UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Gregor Senica

Izoperimetrični problem

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Miran Černe

Ljubljana, 2012

Kazalo

1. Uvod	4
1.1. Dualnost	5
2. Elementarna geometrija	5
2.1. Steinerjev nepopolni dokaz	11
3. Vezani ekstrem	17
3.1. Dokaz za n-kotnike	18
3.2. Variacijski račun	20
4. Vektorji	21
5. Fourierove vrste	25
6. O splošnejših problemih	29
Literatura	29

Izoperimetrični problem

Povzetek

Izoperimetrični problem pri danem obsegu sprašuje po liku z največjo ploščino. To je dvodimenzionalni problem, sprašuje po liku v ravnini. Opisani so različni pristopi reševanja tega problema. Pojavi se vprašanje obstoja optimalnega lika. Rešitev je krog, poleg tega pa zraven dobimo še izoperimetrično neenakost $o^2 \geq 4\pi p$, kjer je o dan obseg in p ploščina. Enačaj velja samo za krog. Na podlagi te neenakosti definiramo izoperimetrični kvocient, ki pove, kako blizu maksimalne ploščine je ploščina posameznega lika. Rešujemo lahko tudi dualen problem: med vsemi liki podane ploščine iščemo tistega z najmanjšim obsegom. Dualen problem je ekvivalenten prvotnemu.

The isoperimetric problem

Abstract

At the fixed perimeter, isoperimetric problem asks for a figure with the maximal area. This is its two dimensional variant, it asks for a figure in a plane. We take a look at solving the problem in different ways. We consider existence of an optimal figure. Besides the solution, a circle, we also get so called isoperimetric inquality $o^2 \geq 4\pi p$, where o stands for the given perimeter and p for the area. Equality holds only for the circle. Using this inequality, we define isoperimetric quotient which shows how close to the maximal area is a particular figure. We can also deal with the dual isoperimetric problem: Among all figures with given area, determine the one that has the shortest perimeter. Dual problem is equivalent to the original isoperimetric problem.

Math. Subj. Class. (2010): 51M04, 52B60

Ključne besede: obseg, ploščina, lik, n-kotnik, krog, simetrija, konveksnost

Keywords: perimeter, area, figure, n-gon, circle, symmetry, convexity

1. Uvod

Izoperimetričen pomeni “enakega obsega”. Perimeter pomeni rob nekega območja oziroma njegovo dolžino. Izraz prihaja iz grščine: *peri* pomeni okrog, *meter* pa mera. Podan je obseg, poiskati je treba lik takega obsega z največjo ploščino. Klasični izoperimetrični problem sprašuje po liku v ravnini. To je dvorazsežna različica. Podobno vprašanje se porodi v treh (in navsezadnje tudi v n) dimenzijah: katero telo ima pri predpisani površini kar največjo prostornino? Težji pa je izoperimetrični problem na ploskvah, kjer je treba najti krivuljo predpisane dolžine, ki oklepa lik (ta mora ležati na ploskvi) največje površine. Veliko je še nerešenega. Na paraboloidu $z = x^2 + y^2$ je bila šele leta 1996 dokazana “očitna” rešitev.

Rešitev klasičnega problema so poznali že v antični Grčiji, veliko so se s tem ukvarjali tudi Arabci. Neka legenda govori o kraljici *Didóni* (Dido), hčeri kralja iz Tira, ki je, potem ko je njen brat Pigmalion ubil njenega moža, z nekaj privrženci pobegnila v Libijo in ustanovila mesto Kartagina. Tamkajšnji kralj ji je predtem podelil toliko zemlje, kot jo lahko zavzame z volovsko kožo. To je Didona razrezala na trakove in jih raztegnila. Tu se je soočila z izoperimtričnim problemom.

Motivacija za ta sicer geometrični problem je prišla iz astronomije. Eden prvih, ki so preučevali problem, je Grk Zenodorus. Živel je približno 200 let pred našim štetjem. Problem je tudi rešil za takratne standarde. Dokazal je, da ima krog večjo ploščino kot katerikoli drug n-kotnik enakega obsega. S problemom se je kasneje ukvarjal tudi Jakob Steiner (okoli leta 1838). Izdelal je 5 dokazov, vendar se je tu pojavilo vprašanje obstoja takega lika. Splošneje zastavljen problem je rešil M. Gromov leta 1986.

V delu diplomskega seminarja se bom osredotočil na klasični izoperimetrični problem in sicer dvorazsežen. Naj bo o predpisan obseg. Kateri lik v ravnini ima največjo ploščino in obseg o, če tak lik sploh obstaja? Rešitev je krog in to je tudi edina rešitev. V nadaljevanju bomo to dokazali in to na več načinov.

V naslednjem podrazdelku bomo videli, da namesto prvotnega lahko rešujemo dualni problem. V drugem poglavju začnemo z n-kotniki in si pogledamo Steinerjev dokaz, ki je zaradi privzetka o obstoju optimalnega lika nepopoln. Naslednje poglavje vsebuje še en dokaz, da je pravilni n-kotnik ploščinsko večji od nepravilnega. Enako kot za dokaz za pravilne n-kotnike, v istem poglavju izoperimetrični problem rešimo z uporabo vezanih ekstremov. Sledi poglavje, kjer se izoperimetričnega problema lotimo s pomočjo vektorjev, za povrh pa dobimo še izoperimetrično neenakost, na podlagi katere definiramo tudi izoperimetrični kvocient. Izoperimetrično neenakost dobimo tudi pri Hurwitzovem dokazu s Fourierovimi vrstami, ki je v naslednjem poglavju. Za konec pa povemo še nekaj o splošnejšem problemu v več dimenzijah.

Najprej nekaj uvedimo nekaj pojmov. Lik je omejeno območje v ravnini $\mathbb{R}^2$. Omejeno je tu mišljeno tako, da je to območje celo vsebovano v nekem dovolj velikem disku (npr. če je obseg lika enak o, je ves vsebovan v disku s polmerom $\frac{o}{2}$). To območje ima za rob sklenjeno krivuljo brez samopresečnih točk. Obseg lika je dolžina te krivulje. Ploščino bomo računali z običajno formulo $\frac{1}{2}\int(x\dot{y} - y\dot{x})dt$, obseg pa $\int\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$, kjer je $t \mapsto (x(t), y(t))$ parametrizacija roba lika. V nekaterih primerih bomo pri računanju dolžine grafa funkcije f uporabili $\int\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$, ploščina pa bo kar $\int f(x)dx$.

Naj bo D lik, ki ima parametrizacijo roba $t \mapsto (x(t), y(t))$. S $\mathrm{pl}(D)$ označimo ploščino lika D in z $\mathrm{l}(D)$ dolžino bD. Ko lik D raztegnemo ali skrčimo za neki faktor $\alpha > 0$, to naredimo v vse smeri enako, da se vsa razmerja ohranijo. Natančneje, parametrizacija roba novega lika D' je potem $t \mapsto (\alpha x(t), \alpha y(t))$. Ploščina novega lika D' je

$$\mathrm{pl}(D') = \frac{1}{2}\int((\alpha x)(\alpha \dot{y}) - (\alpha y)(\alpha \dot{x}))dt = \frac{\alpha^2}{2}\int(x\dot{y} - y\dot{x})dt = \alpha^2 \cdot \mathrm{pl}(D).$$

Pri obsegu pa α nastopa linearno

$$\mathrm{l}(D') = \int \sqrt{(\alpha\dot{x})^2 + (\alpha\dot{y})^2}dt = \int \sqrt{\alpha^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}dt = \alpha \cdot \mathrm{l}(D).$$

Opomba 1.1. Če govorimo o izoperimetričnem problemu, potem je jasno, da morajo biti naši liki, ki so kandidati za rešitev, taki, da imajo za rob krivulje, ki se jim da določiti dolžino. Ker formula za dolžino krivulje in ploščino lika vsebujejo odvode, bomo od sedaj naprej predpostavili, da so robovi likov gladki oziroma vsaj odsekoma gladki.

1.1. **Dualnost.** Prvotni problem sprašuje po liku z obsegom o in največjo ploščino. Pri dualnem problemu pa iščemo lik s ploščino p in najmanjšim obsegom.

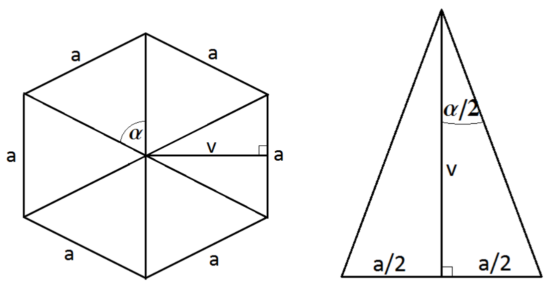
Trditev 1.2. *Dualni izoperimetrični problem je ekvivalenten prvotnemu.*

Dokaz. Recimo, da lik M reši le prvotni problem: M ima obseg o in ploščino p, ki je maksimalna. Če M ni rešitev tudi dualnega problema, potemtakem obstaja neki lik L, ki ima predpisano ploščino p (enako kot M), a manjši obseg, $o - \epsilon$ za neki $\epsilon > 0$. Lik L raztegnimo za toliko, da se bo njegov obseg ujemal z obsegom lika M, o. Ampak potem se poveča tudi ploščina tega lika, ki postane večja od ploščine M, $p + \delta$ za neki $\delta > 0$. Iz L smo dobili nov lik L', ki ima obseg o in ploščino $p + \delta$, protislovje.

Dokažimo sedaj še obratno. Denimo, da je lik M s ploščino p in obsegom o (najmanjši možen obseg pri taki ploščini) rešitev dualnega problema, ne pa tudi prvotnega. Obstaja neki lik K, ki pa je rešitev prvotnega problema, ima obseg o in maksimalno ploščino, ki je $p + \epsilon$ za neki $\epsilon > 0$. Sedaj K skrčimo v lik K' za toliko, da bo tudi K' imel ploščino p. Vendar pa ima K' obseg $o - \delta$, $\delta > 0$. Spet smo prišli do protislovja, saj je bil privzetek, da ima pri ploščini p lik M najmanjši obseg. □

2. Elementarna geometrija

Najprej ponovimo izpeljavo formule, ki jo bomo rabili pri naslednji trditvi.



Slika 1. Pravilni n-kotnik.

Kakšna je ploščina pravilnega n-kotnika z obsegom o? Prvotni n-kotnik razdelimo na n skladnih enakokrakih trikotnikov Δ. Za trikotnik Δ velja (slika 1)

$$a = \frac{o}{n}, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a/2}{v}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{n}. \tag{1}$$

Od tod sledi, da je višina enega takega Δ enaka $v = \frac{o}{2n\cdot\operatorname{tg}(\alpha/2)}$. Trikotniki Δ imajo ploščino $p_\Delta = \frac{v}{2}a$. Ploščina pravilnega n-kotnika je potem

$$p_n = np_\Delta = \frac{o^2}{4n\cdot\operatorname{tg}(\alpha/2)}.$$

Ploščino hočemo izraziti z o in v. Preverimo, da je $\frac{1}{2}ov$ res izražava za ploščino:

$$\frac{1}{2}ov = \frac{o}{2}\frac{a}{2\cdot\operatorname{tg}(\alpha/2)} = \frac{o^2}{4n\cdot\operatorname{tg}(\alpha/2)} = p_n.$$

Podobno izražavo naredimo še za krog. Ploščina kroga z obsegom o in polmerom r je $p_k = \frac{o}{2}r$. Res: Velja $p_k = \pi r^2$. Obseg je enak $o = 2\pi r$. Od tod izrazimo polmer $r = \frac{o}{2\pi}$. Preverimo, da je $\frac{1}{2}or$ res izražava za ploščino:

$$\frac{o}{2}r = \frac{o}{2}\frac{o}{2\pi} = \frac{o^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2r^2}{4\pi} = \pi r^2 = p_k.$$

Izražavo ploščine s pomočjo obsega uporabimo pri spodnji trditvi.

