UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Domen Močnik

Zgornja polravnina kot model za hiperbolično geometrijo

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Jaka Smrekar

Ljubljana, 2012

Kazalo

Zgornja polravnina kot model za hiperbolično geometrijo

POVZETEK

V delu je predstavljena hiperbolična geometrija na modelu zgornje kompleksne polravnine $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Skupaj z ustrezno definicijo hiperboličnih premic in incidenčne relacije je mogoče dokazati, da tako podana geometrija ne zadošča evklidskemu aksiomu vzporednosti. Če poiščemo opis hiperboličnih premic z množicami rešitev primernih enačb, je mogoče zgraditi grupo $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ homeomorfizmov na $\mathbb{H}$, ki slikajo hiperbolične premice v hiperbolične premice in ob tem dokazati nekaj dodatnih lastnosti tovrstnih preslikav. Z vpeljavo ustrezne metrike $d_{\mathbb{H}}(.,.)$ na $\mathbb{H}$ se izkaže, da je grupa $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ hkrati tudi grupa izometrij metričnega prostora $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$.

The upper half plane model for hyperbolic geometry

ABSTRACT

In this text, hyperbolic geometry is presented on the model of complex upper half plane $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Together with the appropriate definitons of hyperbolic lines and incidence relation it is possible to prove that geometry, given in that way, does not satisfy the Euclidean parallel postulate. If we describe hyperbolic lines in terms of sets of solutions of certain equations, it is possible to construct a group $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ of homeomorphisms on $\mathbb{H}$, which maps hyperbolic lines to hyperbolic lines, and to prove some properties of those mappings at the same time. With the introduction of an appropriate metric $d_{\mathbb{H}}(.,.)$ on $\mathbb{H}$ it turns out that the group $\mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ is also a group of isometries of the metric space $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$.

Math. Subj. Class. (2010): 51M10

Ključne besede: hiperbolična geometrija, Möbiusove transformacije, splošna Möbiusova grupa, izometrije

Keywords: hyperbolic geometry, Möbius transformations, general Möbius group, isometries

1. Uvod

Starogrški matematik Evklid (okoli 300 pr. n. št.) je v svoji knjigi Elementi kot prvi aksiomatsko definiral geometrijsko ravnino z naslednjimi petimi aksiomi:

(1) Skozi različni točki poteka natanko ena premica.
(2) Vsako premico je mogoče podaljšati v neskončno v obeh smereh.
(3) Obstaja natanko ena krožnica z danim središčem in danim polmerom.
(4) Vsi pravi koti so skladni.
(5) Za dano premico in dano točko, ki ne leži na njej, obstaja natanko ena premica, ki je vzporedna dani premici in gre skozi dano točko.

S temi aksiomi je podana evklidska ravninska geometrija, peti aksiom pa je poznan pod imenom *Evklidov aksiom vzporednosti*. Kasnejše matematike je zanimalo, ali je morda peti aksiom posledica preostalih štirih, ali pa je dejansko neodvisen od njih. Dva tisoč let so iz prvih štirih aksiomov poskušali dokazati petega, največkrat na način, da so želeli dokazati trditev, ekvivalentno petemu aksiomu, kot je npr. *Točke, enako oddaljene od premice na isti strani te premice, tvorijo premico* in mnoge druge. Pri tem so bili neuspešni. Včasih so dokazi sloneli na sklepanju s protislovjem, torej, da so zanikali peti aksiom in nato skušali dokazati, da to vodi v nasprotje s preostalimi štirimi aksiomi. Ena od možnosti zanikanja petega aksioma se glasi

5* Za dano premico in dano točko, ki ne leži na njej, obstaja več premic, ki so vzporedne dani premici in gredo skozi dano točko.

Problem so razrešili šele v devetnajstem stoletju, ko so presenetljivo ugotovili, da je aksiom 5* dejansko skladen s preostalimi štirimi aksiomi. To je pomenilo, da sta tako aksioma 5 kot 5* neodvisna od preostalih štirih. Če prvim štirim aksiomom dodamo Evklidov aksiom vzporednosti, dobimo evklidsko geometrijsko ravnino, če pa jim namesto Evklidovega aksioma dodamo aksiom 5*, dobimo povsem drugo geometrijsko ravnino, ki ji rečemo *hiperbolična geometrijska ravnina* in je tipičen primer neevklidske geometrije. Še en primer neevklidske geometrije je *sferična geometrijska ravnina*, katere peti aksiom se glasi

5** Za dano premico in dano točko, ki ne leži na njej, ne obstaja premica, ki gre skozi dano točko in je hkrati vzporedna dani premici.

Izkaže se, da ima tovrstni aksiomatski sistem hiperbolične geometrijske ravnine naslednje posledice, ki se razlikujejo od evklidske geometrijske ravnine: ekvidistantne krivulje na isti strani ravne črte so ukrivljene in ne več ravne; podobni trikotniki so hkrati tudi skladni, vsota notranjih kotov trikotnika ni enaka 180° in še druge.

Sprva so se ukvarjali le z aksiomatskim sistemom hiperbolične ravnine, kasneje pa so ta sistem tudi dejansko prenesli na razne analitične modele, kjer je bil lahko aksiomatski sistem udejanjen oziroma predstavljen. Štirje najbolj znani analitični modeli hiperbolične ravnine nosijo imena *Kleinov model*, *Poincaréjev disk*, *Poincaréjeva zgornja polravnina* in *Lorentzov model* oz. model na hiperboloidu.

Hiperbolična geometrija je torej odigrala ključno vlogo pri odkritju neevklidskih geometrij. Uporabnost pa je dokazala še na mnogih drugih področjih. Pri študiju ukrivljenih ploskev se je izkazalo, da so ploskve s konstantno negativno ukrivljenostjo izometrične hiperbolični ravnini. Svoje mesto je našla tudi v Einsteinovi posebni teoriji relativnosti. Glede na normo v *prostor-času Minkowskega*, ki je matematični model za posebno teorijo relativnosti, enako oddaljene točke v tem prostoru tvorijo hiperboloid. Od tu tudi ime za hiperbolično geometrijo. Uporabna je še na drugih področjih matematike, kot so kompleksna analiza, teorija dvo- in tri-razsežnih mnogoterosti, teorija grup, topologija in nenazadnje tudi v fiziki.

Zgodovina hiperbolične geometrije je bolj obširno opisana v [2], vključno z njenimi glavnimi akterji. Prav tako lahko bralec v omenjenem viru najde več o uporabi hiperbolične geometrije ter o njenem poimenovanju.

V tem delu se bomo posvetili zgolj enemu analitičnemu modelu za hiperbolično geometrijsko ravnino in to je že prej omenjeni model na zgornji polravnini. Ta je obširno obravnavan v knjigi [1], ki v veliki večini služi kot podlaga za to delo. Začeli bomo z definicijo tovrstnega modela – definirali bomo osnovni prostor, osnovne geometrijske objekte, kot so točke in premice, podali relacijo pripadnosti – in dokazali, da ustreza lastnostim incidenčne geometrije. Glavni cilj bo poiskati primerno metriko in glede na to metriko poiskati grupo izomorfizmov. Na poti do tja bomo spoznali še grupo homeomorfizmov, ki slikajo hiperbolične premice v hiperbolične premice, enačbe za merjenje dolžine krivulj in enačbe za merjenje razdalj med točkami. Žal pa se v tem délu ne bomo ukvarjali z analizo geometrijskih likov, kar vključuje tudi trikotnike.

2. Model in incidenčna geometrija

Geometrijska ravnina sestoji iz množic $\mathcal{P}$ in $\mathcal{L}$ ter relacije $\mathcal{R} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{L}$. Elementom množice $\mathcal{P}$ pravimo točke, elementom množice $\mathcal{L}$ pa premice. Naj bosta $A \in \mathcal{P}$ točka ter $p \in \mathcal{L}$ premica. Če sta A in p v relaciji, torej $(A, p) \in \mathcal{R}$, se uporablja zapis $A \in p$ in pravimo, da A *leži na* p ali pa p *gre skozi* A. Incidenčna geometrija, kot je podana v [4], ima naslednjo definicijo.

Definicija 2.1. Geometrija $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{R})$ se imenuje *incidenčna*, če relacija $\mathcal{R}$ zadošča naslednjim trem aksiomom:

- Za vsak par različnih točk $A, B \in \mathcal{P}$ obstaja natanko ena premica $p \in \mathcal{L}$, tako da $A, B \in p$.
- Za vsako premico $p \in \mathcal{L}$ obstajata vsaj dve različni točki $A, B \in \mathcal{P}$, tako da $A, B \in p$.
- Za vsako premico $p \in \mathcal{L}$ obstaja vsaj ena točka $A \in \mathcal{P}$, tako da $A \notin p$.

Geometrijo hiperbolične ravnine bomo opisali na modelu kompleksne zgornje polravnine. Z besedo model pojmujemo osnovni prostor skupaj z izbiro, kako predstavimo točke in premice v osnovnem prostoru. V našem primeru bomo za osnovni prostor vzeli

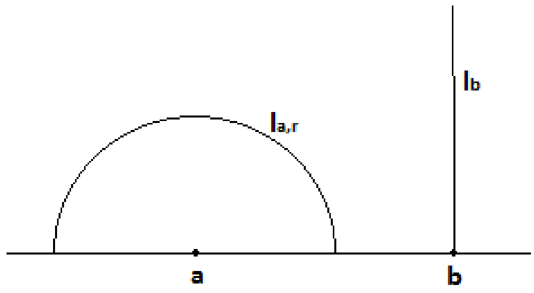
$$\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}.$$

Za množico točk hiperbolične ravnine vzememo kar $\mathcal{P} = \mathbb{H}$. Algebraično na $\mathbb{H}$ gledamo kot na podmnožico polja kompleksnih števil, torej lahko s točkami v $\mathbb{H}$ računamo povsem na običajen način kot s kompleksnimi števili. V ta namen bomo točke iz $\mathbb{H}$ odslej tudi označevali tako, kot običajno označujemo kompleksna števila, torej z malimi črkami. Seveda se hitro prepričamo, da $\mathbb{H}$ ni podkolobar kolobarja $\mathbb{C}$.

Premice v hiperbolični ravnini so dveh tipov.

Definicija 2.2. *Hiperbolična premica tipa I* je presek $\mathbb{H}$ z evklidsko premico v $\mathbb{C}$, ki je pravokotna na realno os $\mathbb{R}$. *Hiperbolična premica tipa II* je presek $\mathbb{H}$ z evklidsko krožnico v $\mathbb{C}$, ki ima središče na realni osi $\mathbb{R}$. Bolj natančno, če je ℓ_b premica tipa I za neki $b \in \mathbb{R}$ ter $\ell_{a,r}$ premica tipa II za neka $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$, potem definiramo

$$\ell_b = \{z \in \mathbb{H} \mid \mathrm{Re}(z) = b\}, \qquad \ell_{a,r} = \{z \in \mathbb{H} \mid (\mathrm{Re}(z) - a)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = r^2\}.$$



SLIKA 1. Hiperbolične premice v $\mathbb{H}$.

Za množico premic v geometriji hiperbolične ravnine torej vzamemo

$$\mathcal{L} = \{\ell_b \,|\, b \in \mathbb{R}\} \cup \{\ell_{a,r} \,|\, a \in \mathbb{R}, r > 0\}.$$

Relacija $\mathcal{R}$ je v geometriji hiperbolične ravnine definirana na običajen način. Če je torej $z \in \mathbb{H}$ točka in $\ell \in \mathcal{L}$ hiperbolična premica, potem je $(z, \ell) \in \mathcal{R}$ natanko tedaj, ko z pripada množici ℓ.

Trditev 2.3. *Hiperbolična ravnina je incidenčna geometrija.*

Dokaz. Dokazali bomo le prvo točko iz definicije incidenčne geometrije, saj sta preostali dve očitni. Dokazati torej moramo, da za poljubni točki $p, q \in \mathbb{H}$ obstaja natanko ena hiperbolična premica ℓ, ki gre skozi p in q.

Obravnavali bomo dva primera, najprej, ko je $\mathrm{Re}(p) = \mathrm{Re}(q)$. Tedaj je $L = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(p)\}$ evklidska premica, ki gre skozi p in q ter je pravokotna na realno os $\mathbb{R}$. Torej je $\ell = \mathbb{H} \cap L$ hiperbolična premica, ki gre skozi p in q. Ker je to edina možna premica tipa I skozi dani točki in ker ne obstaja evklidska krožnica s središčem na realni osi, ki bi potekala skozi p in q, je ℓ hkrati tudi edina hiperbolična premica skozi p in q.

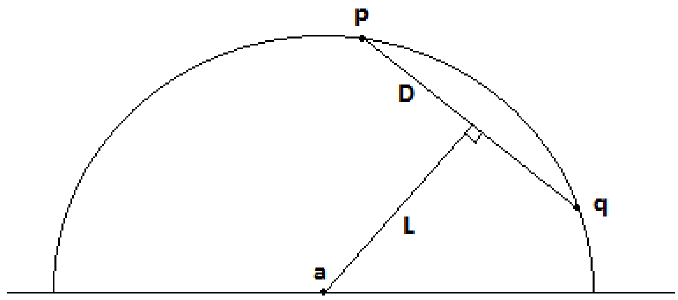
Naj bo sedaj $\mathrm{Re}(p) \neq \mathrm{Re}(q)$. Vemo, da ne moremo skonstruirati hiperbolične premice tipa I skozi p in q, saj pripadajoča evklidska premica ne bi bila pravokotna na realno os. Naj bo D evklidska daljica med točkama p in q. Vsaka evklidska krožnica, ki poteka skozi p in q, ima središče na simetrali daljice D. Označimo to simetralo z L in njeno presečišče z realno osjo z a (slika 2). To presečišče obstaja, saj L ni vzporedna z realno osjo. Točka a je iskano središče evklidske krožnice s polmerom $r = |p - a| = |q - a|$, ki gre skozi p in q in ima središče na realni osi. Označimo to krožnico z A. $\ell = \mathbb{H} \cap A$ je iskana hiperbolična premica, ki gre skozi p in q. Enoličnost take hiperbolične premice sledi iz enoličnosti konstrukcije evklidske krožnice skozi p in q s središčem na realni osi.

□

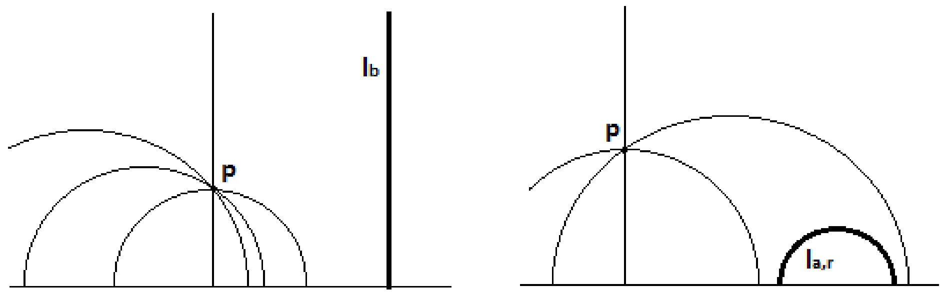
Definicija 2.4. Hiperbolični premici v $\mathbb{H}$ sta *vzporedni*, če sta disjunktni.

Hiperbolično geometrijo karakterizira naslednja pomembna trditev.

Trditev 2.5. *Naj bo ℓ hiperbolična premica in naj bo p točka, ki ne leži na ℓ. Potem skozi p poteka neskončno mnogo hiperboličnih premic, ki so vzporedne ℓ.*



SLIKA 2. Konstrukcija središča evklidske krožnice.



SLIKA 3. Vzporednice k dani premici skozi dano točko.

Dokaz. Ločili bomo dva primera. Najprej naj bo ℓ vsebovana v evklidski premici L. Ker p ne leži na L, obstaja natanko ena evklidska premica K, ki gre skozi p in je vzporedna L. Ker je L pravokotna na $\mathbb{R}$, je tudi K pravokotna na $\mathbb{R}$ in je torej $\mathbb{H} \cap K$ ena hiperbolična premica, ki gre skozi p in je vzporedna ℓ.

Poiščimo še kakšno. Izberimo poljubno točko x na $\mathbb{R}$ med L in K. Naj bo A evklidska krožnica, ki gre skozi x in p in ima središče na $\mathbb{R}$. Vemo, da takšna krožnica obstaja, saj je $\mathrm{Re}(p) \neq x$. Po konstrukciji je $A \cap L = \emptyset$, torej je $\mathbb{H} \cap A$ druga hiperbolična premica, ki gre skozi p in je vzporedna ℓ. Ker na $\mathbb{R}$ med L in K obstaja neskončno mnogo točk, nam da ta konstrukcija neskončno mnogo različnih hiperboličnih premic skozi p, vzporednih ℓ.

