grupe z 1 koncem.

Dokazali bomo glavni izrek tega poglavja, ki bo karakteriziral vse končno generirane grupe z dvema koncema.

Izrek 6.24. *Končno generirana grupa G ima dva konca natanko tedaj, ko vsebuje podgrupo končnega indeksa izomorfno $\mathbb{Z}$.*

Dokaz. Najprej lahko predpostavimo, da je grupa G neskončna, saj smo končne grupe že karakterizirali glede na število koncev.

Naj ima grupa G dva konca in naj bo S njena končna množica generatorjev. Obstaja krogla K s središčem v enoti, taka da ima $\mathrm{Cay}(G, S) \setminus K$ natanko dve neomejeni komponenti A in B. Naj bo $C = K \cup \{\text{vse omejene komponente } \mathrm{Cay}(G, S) \setminus K\}$.

Oglejmo si delovanje grupe G na $\mathrm{Ends}(G, S)$ z množenjem z leve. Naj bo α prava pot, ki predstavlja konec za neomejeno komponento A, β pa prava pot, ki predstavlja konec za neomejeno komponento $B, \mathrm{Ends}(G, S) = \{[\alpha], [\beta]\}$.

Delovanje grupe G lahko gledamo kot homomorfizem $\phi \colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathrm{Ends}(G)\big)$ med grupo G in množico avtomorfizmov grupe $\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Ends}(G, S)\big)$.

Jasno je $|\mathrm{Aut}\big(\mathrm{Ends}(G, S)\big)| = 2$, saj ima $\mathrm{Ends}(G, S)$ le dva elementa. Po znanem izreku je

$$\mathrm{Im}(\phi) = G/\mathrm{Ker}(\phi).$$

Ker je grupa G neskončna, mora biti tudi jedro delovanja neskončno, saj je indeksa največ 2. Graf $\mathrm{Cay}(G, S)$ je lokalno končen, torej je tudi množica C končna. Ker je množica C končna, obstaja le končno mnogo takih elementov $g \in G$, da je $g \cdot C \cap C \neq \emptyset$. To drži, saj množenje z leve v Cayleyjevem grafu pomeni neko končno translacijo, ker pa je množica C končna, sledi, da obstaja le končno translacij, katerih slike bodo sekale C.

Sedaj si lahko izberemo element $\gamma \in \mathrm{Cay}(G, S) \setminus C$, da je $\gamma C \subseteq A$ (oziroma B, brez škode za splošnost), ki trivialno deluje na $\mathrm{Ends}(G, S)$. Tak γ res obstaja, saj je $\{g | gC \cap C \neq \emptyset\}$ končna in je $\mathrm{Ker}(\phi)$ neskončno. Pokažimo sedaj, da ima γ neskončen red. Delovanje γ na $\mathrm{Ends}(G, S)$ je trivialno, torej je $\gamma A \subseteq A$. Ker je grupno množenje bijekcija in je $\gamma C \subset A$, ne more biti $\gamma A = A$. Torej enakost ni možna, sledi $\gamma A \subsetneqq A$.