Trditev 2.1. *Ploščina pravilnega n-kotnika je manjša od ploščine kroga pri danem obsegu o.*

Dokaz. Ker $p_n = \frac{o}{2}v$ in $p_k = \frac{o}{2}r$, je ekvivalentno, če pokažemo $r > v$. Polmer kroga, izražen z obsegom, je $r = \frac{o}{2\pi}$. Višina enega trikotnika Δ, izražena z o, je enaka $v = \frac{o}{2n\cdot\operatorname{tg}(\pi/n)}$, kjer je $n \geq 3$. Dokazati moramo torej neenakost

$$\frac{1}{2\pi} > \frac{1}{2n\cdot\operatorname{tg}(\pi/n)}.$$

Ker je $\frac{\pi}{n} \in (0, \frac{\pi}{2})$ za $n \geq 3$, je $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$ pozitiven. Ko torej neenačbo množimo z obema imenovalcema, se neenakost ne obrne. Dobimo $\operatorname{tg}\frac{\pi}{n} > \frac{\pi}{n}$, kar pa je res za $\frac{\pi}{n} \in (0, \frac{\pi}{2})$. To se vidi takole. Označimo $x = \frac{\pi}{n}$. Uporabimo Lagrangeev izrek za tangens na intervalu $[0, x]$: $\frac{\operatorname{tg}0-\operatorname{tg}x}{0-x} = \frac{1}{\cos^2\xi} \geq 1$. Točka ξ se nahaja nekje na intervalu $(0, x)$. Množenje neenakosti $\frac{-\operatorname{tg}x}{-x} \geq 1$ z x nam da željeno oceno. $\square$

Trditev 2.2. *Pravilni n-kotniki z istim obsegom imajo pri večjem n večjo ploščino.*

Dokaz. Naj bo dan obseg o. Ploščina n-kotnika je $p_n = \frac{o}{2}v$. Iz formul (1) z začetka tega poglavja izpeljemo obrazec za višino n-kotnika v odvisnosti od n

$$v = v(n) = \frac{o}{2}\frac{1}{n\cdot\operatorname{tg}(\pi/n)}.$$

Definiramo funkcijo $f(n) = \frac{1}{n\cdot\operatorname{tg}(\pi/n)}$, za katero želimo dokazati, da narašča za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Pred odvajanjem jo najprej zvezno razširimo z $\mathbb{N} - \{1, 2\}$ na realna števila:

$$f(x) = \frac{1}{x\cdot\operatorname{tg}(\pi/x)}, \quad x \in \mathbb{R},\ x \geq 3.$$

Funkcijo odvajamo

$$f'(x) = \frac{-1}{(x\cdot\operatorname{tg}(\frac{\pi}{x}))^2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} + x\frac{1}{(\cos\frac{\pi}{x})^2}\left(-\frac{\pi}{x^2}\right)\right) = \frac{\frac{\pi/x}{\cos^2(\pi/x)} - \operatorname{tg}(\pi/x)}{(x\cdot\operatorname{tg}(\pi/x))^2}.$$

Imenovalec je pozitiven. Če pokažemo še pozitivnost števca, smo gotovi. Zato števec preoblikujmo

$$\frac{\pi/x}{\cos^2(\pi/x)} - \mathrm{tg}(\pi/x) = \frac{\pi/x}{\cos^2(\pi/x)} - \frac{\sin(\pi/x)}{\cos(\pi/x)} = \frac{\frac{\pi}{x} - \sin(\pi/x)\cos(\pi/x)}{\cos^2(\pi/x)}.$$

Pokažimo pozitivnost števca in zaključimo dokaz. Zgoraj dobimo

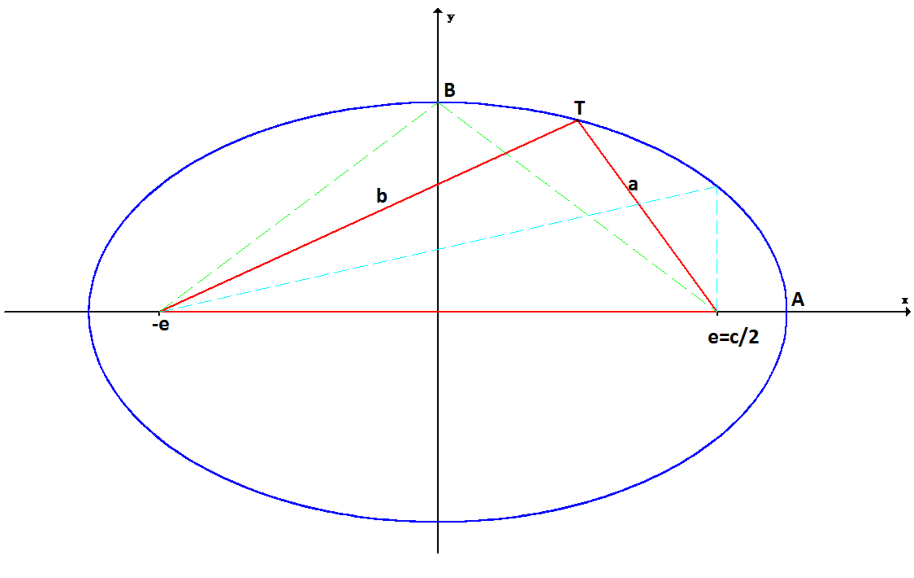
$$\frac{\pi}{x} - \sin\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{x} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{x}.$$

To pa je pozitivno, saj je $\frac{2\pi}{x} > \sin\frac{2\pi}{x}$, če je $\frac{2\pi}{x} \in (0, \infty)$, kar pa je res. O neenakosti se spet prepričamo s pomočjo Lagrangeevega izreka na intervalu $[0, 2\pi]$. Če označimo $y = \frac{2\pi}{x}$, iz enakosti $\frac{\sin 0 - \sin y}{0 - y} = \cos\xi$, po množenju z y sledi ocena $\sin y \leq y$. Pri tem je $\xi \in (0, 2\pi)$. Ker je sinus periodična funkcija s periodo 2π, identiteta pa strogo naraščajoča, ocena velja za vsak $y > 0$. Potem je res $f'(x) > 0$ za $x \geq 3$. Zato je f naraščajoča in posledično $v(n)$ naraščajoča. Zato res večji n pomeni večjo višino in s tem večjo ploščino pri danem obsegu o. $\square$

Z naslednjo lemo si bomo pomagali pri dokazu trditve, da je enakostraničen n-kotnik ploščinsko večji od neenakostraničnega n-kotnika enakega obsega.

Lema 2.3. *Med vsemi trikotniki enakega obsega in enake osnovnice ima enakokraki trikotnik največjo ploščino.*

Dokaz. Podanemu trikotniku s stranicami a, b in c priredimo elipso $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, in sicer tako, da se oglišči osnovnice c ujemata z goriščema elipse. Vrh trikotnika pa naj leži na elipsi, tako kot na sliki 2. Pri tem velja $A = \frac{a+b}{2}$, saj ima elipsa



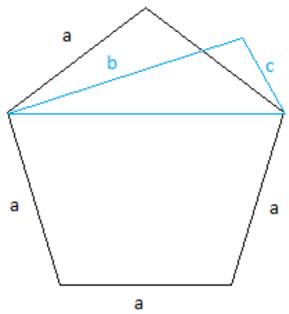
SLIKA 2. Enakokraki trikotnik ima največjo višino.

lastnost, da je vsota razdalj $a + b = 2A$, če le točka T leži na elipsi. Ker osnovnico trikotnika postavimo med gorišči elipse, je $e = \frac{c}{2}$, $c = d((-e, 0), (e, 0)) = 2e$. Ker je $e^2 = A^2 - B^2$ za $A > B$, je $B^2 = A^2 - e^2 = (\frac{a+b}{2})^2 - \frac{c^2}{4}$, torej $B = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)^2 - c^2}$. Iz korena $\sqrt{(a+b)^2 - c^2}$ vselej dobimo pozitivno realno število, saj v trikotniku vedno velja $a + b > c$ in zato tudi $(a+b)^2 > c^2$. Če sta dve oglišči tega trikotnika postavljeni v gorišči elipse, tretje oglišče pa je na elipsi, se, ko s tem ogliščem drsimo po elipsi, obseg trikotnika ne spreminja. Zaradi simetričnosti je lahko tretje oglišče le v prvem kvadrantu. Namreč, če gremo s tem ogliščem izven prvega kvadranta, dobimo iste trikotnike, le da so ti zrcaljeni čez x-os, y-os ali pa čez obe osi.

Ploščina trikotnika je enaka produktu polovice osnovnice (ta je podana) in višine na to osnovnico. Od tod sledi, da ima med vsemi trikotniki enakega obsega in enake osnovnice enakokraki največjo ploščino, saj je takrat višina največja. □

Trditev 2.4. *Pravilni n-kotnik ima večjo ploščino kot katerikoli drug n-kotnik enakega obsega.*

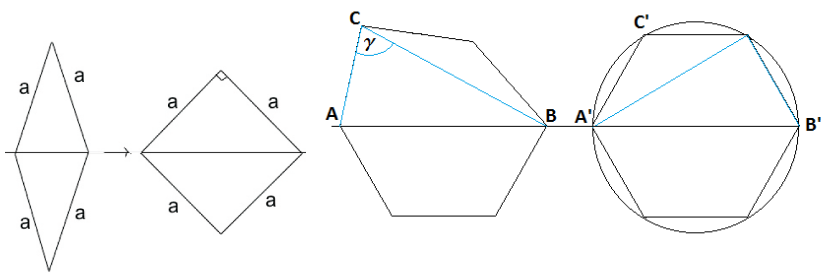
Dokaz. Pri podanem obsegu ima ploščinsko največji n-kotnik vse stranice enako dolge. Če bi bili dve sosednji stranici različnih dolžin, lahko, upoštevajoč zgornjo lemo (2.3), ploščino takega n-kotnika povečamo, ne da bi spremenili obseg (slika 3).



Slika 3. Enakostranični n-kotnik ima večjo ploščino kot neenakostranični.

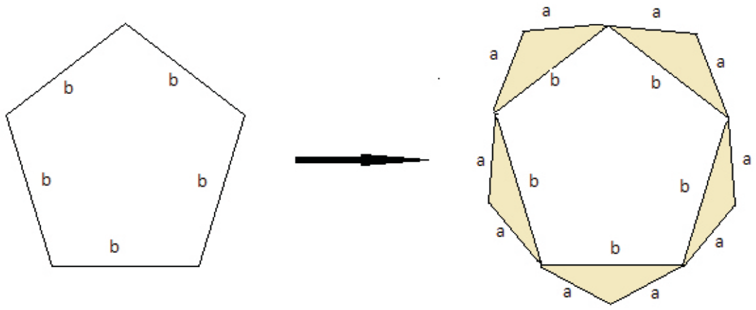
Velja tudi, da ima pri podanem obsegu ploščinsko največji n-kotnik vse kote enake. Da to razčistimo, ločimo 2 možnosti: ko je n sodo in ko je n liho število.

Če je n sodo, mora premica skozi nasprotni oglišči A in B razpoloviti poleg obsega tudi ploščino. V nasprotnem primeru bi lahko za nov lik vzeli ploščinsko večji del skupaj z njegovo zrcalno sliko. Za vsako vmesno oglišče C mora biti kot $\angle(ACB) =$



Slika 4. Pri vsakem vmesnem oglišču C mora biti pravi kot.

γ enak $\frac{\pi}{2}$ (slika 4). To pa zato, ker je ploščina trikotnika s stranicami a, b, c in kotom γ, ki ga oklepata a in b, enaka $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Če sta $a = \overline{AC}$ in $b = \overline{BC}$ fiksna, bo ta izraz največji, ko bo $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Če bi se a in b spreminjala, ne bi imeli več enakostraničnosti n-kotnika. Torej je res pravilni n-kotnik ploščinsko večji od nepravilnega n-kotnika enakega obsega, kjer je n sodo število.



SLIKA 5. Tako iz n-kotnika dobimo $2n$-kotnik.

Ko pa je n liho število, iz enakostraničnega n-kotnika dobimo enakostraničen $2n$-kotnik, če na vsako stranico enakostraničnega n-kotnika položimo majhne skladne enakokrake trikotnike T kot na sliki 5. Kot med sosednjima stranicama pravilnega n-kotnika je $\pi - \frac{2\pi}{n}$. Dodana trikotnika T k temu kotu doprineseta skupaj 2ω. Z ω je označen kot med osnovnico in krakom trikotnika T. Kot med sosednjima stranicama pravilnega $2n$-kotnika pa je $\pi - \frac{\pi}{n}$. Zato mora veljati $\pi - \frac{2\pi}{n} + 2\omega = \pi - \frac{\pi}{n}$. Od tod dobimo, da je $\omega = \frac{\pi}{2n}$. Če je stranica n-kotnika dolga b, mora biti osnovnica T tudi dolžine b, njegova kraka pa sta dolžine $a = \frac{b}{2\cos\omega}$. Ko pravilnemu n-kotniku na vsako stranico dodamo po en trikotnik T, ta postane pravilen $2n$-kotnik.

Če bi torej enakostranični, a neenakokotni n-kotnik imel večjo ploščino kot pravilni z isto dolžino stranic, bi s tem, ko damo trikotnike T na vsako njegovo stranico, dobili nepravilni $2n$-kotnik, ki ima večjo ploščino kot pravilni $2n$-kotnik. To pa je v nasprotju s premislekom, da je pravilni n-kotnik ploščinsko večji od nepravilnega n-kotnika enakega obsega, kjer je n sodo število. Trditev je tako dokazana tudi za lihe n. □

Sedaj vemo, da ima krog pri danem obsegu večjo ploščino kot katerikoli n-kotnik. Torej noben večkotnik ni rešitev izoperimetričnega problema. V nadaljevanju bomo izločili še nekatere možne kandidate.