Naj bo sedaj ℓ vsebovana v evklidski krožnici A. Naj bo D evklidska krožnica, ki gre skozi p in je koncentrična A. $\mathbb{H} \cap D$ je ena hiperbolična premica, ki gre skozi p in je vzporedna ℓ.

Poiščimo še drugo. Naj bo x točka na $\mathbb{R}$ v kolobarju med A in D, za katero velja $x \neq \mathrm{Re}(p)$. Naj bo E evklidska krožnica s središčem na $\mathbb{R}$, ki gre skozi x in p. Po konstrukciji je zopet $E \cap A = \emptyset$, torej je $\mathbb{H} \cap E$ hiperbolična premica, ki gre skozi p in je disjunktna ℓ.

Ker na $\mathbb{R}$ v kolobarju med A in D obstaja neskončno točk x, za katere $x \neq \mathrm{Re}(p)$, lahko z zgornjo konstrukcijo poiščemo neskončno hiperboličnih premic, ki gredo skozi p in so vzporedne z ℓ. □

3. TRANSFORMACIJE V $\mathbb{H}$

V tem poglavju bo naš cilj poiskali množico preslikav iz $\mathbb{H}$ v $\mathbb{H}$, ki slikajo hiperbolične premice v hiperbolične premice. Morda smo nekoliko nezadovoljni, da imamo dva tipa hiperboličnih premic, torej tiste, ki so vsebovane v evklidskih premicah v $\mathbb{C}$ in tiste, ki so vsebovane v evklidskih krožnicah v $\mathbb{C}$. Toda, če smiselno razširimo prostor $\mathbb{C}$, se izkaže, da so evklidske premice le poseben primer evklidskih krožnic v $\mathbb{C}$, kar pa naprej vodi v poenotenje izrazov za oba tipa hiperboličnih premic. Pot, ki nas bo vodila k cilju tega poglavja, bo potem postala precej intuitivna.

3.1. **Razširjena kompleksna ravnina $\overline{\mathbb{C}}$.** Konstrukcija, pri kateri regularnemu in lokalno kompaktnemu topološkemu prostoru X dodamo eno abstraktno točko v neskončnosti in tako dopolnjeni prostor naredimo kompakten, X pa je odprto vložen v njem, je v topologiji poznana pod imenom *kompaktifikacija z eno točko* ali *kompaktifikacija Aleksandrova* in je bolj podrobno opisana v [5, str. 64]. Kompaktifikacijo kompleksne ravnine z eno točko imenujemo *razširjena kompleksna ravnina* in je podana z množico

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \tag{1}$$

topologijo τ^+ na prostoru $\overline{\mathbb{C}}$ pa tvorijo odprte množice

- $U \subset \overline{\mathbb{C}}$, ki ne vsebujejo točke ∞ in so odprte v $\mathbb{C}$ in
- $U \subset \overline{\mathbb{C}}$, ki vsebujejo ∞ in katerih komplement $\overline{\mathbb{C}} - U$ je kompakten v $\mathbb{C}$.

Opomba 3.1. Odprte množice drugega tipa so okolice točke ∞.

Opomba 3.2. Topologija prostora $\mathbb{C}$ je porojena iz evklidske metrike $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty)$

$$d(w,z) = |w-z| = \sqrt{(\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(w) - \mathrm{Im}(z))^2}. \tag{2}$$

Poudarimo, da hiperbolične ravnine $\mathbb{H}$ ne bomo razumeli kot metrični podprostor ravnine $\mathbb{C}$, ampak bomo $\mathbb{H}$ opremili s t. i. hiperbolično metriko (razdelek 4.2).

Iz topologije vemo, da je kompaktifikacija kompleksne ravnine z eno točko homeomorfna sferi $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$.

3.2. **Krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$.** Evklidsko premico in evklidsko krožnico v $\mathbb{C}$ lahko podamo kot množico rešitev enačbe.

Trditev 3.3. *Evklidske premice v $\mathbb{C}$ so natanko množice rešitev enačb oblike*

$$\beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \tag{3}$$

kjer sta $\beta \in \mathbb{C} - \{0\}$ in $\gamma \in \mathbb{R}$, evklidske krožnice v $\mathbb{C}$ pa so natanko množice rešitev enačb

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \tag{4}$$

kjer so $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ in $\beta \in \mathbb{C}$ taka števila, da je $\beta\overline{\beta} > \alpha\gamma$.

Dokaz. Vemo, da je vsaka evklidska premica v $\mathbb{C}$ podana z množico točk $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, ki rešijo enačbo

$$ax + by + c = 0, \tag{5}$$

kjer so $a, b, c \in \mathbb{R}$ in a in b nista hkrati enaka 0. Če v enačbi (3) za β vstavimo $\beta = \frac{a-ib}{2}$, za γ pa c, dobimo enačbo (5). Obratno lahko iz enačbe (5) dobimo enačbo (3) tako, da vzamemo $a = 2\mathrm{Re}(\beta)$, $b = -2\mathrm{Im}(\beta)$ in $c = \gamma$. Mimogrede lahko zapišemo tudi naklon premice, podane z enačbo (3), ki je

$$s = -\frac{a}{b} = \frac{\mathrm{Re}(\beta)}{\mathrm{Im}(\beta)}. \tag{6}$$

Evklidska krožnica v kompleksni ravnini je podana z množico točk z, ki rešijo enačbo

$$|z - \overline{\beta}| = r, \tag{7}$$

kjer je $\overline{\beta} \in \mathbb{C}$ središče in $r > 0$ polmer krožnice. Enačba (7) je ekvivalentna

$$(z - \overline{\beta})\overline{(z - \overline{\beta})} = r^2$$

oziroma

$$(z - \overline{\beta})(\overline{z} - \beta) = r^2,$$

od koder dobimo

$$z\overline{z} - \beta z - \overline{\beta}\overline{z} + \beta\overline{\beta} - r^2 = 0.$$

Če v slednji enačbi zamenjamo $-\beta$ z β, dobimo enačbo (4), kjer je $\alpha = 1$ in $\gamma = \beta\overline{\beta} - r^2$ in hkrati velja tudi

$$\beta\overline{\beta} > \beta\overline{\beta} - r^2 = \alpha\gamma.$$

Pokažimo še obratno. Enačbo (4) delimo z α in dobimo

$$z\overline{z} + \frac{\beta}{\alpha}z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\overline{z} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0,$$

kar je ekvivalentno

$$\left(z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\right)\overline{\left(z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\right)} - \frac{\beta\overline{\beta}}{\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

oziroma

$$\left|z + \frac{\overline{\beta}}{\alpha}\right|^2 = \frac{\beta\overline{\beta} - \alpha\gamma}{\alpha^2},$$

kar pa je enačba krožnice s središčem v $-\frac{\overline{\beta}}{\alpha}$ in polmerom $\sqrt{\frac{\beta\overline{\beta}-\alpha\gamma}{\alpha^2}}$. □

Enačbo evklidske premice (3) in krožnice (4) bi radi razširili na $\overline{\mathbb{C}}$. Vprašanje, ki pri tem nastane, je, ali je ∞ rešitev katere od omenjenih enačb. ∞ imamo lahko za rešitev enačbe (3) *po zveznosti*. To pomeni, da obstaja zaporedje rešitev enačbe (3) v $\mathbb{C}$, ki konvergira k ∞.

Tako zaporedje lahko hitro najdemo. Vemo, da (3) podaja enačbo evklidske premice, torej, če poznamo dve različni rešitvi w_1 in w_2, potem vse ostale rešitve ležijo na premici $w_0 + t(w_1 - w_0)$, $t \in \mathbb{R}$. Oglejmo si zaporedje rešitev

$$\{z_n = w_0 + n(w_1 - w_0) \,|\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Za vsako okolico U točke ∞ velja, da je U^C kompaktna v $\mathbb{C}$, torej omejena. Absolutne vrednosti členov zaporedja $\{z_n\}$ pa naraščajo preko vseh meja, torej je v U^C le končno mnogo členov zaporedja, v U pa vsi ostali. Zaporedje $\{z_n\}$ torej konvergira k ∞.

Naj bo sedaj $\{z_n\}$ poljubno zaporedje rešitev enačbe (4) v $\mathbb{C}$. Ta enačba podaja neko krožnico A v $\mathbb{C}$, torej vsi členi zaporedja $\{z_n\}$ ležijo na A. Krožnica A je kot množica zaprta in omejena, torej kompaktna, zato je A^C okolica točke ∞, ki pa ne vsebuje nobenega člena zaporedja $\{z_n\}$, torej $\{z_n\}$ ne konvergira k ∞. Pokazali smo, da ne obstaja zaporedje rešitev enačbe (4) v $\mathbb{C}$, ki bi konvergiralo k ∞, zato ∞ nimamo za rešitev te enačbe.

Sedaj imamo vse pripravljeno, da poenotimo poimenovanje evklidskih premic in evklidskih krožnic v $\overline{\mathbb{C}}$.

Definicija 3.4. *Krožnica v* $\overline{\mathbb{C}}$ je bodisi evklidska krožnica v $\mathbb{C}$, bodisi unija evklidske premice v $\mathbb{C}$ z $\{\infty\}$.

Tudi enačbi za krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ lahko poenotimo, saj je (3) le poseben primer (4). Krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ so torej natanko množice točk rešitev enačb oblike

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = 0, \tag{8}$$

kjer so $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ in $\beta \in \mathbb{C}$ taka števila, da je $\beta\overline{\beta} > \alpha\gamma$. Točka ∞ je rešitev enačbe (8) natanko tedaj, ko je $\alpha = 0$.

3.3. **Afine preslikave, inverzija in kompleksna konjugacija.** Naš cilj do konca tega poglavja bo poiskati vse homeomorfizme iz $\mathbb{H}$ v $\mathbb{H}$, ki slikajo hiperbolične premice v hiperbolične premice. Začeli bomo tako, da bomo najprej poiskali vse homeomorfizme iz $\overline{\mathbb{C}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$, ki slikajo krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ v krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$.

Spomnimo se, da je množica vseh homeomorfizmov iz $\overline{\mathbb{C}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$ grupa za kompozitum. Jasno je kompozitum dveh homeomorfizmov spet homeomorfizem, identična preslikava je enota za kompozitum in inverz homeomorfizma je tudi homeomorfizem.

Definicija 3.5. Definirajmo tri posebne vrste preslikav iz $\overline{\mathbb{C}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$:

(1) afine preslikave $F_{a,b}(z) = az + b$ $(a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0)$ za $z \in \mathbb{C}$ in $F(\infty) = \infty$,
(2) inverzija $J(z) = \frac{1}{z}$ za $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, $J(0) = \infty$ in $J(\infty) = 0$,
(3) kompleksna konjugacija $C(z) = \overline{z}$ za $z \in \mathbb{C}$ in $C(\infty) = \infty$.

Trditev 3.6. *Vse preslikave iz definicije 3.5 so homeomorfizmi.*

Dokaz. Najprej se posvetimo zveznosti tovrstnih preslikav. Iz kompleksne analize že vemo, da so afine preslikave in kompleksna konjugacija zvezne preslikave iz $\mathbb{C}$ v $\mathbb{C}$ ter da je inverzija zvezna preslikava iz $\mathbb{C} - \{0\}$ v $\mathbb{C} - \{0\}$. Da so zvezne tudi kot preslikave iz $\overline{\mathbb{C}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$ torej zadošča dokazati, da so zvezne v točki ∞ in da je inverzija zvezna tudi v točki 0.

Za $w \in \mathbb{C}$ in $r > 0$ vpeljimo oznaki

$$\begin{aligned} K(w,r) &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - w| < r\} \quad \text{in} \\ K(\infty, r) &= \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > r\} \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

$K(w,r)$ je odprta krogla s središčem v w in polmerom r, $\mathcal{B}_w := \{K(w,r) \,|\, r > 0\}$ pa je baza okolic točke w. $K(\infty, r)$ je okolica točke ∞. Prepričajmo se, da je $\mathcal{B}_\infty := \{K(\infty, r) \,|\, r > 0\}$ baza okolic točke ∞. Če je U odprta okolica točke ∞, potem je U^C omejena, zato obstaja $d > 0$, tako da je $U^C \subset K(0,d)$. Potem pa je $K(\infty, d) \subset U$.

Po izreku, ki je dokazan v [5, str. 16], je preslikava $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ zvezna v točki $w \in \overline{\mathbb{C}}$ natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da je $g(K(w,\delta)) \subseteq K(g(w), \varepsilon)$.

Za afino preslikavo $f_{a,b}$ lahko pri dokazu zveznosti v točki ∞ izberemo $\delta = \frac{\varepsilon + |b|}{|a|}$. Da je tako izbran δ res primeren, se prepričamo tako: Zaradi trikotniške neenakosti velja $|az + b| + |b| \geq |az|$, potem pa je za vsak z, za katerega je $|z| > \delta$,

$$|f_{a,b}(z)| = |az + b| \geq |az| - |b| > |a|\delta - |b| = |a|\frac{\varepsilon + |b|}{|a|} - |b| = \varepsilon.$$

Dokaz zveznosti kompleksne konjugacije v točki ∞ je preprost, saj za vsak $\varepsilon > 0$ lahko vzamemo kar $\delta = \varepsilon$, da za vsak z, za katerega je $|z| > \delta$, velja

$$|C(z)| = |\overline{z}| = |z| > \delta = \varepsilon.$$

Za dokaz zveznosti inverzije v točki ∞ lahko izberemo $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$, saj za vsak z, za katerega je $|z| > \delta$, velja

$$|J(z)| = \frac{1}{|z|} < \frac{1}{\delta} = \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon,$$

torej je $J(z) \in K(0,\varepsilon)$ oziroma $J(K(\infty,\delta)) \subseteq K(0,\varepsilon)$. Tako izbran δ pa zadošča tudi za dokaz zveznosti v točki 0. Dokaz je podoben.

Hitro se lahko prepričamo, da je inverz afine preslikave zopet afina preslikava, kompleksna konjugacija in inverzija pa sta sami sebi inverzni. Torej so inverzi afinih preslikav, kompleksnih konjugacij in inverzij tudi zvezni.

Afina preslikava $f_{a,b}$ je surjektivna: za vsak $w \in \mathbb{C}$ obstaja $z = \frac{w-b}{a}$, tako da je $f_{a,b}(z) = a\frac{w-b}{a} + b = w$ in $f(\infty) = \infty$. Je tudi injektivna, saj iz $az + b = aw + b$ sledi $z = w$. Torej je bijektivna. Ker sta inverzija in kompleksna konjugacija sami sebi inverzni, sta bijektivni.

S tem smo dokazali vse lastnosti homeomorfizmov za preslikave iz definicije 3.5.

$\square$

Trditev 3.7. *Vsaka afina preslikava je kompozitum homeomorfizmov naslednjih tipov iz $\overline{\mathbb{C}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$: translacija $z \to z + b$ ($b \in \mathbb{C}$), rotacija $z \to e^{i\varphi}z$ ($\varphi \in [0, 2\pi)$) in homotetija $z \to \rho z$, ($\rho > 0$, $\rho \in \mathbb{R}$).*

Dokaz. $a \in \mathbb{C}$ lahko pišemo kot $a = |a|e^{i\varphi}$. Potem je $F_{a,b}(z) = az + b = |a|e^{i\varphi}z + b = f \circ g \circ h(z)$, kjer so $h(z) = e^{i\varphi}z$, $g(z) = |a|z$ in $f(z) = z + b$ za $z \in \mathbb{C}$ in $h(\infty) = g(\infty) = f(\infty) = \infty$. $\square$

Trditev 3.8. *Afine preslikave, inverzija in kompleksna konjugacija slikajo krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ v krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$.*

Dokaz. Vemo, da so krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ natanko rešitve enačbe (8). Pokazati moramo, da če z reši enačbo (8), potem tudi $F_{a,b}(z)$, $J(z)$ in $C(z)$ rešijo podobno enačbo (tj. enako, le z drugimi koeficienti).