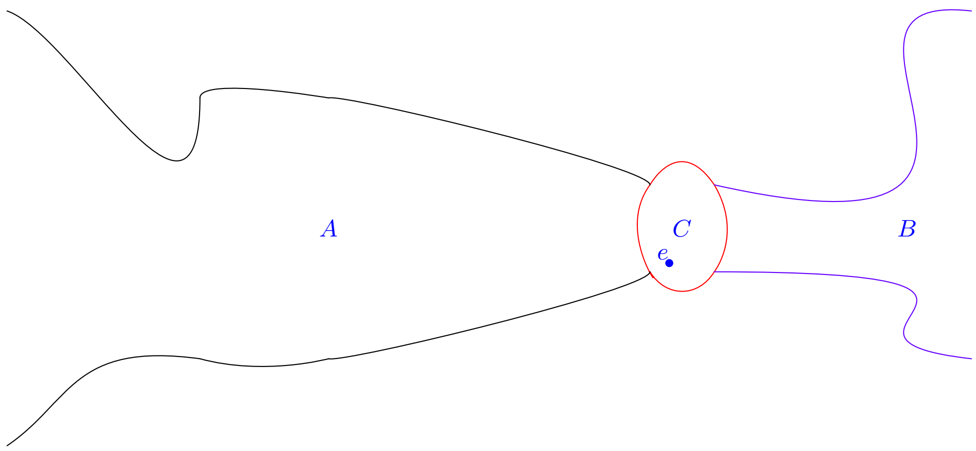
Analogno lahko sklepamo

$$A \supsetneqq \gamma A \supsetneqq \gamma^2 A \supsetneqq \dots \tag{11}$$

Sklepamo lahko, da je $\gamma^k A \neq A$ za vsak $k \in \mathbb{N}$, torej je γ neskočnega reda.

Seveda je

$$\mathrm{Cay}(G, S) = A \cup B \cup C.$$



Grupno množenje je bijekcija. Posledično je

$$\mathrm{Cay}(G,S) = \gamma^n A \cup \gamma^n B \cup \gamma^n C. \tag{12}$$

Naj bo $a \in A$. Ker je $\gamma C \subset A$, sledi $\gamma^n \subset \gamma^{n-1}A$. Denimo, da obstaja $m \in \mathbb{N}$ in $p \in A$, da je $d(p,e) = m$ ter $p \in \gamma^n C$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Množica C je povezana s potmi in končna, torej ja taka tudi $\gamma^n C$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Torej obstaja $M \in \mathbb{N}$, da je $d(\gamma^n C, e) \leq M$, za vsak $n \in \mathbb{N}$. Naj bo

$$H = \{x \in A \big| d(x,e) \leq M\}.$$

Jasno je

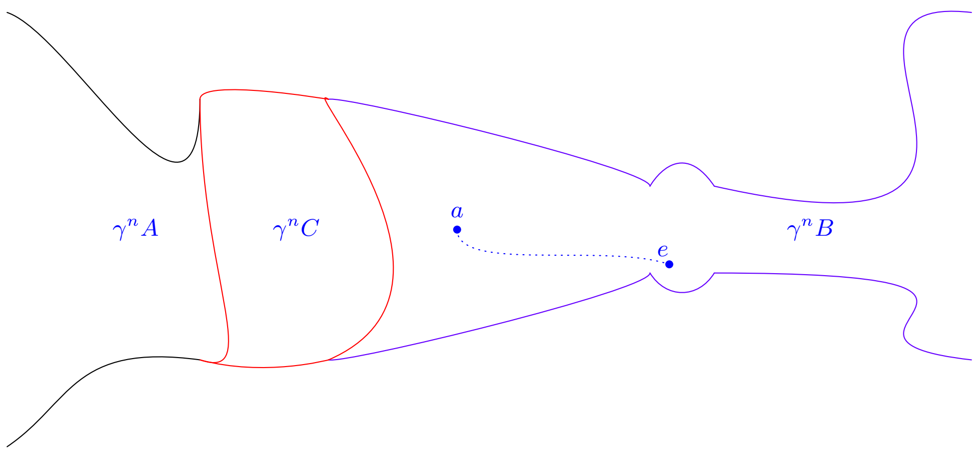
$$\gamma^n C \subseteq H$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je $\mathrm{Cay}(G,S)$ lokalno končen graf, je množica H končna. Izrazimo lahko

$$A \setminus \gamma^n A \subseteq H.$$

Podmnožica končne množice je končna, zato je $|A \setminus \gamma^n A| \leq |H|$, za vsak $n \in \mathbb{N}$. Zaporedje (11) nam pove, da je zaporedje $\{|A \setminus \gamma^n A|\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotono naraščajoče, torej neomejeno. Zašli smo v protislovje, torej taka $m \in \mathbb{N}$ in $p \in A$ ne obstajata.

Sedaj lahko izberemo $n \in \mathbb{N}$, da so vsi elementi iz $\gamma^n C$ bolj oddaljeni od e kot a. Ker C separira $\mathrm{Cay}(G,S)$ na dve komponenti, tudi $\gamma^n C$ separira $\mathrm{Cay}(G,S)$ na dve komponenti; na $\gamma^n A$ in $\gamma^n B$. Naj bo α najkrajša pot od a do e.