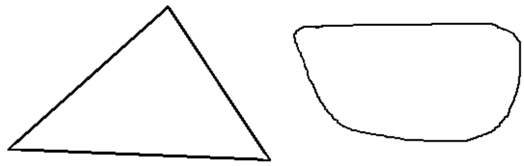
Definicija 2.5 (geometrijska definicija konveksnosti)**.** Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konveksna*, če za poljubni točki $x, y \in A$ zveznica $\overline{xy}$ v celoti pripada A.

Primer 2.6. Konveksna množica je npr. prazna množica, 1 točka, daljica, premica, ravnina, paralelogram, trapez, deltoid, pravilni n-kotnik, krog, elipsa. Lika na sliki 6 sta primera nekonveksnih množic.

SLIKA 6. Primera nekonveksnih množic.

Definicija 2.7. *Konveksna ogrinjača* množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje A.

Primer 2.8. Konveksna ogrinjača konveksne množice je kar enaka tej konveksni množici. Na sliki 7 sta konveksni ogrinjači množic iz primera 2.6.



SLIKA 7. Konveksni ogrinjači množic s slike 6.

Sledečo lemo bomo potrebovali v spodnji opombi in v dokazu izreka 2.18. Pri tem izreku bomo rešili izoperimetričen problem brez privzetka obstoja rešitve.

Lema 2.9. *Presek konveksnih množic je konveksna množica.*

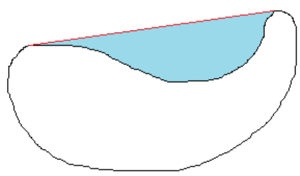
Opomba 2.10. Ekvivalentna definicija konveksne ogrinjače pravi, da je konveksna ogrinjača množice A presek vseh konveksnih množic, ki vsebujejo A. Ta presek obstaja, ker je družina konveksnih množic, ki vsebujejo A neprazna - vsebuje vsaj celo ravnino oziroma prostor (za tega vemo, da je konveksen). Zato konveksna ogrinjača množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$ vedno obstaja. Če ves prostor ni konveksen, tudi konveksna ogrinjača ne obstaja nujno.

Dokaz leme 2.9. Naj bosta A in B konveksni množici, $A \cap B$ pa njun presek. Če je presek prazna množica ali pa samo 1 točka, lema drži. Naj bosta $x, y \in A \cap B$ poljubni točki. Potem $x, y \in A$ in $x, y \in B$. Ker sta A in B konveksni sledi $\overline{xy} \subseteq A$ in $\overline{xy} \subseteq B$. Zato tudi $\overline{xy} \subseteq A \cap B$. □

Naslednja trditev nam prihrani kar nekaj nevšečnosti. Uporabljena je pri marsikaterem dokazu.

Trditev 2.11. *Rešitev izoperimetričnega problema je konveksna.*

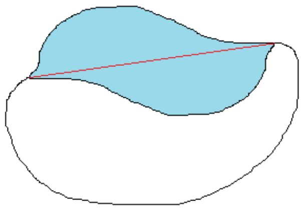
Dokaz. Imejmo nekonveksen lik. Konveksna ogrinjača tega lika ima manjši obseg, saj je ravna črta najkrajša pot med dvema točkama. Poleg tega ima ta ogrinjača tudi večjo ploščino kot začetni nekonveksen lik. Na sliki 8 je pridobljena ploščina osenčena. Vendar pa je obseg zdaj manjši od predpisanega, zato za nov lik vzamemo raztegnjeno konveksno ogrinjačo in sicer toliko, da se bo obseg ujemal s predpisanim. S tem se bo ploščina še dodatno povečala. Z drugimi besedami, konveksna ogrinjača



SLIKA 8. Če lik ni konveksen, mu lahko ploščino povečamo in obseg zmanjšamo.

lika je boljši kandidat za optimalno rešitev kot pa prvotni lik. □

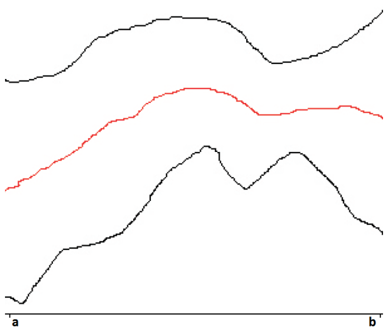
Opomba 2.12. Pri nekonveksnih likih ploščino lahko povečamo tudi, če "udrtino" prezrcalimo čez premico kot na sliki 9. Obseg ostane enak, ni pa nujno, da je dobljeni lik konveksen. To bi bila lahko še ena verzija zgornjega dokaza.



Slika 9. Z zrcaljenjem udrtine se ploščina poveča.

2.1. **Steinerjev nepopolni dokaz.** J. Steiner je izdelal 5 dokazov, da je rešitev izoperimetričnega problema krog. Vendar pa se je tu pojavilo vprašanje obstoja takega optimalnega lika, ki bi bil rešitev problema.

Naj bosta dani funkciji u in v. *Srednjica* je graf funkcije, ki leži na polovični razdalji med grafoma dveh danih funkcij $u(x)$ in $v(x)$, definirana je kot $s(x) = \frac{u(x)+v(x)}{2}$. Na sliki 10 je srednjica vmesna črta. Naj $\mathrm{l}(u)$ pomeni dolžino grafa funkcije



Slika 10. Srednjica leži na sredini med obema krivuljama.

u z definicijskim območjem $[a, b]$. Iz Analize 1 vemo $\mathrm{l}(u) = \int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2}dx$.

Lema 2.13. *Imamo funkcije u, v in srednjico s na intervalu $[a, b]$. Potem velja*

$$\mathrm{l}(u) + \mathrm{l}(v) \geq 2 \cdot \mathrm{l}(s). \tag{2}$$

Enakost velja natanko tedaj, ko je $u(x) = v(x) + c$ za neko konstanto c.

Dokaz. Radi bi dokazali neenakost

$$\frac{1}{2}\left(\int_a^b \sqrt{1 + u'(x)^2}dx + \int_a^b \sqrt{1 + v'(x)^2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b (\sqrt{1 + u'(x)^2} + \sqrt{1 + v'(x)^2})dx \geq \int_a^b \sqrt{1 + \left(\left(\frac{u(x) + v(x)}{2}\right)'\right)^2} dx.$$

Preverimo neenakost po točkah, brez integralov. Zaradi manj pisanja označimo $u'(x) = p$, $v'(x) = r$. Radi bi dokazali neenakost

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1 + p^2} + \sqrt{1 + r^2}) \geq \sqrt{1 + \left(\frac{p + r}{2}\right)^2}.$$

Po kvadriranju dobimo ekvivaletno neenakost

$$\frac{1}{4}(1+p^2+1+r^2+2\sqrt{1+p^2}\sqrt{1+r^2}) \geq 1+\frac{p^2+r^2+2pr}{4}$$

oziroma

$$\frac{1+\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)}}{2} \geq 1+\frac{pr}{2},$$
$$\sqrt{(1+p^2)(1+r^2)} \geq 1+pr.$$

Zopet kvadriramo in dobimo

$$1+p^2+r^2+p^2r^2 \geq 1+p^2r^2+2pr.$$

Ko člene preoblikujemo imamo

$$p^2-2pr+r^2 \geq 0 \quad \text{in res} \quad (p-r)^2 \geq 0.$$

Kdaj nastopi enačaj? Natanko takrat, ko je $p = r$ oziroma $u'(x) = v'(x)$. To pomeni, da je $u(x) = v(x) + c$ na intervalu $[a, b]$. □

Naj $\mathrm{pl}(u)$ pomeni ploščino lika, omejenega z $x = a$, $x = b$, abscisno osjo in grafom funkcije u, $\mathrm{pl}(u) = \int_a^b u(x)dx$. Tu je u nenegativna na intervalu $[a, b]$.

Lema 2.14. *Imamo funkcije kot v prejšnji lemi 2.13. Naj oba grafa u in v ležita nad x-osjo (posledično potem isto velja tudi za s), da je $u(x), v(x), s(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Potem velja*

$$\mathrm{pl}(u) + \mathrm{pl}(v) = 2 \cdot \mathrm{pl}(s). \tag{3}$$

Dokaz. Preverimo enakost (3), pri čemer upoštevamo nenegativnost integrandov:

$$2\,\mathrm{pl}(s) = 2\int_a^b \frac{u+v}{2}dx = \int_a^b (u+v)\,dx = \int_a^b udx + \int_a^b vdx = \mathrm{pl}(u) + \mathrm{pl}(v).$$

□

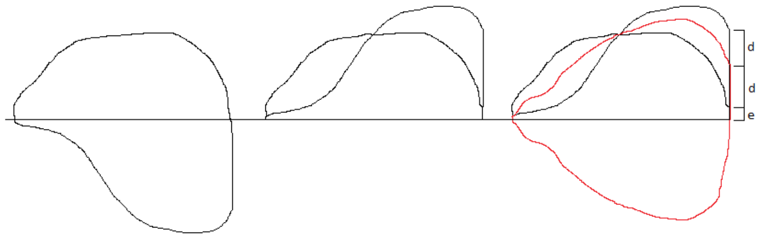
V naslednjem izreku bomo obstoj optimalnega lika zaenkrat privzeli. Kasneje bomo dokazali tudi obstoj.

Izrek 2.15 (Steinerjev dokaz)**.** *Naj bo obseg o fiksen. Lik takega obsega in maksimalne ploščine mora biti simetričen glede na vsako premico, ki razpolavlja obseg. Ta lik je lahko samo krog.*

Dokaz. Vzemimo lik z maksimalno ploščino (tu se pojavi problem obstoja) in obsegom o. Zaradi trditve 2.11 lahko privzamemo, da je lik konveksen. S premico mu razpolovimo obseg. Ta premica mora hkrati razpolavljati tudi ploščino. Če je ne, bi lahko vzeli kos z večjo ploščino in ga prezrcalili čez to premico, ta kos skupaj z zrcalno sliko pa bo tvoril nov lik z enakim obsegom, a večjo ploščino.

Lahko se tudi zgodi, da premica razpolavlja obseg in ploščino, vendar lik ni simetričen (npr. pri paralelogramu premica skozi nasprotni oglišči razpolavlja obseg in ploščino). Nesimetričen lik ni optimalna rešitev, saj bi mu lahko s konstrukcijo srednjice obseg zmanjšali, ploščina pa bi se ohranila. Tak lik potem samo še raztegnemo, da bo spet imel obseg o, s tem pa se bo povečala tudi ploščina.

Kako uporabimo srednjico? Čez premico, ki razpolavlja obseg in ploščino nesimetričnega lika, spodnjo polovico tega lika prezrcalimo na zgornjo stran. Robova obravnavamo kot grafa funkcij na intervalu $[a, b]$, tj. navpičnica seka vsako krivuljo največ enkrat. To lahko naredimo zaradi konveksnosti rešitve (trditev 2.11). Če graf vsebuje navpično daljico nekje med krajiščema intervala, je s tem kršena konveksnost, saj se robova začneta v enem presečišču premice z robom nesimetričnega lika in končata v drugem presečišču. S konveksnostjo izločimo sicer tudi nekatere funkcije, vendar zaradi privzetka konveksnosti ničesar ne izgubimo. Označimo en rob z $u(x)$, drugega pa z $v(x)$. Premica, ki razpolavlja obseg in ploščino nesimetričnega lika, pa predstavlja x-os. V najslabšem primeru se lahko edino zgodi, da



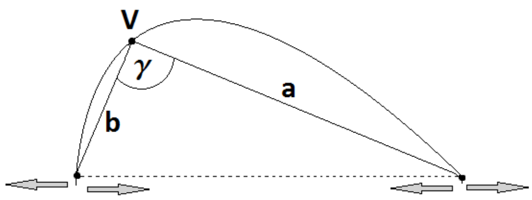
Slika 11. Dolžina navpične črte od srednjice na eni strani je enaka $(2e + 2d)/2$.

se v krajiščih pojavi navpična črta. Za ploščino to ni moteče, (3) še vedno drži. Pri obsegu pa se o enakosti (2) prepričamo brez navpičnic, nato pa posebej obravnavamo še te. Tako je obseg novega lika še vedno manjši od prvotnega nesimetričnega. Narišemo srednjico in zrcalimo čez premico, ki sedaj postane simetrijska os novega lika (slika 11). V primeru pojavitve navpičnic te dobi tudi srednjica. Na posamezni strani je ta navpičnica dolga ravno polovico vsote dolžin navpičnic obeh robov. Po lemi 2.14 se ploščina novega lika ni spremenila, obseg pa je upoštevajoč lemo 2.13 manjši ali enak. Enak je le v primeru, če je bil prvotni lik že simetričen glede na premico, ki razpolavlja obseg in ploščino. Konstanta c je v tem primeru enaka 0, namreč oba robova oklepata enako ploščino: $\mathrm{pl}(u) = \int_a^b u(x)dx = \mathrm{pl}(v) = \int_a^b v(x)dx$. Iz $u(x) = v(x) + c$ sledi

$$\int_a^b u(x)dx = \int_a^b v(x)dx + \int_a^b c\,dx,$$
$$\underbrace{\mathrm{pl}(u) - \mathrm{pl}(v)}_{=0} = c\,\underbrace{(b-a)}_{\neq 0}$$

od tod pa $c = 0$.