Naj bo $w = az + b$ slika z-ja z afino preslikavo. Potem je $z = \frac{1}{a}(w - b)$. Vstavimo v enačbo

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma =$$

$$= \frac{\alpha}{|a|^2}(w-b)\overline{(w-b)} + \frac{\beta}{a}(w-b) + \frac{\overline{\beta}}{\overline{a}}\overline{(w-b)} + \gamma =$$

$$= \frac{\alpha}{|a|^2}(w\overline{w} - \overline{b}w - b\overline{w} + b\overline{b}) + \frac{\beta}{a}w + \frac{\overline{\beta}}{\overline{a}}\overline{w} - \frac{\beta b}{a} - \frac{\overline{\beta b}}{\overline{a}} + \gamma =$$

$$= \frac{\alpha}{|a|^2}w\overline{w} + \left(\frac{\beta}{a} - \frac{\alpha\overline{b}}{|a|^2}\right)w + \overline{\left(\frac{\beta}{a} - \frac{\alpha\overline{b}}{|a|^2}\right)}\overline{w} + \alpha\frac{|b|^2}{|a|^2} - 2\mathrm{Re}\left(\frac{\beta b}{a}\right) + \gamma = 0,$$

kar ustreza enačbi krožnice, saj je koeficient pri $w\overline{w}$ (označimo ga z A) realen, koeficienta pri w in pri $\overline{w}$ sta si konjugirana (označimo koeficient pri w z B), prosti člen

$$C = \alpha\frac{|b|^2}{|a|^2} - 2\mathrm{Re}\left(\frac{\beta b}{a}\right) + \gamma$$

pa je tudi realen. Preveriti moramo še, da je izpolnjen pogoj na koeficiente, tj. da velja $B\overline{B} > AC$.

$$\begin{aligned} AC &= \frac{\alpha}{|a|^2}\left(\alpha\frac{|b|^2}{|a|^2} - 2\mathrm{Re}\left(\frac{\beta b}{a}\right)\right) + \frac{\alpha\gamma}{|a|^2} \\ B\overline{B} &= \frac{|\beta|^2}{|a|^2} - \frac{\alpha b\beta}{a|a|^2} - \frac{\alpha\overline{b}\overline{\beta}}{\overline{a}|a|^2} + \frac{\alpha^2|b|^2}{|a|^4} = \\ &= \frac{\alpha}{|a|^2}\left(\alpha\frac{|b|^2}{|a|^2} - 2\mathrm{Re}\left(\frac{\beta b}{a}\right)\right) + \frac{|\beta|^2}{|a|^2} \end{aligned}$$

$$B\overline{B} - AC = \frac{|\beta|^2 - \alpha\gamma}{|a|^2} > 0,$$

ker je po predpostavki $\beta\overline{\beta} > \alpha\gamma$.

Naj bo sedaj $w = \frac{1}{z}$ slika z-ja z inverzijo. Potem je $z = \frac{1}{w}$. Vstavimo v enačbo

$$\alpha z\overline{z} + \beta z + \overline{\beta}\overline{z} + \gamma = \alpha\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + \beta\frac{1}{w} + \overline{\beta}\frac{1}{\overline{w}} + \gamma = 0.$$

Pomnožimo zadnjo enačbo z $w\overline{w}$ in dobimo

$$\alpha + \beta\overline{w} + \overline{\beta}w + \gamma w\overline{w} = 0,$$

kar je enačba krožnice, saj je koeficient pri $w\overline{w}$ realen, prosti člen je tudi realen in koeficienta pri w in $\overline{w}$ sta si konjugirana. Izpolnjen je tudi pogoj na koeficiente $\beta\overline{\beta} > \gamma\alpha$.

Za kompleksno konjugacijo je račun še najbolj preprost, povemo pa lahko, da je geometrijski pomen konjugacije zrcaljenje preko realne osi, torej jasno slika krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ v krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$. □

Opomba 3.9. Zadnjo trditev bi lahko zapisli še bolj natančno. V dokazu namreč lahko opazimo, da afine preslikave slikajo evklidske premice v $\mathbb{C}$ v evklidske premice v $\mathbb{C}$ in krožnice v $\mathbb{C}$ v krožnice v $\mathbb{C}$ (opazujemo koeficienta α in A). Enako velja za kompleksno konjugacijo. Pri inverziji opazimo, da preslika vse evklidske premice, ki ne gredo skozi 0, v krožnice skozi 0 in obratno. Premice, ki gredo skozi 0, preslika v premice, ki gredo skozi 0.

Trditev 3.10. *Afine preslikave, inverzija in kompleksna konjugacija so konformne preslikave na $\overline{\mathbb{C}}$, tj. ohranjajo velikost kotov med gladkimi krivuljami.*

Dokaz. Imejmo poljubni krivulji, katerih presečišče označimo z z_0. Označimo z X_1 tangento na prvo krivuljo v točki z_0 in z X_2 tangento na drugo krivuljo v točki z_0. Kot med krivuljama v točki z_0 je po definiciji kot med tangentama X_1 in X_2.

Naj bo $F(z) = az + b$ afina preslikava. Iz opombe 3.9 vemo, da sta $F(X_1)$ in $F(X_2)$ evklidski premici in se sekata v točki $F(z_0)$. Izberimo še točki $z_1 \neq z_0$ na X_1 in $z_2 \neq z_0$ na X_2. Dokazali bomo, da sta si trikotnika $\triangle z_1 z_0 z_2$ ter $\triangle F(z_1)F(z_0)F(z_2)$ podobna. Iz tega namreč sledi, da imata trikotnika enako velike kote in je med drugim $\measuredangle z_1 z_0 z_2 = \measuredangle F(z_1)F(z_0)F(z_2)$, kar želimo dokazati.

$$\frac{|z_i - z_j|}{|F(z_i) - F(z_j)|} = \frac{|z_i - z_j|}{|az_i + b - (az_j + b)|} = \frac{|z_i - z_j|}{|a||z_i - z_j|} = \frac{1}{|a|}$$

za vse pare $(i, j) \in \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$, torej je razmerje stranic med trikotnikoma konstantno in trikotnika sta si podobna.

Naj bo $C(z)$ kompleksna konjugacija. $C(X_1)$ in $C(X_2)$ sta tudi evklidski premici in

$$\frac{|z_i - z_j|}{|C(z_i) - C(z_j)|} = \frac{|z_i - z_j|}{|\overline{z_i} - \overline{z_j}|} = \frac{|z_i - z_j|}{|\overline{z_i - z_j}|} = 1$$

za vse pare $(i, j) \in \{(1, 0), (2, 0), (2, 1)\}$, torej je tudi v tem primeru razmerje stranic med trikotnikoma $\triangle z_1 z_0 z_2$ in $\triangle C(z_1)C(z_0)C(z_2)$ konstantno in trikotnika sta si podobna.

Obravnavajmo še inverzijo $J(z)$. Če niti X_1 niti X_2 ne poteka skozi 0, potem sta $J(X_1)$ in $J(X_2)$ evklidski krožnici, ki potekata skozi 0. Poleg 0 je njuno presečišče še točka $J(z_0)$. Iz elementarne geometrije vemo, da sta kota med krožnicama v obeh presečiščih po velikosti enaka, po predznaku pa nasprotna.

V našem primeru lahko evklidsko premico X_k, $k \in \{1, 2\}$ podamo kot množico rešitev enačbe oblike

$$\beta_k z + \overline{\beta_k}\overline{z} + 1 = 0,$$

kjer je $\beta \in \mathbb{C}$, $J(X_k)$ pa posledično podaja množica rešitev enačbe

$$z\overline{z} + \overline{\beta_k} z + \beta_k \overline{z} = 0.$$

Iz enačbe za X_k lahko po enačbi (6) razberemo naklon premice X_k, ki je

$$s_k = \frac{\mathrm{Re}(\beta_k)}{\mathrm{Im}(\beta_k)}.$$

Enačbo za krožnico $J(X_k)$ lahko preoblikujemo v

$$|z + \beta_k|^2 = |\beta_k|^2,$$

iz česar lahko razberemo polmer $|\beta_k|$ in središče $-\beta_k$. Označimo s θ_k kot, ki ga oklepa X_k z realno osjo, z R_k pa označimo evklidsko premico, ki poteka skozi $-\beta_k$ in 0. Naklon premice R_k je

$$t_k = \frac{\mathrm{Im}(\beta_k)}{\mathrm{Re}(\beta_k)}.$$

Tangenta na $J(X_k)$ v točki 0 je pravokotna na R_k, torej je njen naklon enak

$$-\frac{1}{t_k} = -\frac{\mathrm{Re}(\beta_k)}{\mathrm{Im}(\beta_k)} = -s_k$$

in potemtakem oklepa kot $-\theta_k$ z realno osjo. Kot med premicama X_1 in X_2 v točki z_0 je enak $\theta_2 - \theta_1$. Kot med $J(X_1)$ in $J(X_2)$ v točki 0 je enak $-\theta_2 - (-\theta_1) = -(\theta_2 - \theta_1)$, v točki $J(z_0)$ pa je potem $\theta_2 - \theta_1$, torej se kot med tangentama res ne spremeni in $J(z)$ je v našem primeru res konformna.

Primer, ko katera od X_k poteka skozi 0 in je potem njena slika z inverzijo tudi evklidska premica, ki gre skozi 0, prepuščamo bralcu. $\square$

3.4. **Möbiusove transformacije.**

Definicija 3.11. Preslikave iz $\overline{\mathbb{C}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$ oblike

$$m(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{9}$$

kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ in $ad - bc \neq 0$, imenujemo *lomljene linearne preslikave* ali pa *Möbiusove transformacije.* Množico vseh takih preslikav označimo z Möb^+.

Spregovorimo še nekaj o aritmetiki točke ∞. Sliko in prasliko točke ∞ definiramo *po zveznosti.* Če je $c \neq 0$, je

$$m(\infty) = \lim_{z\to\infty} \frac{az+b}{cz+d} = \lim_{z\to\infty} \frac{a+\frac{b}{z}}{c+\frac{d}{z}} = \frac{a}{c} \quad \text{in pa} \quad m\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty. \tag{10}$$

Če pa je $c = 0$, potem je

$$m(\infty) = \lim_{z\to\infty} \left(\frac{a}{d}z + \frac{b}{d}\right) = \infty. \tag{11}$$

Omenimo še, da avtor v [3, str. 286–307] tovrstne preslikave poimenuje lomljene linearne preslikave, medtem ko jih avtor v [1] poimenuje Möbiusove transformacije. Mi bomo uporabljali slednji izraz. Möbiusove transformacije in njihove lastnosti so opisane v obeh pravkar navedenih virih, vse tiste njihove lastnosti, ki bodo pomembne za nas, pa so zajete in dokazane tudi v tem délu.

Trditev 3.12. *Möb$^+$ je grupa za kompozitum (imenovana Möbiusova grupa).*

Dokaz. Pokažimo, da je kompozitum elementov iz Möb$^+$ $m_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$ in $m_2(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ element Möb$^+$.

$$m_1 \circ m_2(z) = \frac{a\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + b}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} + d} = \frac{a\alpha z + \alpha\beta + \gamma bz + \delta b}{c\alpha z + c\beta + \gamma dz + \delta d} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)}$$

in

$$\begin{aligned}
&(a\alpha + b\gamma)(c\beta + d\delta) - (a\beta + b\delta)(c\alpha + d\gamma) = \\
&= ac\alpha\beta + ad\alpha\delta + bc\beta\gamma + bd\gamma\delta - ac\alpha\beta - ad\beta\gamma - bc\alpha\delta - bd\gamma\delta = \\
&= (ad - bc)\alpha\delta - (ad - bc)\beta\gamma = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0.
\end{aligned}$$

Kompozitum je asociativna operacija. Identična preslikava $e(z) = z$ je element Möb$^+$ in je enota za kompozitum.

Poiščimo še inverz preslikave m. Pišimo $\frac{az+b}{cz+d} = w$ in izrazimo z.

$$az + b = czw + dw, \quad (a - cw)z = dw - b, \quad z = \frac{dw - b}{-cw + a}$$

in $da - bc \neq 0$. Inverz preslikave m je torej element Möb$^+$. ☐

Na tem mestu na kratko omenimo, da se da Möbiusove transformacije predstaviti tudi v matrični obliki (glej [1, str. 42]). Komponiranje Möbiusovih transformacij se potem izraža kot množenje pripadajočih matrik. S tovrstno predstavitvijo Möbiusovih transformacij se ne bomo ukvarjali, ker je za naše potrebe ne potrebujemo.

Trditev 3.13. *Vsak element iz Möb$^+$ je mogoče zapisati kot kompozitum afinih preslikav in inverzij. Množica vseh afinih preslikav skupaj z inverzijo je generator grupe Möb$^+$.*

Dokaz. Imejmo preslikavo m kot v (9). Če je $c = 0$, potem je $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, torej afina preslikava. Če $c \neq 0$, potem je

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)c}{(cz+d)c} = \frac{acz+bc}{c(cz+d)} = \frac{acz+ad-ad+bc}{c(cz+d)} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz+d},$$

kjer je $\lambda = \frac{1}{c}(bc - ad)$. Torej je $m(z) = f \circ J \circ g(z)$, kjer sta $f(z) = \frac{a}{c} + z$ in $g(z) = \frac{c}{\lambda}z + \frac{d}{\lambda}$ za $z \in \mathbb{C}$ in $f(\infty) = g(\infty) = \infty$ afini preslikavi, $J(z) = \frac{1}{z}$ pa je inverzija.

Ker so afine preslikave in inverzija hkrati tudi elementi Möb$^+$ in ker je Möb$^+$ grupa, torej zaprta za operacijo kompozitum, sledi še druga trditev. ☐

Posledica 3.14. *Elementi Möb$^+$ so homeomorfizmi iz $\overline{\mathbb{C}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$.*

Dokaz. Dokaz je neposredna posledica trditve 3.6, trditve 3.13 in dejstva, da je kompozitum homeomorfizmov spet homeomorfizem. ☐

Posledica 3.15. *Vsak element Möb$^+$ slika krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ v krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$.*

Dokaz. Dokaz je neposredna posledica trditve 3.8 in trditve 3.13. ☐

Izrek 3.16. *Naj bo $m \in$ Möb$^+$ Möbiusova transformacija. Če ima m tri negibne točke, potem je m identična preslikava.*

Dokaz. Naj bo $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ in predpostavimo, da m ni identiteta.

Obravnavajmo najprej primer, ko je $c = 0$. Tedaj je po enačbi (11) $m(\infty) = \infty$ ena negibna točka. Druge poiščemo kot rešitve enačbe $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$. Ta enačba ima zgolj eno rešitev $z = \frac{b}{d-a}$ ob pogoju, da je $\frac{a}{d} \neq 1$. Če je $\frac{a}{d} = 1$, potem mora biti $b \neq 0$, sicer je m identiteta. V tem primeru ni rešitev v $\mathbb{C}$. m ima v primeru $c = 0$ torej eno ali dve negibni točki.

Če $c \neq 0$, potem po enačbi (10) $m(\infty) \neq \infty$. Negibne točke bodo torej rešitve enačbe $\frac{az+b}{cz+d} = z$, kar lahko preuredimo v kvadratno enačbo $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Po osnovnem izreku algebre ima kvadratna enačba kvečjemu 2 rešitvi v $\mathbb{C}$, torej ima m tudi v primeru $c \neq 0$ kvečjemu dve negibni točki. ☐

Trditev 3.17. *Imejmo urejeni trojici (z_1, z_2, z_3) in (w_1, w_2, w_3) različnih točk v $\overline{\mathbb{C}}$. Obstaja natanko ena preslikava $m \in$ Möb$^+$, da je $m(z_1) = w_1$, $m(z_2) = w_2$ in $m(z_3) = w_3$.*

Dokaz. Najprej dokažimo enoličnost. Recimo, da obstajata dve preslikavi $m, n \in$ Möb$^+$, tako da je $m(z_1) = w_1 = n(z_1)$, $m(z_2) = w_2 = n(z_2)$, $m(z_3) = w_3 = n(z_3)$. Ker ima preslikava $m^{-1} \circ n$ tri negibne točke, je po izreku 3.16 identiteta. Torej je $m = n$.

Pri dokazu obstoja je dovolj dokazati, da obstaja $m \in$ Möb$^+$, tako da je $m(z_1) = 0$, $m(z_2) = 1$ in $m(z_3) = \infty$. Če namreč najdemo tak m, potem lahko najdemo tudi tak $n \in$ Möb$^+$, da bo $n(w_1) = 0$, $n(w_2) = 1$, $n(w_3) = \infty$ in potem bo $n^{-1} \circ m$ iskana Möbiusova transformacija, ki bo preslikala (z_1, z_2, z_3) v (w_1, w_2, w_3).