Po definiciji n je $\alpha \subset \gamma^n B$. Torej $a \notin \gamma^n A$ in posledično $a \notin \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \gamma^n A$, torej je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \gamma^n A = \emptyset. \tag{13}$$

Pokažimo še, da je

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} (\gamma^n A \cup \gamma^n C) = \emptyset. \tag{14}$$

Naj bo $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_0} (\gamma^n A \cup \gamma^n C)$. Denimo, da obstaja neskončno množica $\Lambda \subseteq \mathbb{N}$, da je $x \in \gamma^k C$, za vse $k \in \Delta$. Ker je množica C končna, obstajajo $k, l \in \Lambda$ in $c \in C$, da je $\gamma^k c = \gamma^{kl} c$. Sledi, da je $\gamma^{|k-l|} = e$, kar pa ni mogoče, saj ima γ neskončen red.

Sledi, da obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da $x \notin \gamma^n C$ za vsak $n \geq n_0$. Torej je $x \in \bigcap\limits_{n\geq n_0}^{\infty} (\gamma^n A)$. Zaporedje (11) in enačba (13) nam povesta, da je

$$\bigcap_{n\geq n_0}^{\infty} (\gamma^n A) = \emptyset.$$

Zato tak x ne obstaja in posledično velja enakost (14). Sledi

$$\mathrm{Cay}(G, S) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} (\gamma^n A \cup \gamma^n C)^C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \gamma^n B. \tag{15}$$

Tudi zaporedje

$$\ldots \subsetneqq \gamma^{-(n+1)} B \subsetneqq \gamma^{-n} B \subsetneqq \ldots \tag{16}$$

je padajoče. Iz enakosti (15) in (16) sledi, da obstaja $m \in \mathbb{N}$, da je $\gamma^{-m} C \subseteq B$. Sedaj lahko ponovimo sklep za enakost (13), ki nam da

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \gamma^{-n} B = \emptyset. \tag{17}$$

Analogno kot enakost (15) lahko s pomočjo enakosti (16) in (17) dokažemo

$$\mathrm{Cay}(G, S) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} \gamma^{-n} A. \tag{18}$$

Naj bo $D = A \backslash \gamma A$. Denimo, da je množica $\gamma B \cap A$ neskončna. Tedaj zaradi lokalne končnosti grafa $\mathrm{Cay}(G, S)$ obstaja pot v $\gamma B \cap A$, ki predstavlja isti ekvivalenčni razred kot γB. Zato je $[A] = [\gamma B]$, kar pa nasprotuje temu, da je delovanje γ na $\mathrm{Ends}(G, S)$ trivialno. Torej je $\gamma B \cap A$ končna. Jasno je $\gamma C \cap A$ končna. Ker je množenje z γ bijekcija, je

$$A \setminus \gamma A = (\gamma B \cup \gamma C) \cap A = (\gamma B \cap A) \cup (\gamma C \cap A),$$

kar je unija dveh končnih množic, torej je D končna množica.

Izberimo poljuben $z \in \mathrm{Cay}(G, S)$. Zaradi (11), (13) in (18) obstaja $n \in \mathbb{Z}$, da je $z \in \gamma^n A$ in $z \notin \gamma^{n+1} A$. Sledi, da je

$$z \in \gamma^n A \setminus \gamma^{n+1} A.$$

Po množenju z γ^{-n} dobimo

$$\gamma^{-n} z \in A \setminus \gamma A$$

oziroma

$$z \in \gamma^n(A \setminus \gamma A) = \gamma^n D.$$

Sledi, da je

$$\mathrm{Cay}(G, S) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^n D.$$

Zadnja enakost je ravno pokritje grupe G z odseki po podgrupi $\langle\gamma\rangle$. Množica D je končna, torej je $\langle\gamma\rangle = \mathbb{Z}$ končnega indeksa.