Lik, simetričen glede na vsako premico, ki razpolavlja obseg, je lahko le krog. Dokazovali bomo s protislovjem. Recimo, da ni krog. Podobno kot prej mu s premico razpolovimo obseg in obenem tudi ploščino. Glejmo eno od teh polovic.



Slika 12. Če spodnji dve oglišči premikamo levo in desno, se kot γ spreminja.

Ker lik ni krog, obstaja točka V na robu te polovice lika, da kot $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$. Tu je

γ kot med daljicama, ki ju narišemo iz točke na simetrijski osi do točke V (glej sliko 12). Dolžin teh daljic ne smemo speminjati, ker lahko pokvarimo predpisan obseg. Tej polovici lika lahko povečamo ploščino. Ploščina trikotnika je $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Pri nespremenjenih dolžinah daljic bo ploščina največja pri $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Tak kot lahko naredimo brez spreminjanja obsega: mislimo si, da je rob polovice lika prilepljen na stranici trikotnika. Točki na simetrijski osi premikamo vzdolž nje, dokler ne dobimo želenega kota. S tem dobimo neko novo polovico lika, ki jo nato zrcalimo čez simetrijsko os. Ti dve polovici sestavljata nov ploščinsko večji lik enakega obsega, kar je v nasprotju z maksimalnostjo ploščine prvotnega lika. V vsaki točki roba posamezne polovice lika mora torej biti γ pravi kot. Po Talesovem izreku sledi, da je ta lik lahko le krog. □

Opomba 2.16. Steinerjev dokaz za krog deluje tudi za dokaz, da je optimalen $2n$-kotnik pravilen, saj mu lahko očrtamo krog. Za večkotnike z lihim številom kotov pa ne, ker mora premica, ki razpolavlja obseg in ploščino iti skozi nasprotni oglišči.

Za podan obseg obstaja neskončno mnogo likov različnih ploščin. Pri danem obsegu je ploščina lahko poljubno majhna (poljubno blizu 0, npr. lik sploščimo, vedno bolj ploščat postaja podoben premici.), ne more pa biti poljubno velika. Potem obstaja neka (natančna) zgornja meja M. Liki danega obsega imajo ploščino manjšo ali enako M. Imamo zaporedje izoperimetričnih likov, katerih ploščine so naraščajoče in navzgor omejene. Ali obstaja tak lik ("stekališčni" oziroma "limitni lik"), ki zavzame ploščino M pri tem podanem obsegu? Sledi dokaz obstoja za maksimalen n-kotnik.

Izrek 2.17. *Za izoperimetrične n-kotnike obsega o obstaja n-kotnik z maksimalno ploščino.*

Dokaz. Ker so vsi n-kotniki obsega o sta najbolj oddaljeni oglišči narazen za manj kot $\frac{o}{2}$. Zato lahko vse n-kotnike postavimo v neki kvadrat s stranico dolžine $\frac{o}{2}$. Tako so koordinate oglišč n-kotnikov omejene s koordinatami kvadrata. Omejene so tudi ploščine n-kotnikov. Oglišča n-kotnikov so oblike (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n) oziroma lahko jih gledamo kot točko prostora $\mathbb{R}^{2n}$: $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$.

Najsibodi je pri danem obsegu dosežena maksimalna ploščina ali ne, obstaja neki "stekališčni n-kotnik" z oglišči (x_1^*, y_1^*), (x_2^*, y_2^*), …, (x_n^*, y_n^*) (oziroma kot točka $\mathbb{R}^{2n}$: $(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, \ldots, x_n^*, y_n^*)$), okoli katerega so n-kotniki, ki imajo ploščino poljubno blizu zgornje meje (maksimalna ploščina). Oglejmo si zaporedje n-kotnikov obsega o: $a_i = (x_1^i, y_1^i, x_2^i, y_2^i, \ldots, x_n^i, y_n^i)$. Pri tem so x_k^i, y_k^i neka zaporedja, $k = 1, \ldots, n$.

Iz zaporedja a_i vzamemo podzaporedje ${}_1a_i = (\tilde{x}_1^i, \tilde{y}_1^i, x_2^i, y_2^i, \ldots, x_n^i, y_n^i)$, kjer zaporedje $\tilde{x}_1^i$ konvergira k x_1^* in $\tilde{y}_1^i \overset{i\to\infty}{\to} y_1^*$. V naslednjem koraku iz zaporedja ${}_1a_i$ vzamemo podzaporedje ${}_2a_i = (\tilde{x}_1^i, \tilde{y}_1^i, \tilde{x}_2^i, \tilde{y}_2^i, x_3^i, y_3^i, \ldots, x_n^i, y_n^i)$, kjer $\tilde{x}_2^i \overset{i\to\infty}{\to} x_2^*$ in $\tilde{y}_2^i \overset{i\to\infty}{\to} y_2^*$. Na vsakem koraku vzamemo podzaporedje zaporedja, katerega še eno oglišče konvergira k limitnemu liku. Spet in spet jemljemo podzaporedja zaporedij n-kotnikov (obsega o), dokler ne dobimo zaporedja ${}_na_i = a_i^* = (\tilde{x}_1^i, \tilde{y}_1^i, \tilde{x}_2^i, \tilde{y}_2^i, \tilde{x}_3^i, \tilde{y}_3^i, \ldots, \tilde{x}_n^i, \tilde{y}_n^i)$, ki konvergira k limitnemu n-kotniku $(x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*, \ldots, x_n^*, y_n^*)$.

Ta limitni n-kotnik je res n-kotnik, saj mora biti limita zaporedja n-kotnikov spet n-kotnik. Lahko bi se edino zgodilo, da je limitni n-kotnik izrojen, na primer, da je kakšen notranji kot "raven", tj. π. Vsekakor se ne more izroditi v daljico, saj ima ta ploščino enako 0, kaj šele, da bi imela maksimalno ploščino, za katero pa vemo, da jo limitni n-kotnik ima. Neizrojenost zagotavljata trditvi 2.4 in 2.2. Kajti, če n-kotnik ni pravilen, mu ploščino lahko povečamo, zato nepravilni n-kotnik zagotovo ne more biti limitni n-kotnik. Poleg tega vemo tudi, da ima pravilni n-kotnik večjo ploščino kot pravilni m-kotnik za vsak $m < n$. Prav tako ima limitni n-kotnik tudi obseg o. To pa zato, ker a_i, zaporedje oglišč izoperimetričnih n-kotnikov, "porodi" tudi zaporedje obsegov in zaporedje ploščin n-kotnikov. Zaporedje obsegov je konstantno $(o, o, o, \ldots)$, zato je tudi limita tega zaporedja enaka o. Zaporedje ploščin pa je naraščajoče in navzgor omejeno. Torej n-kotnik obsega o in maksimalne ploščine res obstaja. $\square$

Steinerjev dokaz je nepopoln zaradi privzetka o obstoju optimalnega lika. Če optimalni lik torej obstaja, potem je to krog in to je edina rešitev.

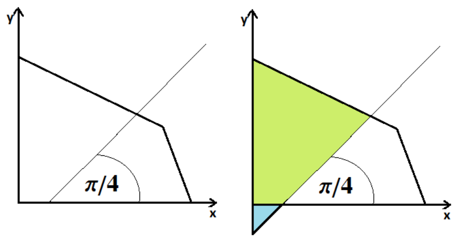
Dokažimo še, da ima pri fiksnem obsegu krog večjo ploščino kot n-kotnik. V ta namen si oglejmo zaporedje pravilnih n-kotnikov enakega obsega. Ko n pošljemo preko vsake meje, dobimo krog. Ker večji n pomeni večjo ploščino (trditev 2.2), so ploščine naraščajoče in zato mora imeti ta krog največjo ploščino. Obseg kroga pa je tudi enak obsegu teh n-kotnikov, saj so vsi ti enakega obsega (zaporedje obsegov n-kotnikov je konstantno).

V naslednjem pristopu bomo videli, da lahko brez privzetka obstoja rešimo problem na geometričen način. Obstoj bomo utemeljili s pomočjo limite zaporedja.

Izrek 2.18. *Ploščine likov obsega o imajo za zgornjo mejo ploščino kroga, ki ima tudi obseg o.*

Dokaz. Iz kateregakoli lika naredimo zaporedje izoperimetričnih likov z naraščajočo ploščino, ki konvergirajo h krogu. Konvergenca je tu mišljena po točkah. Več o njej kasneje. Začnemo z likom obsega o, ki ga naredimo konveksnega, tj. vzamemo njegovo konveksno ogrinjačo. To ogrinjačo nato še raztegnemo, da je obseg spet o. Naredimo ga simetričnega glede na x in y-os: kot pri Steinerjevem dokazu razpolovimo obseg z vodoravnico in za nov lik vzamemo ploščinsko večji del skupaj z njegovo sliko čez to vodoravnico. Za simetričnost glede na y-os o razpolovimo z navpičnico. S tema simetrizacijama se je ploščina novega lika kvečjemu povečala.

Omejimo se le na del lika v prvem kvadrantu. V splošnem premica skozi izhodišče pod kotom $\frac{\pi}{4}$ z x-osjo ne razpolovi obsega te četrtine lika. Obseg je tu mišljen kot obseg tega kosa v prvem kvadrantu brez dolžin stranic na x in y-osi. To premico transliramo, da razpolovi obseg. Oba dobljena dela imata enak obseg, a vzamemo tistega z večjo ploščino. Lahko bi se tudi zgodilo, npr. pri kvadratu, da sta oba dobljena dela tudi ploščinsko enaka. To ni moteče, izberemo si pač en del. Ploščinsko večjemu (ali enakemu) delu, ki smo ga vzeli, na koncu, ki je najbliže izhodišču, naredimo "špico", če je nima, kot na sliki 13. Ta kos skupaj s špico transliramo, da

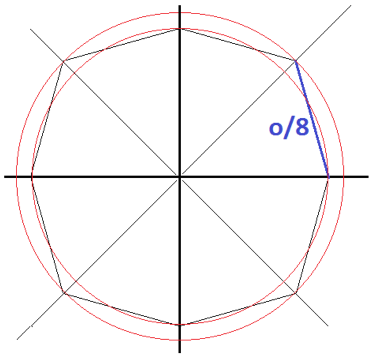


Slika 13. Izberemo kos v prvem kvadrantu, ki ima večjo ploščino. Brez škode mu lahko dodamo še špico in njuno unijo zrcalimo naokrog.

bo špica v izhodišču. Nato ga zrcalimo naokrog čez premice, ki oklepajo z x-osjo kote $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \ldots, 2\pi$. V primerjavi s prvotnim likom je ploščina novega lika, ki ima sedaj 4 simetrijske osi, kvečjemu večja, o pa se je ohranil. To je bil prvi korak, kot je $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$. Obseg kosa lika, ki smo ga zrcalili naokrog, je enak $o_1 = \frac{o}{8}$.

Na naslednjem koraku kot $\frac{\pi}{4}$ razpolovimo, premica, ki gre skozi izhodišče pod kotom $\alpha_2 = \frac{\pi}{8}$ z absciso je ena simetrijska os. Še druge nove simetrijske osi so take, ki z absciso oklepajo kote $\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$. Skupaj imamo torej 8 simetrijskih osi, $\alpha_2 = \frac{\pi}{8}$, obseg enega kosa lika, ki ga zrcalimo naokrog, je $o_2 = \frac{o}{16}$.