Ostane nam torej poiskati Möbiusovo transformacijo, ki preslika (z_1, z_2, z_3) v $(0, 1, \infty)$. Naj bodo vse tri $z_k \neq \infty$. Oglejmo si preslikavo na $\overline{\mathbb{C}}$, podano z

$$m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{(z_2 - z_3)z - z_1(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)z - z_3(z_2 - z_1)}. \tag{12}$$

Že po sami konstrukciji je $m(z_1) = 0$, $m(z_2) = 1$ in $m(z_3) = \infty$. Ker velja tudi

$$(z_2 - z_3)(-z_3)(z_2 - z_1) - (-z_1)(z_2 - z_3)(z_2 - z_1) = (z_2 - z_3)(z_1 - z_3)(z_2 - z_1) \neq 0,$$

je m Möbiusova transformacija. Če je katera od z_k enaka ∞, potem se bralec lahko sam prepriča, da so

$$m(z) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z}, \quad \text{če je } z_1 = \infty,$$

$$m(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}, \quad \text{če je } z_2 = \infty \text{ in}$$

$$m(z) = \frac{z_1 - z}{z_1 - z_2}, \quad \text{če je } z_3 = \infty$$

Möbiusove transformacije, ki preslikajo trojico (z_1, z_2, z_3) v $(0, 1, \infty)$. $\square$

Izrek 3.18. *Vsako krožnico v $\overline{\mathbb{C}}$ je mogoče preslikati z Möbiusovo transformacijo na vsako drugo krožnico v $\overline{\mathbb{C}}$.*

Dokaz. Najprej se prepričajmo, da vsaka trojica različnih točk (z_1, z_2, z_3) iz $\overline{\mathbb{C}}$ enolično določa krožnico v $\overline{\mathbb{C}}$. Če so z_1, z_2, z_3 vse iz $\mathbb{C}$ in nekolinearne, potem je središče krožnice, ki gre skozi te tri točke, v presečišču simetral poljubnih dveh daljic s krajišči v z_1, z_2, z_3. Če so vse tri točke iz $\mathbb{C}$ in kolinearne, potem obstaja natanko ena evklidska premica, ki poteka skozi njih. Če pa je katera od točk ∞, potem obstaja natanko ena evklidska premica, ki gre skozi preostali dve.

Naj bosta A in B krožnici v $\overline{\mathbb{C}}$. Izberemo trojico različnih točk na A in trojico različnih točk na B. Po trditvi 3.17 obstaja Möbiusova transformacija m, ki preslika trojico točk iz A v trojico točk na B. Ker Möbiusove transformacije slikajo krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ v krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$, je $m(A)$ krožnica, ki hkrati poteka skozi iste tri točke, kot B. Torej je $m(A) = B$. $\square$

Opomba 3.19. Ker obstaja neskončno mnogo različnih trojic, ki določajo krožnico, obstaja tudi neskončno Möbiusovih preslikav, ki slikajo krožnico A na krožnico B.

Naj bo A krožnica v $\overline{\mathbb{C}}$. Komplement A-ja je disjunktna unija dveh nepraznih, odprtih in povezanih množic, označimo ju z D_1 in D_2. Območji D_1 in D_2 imenujemo *diska v $\overline{\mathbb{C}}$, določena z A*. Pravimo tudi, da A *razreže* $\overline{\mathbb{C}}$ na diska D_1 in D_2.

Če je A evklidska krožnica v $\mathbb{C}$, potem je disk, ki ne vsebuje točke ∞, odprti krog v $\mathbb{C}$, določen s krožnico A. Če je A unija evklidske premice v $\mathbb{C}$ z $\{\infty\}$, potem pravimo, da A razreže $\overline{\mathbb{C}}$ (ali pa $\mathbb{C}$) na dve polravnini.

Iz splošne topologije vemo: Če je $f : X \to Y$ poljubna zvezna preslikava iz topološkega prostora X v topološki prostor Y, potem je slika vsake komponente prostora X v celoti v neki komponenti prostora Y. A^C je topološki prostor iz dveh komponent, D_1 in D_2. Če je torej f homeomorfizem iz $\overline{\mathbb{C}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$, potem sta $f(D_1)$ in $f(D_2)$ komponenti prostora $\overline{\mathbb{C}} - f(A)$. To dejstvo bomo samoumevno upoštevali v dokazu naslednjega izreka.

Izrek 3.20. *Vsak disk v $\overline{\mathbb{C}}$ je mogoče preslikati z Möbiusovo transformacijo na vsak drug disk v $\overline{\mathbb{C}}$.*

Dokaz. Naj bo D disk v $\overline{\mathbb{C}}$, določen s krožnico C_D v $\overline{\mathbb{C}}$ in naj bo E disk v $\overline{\mathbb{C}}$, določen s krožnico C_E v $\overline{\mathbb{C}}$. Po izreku 3.18 obstaja $m \in \text{Möb}^+$, tako da je $m(C_D) = C_E$ in je torej $m(D)$ disk, določen s C_E. C_E določa dva diska v $\overline{\mathbb{C}}$, zato je ali $m(D) = E$ ali pa je $m(D)$ drugi disk, določen s C_E. Če je $m(D) = E$, smo končali.

Nadaljujmo s primerom, ko $m(D) \neq E$. Iščemo Möbiusovo transformacijo p, za katero bo $p(C_E) = C_E$ in ki bo zamenjala diska, določena s C_E. Potem bo $p \circ m(D) = E$, torej bo $p \circ m$ iskana Möbiusova transformacija in dokaz bo zaključen.

Imejmo evklidsko krožnico $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ v $\overline{\mathbb{C}}$. Inverzija $J \in \text{Möb}^+$, $J(z) = \frac{1}{z}$, preslika trojico točk $(0, 1, \infty)$ iz $\overline{\mathbb{R}}$ v trojico $(\infty, 1, 0)$ na $\overline{\mathbb{R}}$, torej preslika krožnico $\overline{\mathbb{R}}$ samo nase, a hkrati zamenja diska, določena z $\overline{\mathbb{R}}$, saj je $J(i) = \frac{1}{i} = -i$. Naj bo n Möbiusova transformacija, ki preslika C_E na $\overline{\mathbb{R}}$. Za p lahko torej vzememo $p = n^{-1} \circ J \circ n$. $\square$

3.5. **Splošna Möbiusova grupa in zrcaljenja.** V tem razdelku bomo v Möbiusovo grupo vključili še zadnji homeomorfizem iz definicije 3.5, tj. kompleksno konjugacijo C.

Definicija 3.21. Označimo s S množico vseh afinih preslikav skupaj z inverzijo in kompleksno konjugacijo. Grupo, generirano z množico S, imenujemo *splošna Möbiusova grupa* in jo označimo z Möb.

Ker že vemo, da je Möbiusova grupa generirana z množico vseh afinih preslikav skupaj z inverzijo, lahko rečemo tudi, da je Möb generirana z grupo Möb^+ in homeomorfizmom C. Elementi grupe Möb so zaradi lastnosti elementov generatorske množice S homeomorfizmi iz $\overline{\mathbb{C}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$ in slikajo krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ v krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$. Ker je $\text{Möb}^+ \subset \text{Möb}$, obstajajo v Möb preslikave, ki preslikajo urejeno trojico različnih točk (z_1, z_2, z_3) iz $\overline{\mathbb{C}}$ v urejeno trojico različnih točk (w_1, w_2, w_3) v $\overline{\mathbb{C}}$, vendar pa nič več ne vemo, ali so take preslikave enolične. Izreka 3.18 in 3.20 veljata tudi za Möb, ker je $\text{Möb}^+ \subset \text{Möb}$.

Trditev 3.22. *Elementi Möb so natanko tisti, ki se dajo zapisati v eni od oblik*

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \textit{(oblika I)} \quad \textit{ali pa} \quad m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \quad \textit{(oblika II)}, \tag{13}$$

kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *in* $ad - bc \neq 0$.

Dokaz. Vsak $m \in \text{Möb}$ se da zapisati kot končen kompozitum

$$m = g_k \circ g_{k-1} \circ \cdots \circ g_1,$$

kjer je bodisi $g_i \in \text{Möb}^+$ bodisi $g_i = C$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, k$. Naj bo

$$m_i = g_i \circ g_{i-1} \circ \cdots \circ g_1 \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Izrek bomo dokazali z indukcijo na i. Baza indukcije ($i = 1$): $m_1 = g_1$ in g_1 je bodisi iz Möb^+, bodisi je C. V prvem primeru ima obliko I, v drugem pa ustreza obliki II.

Dokazati želimo, da če ima m_{i-1} obliko I ali II, potem ima tudi $m_i = g_i \circ m_{i-1}$ obliko I ali pa II. Ločili bomo vse 4 možne primere.

(1) m_{i-1} ima obliko I in $g_i \in \text{Möb}^+$. Opazimo, da oblika I ustreza ravno elementom Möb^+, zato je $m_{i-1} \in \text{Möb}^+$ in $m_i = g_i \circ m_{i-1}$ je kompozitum dveh elementov iz Möb^+, torej element Möb^+ in ima obliko I.

(2) m_{i-1} ima obliko I in $g_i = C$. Potem je

$$m_i(z) = C \circ m_{i-1} = \frac{\overline{a}\overline{z} + \overline{b}}{\overline{c}\overline{z} + \overline{d}}$$

in $\overline{a}\overline{d} - \overline{b}\overline{c} \neq 0$, ker $ad - bc \neq 0$, torej $m_i(z)$ ustreza obliki II.

(3) $m_{i-1}(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}$ ima obliko II in $g_i(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} \in \text{Möb}^+$.

$$m_i(z) = g_i \circ m_{i-1}(z) = \frac{\alpha\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} + \beta}{\gamma\frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} + \delta} = \cdots = \frac{(\alpha a + \beta c)\overline{z} + \alpha b + \beta d}{(\gamma a + \delta c)\overline{z} + \gamma b + \delta d}$$

in $(\alpha a + \beta c)(\gamma b + \delta d) - (\alpha b + \beta d)(\gamma a + \delta c) = \cdots = (\alpha\delta - \beta\gamma)(ad - bc) \neq 0$, ker niti $\alpha\delta - \beta\gamma$ niti $ad - bc$ ni enako 0 po predpostavki. Torej $m_i(z)$ ustreza obliki II.

(4) m_{i-1} ima obliko II in $g_i = C$. Potem je

$$m_i(z) = C \circ m_{i-1} = \frac{\overline{a}z + \overline{b}}{\overline{c}z + \overline{d}}$$

in $\overline{a}\overline{d} - \overline{b}\overline{c} \neq 0$, torej $m_i(z)$ ustreza obliki I.

Na koncu ima torej $m = m_k$ obliko I ali pa obliko II.

Obratno, če ima $m(z)$ obliko I, je element Möb^+ in če ima obliko II, ga lahko zapišemo kot $C \circ g$, kjer je $g = \frac{\bar{a}z+\bar{b}}{\bar{c}z+\bar{d}} \in \text{Möb}^+$, torej je m v obeh primerih element Möb. $\square$

Geometrično lahko na kompleksno konjugacijo gledamo kot na zrcaljenje preko razširjene realne osi $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. S pomočjo tega lahko definiramo zrcaljenje preko poljubne krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$. Naj bo A krožnica v $\overline{\mathbb{C}}$ in naj bo $m \in \text{Möb}$ taka, da je $m(\overline{\mathbb{R}}) = A$. Potem je $m \circ C \circ m^{-1} \in \text{Möb}$ *zrcaljenje preko krožnice* A.

Množico vseh homeomorfizmov iz $\overline{\mathbb{C}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$, ki slikajo krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ v krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$, označimo s $\text{Homeo}_{\text{C}}(\overline{\mathbb{C}})$.

Izrek 3.23. *$\text{Möb} = \text{Homeo}_C(\overline{\mathbb{C}})$.*

Dokaz bomo izpustili. Najdemo ga lahko v [1, str. 51]. Omenimo le, da po konstrukciji grupe Möb že vemo, da je $\text{Möb} \subset \text{Homeo}_{\text{C}}(\overline{\mathbb{C}})$.

Izrek 3.24. *Elementi Möb so konformne preslikave na $\overline{\mathbb{C}}$.*

Dokaz. Sledi neposredno iz dejstva, da je vsak element Möb kompozitum konformnih preslikav (definicija 3.21 in trditev 3.10). $\square$

Omenimo še eno dejstvo o elementih Möb, ki ga bomo potrebovali v nadaljevanju. Naj bo $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ali $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ element Möb. V obeh primerih definiramo *determinanto* preslikave m kot $\det(m) = ad - bc$. Vemo, da mora biti različna od 0. Za vsak $m \in \text{Möb}$ obstaja konstanta $\delta \in \mathbb{C} - \{0\}$ tako da, če m v števcu in imenovalcu pomnožimo z δ, je $\det(m) = \delta^2(ad-bc) = 1$ in pri tem se m ne spremeni. Temu procesu pravimo *normalizacija* m.

3.6. **Ohranjanje $\mathbb{H}$.** Sedaj imamo vse pripravljeno, da poiščemo grupo homeomorfizmov iz $\mathbb{H}$ v $\mathbb{H}$, ki slikajo hiperbolične premice v hiperbolične premice.

Označimo z

$$\text{Möb}(\mathbb{H}) = \{m \in \text{Möb} \mid m(\mathbb{H}) = \mathbb{H}\}$$

množico vseh elementov Möb, ki ohranjajo $\mathbb{H}$.

Izrek 3.25. *Vsak element $\text{Möb}(\mathbb{H})$ preslika hiperbolične premice v $\mathbb{H}$ v hiperbolične premice v $\mathbb{H}$.*

Dokaz. Dokaz izreka je neposredna posledica že znanih dejstev:

- $\text{Möb}(\mathbb{H}) \subset \text{Möb}$ ohranja kote med krožnicami v $\overline{\mathbb{C}}$,
- vsaka hiperbolična premica je presek $\mathbb{H}$ in krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$, pravokotne na $\overline{\mathbb{R}}$,
- vsak element Möb slika krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$ v krožnice v $\overline{\mathbb{C}}$.

$\square$

Zadnji izrek je nekoliko nezadovoljiv, saj nam ne ponuja eksplicitne izražave elementov $\text{Möb}(\mathbb{H})$. V preostanku tega razdelka se posvetimo izpeljavi enačb za elemente $\text{Möb}(\mathbb{H})$.

Ker je $\mathbb{H}$ disk v $\overline{\mathbb{C}}$, določen s krožnico $\overline{\mathbb{R}}$ v $\overline{\mathbb{C}}$, moramo med vsemi elementi Möb poiskati tiste, ki preslikajo $\overline{\mathbb{R}}$ v $\overline{\mathbb{R}}$. Elemente $\text{Möb}(\mathbb{H})$ torej iščemo v množici

$$\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}}) = \{m \in \text{Möb} \mid m(\overline{\mathbb{R}}) = \overline{\mathbb{R}}\}.$$

Poiščimo najprej vse $m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ oblike $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$. Ker m preslika $\overline{\mathbb{R}}$ v $\overline{\mathbb{R}}$ in ker so $0, 1, \infty \in \overline{\mathbb{R}}$, morajo naslednje tri točke

$$m(0) = \frac{b}{d}, \quad m(1) = \frac{a+b}{c+d} \quad \text{in} \quad m(\infty) = \frac{a}{c}$$

vse ležati v $\overline{\mathbb{R}}$. Recimo zaenkrat, da $c \neq 0$ in $d \neq 0$ in da so torej vse tri točke v $\mathbb{R}$. Iz enačb lahko izrazimo $a = m(\infty)c$, $b = m(0)d$ in $c = rd$, kjer je $r = \frac{m(0)-m(1)}{m(1)-m(\infty)}$. Torej je $a = m(\infty)rd$ in $b = m(0)d$. Normaliziramo m, tako da je $\det(m) = 1$ in dobimo pogoj na koeficient d:

$$1 = ad - bc = m(\infty)rd^2 - m(0)rd^2 = \left[\frac{m(0) - m(1)}{m(1) - m(\infty)}(m(\infty) - m(0))\right]d^2.$$

Ker so $m(0)$, $m(1)$ in $m(\infty)$ vse realne, sledi, da je d bodisi realno ali pa čisto imaginarno število, od tod pa sledi, da so vsi koeficienti m-ja hkrati bodisi realni bodisi čisto imaginarni. V primeru, ko je eden od c ali d enak 0, dobimo enake pogoje.

Oglejmo si še $n \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ oblike $n(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $ad - bc \neq 0$. Ker je $n(z) = m \circ C(z)$ in je $C(x) = x$ za vse $x \in \overline{\mathbb{R}}$, je $n(z) = m(z)$ na $\overline{\mathbb{R}}$ in lahko za tovrstne preslikave ponovimo popolnoma enak postopek kot za preslikave m in tudi dobimo enake rezultate.

Obratno, če je $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc = 1$ ali pa $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $ad - bc = 1$ in so vsi koeficienti m-ja hkrati bodisi realni bodisi čisto imaginarni, potem točke $m(0)$, $m(1)$ in $m(\infty)$ vse ležijo v $\overline{\mathbb{R}}$ in torej m slika $\overline{\mathbb{R}}$ v $\overline{\mathbb{R}}$.