Denimo sedaj, da ima grupa G podgrupo končnega indeksa izomorfno $\mathbb{Z}$. Tedaj je po izreku 5.17 grupa G kvazi-izometrična grupi $\mathbb{Z}$, ki ima natanko dva konca, torej ima tudi G dva konca. □

Opomba 6.25. Dokaz bi lahko zaključili tudi z naslednjim sklepom. Iz dokazanih enakosti sledi

$$\mathrm{Cay}(G, S) = \gamma^{-n} B \cup \big(\bigcup_{-n\le i\le n} \gamma^i D\big) \cup \gamma^n A,$$

kar nam da

$$\mathrm{Cay}(G, S) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \gamma^n D.$$

Brez dokaza navedimo še Stallingsovo karakterizacijo grup z neskočno mnogo konci [13], [12].

Izrek 6.26. *Končno generirana grupa ima neskočno mnogo koncev natanko tedaj, ko je netrivialen amalgamiran produkt nad končno grupo, ali pa je netrivialna HNN−razširitev nad končno grupo.*

Uspeli smo karakterizirati vse grupe z 0 in 2 koncema. Grupe z neskončno konci karakterizira Stallingsov izrek. Končno generirane grupe, ki ne sodijo v nobeno izmed omenjenih kategorij, pa imajo 1 konec.

S pomočjo izreka 6.24 lahko iz Caylejevega grafa razberemo, če grupa vsebuje podgrupo izomorfno $\mathbb{Z}$ končnega indeksa. Jasno je, da prosta grupa $\mathbb{F}_2$ ne vsebuje podgrupe izomorfne $\mathbb{Z}$ končnega indeksa, saj ima neskočno mnogo koncev. Tudi $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ne vsebuje podgrupe izomorfne $\mathbb{Z}$ končnega indeksa, čeprav očitno vsebuje podgrupo izomorfno $\mathbb{Z}$, saj ima 1 konec.

Literatura

[1] B. H. Bowditch, *A course on geometric group theory*, verzija oktober 2005, [ogled 12. 8. 2012], dostopno na `http://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/280-2009/bhb-ggtcourse.pdf`.

[2] M. R. Bridson in A. Haefliger, *Metric spaces of nonpositive curvature*, Springer, Berlin, 1999.

[3] K. U. Bux, *Groups and spaces. Vol. 1, Groups*, verzija januar 2007, [ogled 12. 8. 2012], dostopno na `http://www.math.uni-bielefeld.de/~bux/ggt_notes.pdf`.

[4] A. Eisenberg, *Geometric group theory notes*, verzija 22. 12. 2010, [ogled 12. 8. 2012], dostopno na `http://www.tufts.edu/~kruane01/teaching/GGTNotes.pdf`.

[5] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, v: Geometric group theory **2** (ur. G. A. Niblo in M. A. Roller), London Mathematical Society lecture note series **182**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993, str. 1–295.

[6] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, v: Essays in group theory (ur. S. Gersten), Mathematical Sciences Research Institute publications **8**, Springer, New York, 1987, str. 75–265.

[7] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, New York, 2010.

[8] E. R. van Kampen, *On some lemmas in the theory of groups*, Amer. J. Math. **55** (1933) 268–273.

[9] C. Löh, *Geometric group theory : an introduction*, 13. 7. 2011, [ogled 12. 8. 2012], dostopno na http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/lecture_notes.pdf.

[10] J. Meier, *Groups, graphs and trees : an introduction to the geometry of infinite groups*, London Mathematical Society student texts **73**, Cambridge University Press, New York, 2008.

[11] P. Papazoglou, *Geometric group theory*, verzija 11. 3. 2012, [ogled 12. 8. 2012], dostopno na http://www.maths.ox.ac.uk/system/files/coursematerial/2011/2409/19/Geometric_Group_Theory.pdf.

[12] J. R. Stallings, *Group theory and three-dimensional manifolds*, Yale mathematical monographs **4**, Yale University Press, New Haven, 1971.

[13] J. R. Stallings, *On torsion-free group with infinitely many ends*, Ann. of Math. **88** (1968) 312–334.

[14] *Geometric group theory*, [ogled 12. 8. 2012], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_group_theory.

[15] *Van Kampen diagram*, [ogled 12. 8. 2012], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Van_Kampen_diagram.