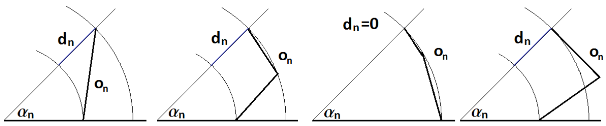
Na n-tem koraku: $\alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, 2^{n+1} simetrijskih osi, obseg kosa lika, ki ga zrcalimo, je $o_n = \frac{o}{2^{n+2}}$. Točke, kjer rob lika na n-tem koraku seka simetrijske osi, ležijo na eni ali največ dveh krožnicah (slika 14). To pa zato, ker posamezen kos lika na n-tem koraku vedno meji le na 2 simetrijski osi: x-os in premico skozi izhodišče, ki z x-osjo oklepa kot $\alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+1}}$. Če bi bili več kot 2 krožnici, ne bi imeli konveksnosti



Slika 14. Lik na koncu prvega koraka. Presečišča njegovega roba s simetrijskimi osmi ležijo na krožnicah.

kosa lika, ki ga zrcalimo naokrog (npr. kvadrat z okroglo luknjo v središču ima 3 krožnice na prvem koraku). Namreč, če je začetni lik konveksen, bo konveksen tudi kos lika v n-tem koraku. Če konveksen lik presekamo s premico na dva dela, sta oba dela konveksna. Namreč, posamezen del lahko gledamo kot presek polravnine (ta je konveksna) in začetnega lika (ki je tudi konveksen). Po lemi 2.9 je ta presek, ki je enak enemu od dveh delov, konveksen.

Razdalja med tema dvema krožnicama d_n je absolutna vrednost razlike njunih radijev, $0 \leq d_n \leq o_n$. To se vidi s slike 15. Ti krožnici lahko postavimo v neki zaprt



Slika 15. Primeri kosov lika, ki jih zrcalimo naokrog.

disk. Imamo zaporedje vedno bolj simetričnih likov obsega o, ki se jim povečuje ploščina. Vzemimo njegovo podzaporedje, pri katerem omenjeni krožnici konvergirata. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} o_n = \lim_{n\to\infty} \frac{o}{2^{n+2}} = 0,$$

sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

Zategadelj morata obe krožnici konvergirati k isti limitni krožnici. Točk, kjer rob lika seka simetrijske osi, je z vsakim korakom več. Te točke ležijo na krožnicah. S tema krožnicama mora potemtakem konvergirati rob lika, ki določa ti krožnici. Rob lika, ki ga določajo te točke, mora konvergirati po točkah. Limita zaporedij vedno bolj simetričnih likov mora biti krog.

Če kakšna točka roba lika ne bi konvergirala k točki roba kroga, bi s tem kršili konveksnost kosa. Recimo, da točka T konvergira k T', točki, ki ne leži na krožnici. Tedaj obstaja okolica točke T', v kateri so točke, ki tudi ne ležijo na krožnici. V nasprotnem primeru limitni lik ne bi bil konveksen. Po končno mnogo korakih bomo dobili vsaj eno simetrijsko os, ki bo sekala našo okolico. Na tej osi bo ležala tudi točka $P \in U$, kjer je kot med absciso ter premico skozi izhodišče in P oblike $k\frac{\pi}{2^{m+1}}$ za neki $m > n$, $k \in \{1, 2, \ldots, 2^{m+2}\}$. Tu n pomeni korak, pri katerem opazujemo lik. Prišli smo v protislovje, kajti P leži na limitni krožnici.

Naš lik konvergira k temu limitnemu krogu, ki je tudi obsega o, saj so vsi liki, ki konvergirajo, obsega o (konstantno zaporedje obsegov). Prav tako je limita tudi zgornja meja ploščin, saj je zaporedje ploščin likov naraščajoče. □

Opomba 2.19. Unija konveksnih množic pa ni konveksna. To se vidi tudi v zgornjem dokazu. Celoten lik v n-tem koraku, po tem, ko zrcalimo kos naokrog, ni nujno konveksen. Če je začetni lik npr. elipsa, je že pri prvem koraku celoten lik nekonveksen, podoben je deteljici. To ni ovira, želimo le dokazati konvergenco lika h krogu.

3. Vezani ekstrem

V tem razdelku si najprej poglejmo še en dokaz, da je pravilni n-kotnik ploščinsko večji od nepravilnega z enakim obsegom. Za tem pa sledi reševanje izoperimetričnega problema s pomočjo variacijskega računa. Za začetek pa si oglejmo formuli za ploščino.

Trikotnik T z oglišči (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ima ploščino

$$\frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|.$$

Izraz dobimo s pomočjo vektorskega produkta vektorjev, ki ju določajo te tri točke. Zaradi enostavnosti T postavimo z enim ogliščem v izhodišče. Ploščina trikotnika T z oglišči, označenimi v nasprotni smeri urinega kazalca (da nam ni treba pisati absolutne vrednosti), $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2) je potem enaka $\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{2}$. Ploščina n-kotnika P z oglišči, označenimi v nasprotni smeri urinega kazalca, $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}) je vsota ploščin trikotnikov z enim ogliščem v $(0, 0)$ in je enaka

$$\text{pl}(P) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2} x_ky_{k+1} - x_{k+1}y_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} x_ky_{k+1} - x_{k+1}y_k. \tag{4}$$

Ko je $k = n - 1$, je zadnja razlika enaka nič in prištejemo 0, $(x_n, y_n) = (0, 0)$. V splošnem je sicer $\text{pl}(P) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} x_ky_{k+1} - x_{k+1}y_k$ ploščina n-kotnika P z oglišči (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_{n-1}, y_{n-1}), $(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$. Oglišč je eno več, $n+1$, kjer je zadnje oglišče enako prvemu, da zaključimo lik. Če pa postavimo eno oglišče v izhodišče, je $(x_n, y_n) = (x_0, y_0) = (0, 0)$ in poenostavi se v že omenjeno formulo (4). Posamezne sumande iz (4) preoblikujemo, da dobimo

$$x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k = (y_{k+1} - y_k)\frac{x_k + x_{k+1}}{2} - (x_{k+1} - x_k)\frac{y_k + y_{k+1}}{2}.$$

Sedaj pa formulo za izračun ploščine n-kotnika uporabimo za izračun ploščine lika, omejenega z odsekoma gladkim robom. V ta namen ploščino lika aproksimiramo s ploščino n-kotnika, ki ga dobimo tako, da na robu lika izberemo n točk. Vsoto, ki določa ploščino n-kotnika, lahko vidimo kot Riemannovo vsoto krivuljnega integrala po robu lika. Točke $\xi_{xk} \in [x_k, x_{k+1}]$ in $\xi_{yk} \in [y_k, y_{k+1}]$ so testne točke, izberemo jih kot aritmetično sredino krajišč intervalov, $\xi_{xk} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ in $\xi_{yk} = \frac{y_k + y_{k+1}}{2}$. Označimo še $\delta_{xk} = x_{k+1} - x_k$ in $\delta_{yk} = y_{k+1} - y_k$. S temi oznakami zgornji izraz postane $x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k = \delta_{yk}\xi_{xk} - \delta_{xk}\xi_{yk}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-2} (x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k) = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-2} (\delta_{yk}\xi_{xk} - \delta_{xk}\xi_{yk}) = \frac{1}{2} \int_{bD} x dy - y dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_D (1+1) dx dy = \mathrm{pl}(D)$$

Po definiciji integrala in z uporabo Greenove formule smo dobili ploščino lika D s primerno gladkim robom bD.

(5) $$\mathrm{pl}(D) = \frac{1}{2} \int_{bD} x dy \frac{dt}{dt} - y dx \frac{dt}{dt} = \frac{1}{2} \int_{bD} (x\dot{y} - y\dot{x}) dt,$$

kjer $x = x(t)$ in $y = y(t)$.

3.1. **Dokaz za n-kotnike.**

Dokaz trditve 2.4. Oglišča n-kotnika naj bodo (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., $(x_{n-1}, y_{n-1}), (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$. Brez izgube splošnosti lahko privzamemo, da je $(x_0, y_0) = (x_n, y_n) = (0, 0)$. Njegovo ploščino p izračunamo po formuli (4), obseg pa je vsota dolžin vseh stranic

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sum_{k=1}^{n} l_k.$$

Iščemo maksimalno ploščino z omejitvijo, da je obseg n-kotnika enak o. Problem zastavimo kot iskanje vezanega ekstrema. V ta namen tvorimo funkcijo $\hat{F}(x_0, y_0, x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \lambda) =$

$$= \hat{F}(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}, \lambda) = p - \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} l_k - o \right).$$

Da se znebimo $\frac{1}{2}$, glejmo raje dvojno ploščino:

$$F(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}, \lambda) = 2p - \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} l_k - o \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k - \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} - o \right)$$

Iščemo vezane ekstreme funkcije F. V ta namen parcialno odvajamo funkcijo F po vseh spremenljivkah in dobimo
$\frac{\partial F}{\partial x_1} = y_2 - \lambda \frac{x_1 - x_0}{l_1} - \lambda(-1)\frac{x_2 - x_1}{l_2} = y_2 - y_0 + \lambda(\frac{x_2 - x_1}{l_2} - \frac{x_1 - x_0}{l_1})$,

$\frac{\partial F}{\partial y_1} = -x_2 - \lambda \frac{y_1 - y_0}{l_1} - \lambda(-1)\frac{y_2 - y_1}{l_2} = -x_2 + x_0 + \lambda(\frac{y_2 - y_1}{l_2} - \frac{y_1 - y_0}{l_1})$,
$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -y_1 + y_3 - \lambda \frac{x_2 - x_1}{l_2} - \lambda(-1)\frac{x_3 - x_2}{l_3} = y_3 - y_1 + \lambda(\frac{x_3 - x_2}{l_3} - \frac{x_2 - x_1}{l_2})$,
$\frac{\partial F}{\partial y_2} = x_1 - x_3 - \lambda \frac{y_2 - y_1}{l_2} - \lambda(-1)\frac{y_3 - y_2}{l_3} = -x_3 + x_1 + \lambda(\frac{y_3 - y_2}{l_3} - \frac{y_2 - y_1}{l_2})$,
$\vdots$
$\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = -y_{n-2} + y_n - \lambda \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{l_{n-1}} - \lambda(-1)\frac{x_n - x_{n-1}}{l_n} = y_n - y_{n-2} + \lambda(\frac{x_n - x_{n-1}}{l_n} - \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{l_{n-1}})$,
$\frac{\partial F}{\partial y_{n-1}} = x_{n-2} - x_n - \lambda \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{l_{n-1}} - \lambda(-1)\frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} = -x_n + x_{n-2} + \lambda(\frac{y_n - y_{n-1}}{l_n} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{l_{n-1}})$.

Splošneje, odvod po x_k in odvod po y_k za $k = 1, 2, \ldots, n-1$ je:

$\frac{\partial F}{\partial x_k} = y_{k+1} - y_{k-1} + \lambda(\frac{x_{k+1} - x_k}{l_{k+1}} - \frac{x_k - x_{k-1}}{l_k})$,
$\frac{\partial F}{\partial y_k} = -x_{k+1} + x_{k-1} + \lambda(\frac{y_{k+1} - y_k}{l_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{l_k})$.

Ekstreme iščemo kot ničle vseh parcialnih odvodov. Iščemo torej rešitve enačb $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial y_k} = 0$, to je rešitve sistema $2(n-1)$ enačb. Prešli bomo na kompleksna števila, uvedli novo spremenjivko, enačbi $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$ in $\frac{\partial F}{\partial y_k} = 0$ bomo združili v eno.

$$-(x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1}) - (x_{k+1} - x_k) + i(y_{k+1} - y_k) -$$
$$-\lambda \left(\frac{(y_k - y_{k-1}) + i(x_k - x_{k-1})}{l_k} - \frac{(y_{k+1} - y_k) + i(x_{k+1} - x_k)}{l_{k+1}} \right) = 0$$

Realni del te enačbe je ravno $\frac{\partial F}{\partial y_k} = 0$, imaginarni del pa se ujema s $\frac{\partial F}{\partial x_k} = 0$. Uvedemo $z_k = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})$ in zgornja enačba se glasi:

$$-\overline{z_k} - \overline{z_{k+1}} - \lambda \left(\frac{i \cdot \overline{z_k}}{l_k} - \frac{i \cdot \overline{z_{k+1}}}{l_{k+1}} \right) = 0$$

$$\overline{z_k} + \overline{z_{k+1}} + \lambda i \left(\frac{\overline{z_k}}{l_k} - \frac{\overline{z_{k+1}}}{l_{k+1}} \right) = 0$$

$$\overline{z_k} \left(1 + \frac{\lambda i}{l_k} \right) = -\overline{z_{k+1}} \left(1 - \frac{\lambda i}{l_{k+1}} \right)$$

Ta enačba je oblike $a + bi = c + di$ od koder sledi $|a+bi|^2 = |c+di|^2 = (c+di)(c-di)$. Zato lahko levo stran enačbe pomnožimo s konjugirano levo stranjo in desno stran pomnožimo s konjugirano desno stranjo. Dobimo:

$$\overline{z_k} z_k \left(1 + \frac{\lambda i}{l_k} \right) \left(1 - \frac{\lambda i}{l_k} \right) = (-\overline{z_{k+1}})(-z_{k+1}) \left(1 - \frac{\lambda i}{l_{k+1}} \right) \left(1 + \frac{\lambda i}{l_{k+1}} \right)$$