Rezultate te analize bomo povzeli v naslednjem izreku, od tu naprej pa bomo za čista imaginarna števila uporabili oznako

$$i\mathbb{R} = \{ix;\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Izrek 3.26. *Elementi $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ so natanko tisti, ki se dajo zapisati v eni od naslednjih štirih oblik:*

(1) $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ in $ad - bc = 1$;*
(2) $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, *kjer $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ in $ad - bc = 1$;*
(3) $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, *kjer so $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$ in $ad - bc = 1$;*
(4) $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, *kjer so $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$ in $ad - bc = 1$.*

Preslikave $m \in \text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ torej bodisi ohranjajo disk $\mathbb{H}$, bodisi diska (ki sta v tem primeru zgornja in spodnja kompleksna polravnina) zamenjajo. Naša naslednja naloga je med elementi $\text{Möb}(\overline{\mathbb{R}})$ poiskati tiste, ki ohranjajo disk $\mathbb{H}$. To storimo tako, da pogledamo, kam se preslika število i. Če je $\text{Im}(m(i))$ pozitiven, potem je $m(z) \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, če pa je $m(i)$ negativen, potem $m(z) \notin \text{Möb}(\mathbb{H})$.

Naj si preslikave m v naslednjem seznamu sledijo tako, kot si sledijo v seznamu v izreku 3.26. Za vsako posebej bomo preverili predznak imaginarnega dela $m(i)$. Pri tem bomo v tretjem in četrtem primeru, ko so koeficienti čisto imaginarni, pisali $a = \alpha i$, $b = \beta i$, $c = \gamma i$ in $d = \delta i$. $(\alpha\delta - \beta\gamma = -1)$.

(1)

$$\begin{aligned}\text{Im}(m(i)) &= \text{Im}\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = \\ &= \text{Im}\left(\frac{(ai+b)(-ci+d)}{(ci+d)(-ci+d)}\right) = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} = \frac{1}{c^2+d^2} > 0\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(m(i)) &= \mathrm{Im}\left(\frac{-ai+b}{-ci+d}\right) = \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{(-ai+b)(ci+d)}{(-ci+d)(ci+d)}\right) = \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} = \frac{1}{c^2+d^2} < 0\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(m(i)) &= \mathrm{Im}\left(\frac{ai+b}{ci+d}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{-\alpha+\beta i}{-\gamma+\delta i}\right) = \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{(-\alpha+\beta i)(-\gamma-\delta i)}{(-\gamma+\delta i)(-\gamma-\delta i)}\right) = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{-1}{\gamma^2+\delta^2} < 0\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(m(i)) &= \mathrm{Im}\left(\frac{-ai+b}{-ci+d}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}\right) = \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}\right) = \frac{-\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma^2+\delta^2} = \frac{1}{\gamma^2+\delta^2} > 0\end{aligned}$$

Rezultate te analize povzemimo v naslednjem izreku.

Izrek 3.27. *Elementi Möb($\mathbb{H}$) so natanko tisti, ki imajo obliko*

$$m(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ kjer so } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ in } ad-bc=1 \quad \text{(oblika I)}$$

ali pa obliko

$$m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}, \text{ kjer so } a,b,c,d \in i\mathbb{R} \text{ in } ad-bc=1. \quad \text{(oblika II)}$$

Trditev 3.28. *Označimo s $S_{\mathbb{H}}$ množico vseh tistih afinih preslikav $F_{a,b}(z) = az+b$, za katere je $a > 0$ in $b \in \mathbb{R}$, skupaj s preslikavama $K(z) = \frac{-1}{z}$ in $B(z) = -\overline{z}$. Möb($\mathbb{H}$) je podgrupa grupe Möb in je generirana z množico $S_{\mathbb{H}}$.*

Dokaz. Naj bosta $m_1, m_2 \in$ Möb($\mathbb{H}$) poljubna. Po definiciji je $m_1(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ in $m_2(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, zato je

$$(m_2 \circ m_1)(\mathbb{H}) = m_2(m_1(\mathbb{H})) = m_2(\mathbb{H}) = \mathbb{H},$$

torej je $m_2 \circ m_1 \in$ Möb($\mathbb{H}$). Enota za kompozitum $e(z) = z$ tudi preslika $\mathbb{H}$ v $\mathbb{H}$, zato pripada Möb($\mathbb{H}$). Ker je za poljuben $m \in$ Möb($\mathbb{H}$) tudi

$$m^{-1}(\mathbb{H}) = m^{-1}(m(\mathbb{H})) = (m^{-1} \circ m)(\mathbb{H}) = e(\mathbb{H}) = \mathbb{H},$$

je tudi $m^{-1} \in$ Möb($\mathbb{H}$). Möb($\mathbb{H}$) je torej res grupa.

Ker je $S_{\mathbb{H}} \subset$ Möb($\mathbb{H}$) nam preostane dokazati, da se da vsak element Möb($\mathbb{H}$) zapisati kot kompozitum elementov iz $S_{\mathbb{H}}$. Naj bo $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in$ Möb($\mathbb{H}$) oblike I. Če je $c = 0$, potem je $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$, torej afina preslikava in ker je $ad = 1$, je $\frac{a}{d} = \frac{1}{d^2} > 0$. Če $c \neq 0$, potem lahko po enakem postopku kot v dokazu izreka 3.13 izpeljemo

$$m(z) = \frac{a}{c} + \lambda \frac{-1}{cz+d},$$

kjer je $\lambda = \frac{ad-bc}{c}$. Torej je $m(z) = f \circ K \circ g(z)$, kjer sta $f(z) = \frac{a}{c} + \lambda z$ in $g(z) = cz+d$ afini preslikavi. Če je $c > 0$, je to že vredu, ker sta koeficienta pri spremenljivki z v predpisih za f in g pozitivna. Če je $c < 0$, potem za f vzamemo $f(z) = -\lambda z + \frac{a}{c}$, za g pa $g(z) = -cz - d$.

Naj bo sedaj $m(z) = \frac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ oblike II. Pišimo $a = \alpha i$, $b = \beta i$, $c = \gamma i$ in $d = \delta i$. Ker je $ad - bc = 1$, je $\alpha\delta - \beta\gamma = -1$. Če $\gamma \neq 0$, potem zopet lahko izpeljemo

$$m(z) = \frac{i(\alpha\overline{z} + \beta)}{i(\gamma\overline{z} + \delta)} = \frac{\alpha}{\gamma} + \lambda\frac{1}{\gamma\overline{z} + \delta} = \frac{\alpha}{\gamma} + \lambda\frac{-1}{\gamma(-\overline{z}) - \delta},$$

kjer je tokrat $\lambda = \frac{-\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma}$. Torej je $m(z) = f \circ K \circ g \circ B(z)$, kjer sta $f(z) = \frac{\alpha}{\gamma} + \lambda z$ in $g(z) = \gamma z - \delta$ afini preslikavi. Če je $\gamma > 0$, potem je to že v redu, saj sta koeficienta pri spremenljivki z v predpisih za f in g pozitivna. Če je $\gamma < 0$, potem za f vzamemo $f(z) = \frac{\alpha}{\gamma} - \lambda z$, za g pa $g(z) = -\gamma z + d$. Če je $\gamma = 0$, potem je

$$m(z) = \frac{\alpha}{\delta}\overline{z} + \frac{\beta}{\delta} = -\frac{\alpha}{\delta}(-\overline{z}) + \frac{\beta}{\delta},$$

torej je $m(z) = h \circ B(z)$, kjer je $h(z) = -\frac{\alpha}{\delta}z + \frac{\beta}{\delta}$ afina preslikava in ker je $\alpha\delta = -1$, je $\alpha = -\frac{1}{\delta}$, torej je $-\frac{\alpha}{\delta} = \frac{1}{\delta^2} > 0$. $\square$

Trditev 3.29. *Za poljubni točki $u, v \in \mathbb{H}$ obstaja $m \in$ Möb$(\mathbb{H})$, tako da je $m(u) = v$.*

Dokaz. Zadošča pokazati, da za vsak $w \in \mathbb{H}$ obstaja $f \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, tako da je $f(w) = i$, kajti če sta $m_1, m_2 \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ taki, da je $m_1(u) = m_2(v) = i$, potem je $m = m_2^{-1} \circ m_1$ iskana preslikava.

Zapišemo lahko $w = a + bi$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Če število w delimo z b, dobimo število, ki ima imaginarni del enak 1. Če temu številu nato le še odštejemo $\frac{a}{b}$, dobimo i. Iskana preslikava je tako lahko kar

$$f(z) = \frac{1}{b}z - \frac{a}{b},$$

saj je hkrati tudi $\frac{1}{b} > 0$ in $-\frac{a}{b} \in \mathbb{R}$, torej f pripada generatorski množici $S_{\mathbb{H}}$ grupe Möb$(\mathbb{H})$. $\square$

Trditev 3.30. *Za poljubni hiperbolični premici p in q obstaja $m \in$ Möb$(\mathbb{H})$, tako da je $m(p) = q$.*

Dokaz. S podobnim argumentom kot v dokazu prejšnje trditve zopet zadošča dokazati le, da za vsako hiperbolično premico ℓ obstaja $n \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, ki ℓ preslika v hiperbolično premico

$$\ell_0 = \{z \in \mathbb{H} \,|\, \text{Re}(z) = 0\} = \{z \in \mathbb{H} \,|\, z + \overline{z} = 0\}.$$

Obravnavajmo najprej primer, ko je $\ell = \ell_{\beta,r}$ hiperbolična premica tipa II, kjer je $\beta \in \mathbb{R}$ središče, $r > 0$ pa polmer evklidske krožnice, v kateri je vsebovana ℓ. Tedaj je

$$\ell_{\beta,r} = \{z \in \mathbb{H} \,|\, |z - \beta| = r\} = \{z \in \mathbb{H} \,|\, z\overline{z} - \beta\overline{z} - \beta z + \beta^2 - r^2 = 0\}.$$

Preslikavo n bomo sestavili kot kompozitum preslikav iz $S_{\mathbb{H}}$. Najprej uporabimo preslikavo $g(z) = z - \beta + r$ in dobimo

$$g(\ell) = \{z \in \mathbb{H} \,|\, z\overline{z} - r\overline{z} - rz = 0\}.$$

Potem uporabimo preslikavo $K(z) = \frac{-1}{z}$ in dobimo

$$K(g(\ell)) = \{z \in \mathbb{H} \,|\, 1 + rz + r\overline{z} = 0\}.$$

Na koncu uporabimo še preslikavo $f(z) = rz + \frac{1}{2}$ in dobimo

$$f(K(g(\ell))) = \{z \in \mathbb{H} \,|\, z + \overline{z} = 0\} = \ell_0.$$

Torej lahko vzamemo $n = f \circ K \circ g$.

Obravnavajmo še primer, ko je $\ell = \ell_\gamma$ hiperbolična premica tipa I za neki $\gamma \in \mathbb{R}$, torej je

$$\ell = \{z \in \mathbb{H} \,|\, \mathrm{Re}(z) = \gamma\} = \{z \in \mathbb{H} \,|\, z + \overline{z} - \gamma = 0\}.$$

Če za n vzamemo $n(z) = z - \frac{\gamma}{2} \in S_{\mathbb{H}}$, potem je

$$n(\ell) = \{z \in \mathbb{H} \,|\, z + \overline{z} = 0\} = \ell_0.$$

□

4. Dolžina in razdalja v $\mathbb{H}$

V tem poglavju bomo na smiselen način vpeljali metriko, ki bo merila hiperbolično razdaljo med točkami. Kot bomo videli, ima metrika v $\mathbb{H}$ zanimivo lastnost – hiperbolična razdalja se pri preslikavah iz $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathbb{H})$ ohranja. To nam bo potem dalo slutiti, da smo na dobri poti pri iskanju množice vseh izomorfizmov na $\mathbb{H}$. Iskanje primerne metrike pa bomo začeli z iskanjem primerne hiperbolične dolžine krivulj v $\mathbb{H}$.

4.1. **Dolžina v $\mathbb{H}$.** Naj bosta $x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$ *zvezni in odsekoma zvezno odvedljivi funkciji*, tj. zvezni na intervalu $[a, b]$ in obstaja končno mnogo točk $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, tako da sta za vsak $j = 1, \ldots n$ zožitvi funkcij x in y na podinterval $[a_{j-1}, a_j]$ zvezno odvedljivi. Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, $f(t) = x(t)+y(t)i$. Slika preslikave f je *krivulja* v $\mathbb{C}$. Preslikava f je zvezna in za vsak $j = 1, \ldots n$ je skrčitev njenega odvoda $f'(t) = x'(t) + y'(t)i$ na podinterval $[a_{j-1}, a_j]$ tudi zvezna. Pravimo, da je f *zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva pot v* $\mathbb{C}$.

Definicija 4.1. Naj bo $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty)$ zvezna funkcija. *Dolžina zvezne in odsekoma zvezno odvedljive poti* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *glede na element ločne dolžine* $\rho(z)|dz|$ je definirana kot

$$\mathcal{L}_\rho(f) = \int_f \rho(z)\,|dz| = \int_a^b \rho(f(t))\,|f'(t)|\,dt = \sum_{j=1}^{n} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \rho(f(t))\,|f'(t)|\,dt. \tag{14}$$

Pri tem je

$$|dz| = |f'(t)|\,dt = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt. \tag{15}$$

Opazimo, da gre za krivuljni integral skalarnega polja ρ v $\mathbb{C}$. Če je $\rho(z) \equiv 1$, potem gre za navadno, evklidsko dolžino poti. Vemo tudi, da je $\mathcal{L}_\rho(f)$ končno število, saj je določeni integral odsekoma zvezne funkcije na zaprtem intervalu.

Trditev 4.2. *Naj bo* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva pot. Naj bo* h reparametrizacija *poti* f*, tj. naj bo* $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *zvezna, zvezno odvedljiva in surjektivna funkcija* ($[a, b] = h([\alpha, \beta])$)*. Potem je*

$$\mathcal{L}_\rho(f) \le \mathcal{L}_\rho(f \circ h).$$

Če je $h'(t) \ge 0$ *za vse* $t \in [\alpha, \beta]$ *ali* $h'(t) \le 0$ *za vse* $t \in [\alpha, \beta]$*, potem je*

$$\mathcal{L}_\rho(f) = \mathcal{L}_\rho(f \circ h).$$

Dokaz. Uporabimo verižno pravilo za odvajanje kompozituma in dobimo

$$\mathcal{L}_\rho(f \circ h) = \int_\alpha^\beta \rho((f \circ h)(t))\,|(f \circ h)'(t)|\,dt = \int_\alpha^\beta \rho(f(h(t)))\,|f'(h(t))|\,|h'(t)|\,dt.$$

Če je $h'(t) \geq 0$ za vse $t \in [\alpha, \beta]$, potem je $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$ in $|h'(t)| = h'(t)$. Uvedemo lahko substitucijo $s = h(t)$ ($ds = h'(t)\,dt = |h'(t)|\,dt$) in nadaljujemo prejšnji račun

$$\mathcal{L}_\rho(f \circ h) = \int_a^b \rho(f(s))\,|f'(s)|\,ds = \mathcal{L}_\rho(f).$$

Podobno, če je $h'(t) \leq 0$ za vse $t \in [\alpha, \beta]$, potem je $h(\alpha) = b$, $h(\beta) = a$ in $|h'(t)| = -h'(t)$. Zopet lahko uvedemo substitucijo $s = h(t)$ ($ds = h'(t)\,dt = -|h'(t)|\,dt$) in nadaljujemo račun

$$\mathcal{L}_\rho(f \circ h) = -\int_b^a \rho(f(s))\,|f'(s)|\,ds = \int_a^b \rho(f(s))\,|f'(s)|\,ds = \mathcal{L}_\rho(f).$$

V primeru, ko $h'(t)$ menja predznak na $[\alpha, \beta]$, lahko $\mathcal{L}_\rho(f \circ h)$ zapišemo kot vsoto dveh integralov, enega, ki gre po uniji podintervalov, na katerih je $h'(t) > 0$ in drugega, ki gre po uniji podintervalov, na katerih je $h'(t) < 0$. Oba skupaj prineseta vsaj toliko, kot je $\mathcal{L}_\rho(f)$. □

Definicija 4.3. Pot $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ je *enostavna*, če se jo da zapisati kot kompozitum $f = g \circ h$, kjer je $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ injektivna, zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva pot in $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ surjektivna, zvezna in zvezno odvedljiva funkcija, za katero je $h'(t) \geq 0$ za vse $t \in [\alpha, \beta]$ ali pa $h'(t) \leq 0$ za vse $t \in [\alpha, \beta]$.

Opomnimo, da se ta definicija enostavnih poti lahko razlikuje od običajne definicije tega pojma iz analize ali diferencialne geometrije.