Opazimo tudi $l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = |z_k| = \sqrt{z_k \overline{z_k}}$, od koder je $z_k \overline{z_k} = l_k^2$. To uporabimo pri zgornji enačbi.

$$l_k^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{l_k^2} \right) = l_{k+1}^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{l_{k+1}^2} \right)$$

$$l_k^2 + \lambda^2 = l_{k+1}^2 + \lambda^2$$

Ker je dolžina l_k večja ali enaka 0, sledi $l_k = l_{k+1}$ za vsak k. Potemtakem optimalni n-kotnik mora biti enakostraničen in odslej pišimo $l_k = l$. Ker je $|z_k| = l$ in $|z_{k+1}| = l_{k+1} = l$, je $\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = \frac{l}{l} = 1$. Torej je $|z_{k+1}| = |z_k|$. Od tod dobimo

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = z_{k+1} z_k^{-1} = z_{k+1} \frac{\overline{z_k}}{|z_k|} = l \cdot e^{i \cdot \arg(z_{k+1})} \cdot \frac{1}{l} \cdot e^{-i \cdot \arg(z_k)} = e^{i(\arg(z_{k+1}) - \arg(z_k))}.$$

Vrnimo se k enačbi $\overline{z_k}(1+\frac{\lambda i}{l}) = -\overline{z_{k+1}}(1-\frac{\lambda i}{l})$ in jo konjugirajmo:

$$z_k\left(1-\frac{\lambda i}{l}\right) = -z_{k+1}\left(1+\frac{\lambda i}{l}\right)$$

$$\frac{z_{k+1}}{z_k} = -\frac{(l-\lambda i)\cdot l}{l\cdot(l+\lambda i)} = \frac{\lambda i - l}{\lambda i + l} = \text{konst.},$$

neodvisno od k. Potem je $\frac{z_{k+1}}{z_k} = e^{i(\arg(z_{k+1})-\arg(z_k))}$ konstantno.

Od tod je $\arg(z_{k+1}) - \arg(z_k) = konst$. Zaradi tega optimalni n-kotnik mora biti enakokoten: če gledamo $z_k = (x_k - x_{k-1}) + i(y_k - y_{k-1})$ kot vektor, ki se začne v oglišču n-kotnika (x_{k-1}, y_{k-1}) in konča v naslednjem oglišču (x_k, y_k) (to je ravno ena stranica n-kotnika), potem je kot med $\vec{z}_{k+1}$ in $\vec{z_k}$ konstanten.

V ničlah odvodov funkcije F mora izraz za ploščino n-kotnika res doseči maksimum. To pa zato, ker pri danem obsegu ploščina ne more biti poljubno velika. Funkcija F ima torej neko zgornjo mejo. Minimuma ni, saj je ploščina n-kotnika pri predpisanem obsegu lahko poljubno majhna, lik s ploščino nič pa ne obstaja. Stacionarne točke zato določajo maksimum. □

3.2. **Variacijski račun.** Na še en način bomo rešili izoperimetrični problem z uporabo variacijskega računa brez robnih pogojev.

Opomba 3.1. Vemo, da parametrizacija gladke krivulje z naravnim parametrom vedno obstaja. Ker si obseg predpišemo, mora biti dolžina krivulje (zaloga vrednosti poti) izmerljiva, dolžina krivulje mora obstajati. Dolžina parametrično podane krivulje $t \mapsto (x(t), y(t))$ je $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$. Ker ta integral obstaja, morata obstajati tudi $\dot{x}$ in $\dot{y}$, zato sta $x, y \in C^1$. Lahko se zgodi, da ima lik "špice", tj. $\dot{x}, \dot{y}$ oba hkrati enaka 0 za kak t, oziroma bolje, če sta levi in desni odvod različna v kakšni točki (to se vidi, če v kaki točki na krivulji obstajata dve možni tangenti). V takih primerih parametrizacija ni C^1 ampak odsekoma C^1, še vedno pa obstaja parametrizacija z naravnim parametrom. Zvezna funkcija $y\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je odsekoma zvezno odvedljiva na $[a,b]$, če je odvedljiva povsod razen v končno mnogo točkah $c_1, c_2, \ldots, c_k$, kjer $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$, v katerih obstajata levi in desni odvod. Na vsakem podintervalu, $[a, c_1], [c_1, c_2], \ldots, [c_k, b]$, ki jih določajo točke, v katerih ni odvedljiva, pa je zvezno odvedljiva.

Izrek 3.2. *Pri danem obsegu ima krog največjo ploščino.*

Dokaz. Iščemo krivuljo $t \mapsto (x(t), y(t))$, ki maksimizira ploščino, $\frac{1}{2}\int(x\dot{y} - y\dot{x})dt$, obseg $\int \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt$ pa mora biti fiksen. Privzemimo, da imamo naravno parametrizacijo, tj. $\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = 1$. Ta vemo, da obstaja. Tvorimo Lagrangeevo funkcijo

$$L(t,x,y,\dot{x},\dot{y}) = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}.$$

Od tod dobimo pripradajoči Euler-Lagrangeevi enačbi
$L_x - \frac{d}{dt}L_{\dot{x}} = 0$: $\frac{1}{2}\dot{y} - \frac{d}{dt}(-\frac{1}{2}y - \lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}) = 0,$
$L_y - \frac{d}{dt}L_{\dot{y}} = 0$: $-\frac{1}{2}\dot{x} - \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}x - \lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}) = 0.$
Ker imamo naravno parametrizacijo, se enačbi poenostavita:

$$\dot{y} + \lambda\ddot{x} = 0 \quad \text{in} \quad -\dot{x} + \lambda\ddot{y} = 0. \tag{6}$$

Iz slednje dobimo $\ddot{x} = \lambda y^{(3)}$ in to vstavimo v prvo: $\dot{y} + \lambda^2 y^{(3)} = 0$. Z nastavkom $\dot{y} = e^{\mu t}$ pridemo do enačbe $\lambda^2\mu^2 e^{\mu t} + e^{\mu t} = 0$. Ta se poenostavi v $\lambda^2\mu^2 = -1$, od koder dobimo $\mu = \pm i\frac{1}{\lambda}$.

Nesemo μ v nastavek in dobimo $\dot{y} = A\cos\frac{t}{\lambda} + B\sin\frac{t}{\lambda} = B(\frac{A}{B}\cos\frac{t}{\lambda} + \sin\frac{t}{\lambda})$. Namesto konstante $\frac{A}{B}$ pišemo $\operatorname{ctg}\delta$, dobimo

$$\dot{y} = \frac{B}{\sin\delta}\left(\cos\delta\cos\frac{t}{\lambda} + \sin\delta\sin\frac{t}{\lambda}\right) = D\cos\left(\frac{t}{\lambda} - \delta\right) = \delta_0\cos\left(\frac{t-t_0}{\lambda}\right).$$

Uporabili smo adicijski izrek za kosinus: $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Iz $\dot{x} = \lambda\ddot{y}$ sledi $x = \lambda\dot{y} + C$, tako dobimo končno rešitev

$$x(t) = \lambda\delta_0\cos\left(\frac{t-t_0}{\lambda}\right) + x_0 \quad \text{in} \quad y(t) = \lambda\delta_0\sin\left(\frac{t-t_0}{\lambda}\right) + y_0.$$

To je parametričen zapis krožnice s središčem v (x_0, y_0) in polmerom $|\lambda\delta_0|$. Konstante $\lambda, \delta_0, x_0, y_0, t_0$ bi sicer določili iz robnih pogojev in pogoja, kolikšen mora biti obseg. Primer, ko $x_0 = y_0 = 0$:

$$x^2 + y^2 = (\lambda\delta_0)^2(\cos^2(\frac{t-t_0}{\lambda}) + \sin^2(\frac{t-t_0}{\lambda})) = (\lambda\delta_0)^2.$$

To je res za $\lambda \neq 0$. Za $\lambda = 0$ pa enačbi (6) dasta $\dot{y} = \dot{x} = 0$. To rešitev zavržemo, ker je v nasprotju z naravno parametrizacijo, $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 0$. □

4. Vektorji

Naslednji izrek je dvorazsežna različica Schmidtovega dokaza s projekcijo za n dimenzij. Poleg tega dobimo zraven še *izoperimetrično neenakost.*

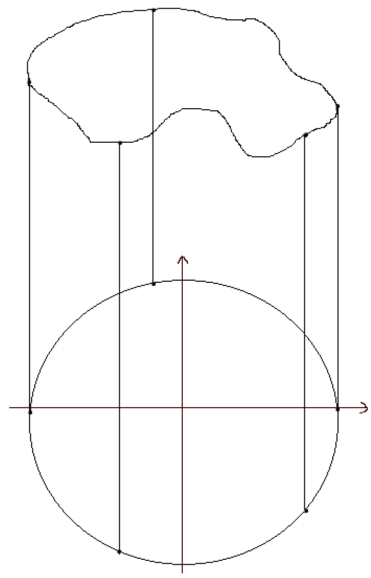
Izrek 4.1 (Schmidtov dokaz s projekcijo)**.** *Naj bo obseg o fiksen. Za vsak lik takega obsega in njegovo ploščino p velja izoperimetrična neenakost:*

$$o^2 \geq 4\pi p. \tag{7}$$

Enačaj velja samo za krog.

Dokaz. Rob poljubnega lika D parametriziramo $t \mapsto (x(t), y(t))$. Za to parametrizacijo naj velja še $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$, ker vzamemo naravno parametrizacijo. Lik D projiciramo na krožnico K enake širine, slika 16. Brez izgube splošnosti lahko središče K postavimo v izhodišče koordinatnega sistema. Vodoravna premica, ki razpolovi obseg, lik D razdeli na dva dela, zgornjega in spodnjega. Posamezen del omejuje vodoravna premica in polovica robu lika D. Zaradi konveksnosti lahko polovici robu obravnavamo kot funkciji (enak premislek kot pri dokazu izreka 2.15). Zgornjo polovico roba lika D projiciramo na zgornjo polkrožnico, spodnjo polovico pa na spodnjo polkrožnico. Točka $(x, \hat{y})$ je projekcija točke (x, y) z roba D na krožnico K, ki je enako široka kot ta D. Če bi D nekoliko zavrteli, bi bila širina, če D ni rotacijsko simetričen, drugačna. Ko opazujemo D, ga ne vrtimo, da se širina ne spreminja. Tu jo razumemo kot razdaljo med skrajno levo in skrajno desno x koordinato. Recimo, da je ta širina enaka $2r$. Zato x koordinata ostane nespremenjena. Smerni vektor tangente na rob, oziroma krivuljo, ki tvori bD, je $(\dot{x}, \dot{y})$. Smerni vektor normale je pravokoten na tangentnega, $(\dot{y}, -\dot{x})$. Skalarni produkt

$$(x, \hat{y}) \cdot (\dot{y}, -\dot{x}) = x\dot{y} - \hat{y}\dot{x}$$



SLIKA 16. Poljuben lik projiciramo na krožnico enake širine.

je manjši kot produkt dolžin teh vektorjev ($-|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$),

$$x\dot{y} - \hat{y}\dot{x} \leq |(x, \hat{y})| \cdot |(\dot{y}, -\dot{x})| = r\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = r.$$

Enakost velja le, ko sta vektorja vzporedna in imata isto smer, tj. kot med njima mora biti 0. To mora veljati v vsaki točki roba. To pa je samo takrat, ko je $D = K$. Neenakost $x\dot{y} \leq r + \hat{y}\dot{x}$ integriramo in dobimo

$$\int_0^o x\dot{y}dt \leq \int_0^o (r + \hat{y}\dot{x})dt.$$

$$\int_0^o x\dot{y}dt = \int_0^o x\frac{dy}{dt}dt = \int_{bD} xdy = \int_D 1dxdy = \mathrm{pl}(D) = p$$

Pri tem smo uporabili Greenovo formulo $\int_{bD}(Pdx + Qdy) = \int_D(\frac{\partial}{\partial x}Q - \frac{\partial}{\partial y}P)dxdy$. Tu je $P = 0$ in $Q = x$.

$$\int_0^o (r + \hat{y}\dot{x})dt = \int_0^o rdt + \int_{bD} \hat{y}dx = or + \int_K -1dxd\hat{y} = or - \mathrm{pl}(krog) = or - \pi r^2$$

Torej:

$$p \leq or - \pi r^2 = \frac{o^2}{4\pi} - \frac{\pi}{4}(\frac{o^2}{\pi^2} - \frac{4or}{\pi} + 4r^2) = \frac{o^2}{4\pi} - \frac{\pi}{4}(\frac{o}{\pi} - 2r)^2 \leq \frac{o^2}{4\pi}.$$

Pogledamo skrajno desno in skrajno levo stran in vidimo željeno neenakost. $\square$

Za ploščino p poljubnega lika z obsegom o je $p \leq \frac{o^2}{4\pi}$. Največja ploščina je dosežena torej takrat, ko velja enačaj. Po pravkar dokazanem izreku smo spet prišli do iste rešitve problema. Izoperimetrična neenakost ne razlikuje med prvotnim problemom in dualom.