Iz slednje definicije takoj lahko zaključimo, da sta dolžini poti f in g enaki (po trditvi 4.2).

Lema 4.4. *Za vsak $m \in$ Möb$(\mathbb{H})$ in vsako zvezno in odsekoma zvezno odvedljivo pot $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ obstaja odvod $(m \circ f)'(t)$ za vse tiste $t \in [a, b]$, za katere obstaja tudi odvod $f'(t)$. Posledično obstaja tudi $\mathcal{L}_\rho(m \circ f)$.*

Dokaz. Naj bo $t_0 \in [a, b]$ tak, da $f'(t_0)$ obstaja, torej obstaja limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Če je $m \in$ Möb$(\mathbb{H})$ tipa I, potem je m holomorfna na $\mathbb{H}$ in $(m \circ f)'(t_0)$ obstaja in je enak $(m \circ f)'(t_0) = m'(f(t_0))f'(t_0)$. Če je m tipa II, potem iz dokaza trditve 3.28 vemo, da se da m zapisati kot $m = \gamma \circ B$, kjer je $\gamma \in$ Möb$(\mathbb{H})$ tipa I in $B : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $B(z) = -\overline{z}$. V tem primeru m ni več holomorfna, ker $B(z)$ ni holomorfna. Toda vseeno obstaja odvod

$$\begin{aligned}
(B \circ f)'(t_0) &= (B(f(t_0)))' = \lim_{h \to 0} \frac{-\overline{f(t_0 + h)} - (-\overline{f(t_0)})}{h} = \\
&= -\overline{\lim_{h \to 0} \Big(\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \Big)} = -\overline{\Big(\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \Big)} = \\
&= -\overline{f'(t_0)},
\end{aligned} \tag{16}$$

zato pa obstaja tudi odvod

$$\begin{aligned}
(m \circ f)'(t_0) &= ((\gamma \circ B) \circ f))'(t_0) = (\gamma \circ (B \circ f))'(t_0) = \\
&= \gamma'((B \circ f)(t_0))(B \circ f)'(t_0) = -\gamma'(-\overline{f(t_0)})\overline{f'(t_0)},
\end{aligned}$$

ki je tudi zvezen v t_0. Ker je $(m \circ f)'$ odsekoma zvezna in ima točke nezveznosti kvečjemu tam, kjer jih ima tudi $f'(t)$, obstaja tudi

$$\mathcal{L}_\rho(m \circ f) = \int_a^b \rho((m \circ f)(t))\,|(m \circ f)'(t)|\,dt.$$

$\square$

Trditev 4.5. *Če za neka $\varphi, \psi \in Möb(\mathbb{H})$ velja*

$$\mathcal{L}_\rho(\varphi \circ f) = \mathcal{L}_\rho(\psi \circ f) = \mathcal{L}_\rho(f)$$

za vsako zvezno in odsekoma zvezno odvedljivo pot $f : [a, b] \to \mathbb{H}$, potem je tudi

$$\mathcal{L}_\rho((\varphi \circ \psi) \circ f) = \mathcal{L}_\rho(f).$$

Dokaz.

$$\mathcal{L}_\rho((\varphi \circ \psi) \circ f) = \mathcal{L}_\rho(\varphi \circ (\psi \circ f)) = \mathcal{L}_\rho(\psi \circ f) = \mathcal{L}_\rho(f)$$

in vsi zgornji $\mathcal{L}_\rho(.)$ po lemi 4.4 obstajajo. $\square$

V nadaljevanju bomo poiskali tisti element ločne dolžine ρ, ki bo invarianten za delovanje elementov iz Möb($\mathbb{H}$), tj. za vsako zvezno in odsekoma zvezno odvedljivo pot $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ in vsak $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$) bo

$$\mathcal{L}_\rho(f) = \mathcal{L}_\rho(\gamma \circ f).$$

Po trditvi 4.5 zadošča poiskati tak ρ, ki bo invarianten za delovanje elementov iz $S_{\mathbb{H}}$, generatorske množice za Möb($\mathbb{H}$).

Zapišimo pogoj $\mathcal{L}_\rho(f) = \mathcal{L}_\rho(\gamma \circ f)$ v integralski obliki

$$\int_a^b \rho(f(t))\,|f'(t)|\,dt = \int_a^b \rho((\gamma \circ f)(t))\,|(\gamma \circ f)'(t)|\,dt$$

oziroma

$$\int_a^b \Big[\rho(f(t))\,|f'(t)| - \rho((\gamma \circ f)(t))\,|(\gamma \circ f)'(t)|\Big]\,dt = 0. \tag{17}$$

Najprej obravnavajmo primer, ko je $\gamma \in S_{\mathbb{H}}$ in γ ni $B(z) = -\overline{z}$. V tem primeru je γ holomorfna preslikava na $\mathbb{H}$ in bomo lahko uporabili verižno pravilo za odvod kompozituma. Primer, ko je $\gamma = B(z)$, bomo obravnavali posebej.

V pogoju (17) torej uporabimo verižno pravilo in dobimo

$$\int_a^b \Big[\rho(f(t)) - \rho(\gamma(f(t)))\,|(\gamma'(f(t))|\Big]\,|f'(t)|\,dt = 0.$$

Za vsak $\gamma \in S_{\mathbb{H}} - \{B(z)\}$ uvedemo funkcijo

$$\mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma'(z)|$$

in naš pogoj se sedaj glasi

$$\int_a^b \mu(f(t))\,|f'(t)|\,dt = 0 \quad \text{oziroma} \quad \int_f \mu_\gamma(z)\,|dz| = 0 \tag{18}$$

za vsako zvezno in odsekoma zvezno odvedljivo pot $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ in vsak $\gamma \in S_{\mathbb{H}} - \{B(z)\}$. Na tem mestu bomo uporabili naslednjo lemo.

Lema 4.6. *Naj bo D odprta podmnožica $\mathbb{C}$, naj bo $\mu : D \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija in privzemimo, da velja $\int_f \mu(z)\,|dz| = 0$ za vsako zvezno in odsekoma zvezno odvedljivo pot $f : [a, b] \to D$. Potem je $\mu \equiv 0$.*

Dokaz. Recimo, da temu ni tako, torej, da obstaja $z_0 \in D$, tako da je $\mu(z_0) \neq 0$. Brez škode za splošnost privzemimo, da je $\mu(z_0) > 0$ (sicer zamenjamo μ z $-\mu$). Zaradi zveznosti funkcije μ obstaja še okolica $K(z_0, \delta) = \{w \in D \mid |w - z_0| < \delta\}$ točke z_0 za neki $\delta > 0$, tako da je $\mu(z) > 0$ za vse $z \in K(z_0, \delta)$.

Izberimo zvezno in (odsekoma) zvezno odvedljivo pot $f : [0,1] \to K(z_0, \delta)$ s predpisom

$$f(t) = z_0 + \frac{1}{3}\delta t.$$

Opazimo, da slika $f(t)$ res v celoti leži v $K(z_0, \delta)$ in potem je $\mu(f(t)) > 0$ za vse $t \in [0,1]$. Toda potem je tudi $\int_f \mu(z)|dz| > 0$, kar pa je v nasprotju z našo predpostavko. Torej je $\mu \equiv 0$. $\square$

Iz enačbe (18) ob upoštevanju leme 4.6 dobimo pogoj

$$\mu_\gamma(z) = \rho(z) - \rho(\gamma(z))|\gamma'(z)| = 0. \tag{19}$$

Če vzamemo za $\gamma(z) = az + b$, $a > 0$ in $b \in \mathbb{R}$, potem dobimo

$$\rho(z) = \rho(az + b)a.$$

Ker mora veljati tudi za $a = 1$, dobimo pogoj

$$\rho(z) = \rho(z + b)$$

za vsak $b \in \mathbb{R}$, kar pomeni, da je ρ neodvisen od realnega dela z. Če sedaj pustimo $a > 0$ poljuben in za b izberemo 0, dobimo pogoj

$$\rho(az) = \frac{1}{a}\rho(z).$$

Vemo pa že, da je ρ odvisen le od imaginarnega dela z, zato pišimo $y = \mathrm{Im}(z)$ in naš pogoj lahko ekvivalentno zapišemo kot

$$\rho(ay) = \frac{1}{a}\rho(y).$$

Če za y vstavimo 1, dobimo

$$\rho(a) = \frac{1}{a}\rho(1)$$

za vsak $a > 0$, torej je vrednost funkcije ρ natanko določena z vrednostjo $c := \rho(1) > 0$. Tako imamo

$$\rho(z) = \rho(\mathrm{Im}(z)) = \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}\rho(1) = \frac{c}{\mathrm{Im}(z)}. \tag{20}$$

Pokažimo sedaj, da je tako dobljeni ρ invarianten tudi za delovanje $\gamma = K(z) = -\frac{1}{z}$. To lahko preverimo z enačbo (19), saj je izpeljana tudi za $\gamma = K(z)$. Še prej izračunajmo

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(K(z)) &= \mathrm{Im}(-z^{-1}) = \mathrm{Im}(-|z^{-1}|(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))) = \\ &= \mathrm{Im}(-|z|^{-1}(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))) = |z|^{-1}\sin(\varphi), \end{aligned}$$

kjer je $\varphi = \arg(z)$, in

$$|K'(z)| = |(-z^{-1})'| = |z|^{-2}.$$

Sedaj se lahko prepričamo, da je enačba (19), ko je $\gamma = K(z)$, izpolnjena za naš ρ:

$$\begin{aligned} \rho(K(z))|K'(z)| &= \frac{c}{\mathrm{Im}(-z^{-1})}|(-z^{-1})'| = \frac{c}{|z|^{-1}\sin(\varphi)}|z|^{-2} = \\ &= \frac{c}{|z|\sin(\varphi)} = \frac{c}{\mathrm{Im}(z)} = \rho(z). \end{aligned}$$

Torej je $\rho = \frac{c}{\mathrm{Im}(z)}$ res invarianten za delovanje $K(z)$.

Naš ρ pa je invarianten tudi za $\gamma = B(z) = -\overline{z}$. Da se prepričamo tudi v to, se vrnimo k enačbi (17), kjer bomo namesto verižnega pravila za odvod kompozituma uporabili kar že znano enačbo (16) za odvod $(B \circ f)'$. Ker je

$$|(B \circ f)'(t)| = |-\overline{f'(t)}| = |f'(t)|,$$

se enačba (17) v našem primeru glasi

$$\int_a^b \Big[\rho(f(t))\,|f'(t)| - \rho(-\overline{f(t)})\,|f'(t)|\Big]\,dt =$$
$$= \int_f \Big[\rho(z) - \rho(-\overline{z})\Big]\,|dz| = 0.$$

Na tem mestu zopet lahko uporabimo lemo 4.6, torej želimo videti, da naš ρ izpolnjuje enačbo

$$\rho(z) = \rho(-\overline{z}).$$

To seveda drži:

$$\rho(B(z)) = \rho(-\overline{z}) = \frac{c}{\mathrm{Im}(-\overline{z})} = \frac{c}{-\mathrm{Im}(\overline{z})} = \frac{c}{\mathrm{Im}(z)} = \rho(z).$$

Torej je $\rho = \frac{c}{\mathrm{Im}(z)}$ invarianten tudi za delovanje $B(z)$.

Ker smo dokazali, da je $\rho = \frac{c}{\mathrm{Im}(z)}$ invarianten za delovanje vseh elementov iz $S_{\mathbb{H}}$, imamo s pomočjo trditve 4.5 dokazan naslednji izrek.

Izrek 4.7. *Za vsako pozitivno konstanto c je element ločne dolžine*

$$\rho(z) = \frac{c}{\mathrm{Im}(z)}|dz|$$

na $\mathbb{H}$ invarianten za delovanje elementov iz $\text{Möb}(\mathbb{H})$. Tj. za vsako zvezno in odsekoma zvezno odvedljivo pot $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ in vsak $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ velja

$$\mathcal{L}_\rho(f) = \mathcal{L}_\rho(\gamma \circ f).$$

Na tem mestu je smiselno vpeljati pojem hiperbolične dolžine.

Definicija 4.8. *Hiperbolična dolžina* zvezne in odsekoma zvezno odvedljive poti $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ je definirana kot

$$\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) = \int_f \frac{1}{\mathrm{Im}(z)}\,|dz| = \int_a^b \frac{1}{\mathrm{Im}(f(t))}\,|f'(t)|\,dt.$$

4.2. **Metrika v $\mathbb{H}$.**

Definicija 4.9. Naj bosta $u, v \in \mathbb{H}$. Označimo z $\Gamma[u,v]$ množico vseh zveznih in odsekoma zvezno odvedljivih poti $f : [a,b] \to \mathbb{H}$, za katere je $f(a) = u$ in $f(b) = v$. Funkcijo

$$d_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{R},$$

definirano kot

$$d_{\mathbb{H}}(u,v) = \inf\{\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[u,v]\},$$

imenujemo *hiperbolična razdalja med točkama u in v.*

Definicija 4.10. Rečemo, da pot $f \in \Gamma[u,v]$ *udejani (hiperbolično) razdaljo med točkama u in v*, če je enostavna in velja $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) = d_{\mathbb{H}}(u,v)$.

Trditev 4.11. (1) *Za vsaka* $u, v \in \mathbb{H}$ *in vsak* $\gamma \in$ *Möb*$(\mathbb{H})$ *je*

$$d_{\mathbb{H}}(u, v) = d_{\mathbb{H}}(\gamma(u), \gamma(v)).$$

(2) *Če* $f \in \Gamma[u, v]$ *udejani razdaljo med točkama* u *in* v*, potem za vsak* $\gamma \in$ *Möb*$(\mathbb{H})$ $\gamma \circ f \in \Gamma[\gamma(u), \gamma(v)]$ *udejani razdaljo med točkama* $\gamma(u)$ *in* $\gamma(v)$*.*

Dokaz. Definirajmo preslikavo $\Phi : \Gamma[u, v] \to \Gamma[\gamma(u), \gamma(v)]$ kot $\Phi(f) = \gamma(f)$. Ker je $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ iz $\Gamma[u, v]$, velja $f(a) = u$ in $f(b) = v$, zato pa je $\gamma(f(a)) = \gamma(u)$ in $\gamma(f(b)) = \gamma(v)$, torej je $\Phi(f)$ res element $\Gamma[\gamma(u), \gamma(v)]$.

Φ je injektivna:

$$\Phi(f) = \Phi(g) \Leftrightarrow \gamma(f) = \gamma(g) \Leftrightarrow (\gamma^{-1} \circ \gamma)(f) = g \Leftrightarrow f = g.$$

Φ je tudi surjektivna: če je $g \in \Gamma[\gamma(u), \gamma(v)]$ poljubna, potem je $f = \gamma^{-1}(g)$ tista pot iz $\Gamma[u, v]$, za katero je

$$\Phi(f) = \Phi(\gamma^{-1}(g)) = (\gamma \circ \gamma^{-1})(g) = g.$$

Φ je torej bijekcija, ki vsaki poti $f \in \Gamma[u, v]$ priredi pot $g \in \Gamma[\gamma(u), \gamma(v)]$ enake hiperbolične dolžine, kar sledi neposredno iz trditve 4.7. Torej sta množici hiperboličnih dolžin

$$\{\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[u, v]\} \quad \text{in} \quad \{\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g) \mid g \in \Gamma[\gamma(u), \gamma(v)]\}$$

enaki, posledično imata enak infimum. S tem je dokazan prvi del trditve. Drugi del trditve je sedaj očiten. □

Izrek 4.12. (1) $(\mathbb{H}, d_{\mathbb{H}})$ *je metrični prostor.*

(2) *Hiperbolično razdaljo med točkama* $u, v \in \mathbb{H}$ *udejanijo enostavne poti, katerih slika je odsek hiperbolične premice, ki povezuje točki* u *in* v*.*

Dokaz. Naj bosta $u, v \in \mathbb{H}$. Iz definicije hiperbolične dolžine 4.8 vidimo, da je integrand vedno nenegativen, torej je $d_{\mathbb{H}}(u, v) \geq 0$. Da iz $u = v$ sledi $d_{\mathbb{H}}(u, v) = 0$ je očitno, saj je dolžina konstantne poti, ki v tem primeru udejani razdaljo med u in v, enaka 0. Če obstaja pot, ki udejani razdaljo med točkama u in v, potem iz $u \neq v$ sledi $d_{\mathbb{H}}(u, v) > 0$, saj je hiperbolična dolžina nekonstantne poti vedno pozitivna. Obstoj tovrstne poti nam bo zagotovil dokaz druge točke izreka, sedaj pa nadaljujmo z dokazom prve točke.

Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{H}$ poljubna pot iz $\Gamma[u, v]$. Priredimo ji funkcijo $h : [a, b] \to [a, b]$, definirano kot $h(t) = a + b - t$. Potem je $f \circ h$ pot iz $\Gamma[v, u]$. Ker je $h'(t) = -1 < 0$ za vse $t \in [a, b]$, imamo po trditvi 4.2 $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f \circ h) = \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f)$. Ugotovili smo, da za primeren h lahko vsaki poti $f \in \Gamma[u, v]$ priredimo pot v $\Gamma[v, u]$ z enako hiperbolično dolžino. Ker na enak način lahko dokažemo, da je obratno tudi res, torej, da lahko vsaki poti iz $\Gamma[v, u]$ priredimo pot v $\Gamma[u, v]$ z enako hiperbolično dolžino, sta torej množici

$$\{\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) \mid f \in \Gamma[u, v]\} \quad \text{in} \quad \{\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g) \mid g \in \Gamma[v, u]\}$$

enaki in posledično imata enak infimum, kar dokazuje, da je $d_{\mathbb{H}}(u, v) = d_{\mathbb{H}}(v, u)$.

Za dokaz trikotniške neenakosti bomo uporabili dokaz s protislovjem. Recimo, da obstaja trojica točk $u, v, w \in \mathbb{H}$, za katero je

$$d_{\mathbb{H}}(u, w) > d_{\mathbb{H}}(u, v) + d_{\mathbb{H}}(v, w).$$

Označimo

$$\delta = d_{\mathbb{H}}(u, w) - (d_{\mathbb{H}}(u, v) + d_{\mathbb{H}}(v, w)).$$

Ker je $d_{\mathbb{H}}(u,v) = \inf\{\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) \,|\, f \in \Gamma[u,v]\}$, po definiciji infimuma za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $f : [a,b] \to \mathbb{H}$ iz $\Gamma[u,v]$, tako da je

$$\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) - d_{\mathbb{H}}(u,v) < \varepsilon.$$

Podobno, za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $g : [b,c] \to \mathbb{H}$ iz $\Gamma[v,w]$, tako da je

$$\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g) - d_{\mathbb{H}}(v,w) < \varepsilon.$$

Na tem mestu spomnimo, da domeni poti f in g lahko izberemo tako, kot smo jih, saj poljubno pot lahko reparametriziramo s surjektivno zvezno in zvezno odvedljivo funkcijo tako, da ima želeno domeno.

V zadnjih dveh enačbah zdaj izberimo za $\varepsilon = \frac{1}{2}\delta$. Naj bo $h : [a,c] \to \mathbb{H}$ iz $\Gamma[u,w]$ sklopitev poti f in g, torej

$$h(t) = \begin{cases} f(t); & t \in [a,b] \\ g(t); & t \in (b,c] \end{cases}.$$

Potem imamo

$$\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(h) = \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) + \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g) < d_{\mathbb{H}}(u,v) + d_{\mathbb{H}}(v,w) + \delta.$$

Ker mora po definiciji $d_{\mathbb{H}}(u,w)$ biti $d_{\mathbb{H}}(u,w) \leq \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(h)$, je

$$d_{\mathbb{H}}(u,w) < d_{\mathbb{H}}(u,v) + d_{\mathbb{H}}(v,w) + \delta,$$

kar pa je v nasprotju s konstrukcijo δ.

Sledi dokaz druge točke izreka. Po trditvi 3.30 obstaja $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, ki preslika hiperbolično premico skozi u in v v pozitivno imaginarno os ℓ_0. Torej je $\gamma(u) = \mu i$ in $\gamma(v) = \lambda i$ za neka $\mu, \lambda > 0$. Predpostavimo, da je $\lambda > \mu$ (sicer zamenjamo γ s $K \circ \gamma$, kjer je $K(z) = \frac{-1}{z}$, tako da je potem $\lambda > \mu$). Naj bo $\ell_{[u,v]}$ odsek hiperbolične premice, ki povezuje točki u in v in naj bo $\ell_{[\mu i, \lambda i]}$ odsek hiperbolične premice, ki povezuje točki μi in λi. Vemo torej, da γ preslika $\ell_{[u,v]}$ difeomorfno[1] v $\ell_{[\mu i, \lambda i]}$. Imejmo pot $f_0(t) = ti$, $t \in [\mu, \lambda]$, katere slika je $\ell_{[\mu i, \lambda i]}$. Najprej bomo dokazali, da ima f_0 najmanjšo hiperbolično dolžino med vsemi potmi v $\Gamma[\mu i, \lambda i]$.

Naj bo $g(t) = x(t) + y(t)i$, $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, $y : [a,b] \to (0,\infty)$, poljubna pot iz $\Gamma[\mu i, \lambda i]$. Najprej opazimo, da za pot $g_y(t) \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$, definirano kot $g_y(t) = \text{Im}(g(t))i = y(t)i$, velja

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g_y) &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(g_y(t))} \, |g_y'(t)| \, dt = \\ &= \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(y'(t))^2} \, dt \leq \\ &\leq \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt = \\ &= \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(g(t))} \, |g'(t)| \, dt = \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g). \end{aligned}$$

Slika poti $g_y(t)$ je odsek hiperbolične premice, ki povezuje točki αi in βi, kjer sta $\alpha \leq \mu$ in $\beta \geq \lambda$. Ta odsek lahko parametriziramo tudi s potjo $f_1(t) = ti$, $t \in [\alpha, \beta]$. Ker je $g_y = f_1 \circ (f_1^{-1} \circ g_y)$ reparametrizacija poti f_1 s surjektivno, zvezno in zvezno odvedljivo funkcijo $(f_1^{-1} \circ g_y) : [a,b] \to [\alpha, \beta]$, je po trditvi 4.2 $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f_1) \leq \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g_y)$.

[1]Difeomorfno pomeni diferenciabilno z diferenciabilnim inverzom.

S pomočjo $\mathrm{Im}(f_0(t)) = \mathrm{Im}(f_1(t)) = t$ in $f_0'(t) = f_1'(t) = 1$ lahko izračunamo

$$\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f_0) = \int_{\mu}^{\lambda} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \quad \text{in} \quad \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f_1) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

in ker je $\ln(\lambda/\mu) \le \ln(\beta/\alpha)$, je $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f_0) \le \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f_1)$. Iz vseh neenačb, ki smo jih dokazali do zdaj, lahko sklenemo verigo neenakosti

$$\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f_0) \le \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f_1) \le \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g_y) \le \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g).$$

Ker je bila pot g izbrana poljubno, smo dokazali, da je $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f_0) \le \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g)$ za vsak $g \in \Gamma[\mu i, \lambda i]$.

Pot $\gamma^{-1} \circ f_0$ je injektivna parametrizacija odseka $\ell_{[u,v]}$ in je po drugi točki trditve 4.11 tudi tista, v kateri je dosežen infimum množice $\{\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) \,|\, f \in \Gamma[u,v]\}$, saj smo ravnokar dokazali, da je v f_0 dosežen infimum množice $\{\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g) \,|\, g \in \Gamma[\gamma(u), \gamma(v)]\}$. S tem je dokazana druga točka trditve.

Če $u \ne v$, potem iz druge točke trditve sedaj vemo, da obstaja pot, ki udejani razdaljo med točkama u in v, in ta pot ni konstantna, zato je $d_{\mathbb{H}}(u,v) > 0$. S tem je dokončno dokazana tudi prva točka izreka. □

Sedaj, ko vemo, katere poti udejanjajo hiperbolično razdaljo med točkami v $\mathbb{H}$, lahko izpeljemo formulo za hiperbolično razdaljo. Naj bo $w_1, w_2 \in \mathbb{H}$. Za $k \in \{1,2\}$ označimo $x_k = \mathrm{Re}(w_k)$ in $y_k = \mathrm{Im}(w_k)$.

Ločili bomo dva glavna primera glede na to, kateri tip hiperbolične premice povezuje točki w_1 in w_2.

(1) $x_1 = x_2 =: x$. V tem primeru w_1 in w_2 povezuje odsek hiperbolične premice tipa I. Odsek lahko parametriziramo z injektivno potjo $f(t) = x + ti$, $t \in [\min\{y_1, y_2\}, \max\{y_1, y_2\}]$. Najprej izračunamo $\mathrm{Im}(f(t)) = t$ in $|f'(t)| = 1$ ter vstavimo v enačbo hiperbolične dolžine iz definicije 4.8.

(a) $y_2 \ge y_1$.

$$d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{\mathrm{Im}(f(t))} |f'(t)| \, dt = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dt}{t} = \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

(b) $y_1 > y_2$. Na enak način kot v prejšnjem primeru, le da zamenjamo integracijski meji, dobimo

$$d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = \ln \frac{y_1}{y_2} = -\ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Oba primera lahko zajamemo v enačbi

$$d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|. \tag{21}$$

(2) $x_1 \ne x_2$. V tem primeru w_1 in w_2 povezuje odsek hiperbolične premice tipa II. Označimo z $r > 0$ polmer in s $c \in \mathbb{R}$ središče evklidske krožnice, v kateri je vsebovan ta odsek hiperbolične premice. Označimo za $k \in \{1,2\}$ še $\varphi_k = \arg(w_k - c)$. Odsek lahko parametriziramo z injektivno potjo $f(t) = c + re^{it}$, $t \in [\min\{\varphi_1, \varphi_2\}, \max\{\varphi_1, \varphi_2\}]$. Izračunamo najprej $\mathrm{Im}(f(t)) = r \sin t$ in $|f'(t)| = |rie^{it}| = r$ ter vstavimo v enačbo za hiperbolično dolžino.

(a) $\varphi_2 > \varphi_1$ ($\Leftrightarrow x_2 < x_1$)

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(f) &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\mathrm{Im}(f(t))} |f'(t)|\, dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin t}\, dt = \\ &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}\, dt = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\tan \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2\cos^2 \frac{t}{2}}\, dt \end{aligned}$$

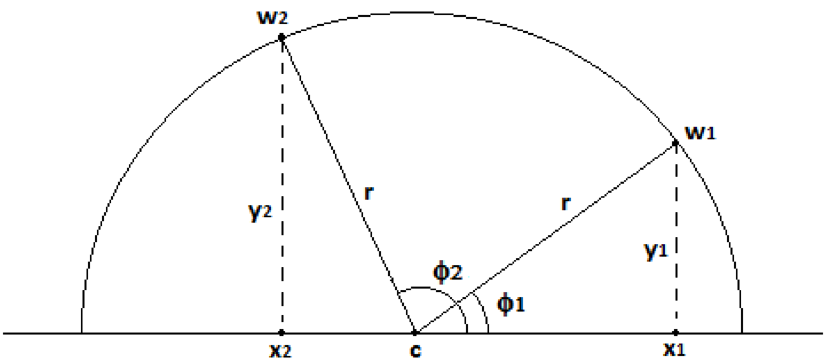
Na tem mestu uvedemo novo spremenljivko

$$u = \tan \frac{t}{2} \quad \text{in potem je ravno} \quad du = \frac{1}{2\cos^2 \frac{t}{2}}\, dt.$$

Nadaljujemo račun:

$$d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = \int_{\tan \frac{\varphi_1}{2}}^{\tan \frac{\varphi_2}{2}} \frac{du}{u} = \ln \left| \frac{\tan \frac{\varphi_2}{2}}{\tan \frac{\varphi_1}{2}} \right|.$$

Ker je $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$, je $0 < \frac{\varphi_1}{2} < \frac{\varphi_2}{2} < \frac{\pi}{2}$. Na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ je tangens pozitivna in strogo naraščajoča funkcija, zato je $\tan \frac{\varphi_2}{2} > \tan \frac{\varphi_1}{2} > 0$ in argument v logaritmu je vedno večji od 1. Razdalja je tako pozitivna. Vemo, da je (slika 4)



Slika 4. Trigonometrija točk w_1 in w_2.

$$\sin \varphi_k = \frac{y_k}{r} \quad \text{in} \quad \cos \varphi_k = \frac{x_k - c}{r},$$

zato je

$$\tan \frac{\varphi_k}{2} = \frac{1 - \cos \varphi_k}{\sin \varphi_k} = \frac{r - x_k + c}{y_k}$$

in končno imamo

$$d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = \ln \left(\frac{(r - x_2 + c) y_1}{y_2 (r - x_1 + c)} \right).$$

(b) $\varphi_1 > \varphi_2$ ($\Leftrightarrow x_1 < x_2$). Na enak način kot v prejšnjem primeru, le da zamenjamo integracijski meji, dobimo

$$d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = \ln \left(\frac{(r - x_1 + c) y_2}{y_1 (r - x_2 + c)} \right) = -\ln \left(\frac{(r - x_2 + c) y_1}{y_2 (r - x_1 + c)} \right).$$

Oba primera lahko zajamemo v enačbi

$$d_{\mathbb{H}}(w_1, w_2) = \left| \ln \left(\frac{(r - x_2 + c) y_1}{y_2 (r - x_1 + c)} \right) \right|. \tag{22}$$

Dobili smo sicer enačbo za hiperbolično razdaljo, v kateri pa še vedno niso vse količine izražene le z realnim in imaginarnim delom števil w_1 in w_2. Takoj sicer vemo, da je

$$r = \sqrt{(x_k - c)^2 + y_k^2} \tag{23}$$

za obe vrednosti indeksa k. Izrazimo še c. Simetralo evklidske daljice v $\mathbb{C}$, ki povezuje točki w_1 in w_2, opisuje množica točk

$$L = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |w_1 - z| = |w_2 - z|\}.$$

Presečišče evklidske premice L z realno osjo pa je ravno c. Iščemo torej realno rešitev enačbe $|w_1 - c| = |w_2 - c|$.

$$\begin{aligned} (w_1 - c)\overline{(w_1 - c)} &= (w_2 - c)\overline{(w_2 - c)} \\ w_1\overline{w_1} - w_2\overline{w_2} &= c(w_1 + \overline{w_1} - w_2 - \overline{w_2}) \\ c &= \frac{x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2}{2(x_1 - x_2)} \qquad (24) \end{aligned}$$

Dobljeno enačbo (24) za c lahko tako najprej vstavimo v enačbo (23) za r in potem obe skupaj še v enačbo (22) za hiperbolično razdaljo. Končni rezultat se ne poenostavi, ravno nasprotno, zato ga eksplicitno ne bomo navedli.

Če je ℓ hiperbolična premica in je A krožnica v $\overline{\mathbb{C}}$, v kateri je vsebovana ℓ, potem sta v preseku $A \cap \overline{R}$ natanko dve točki. Imenujemo ju *robni točki v neskončnosti* premice ℓ. Če je ℓ tipa I, potem je ena od teh točk ∞, sicer pa obe ležita na $\mathbb{R}$.

5. Izometrije v $\mathbb{H}$

Izometrija v $\mathbb{H}$ je vsak homeomorfizem $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, ki ohranja razdaljo med točkami, tj. $d_{\mathbb{H}}(f(u), f(v)) = d_{\mathbb{H}}(u, v)$ za vsak par $u, v \in \mathbb{H}$. Hitro se lahko prepričamo, da je množica vseh izometrij v $\mathbb{H}$ grupa za kompozitum. Naš cilj v tem poglavju bo dokazati, da je grupa vseh izometrij v $\mathbb{H}$ ravno Möb($\mathbb{H}$). Še prej pa potrebujemo nekaj pomožnih trditev.

Trditev 5.1. *Naj bosta p in q poljubni hiperbolični premici. Naj bosta u_1 in u_2 poljubni točki na premici p ter naj bosta v_1 in v_2 poljubni točki na premici q. Potem tak $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$), ki preslika premico p v premico q tako, da je hkrati tudi $\gamma(u_1) = v_1$ in $\gamma(u_2) = v_2$, obstaja natanko tedaj, ko je $d_{\mathbb{H}}(u_1, u_2) = d_{\mathbb{H}}(v_1, v_2)$.*

Dokaz. ($\Leftarrow$) Po trditvi 3.30 obstaja $m_1 \in$ Möb($\mathbb{H}$), ki preslika p v pozitivno imaginarno os ℓ_0. Označimo $m_1(u_1) = \alpha i$, $\alpha > 0$. Naj bo $m_2 \in$ Möb($\mathbb{H}$) definirana kot $m_2(z) = \frac{1}{\alpha} z$. Preslikava $m := m_2 \circ m_1$ slika premico p v ℓ_0 in točko u_1 v i. Označimo $m(u_2) = \beta i$. Predpostavimo lahko, da je $\beta \geq 1$, sicer zamenjamo m s $K \circ m$, ki potem tudi slika p v ℓ_0 in je $\beta \geq 1$. Po trditvi 4.11 velja tudi $d_{\mathbb{H}}(u_1, u_2) = d_{\mathbb{H}}(i, \beta i)$.