Za podano sklenjeno krivuljo dolžine o oziroma lik obsega o in ploščine p je *izoperimetrični kvocient* definiran kot razmerje $Q = \frac{4\pi p}{o^2}$. Po izoperimetrični neenakosti (7) je $Q \leq 1$. Kvocient Q nam pove, kako "dober" je posamezen lik.

Ploščina pravilnega n-kotnika z obsegom o je $p_n = \frac{o^2}{4}\frac{1}{n\cdot \mathrm{tg}(\pi/n)}$, kar smo izpeljali na začetku drugega poglavja. Potem je izoperimetrični kvocient pravilnega n-kotnika $Q_n = \frac{\pi}{n\cdot \mathrm{tg}(\pi/n)}$. Ko n pošljemo preko vsake meje, iz n-kotnika dobimo krog, torej je $\lim_{n\to\infty} Q_n = 1$. Posledica tega je $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n\cdot \mathrm{tg}(\pi/n)} = 1$ in $\lim_{n\to\infty} n \cdot \mathrm{tg}(\pi/n) = \pi$.

Sledi pristop do izoperimetričnega problema z vektorsko analizo. Ogledali si bomo dvorazsežno priredbo dokaza M. Gromova za n dimenzij. Reševali bomo dualni izoperimetrični problem. Pri podani ploščini iščemo lik z najmanjšim obsegom.

Izrek 4.2 (Dokaz Gromova). *Pri dani ploščini ima krog najmanjši obseg.*

Dokaz. Brez škode za splošnost lahko privzamemo, da je podana ploščina enaka π, saj je od ploščine odvisna le velikost rešitve, ne pa tudi oblika lika. Če gledamo like dane ploščine, te samo raztegnemo ali skrčimo, da bo ploščina π.

Naj bo $R \subset \mathbb{R}^2$ območje s ploščino π, z odsekoma gladkim robom $C = bR$ in zunanjo normalo $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$. Poiščemo vektorsko polje $\vec{v}$ na R, da bo veljalo

$$\operatorname{div}(\vec{v}) \geq 2, \tag{8}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} \leq 1, \tag{9}$$

kjer je $\vec{n}$ enotska normala, ki kaže ven iz R. Enakost bo veljala le, ko je R krog. Če nam tak $\vec{v}$ uspe najti, potem z uporabo Gaussovega izreka za 2 dimenziji dobimo

$$\mathrm{l}(C) = \int_C 1 \overset{(9)}{\geq} \int_C \vec{v}\cdot\vec{n} \overset{Gauss}{=} \int\int_R \operatorname{div}(\vec{v})dxdy \overset{(8)}{\geq} 2\int\int_R dxdy = 2\cdot \mathrm{pl}(R) = 2\pi.$$

Dolžina krivulje je obseg lika R, $\mathrm{l}(C) = o$ in izoperimetrična neenakost je $o \geq 2\pi$. (Če to neenakost kvadriramo, dobimo že znano (7) pri $p = \pi$.) Ko se prepričamo o (8), (9) in ugotovimo, kdaj velja enačaj, smo problem rešili. Še prej pa je treba najti $\vec{v}$. Iskano vektorsko polje je negativno gravitacijsko polje. To negativno gravitacijo proizvaja lik R, ki ga zapolnjuje snov s konstantno ploščinsko gostoto.

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi}\int_{\vec{y}\in R} \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^2}d\vec{y}$$

Preverimo (8). Kot bomo videli, bo veljal kar enačaj, $\operatorname{div}(\vec{v}) = 2$, to pa nič ne pokvari izoperimetrične neenakosti, saj je še en neenačaj pri (9). Zaradi manj pisanja opustimo puščice za vektorje in si pač mislimo, da $x, y \in \mathbb{R}^2$. Integral

$$v(x) = \frac{1}{\pi}\int_{y\in R} \frac{x-y}{|x-y|^2}dy$$

je singularen. Razstavili ga bomo na dva dela. Singularnost nastopi, če je $x \in R$. Naj bo $x_0 \in R$. Definiramo testno funkcijo

$$\chi(y) = \begin{cases} 1; & \text{v okolici } x_0 \\ 0; & \text{zunaj večje okolice } x_0. \end{cases}$$

Med robovoma obeh okolic pa zavzame take vrednosti, da je gladka.

$$v(x) = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_R \chi(y)\frac{x-y}{|x-y|^2}dy}_{v_1(x)} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_R (1-\chi(y))\frac{x-y}{|x-y|^2}dy}_{v_2(x)}$$

Ker je $\mathrm{div}(v) = \mathrm{div}(v_1)+\mathrm{div}(v_2)$, divergenco izračunamo za vsak del posebej za točke x, ki so blizu x_0. Poglejmo najprej $v_2(x)$. Iz Analize 4 se spomnimo harmonične funkcije

$$N(z) = \frac{1}{2\pi}\ln|z| = \frac{1}{4\pi}\ln(z_1^2+z_2^2),\ z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2.$$
$$\mathrm{grad}(N) = \nabla N = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2z_1}{z_1^2+z_2^2}, \frac{2z_2}{z_1^2+z_2^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{z}{|z|^2}$$

Opazimo, da je $(-2)\cdot\nabla N$ enak našemu integrandu v. To se vidi, če vpeljemo novo spremenljivko $z = x-y$. Ker je v_2 nesingularen integral, je $\mathrm{div}(v_2) = 0$, saj je $\mathrm{div}(\nabla N) = \Delta N = 0$ na $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Osredotočimo se še na v_1. Tu je $x \approx x_0$, imamo singularnost.

$$v_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_R \chi(y)\frac{x-y}{|x-y|^2}dy = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\chi(y)\frac{x-y}{|x-y|^2}dy$$

Integracijo smo z R razširili na celo ravnino zaradi kompaktnosti nosilca χ. Uvedemo novo spremenljivko $z = x-y$. Potem je $dy = -dz$, v_1 pa postane

$$v_1(x) = \frac{-1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\chi(x-z)\frac{z}{|z|^2}dz.$$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(v_1) &= \frac{-1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\left(\chi_{y_1}(x-z)\frac{z_1}{|z|^2}+\chi_{y_2}(x-z)\frac{z_2}{|z|^2}\right)dz = \frac{-1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2}\nabla\chi(x-z)\frac{z}{|z|^2}dz\\ &= (-2)\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla\chi)(x-z)\nabla N(z)dz = (-2)\int_{K(x_0,m)}(\nabla\chi)(x-z)\nabla N(z)dz\end{aligned}$$

Krog $K(x_0,m)$ s središčem v x_0 ima tako velik polmer m, da je nosilec funkcije χ vsebovan v njem za vse x, $x\approx x_0$ in da je $\mathrm{supp}(\chi)\subseteq \mathrm{int}(K(x_0,m))$. Zadnje pomeni, da je $\mathrm{supp}(\chi)$ odmaknjen stran od $bK(x_0,m)$.

Spomnimo se Greenove identitete

$$\int_\Omega(\nabla v\cdot\nabla u)dV = \int_{b\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}}ds - \int_\Omega u\Delta v\,dV.$$

Vstavimo $\Omega = K(x_0,m)$, $v=\chi$ ter $u=N$ in dobimo

$$\mathrm{div}(v_1) = (-2)\left(\int_{bK(x_0,m)}N\frac{\partial\chi}{\partial\vec{n}}dr - \int_{K(x_0,m)}N(z)(\Delta\chi)(x-z)dS\right).$$

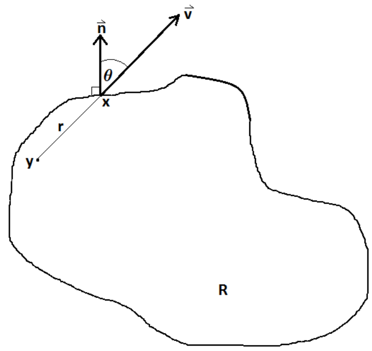
Prvi integral je zaradi pogoja o nosilcu in tako izbranega kroga enak nič. Za drugi integral pa dobimo

$$\mathrm{div}(v_1) = 2\int_{K(x_0,m)}N(z)\cdot(\Delta\chi)(x-z)dS = 2\int_{\mathbb{R}^2}N(z)\cdot\Delta\chi(x-z)dz = 2\cdot\chi(x-0) = 2\cdot\chi(x) = 2.$$

Pri tretjem enačaju smo uporabili dejstvo (vemo iz Analize 4), da je $\Delta N(z)$ delta-funkcija, $\Delta N(z) = \delta_{(0,0)}$, pri čemer smo uporabili Greenovo reprezentativno funkcijo. Seveda se da tudi brez nje, to se vidi npr. v [2]. Pri zadnjem enačaju pa smo upoštevali definicijo funkcije χ v okolici x_0.

Preverimo še (9) in poglejmo, kdaj nastopi enačaj. Fiksirajmo točko $x\in C$. Skalarni produkt $\vec{v}\cdot\vec{n}$ je zaradi enotskosti $\vec{n}$ enak $|\vec{v}|\cdot\cos\theta$, pri čemer je θ kot med $\vec{n}$ in $\vec{v}$.

$$|\vec{v}| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{y\in R}\frac{x-y}{|x-y|^2}dy\right| \overset{(\diamond)}{\leq} \frac{1}{\pi}\int_{y\in R}\left|\frac{x-y}{|x-y|^2}\right|dy = \frac{1}{\pi}\int_{y\in R}\frac{1}{|x-y|}dy$$



Slika 17. Vektorsko polje na območju R z zunanjo normalo v točki x.

Nenačaj pri ($\diamond$) postane enačaj, če so vektorji $x-y$, $y \in R$ kolinearni. Bolje, to je res, ko je θ enaka 0. V točko x postavimo izhodišče polarnega koordinatnega sistema. Uvedemo polarne koordinate tako, da $\vec{n}$ kaže v smeri $\vartheta = \pi$. Potem je

$$\vec{n}\cdot\vec{v} \leq \cos\theta\frac{1}{\pi}\int_{y\in R}\frac{1}{|x-y|}dy = \frac{\cos\theta}{\pi}\int_{y\in R}\frac{1}{r}dy = \frac{\cos\theta}{\pi}\frac{1}{\hat{r}}\int_{y\in R}dy = \frac{\cos\theta}{\pi}\frac{1}{\hat{r}}\pi = \frac{\cos\theta}{\hat{r}}.$$

Pri drugem enačaju smo uporabili izrek o povprečni vrednosti. Sedaj imamo

$$\vec{n}\cdot\vec{v} \leq \frac{\cos\theta}{\hat{r}},$$

z enakostjo le pri $\theta = 0$. Vrednosti desne strani bodo večje za manjše $\hat{r}$ in kot $\theta = 0$. Izraz $\theta = 0$ pomeni, da so silnice vektorskega polja enake smeri kot normalne. Ker to velja za vsako robno točko R, enakost drži le, ko je R enak krogu. Ker je ploščina R enaka π, ploščina kroga s polmerom $\hat{r}$ pa $\pi\hat{r}^2$, sledi $\hat{r} = 1$. S tem je dokazana tudi (9). $\square$

5. Fourierove vrste

Najprej nekaj besed o Parsevalovem izreku v posebnem primeru (splošnejšo verzijo najdemo v [6]). To bomo potlej uporabili pri še eni različici dokaza izoperimetrične neenakosti. Za Fourierovo vrsto bomo uporabili zapis

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx) \quad \text{in} \quad g(x) = \frac{c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(nx)+d_n\sin(nx).$$

V tej notaciji je Parsevalov izrek oblike:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n+b_nd_n) \tag{10}$$

Opomba 5.1. Če $f(t) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)$, so koeficienti določeni z $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$, $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)dt$.

Opomba 5.2. Fourierova vrsta funkcije f konvergira absolutno in enakomerno pri vsakem t, če je f periodična funkcija na $\mathbb{R}$ in razreda C^2. To je dovolj za uporabo Parsevalovega izreka. V točki t, kjer je f zvezna, je vsota njene Fourierove vrste enaka $f(t)$. Nekaj osnovnih stvari je najti v [3].

V Fourierovo vrsto lahko razvijemo periodične funkcije. V dokazu izreka 5.3 bomo rob poljubnega lika parametrizirali $t \mapsto (x(t), y(t))$, kjer je t parameter, ki teče po nekem intervalu. Vsako funkcijo na nekem intervalu $[a, b]$ lahko obravnavamo kot periodično na $\mathbb{R}$ s periodo $b - a$ in sicer tako, da jo periodično nadaljujemo na $\mathbb{R}$. V našem primeru imamo parametrizacijo sklenjene krivulje, velja $x(a) = x(b)$ in $y(a) = y(b)$. Funkciji $x(t)$ in $y(t)$ sta zvezni periodični funkciji na $\mathbb{R}$ in odsekoma zvezno odvedljivi. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je interval, na katerem delamo, $[0, 2\pi]$, saj lahko poljuben interval $[a, b]$ z linearno funkcijo slikamo na $[0, 2\pi]$.

Integracija po delih v formulah za Fourierove koeficiente nam v primeru, ko imamo periodične funkcije na $\mathbb{R}$ razreda C^2, da, da so velikosti $\frac{c}{n^2}$. Poglejmo na primer a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left(\left[f(t)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t)\frac{\sin(nt)}{n}dt\right) =$$

$$= \frac{-1}{\pi n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)dt = \frac{-1}{\pi n}\left(\left[f'(t)\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f''(t)\frac{\cos(nt)}{n}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n^2}\left(f'(2\pi) - f'(0) - \int_0^{2\pi} f''(t)\cos(nt)dt\right)$$

V nadaljevanju bomo funkciji enkrat odvajali. Ker v Fourierovih koeficientih nastopa drugi odvod, po našem odvajanju dobimo odvode tretjega reda. Potem je zadosten pogoj, da sta $x(t)$ in $y(t)$ razreda C^3.

Dokaz Parsevalovega izreka na $\mathbb{R}$ za gladke funkcije gre takole. Po adicijskih izrekih za kotne funkcije imamo

(11)
$$\int_0^{2\pi}\cos(rx)\cos(sx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(r+s)x+\cos(s-r)x)dx = 0 \text{ za } r, s \in \mathbb{Z}, s \neq r, s \neq -r.$$

Iz enakih razlogov tudi

$$\int_0^{2\pi}\sin(rx)\sin(sx)dx = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos(r+s)x - \cos(r-s)x)dx = 0 \tag{12}$$

in

$$\int_0^{2\pi}\cos(rx)\sin(sx)dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin(r+s)x + \sin(s-r)x)dx = 0, \tag{13}$$

če le $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq r, s \neq -r$. Naj bosta

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) \quad \text{in}$$

$$g(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(nx) + d_n\sin(nx)$$

Fourierovi vrsti v realnem. Če vrsti konvergirata absolutno za vsak x, potem njun produkt dobimo kot

$$f(x)g(x) =$$

$$=\left(\frac{a_0}{2}+a_1\cos(x)+b_1\sin(x)+a_2\cos(2x)+b_2\sin(2x)+a_3\cos(3x)+b_3\sin(3x)+\ldots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{c_0}{2}+c_1\cos(x)+d_1\sin(x)+c_2\cos(2x)+d_2\sin(2x)+c_3\cos(3x)+d_3\sin(3x)+\ldots\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2}\cdot\frac{c_0}{2} + \frac{a_0}{2}\left(c_1\cos(x) + d_1\sin(x) + c_2\cos(2x) + d_2\sin(2x) + c_3\cos(3x) + \ldots\right) +$$

$$+a_1\cos(x)\left(\frac{c_0}{2}+c_1\cos(x)+d_1\sin(x)+c_2\cos(2x)+d_2\sin(2x)+c_3\cos(3x)+\dots\right)+$$
$$+b_1\sin(x)\left(\frac{c_0}{2}+c_1\cos(x)+d_1\sin(x)+c_2\cos(2x)+d_2\sin(2x)+c_3\cos(3x)+\dots\right)+$$
$$\vdots$$
$$+a_k\cos(kx)\left(\frac{c_0}{2}+c_1\cos(x)+d_1\sin(x)+c_2\cos(2x)+d_2\sin(2x)+c_3\cos(3x)+\dots\right)+$$
$$+b_k\cos(kx)\left(\frac{c_0}{2}+c_1\cos(x)+d_1\sin(x)+c_2\cos(2x)+d_2\sin(2x)+c_3\cos(3x)+\dots\right)+\dots$$

Zanima nas $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$. Integral prve vrstice je ob uporabi (11), (12), (13) enak $\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2}\frac{c_0}{2}dx = \frac{a_0c_0}{2}\pi$. Ker je za $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ integral

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(kx)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2kx)}{2}dx = \pi \quad \text{in}$$
$$\int_0^{2\pi} \sin^2(kx)dx = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2kx)}{2}dx = \pi,$$

je integral druge vrstice enak $\int_0^{2\pi} a_1c_1\cos^2(x)dx = a_1c_1\pi$, integral tretje vrstice je $\int_0^{2\pi} b_1d_1\sin^2(x)dx = b_1d_1\pi$, integral $2k$-te vrstice je $\int_0^{2\pi} a_kc_k\cos^2(kx)dx = a_kc_k\pi$, integral $(2k+1)$-te vrstice je $\int_0^{2\pi} b_kd_k\sin^2(kx)dx = b_kd_k\pi$ in tako naprej. Vseskozi uporabljamo (11), (12) in (13).

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx=\pi\left(\frac{a_0c_0}{2}+a_1c_1+b_1d_1+\dots+a_kc_k+b_kd_k+\dots\right)=\pi\left(\frac{a_0c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n+b_nd_n)\right)$$

$$\text{oziroma} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \frac{a_0c_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_nc_n+b_nd_n).$$

Ob uporabi Parsevalovega izreka v posebnem se izoperimetričnega problema lotimo še s Fourierovimi vrstami.

Izrek 5.3 (Hurwitzov dokaz s Fourierovimi vrstami)**.** *Naj bo obseg o fiksen. Za vsak lik takega obsega in njegovo ploščino p velja neenakost:*

$$o^2 \geq 4\pi p.$$

Enačaj velja samo za krog.

Dokaz. Krivuljo parametriziramo $t \mapsto (x(t), y(t))$. Obseg o je fiksiran. Naj za to parametrizacijo velja $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = (\frac{o}{2\pi})^2$. To lahko dosežemo, obrazložitev je v opombi 3.1. Če imamo naravno parametrizacijo, imamo tudi tako kot zgoraj. Fizikalno to pomeni, da razdaljo o prepotujemo v času 2π. Koordinatni funkciji $x(t), y(t)$ razvijemo v Fourierovo vrsto:
$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)$
$y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos(nt) + d_n\sin(nt)$.
Izračunajmo odvoda (to lahko naredimo zaradi enakomerne konvergence vrst $x(t)$ in $y(t)$, glej opombo 5.2):

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(b_n\cos(nt) - a_n\sin(nt)) = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n)\cos(nt) + (-na_n)\sin(nt) \quad \text{in}$$
$$\dot{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n(d_n\cos(nt) - c_n\sin(nt)) = \sum_{n=1}^{\infty}(nd_n)\cos(nt) + (-nc_n)\sin(nt).$$

Za izračun $\int_0^{2\pi} \dot{x}^2 dt$ in $\int_0^{2\pi} \dot{y}^2 dt$ uporabimo (10):

$$\int_0^{2\pi} \dot{x}(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \dot{x}(t) \cdot \dot{x}(t) dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n)^2 + (-na_n)^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(b_n^2 + a_n^2),$$

$$\int_0^{2\pi} \dot{y}(t)^2 dt = \int_0^{2\pi} \dot{y}(t) \cdot \dot{y}(t) dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (nd_n)^2 + (-nc_n)^2 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(d_n^2 + c_n^2).$$

Zgornji enakosti seštejemo, njuna vsota je potem

$$\int_0^{2\pi} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(b_n^2 + a_n^2) + \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(d_n^2 + c_n^2) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

Ploščino lika izračunamo preko Greenove formule: $p = \int_0^{2\pi} x\dot{y}dt$. Po Parsevalovem izreku sledi, da je $p = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n)$. Tako imamo

$$o^2 = 4\pi^2 \left(\frac{o}{2\pi}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{o}{2\pi}\right)^2 dt = 2\pi \int_0^{2\pi} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) dt = 2\pi\pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2).$$

$$\begin{aligned}
o^2 - 4\pi p &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n) = \\
&= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2n(a_n d_n - b_n c_n)) = \\
&= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ((na_n - d_n)^2 - d_n^2 + n^2 d_n^2 + (nb_n + c_n)^2 - c_n^2 + n^2 c_n^2) = \\
&= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (\underbrace{(na_n - d_n)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(nb_n + c_n)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(n^2 - 1)}_{\geq 0} \underbrace{(c_n^2 + d_n^2)}_{\geq 0}) \geq 0
\end{aligned}$$

Kdaj velja enakost $o^2 - 4\pi p = 0$? Če je izpolnjena enakost, mora veljati

$$2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} ((na_n - d_n)^2 + (nb_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2)) = 0$$

in zato

$$2\pi^2((a_1 - d_1)^2 + (b_1 + c_1)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (\underbrace{(na_n - d_n)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(nb_n + c_n)^2}_{\geq 0} + \underbrace{(n^2 - 1)}_{>0} \underbrace{(c_n^2 + d_n^2)}_{\geq 0}) = 0.$$

Vsota kvadratov je enaka 0 samo, če je vsak od njih enak 0. Zato dobimo

$$a_1 = d_1, b_1 = -c_1, c_n = d_n = 0 \quad \forall n \geq 2 \Rightarrow a_n = b_n = 0 \quad \forall n \geq 2$$

in od tod rešitev

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) \quad \text{in} \quad y(t) = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos(t) + a_1 \sin(t).$$

Enačbi $x(t)$ in $y(t)$ opisujeta krog. Če na primer postavimo $a_0 = c_0 = 0$, dobimo

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= a_1^2 \cos^2 t + b_1^2 \sin^2 t + 2a_1 b_1 \cos t \sin t + b_1^2 \cos^2 t + a_1^2 \sin^2 t - 2a_1 b_1 \cos t \sin t = \\
&= (a_1^2 + b_1^2) \cos^2 t + (a_1^2 + b_1^2) \sin^2 t = a_1^2 + b_1^2 = konst.
\end{aligned}$$

□

6. O splošnejših problemih

Klasičnega izoperimetričega problema smo se lotili na več načinov. Še več pristopov je opisanih v [1].

Kot je že bil namig v uvodu in v poglavju Vektorji, obstajajo tudi splošnejši izoperimetrični problemi. Problem lahko rešujemo ne le v $\mathbb{R}^n$, ampak tudi na sferi S^n ali n-dimenzionalnem hiperboličnem prostoru H^n. Pri vseh treh je rešitev S^{n-1}. Klasična izoperimetrična neenakost v $\mathbb{R}^n$: med vsemi območji $V \subset \mathbb{R}^n$ danega volumna ima krogla B^{n-1} minimalen $(n-1)$-dimenzionalen volumen roba,

$$\operatorname{vol} V \leq C_n (\operatorname{vol} \partial V)^{\frac{n}{n-1}},$$

kjer je $C_n = \operatorname{vol} B^{n-1} / (\operatorname{vol} S^{n-1})^{\frac{n}{n-1}}$ in $S^{n-1} = \partial B^{n-1}$ enotska sfera. Dokaz tega je najti v [5].

Primer za $n = 3$: v prostoru $\mathbb{R}^3$ je pri dani površini krogla prostorninsko največja. V drugih prostorih velja nekoliko drugačna izoperimetrična neenakost. Več o neenakostih je najti v [7]. Nekaj rezultatov o izoperimetričnem problemu na nekaterih ploskvah je v [4].

Literatura

[1] V. Blåsjö, *The isoperimetric problem*, Amer. Math. Monthly **112** (2005) 526–566.

[2] G. B. Folland, *Introduction to partial differential equations*, Mathematical notes **17**, Princeton University Press, Princeton, 1976.

[3] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza 2 - prvi približek skript (pdf)*, verzija 10. 8. 2010, [ogled 11. 8. 2012], dostopno na `http://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf`.

[4] H. Howards, M. Hutchings in F. Morgan, *The isoperimetric problem on surfaces*, Amer. Math. Monthly **106** (1999) 430–439.

[5] V. D. Milman in G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces*, Lecture notes in mathematics **1200**, Springer, Berlin, 1986.

[6] A. Suhadolc, *Metrični prostor, Hilbertov prostor, Fourierova analiza, Laplaceova transformacija*, Matematični rokopisi **23**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 1998.

[7] *The isoperimetric inequality*, [ogled 10. 8. 2012], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Isoperimetric_inequality`.