Ker je po predpostavki $d_{\mathbb{H}}(v_1, v_2) = d_{\mathbb{H}}(u_1, u_2)$, lahko na enak način dokažemo, da obstaja tudi $n \in$ Möb($\mathbb{H}$), ki preslika premico q v ℓ_0, točko v_1 v i in točko v_2 v βi. Iskana preslikava je potem $n^{-1} \circ m$.

($\Rightarrow$) Če $\gamma \in$ Möb($\mathbb{H}$) preslika premico p v q in par točk (u_1, u_2) v (v_1, v_2), potem je po trditvi 4.11 $d_{\mathbb{H}}(u_1, u_2) = d_{\mathbb{H}}(v_1, v_2)$. $\square$

Od tu naprej bomo uporabljali oznako $\ell_{[u,v]}$ za odsek hiperbolične premice, ki povezuje točki $u, v \in \mathbb{H}$.

Trditev 5.2. *Točka $w \in \mathbb{H}$ leži na segmentu hiperbolične premice, ki povezuje točki $u, v \in \mathbb{H}$, natanko tedaj, ko velja*

$$d_{\mathbb{H}}(u, w) + d_{\mathbb{H}}(w, v) = d_{\mathbb{H}}(u, v).$$

Dokaz. Po trditvi 5.1 obstaja $m \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, ki preslika $\ell_{[u,v]}$ v $\ell_{[i,\lambda i]}$, kjer je $\lambda \geq 1$ in $d_{\mathbb{H}}(u, v) = d_{\mathbb{H}}(i, \lambda i)$. V dokazu bomo ves čas uporabljali dejstvo, da m ohranja hiperbolično razdaljo (po trditvi 4.11). V nadaljevanju označimo še $\text{Re}(m(w)) = a$ in $\text{Im}(m(w)) = b$.

Takoj lahko izračunamo

$$d_{\mathbb{H}}(u, v) = d_{\mathbb{H}}(i, \lambda i) = \ln \lambda \quad \text{in}$$

$$d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \lambda i) = |\ln b| + |\ln \lambda - \ln b|.$$

Najprej obravnavajmo primer, ko w leži na hiperbolični premici ℓ, ki gre skozi u in v. Potem $m(w)$ leži na pozitivni imaginarni osi, torej je $a = 0$ in $d_{\mathbb{H}}(u, w) = d_{\mathbb{H}}(i, bi)$ ter $d_{\mathbb{H}}(w, v) = d_{\mathbb{H}}(bi, \lambda i)$. Znotraj tega primera imamo tri možnosti. Če w leži na $\ell_{[u,v]}$, potem je $1 \leq b \leq \lambda$ in obratno. V tem primeru je $\ln b \geq 0$ in $\ln \lambda \geq \ln b$, zato je

$$d_{\mathbb{H}}(u, w) + d_{\mathbb{H}}(w, v) = \ln b + \ln \lambda - \ln b = \ln \lambda = d_{\mathbb{H}}(u, v).$$

Če je $0 < b < 1$, potem je $\ln b < 0$ in $\ln \lambda > \ln b$, zato je

$$d_{\mathbb{H}}(u, w) + d_{\mathbb{H}}(w, v) = -\ln b + \ln \lambda - \ln b = \ln \lambda - 2 \ln b > \ln \lambda = d_{\mathbb{H}}(u, v).$$

Če je $b > \lambda$, potem je $\ln b > 0$ in $\ln \lambda < \ln b$, zato je

$$d_{\mathbb{H}}(u, w) + d_{\mathbb{H}}(w, v) = \ln b - (\ln \lambda - \ln b) = 2 \ln b - \ln \lambda > \ln \lambda = d_{\mathbb{H}}(u, v).$$

Preostane nam primer, ko w ne leži na ℓ. V tem primeru $a \neq 0$. Če je g pot, ki udejani razdaljo med točkama i in $a + bi$ in je potem $\tilde{g}(t) := (\text{Im}(g)(t))i$ pot, ki udejanja razdaljo med točkama i in bi, potem smo že znotraj dokaza izreka 4.12 pokazali, da je $\mathcal{L}_{\mathbb{H}}(g) > \mathcal{L}_{\mathbb{H}}(\tilde{g})$ (s strogim neenačajem, saj $a \neq 0$), torej je

$$d_{\mathbb{H}}(u, w) = d_{\mathbb{H}}(i, a + bi) > d_{\mathbb{H}}(i, bi).$$

Na enak način lahko dokažemo tudi

$$d_{\mathbb{H}}(w, v) = d_{\mathbb{H}}(a + bi, \lambda i) > d_{\mathbb{H}}(bi, \lambda i).$$

Po trikotniški neenakosti imamo

$$d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \lambda i) \geq d_{\mathbb{H}}(i, \lambda i),$$

kar smo mimogrede posebej za ta primer dokazali tudi v prejšnjem odstavku. Vse tri neenačbe uporabimo v naslednji neenačbi:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(u, w) + d_{\mathbb{H}}(w, v) &= d_{\mathbb{H}}(i, a + bi) + d_{\mathbb{H}}(a + bi, \lambda i) > \\ &> d_{\mathbb{H}}(i, bi) + d_{\mathbb{H}}(bi, \lambda i) \geq d_{\mathbb{H}}(i, \lambda i) = d_{\mathbb{H}}(u, v). \end{aligned}$$

Torej v tem primeru je $d_{\mathbb{H}}(u, w) + d_{\mathbb{H}}(w, v) > d_{\mathbb{H}}(u, v)$.

Videli smo, da enačba

$$d_{\mathbb{H}}(u, w) + d_{\mathbb{H}}(w, v) = d_{\mathbb{H}}(u, v)$$

velja natanko tedaj, ko w leži na odseku $\ell_{[u,v]}$. □

Posledica 5.3. *Če je f izometrija v $\mathbb{H}$, potem f slika hiperbolične premice v hiperbolične premice.*

Dokaz. Naj bo ℓ poljubna hiperbolična premica in naj bosta u in v različni točki na ℓ. Naj bo w točka na odseku $\ell_{[u,v]}$. Po trditvi 5.2 velja

$$d_{\mathbb{H}}(u,w) + d_{\mathbb{H}}(w,v) = d_{\mathbb{H}}(u,v).$$

Ker je f izometrija, velja $d_{\mathbb{H}}(u,w) = d_{\mathbb{H}}(f(u),f(w))$, $d_{\mathbb{H}}(w,v) = d_{\mathbb{H}}(f(w),f(v))$ in $d_{\mathbb{H}}(u,v) = d_{\mathbb{H}}(f(u),f(v))$, zato velja

$$d_{\mathbb{H}}(f(u),f(w)) + d_{\mathbb{H}}(f(w),f(v)) = d_{\mathbb{H}}(f(u),f(v)),$$

torej $f(w)$ leži na $\ell_{[f(u),f(v)]}$. Ker to velja za vse $w \in \ell_{[u,v]}$, je

$$f(\ell_{[u,v]}) = \ell_{[f(u),f(v)]},$$

torej odsek hiperbolične premice.

Naj bosta a in b robni točki v neskončnosti premice ℓ. Naj bo $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ zaporedje točk na ℓ, ki v smislu topologije τ^+ na $\overline{\mathbb{C}}$, predstavljene v razdelku 3.1, konvergira k a in naj bo $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ zaporedje točk na ℓ, ki konvergira k b. Ker lahko zapišemo

$$\ell = \bigcup_{k=1}^{\infty} \ell_{[u_k,v_k]},$$

je

$$f(\ell) = f\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \ell_{[u_k,v_k]}\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(\ell_{[u_k,v_k]}) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \ell_{[f(u_k),f(v_k)]},$$

kar je hiperbolična premica, saj gre za unijo odsekov iste hiperbolične premice in $\{f(u_k)\}_{k=1}^{\infty}$ ter $\{f(v_k)\}_{k=1}^{\infty}$ konvergirata k točkama v $\overline{\mathbb{R}}$. □

Lema 5.4. *Naj bo $\beta > \alpha > 0$. Vsaka točka λi na pozitivni imaginarni osi ℓ_0 je natanko določena z razdaljama $d_{\mathbb{H}}(\alpha i, \lambda i)$ in $d_{\mathbb{H}}(\beta i, \lambda i)$.*

Dokaz. Označimo

$$d_{\mathbb{H}}(\beta i, \lambda i) = c \quad \text{in} \quad d_{\mathbb{H}}(\alpha i, \lambda i) = c'. \tag{25}$$

Definirajmo funkcijo $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ s predpisom $f(\xi) = \ln(\beta) - \ln(\xi)$. Funkcija $|f|$ meri hiperbolično razdaljo od točke βi do točke ξi. Funkcija f je strogo padajoča in surjektivna, zato, če $c \neq 0$, obstajata dve vrednosti na $(0,\infty)$, ki rešita enačbo $|f(\xi)| = c$, in to sta

$$\xi_1 = \beta e^{-c} \quad \text{ter} \quad \xi_2 = \beta e^{c}.$$

Točki $\xi_1 i, \xi_2 i$ na ℓ_0 sta enako oddaljeni od βi, geometrično pa $\xi_1 i$ leži pod βi, $\xi_2 i$ pa nad βi. Če je $c = 0$, potem je $\xi_1 i = \xi_2 i = \beta i$.

Na enak način lahko dokažemo, da, če je $c' \neq 0$, obstajata točki

$$\eta_1 i = \alpha e^{-c'} i \quad \text{in} \quad \eta_2 i = \alpha e^{c'} i$$

na ℓ_0, za kateri je razdalja od αi enaka c', pri tem pa $\eta_1 i$ leži pod αi, $\eta_2 i$ pa nad αi. Če je $c' = 0$, potem je $\eta_1 i = \eta_2 i = \alpha i$.

Če želimo, da bi obstajal še $\zeta > 0$, $\zeta \neq \lambda$, ki bi prav tako rešil enačbi (25), potem bi nujno moralo veljati $\xi_1 = \eta_1$ in $\xi_2 = \eta_2$. Toda potem bi po eni strani veljalo

$$c = d_{\mathbb{H}}(\beta i, \xi_2 i) = d_{\mathbb{H}}(\beta i, \eta_2 i) < d_{\mathbb{H}}(\alpha i, \eta_2 i) = c',$$

po drugi strani pa

$$c' = d_{\mathbb{H}}(\alpha i, \eta_1 i) = d_{\mathbb{H}}(\alpha i, \xi_1 i) < d_{\mathbb{H}}(\beta i, \xi_1 i) = c,$$

kar je protislovje. Enačbi (25) sta tako lahko izpolnjeni zgolj in samo za λ. □

Trditev 5.5. *Naj bo $\ell_{[u,v]}$ odsek hiperbolične premice. Množica točk*

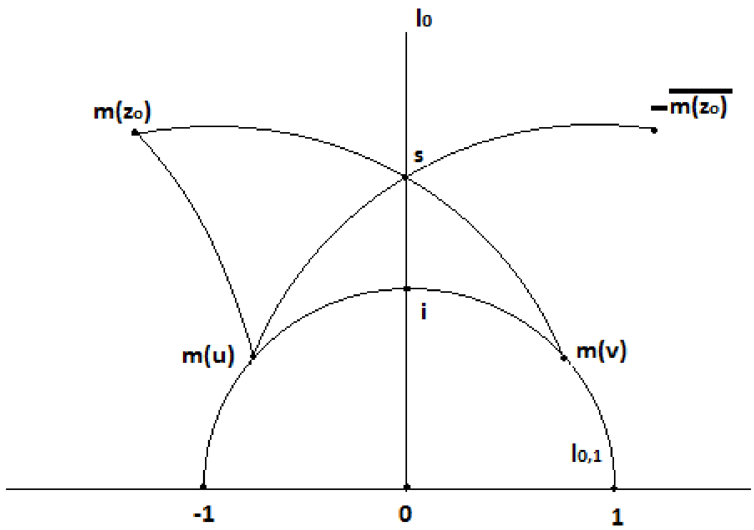
$$L = \{z \in \mathbb{H} \,|\, d_{\mathbb{H}}(u,z) = d_{\mathbb{H}}(v,z)\}$$

je hiperbolična premica, ki je pravokotna na odsek $\ell_{[u,v]}$ in ga v smislu hiperbolične razdalje razpolavlja. Množici L pravimo simetrala odseka $\ell_{[u,v]}$.

Dokaz. Naj bo $z_0 \in \mathbb{H}$ poljubna točka in naj bo w točka na odseku $\ell_{[u,v]}$, tako da velja $d_{\mathbb{H}}(u,w) = d_{\mathbb{H}}(w,v)$. Problem bomo prestavili v okolje, kjer bo dokazovanje lažje. Označimo $\ell_{0,1} = \{z \in \mathbb{H} \,|\, |z| = 1\}$ in $\ell_0 = \{z \in \mathbb{H} \,|\, \mathrm{Re}(z) = 0\}$. Po trditvi 5.1 obstaja $m \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$, tako da je $\ell_{[m(u),m(v)]} \subset \ell_{0,1}$ in $d_{\mathbb{H}}(u,v) = d_{\mathbb{H}}(m(u),m(v))$, hkrati pa sta si točki $m(u)$ in $m(v)$ zrcalni glede na imaginarno os, torej velja $m(u) = -\overline{m(v)}$. Hitro se lahko prepričamo, da v tem primeru velja $m(w) = i$, saj preslikava $B(z) = -\overline{z} \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ slika $\ell_{[m(u),i]}$ v $\ell_{[m(v),i]}$ in ohranja hiperbolično razdaljo, zato je $d_{\mathbb{H}}(m(u),i) = d_{\mathbb{H}}(m(v),i)$.

Če je hiperbolična premica skozi w in z_0 pravokotna na hiperbolično premico skozi u in v, potem je $\ell_{[i,m(z_0)]} \subset \ell_0$, saj m ohranja kote in ℓ_0 je edina hiperbolična premica, pravokotna na $\ell_{0,1}$ v točki $i = m(w)$. Že prej omenjena preslikava $B(z) \in \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$ preslika odsek $\ell_{[m(u),m(z_0)]}$ v odsek $\ell_{[m(v),m(z_0)]}$, zatorej velja $d_{\mathbb{H}}(m(u),m(z_0)) = d_{\mathbb{H}}(m(v),m(z_0))$ in posledično $d_{\mathbb{H}}(u,z_0) = d_{\mathbb{H}}(v,z_0)$.

Če hiperbolična premica skozi w in z_0 ni pravokotna na hiperbolično premico skozi u in v, potem $m(z_0) \notin \ell_0$. Dokazati želimo, da v tem primeru $d_{\mathbb{H}}(u,z_0) \neq d_{\mathbb{H}}(v,z_0)$, kar je ekvivalentno $d_{\mathbb{H}}(m(u),m(z_0)) \neq d_{\mathbb{H}}(m(v),m(z_0))$. Predpostavimo, da temu ni tako, torej, da velja $d_{\mathbb{H}}(m(u),m(z_0)) = d_{\mathbb{H}}(m(v),m(z_0))$. Brez škode za splošno lahko predpostavimo, da je $\mathrm{Re}(m(z_0)) < 0$ sicer v nadaljevanju dokaza zamenjamo vlogi točk $m(u)$ in $m(v)$. Označimo točko $s := \ell_0 \cap \ell_{[m(v),m(z_0)]}$. Ker je $B(\ell_{[m(v),s]}) = \ell_{[m(u),s]}$ in $B(\ell_{[s,m(z_0)]}) = \ell_{[s,-\overline{m(z_0)}]}$ (slika 5), je



Slika 5. Ponazoritev slike iz dokaza trditve 5.5

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{H}}(m(u),m(z_0)) &= d_{\mathbb{H}}(m(v),m(z_0)) = d_{\mathbb{H}}(m(v),s) + d_{\mathbb{H}}(s,m(z_0)) = \\ &= d_{\mathbb{H}}(m(u),s) + d_{\mathbb{H}}(s,-\overline{m(z_0)}) = \\ &= d_{\mathbb{H}}(m(u),s) + d_{\mathbb{H}}(s,m(z_0)). \end{aligned}$$

To pa po trditvi 5.2 pomeni, da točka s leži na segmentu $\ell_{[m(u),m(z_0)]}$, kar je protislovje, saj v skladu z našimi predpostavkami segment $\ell_{[m(u),m(z_0)]}$ ne more imeti presečišča z ℓ_0.

S tem je dokazana trditev, da enačbo $d_{\mathbb{H}}(u,z) = d_{\mathbb{H}}(v,z)$ rešijo natanko točke iz simetrale odseka $\ell_{[u,v]}$. $\square$

Če je f izometrija v $\mathbb{H}$, potem je po posledici 5.3 $f(\ell_{[u,v]}) = \ell_{[f(u),f(v)]}$. Ker f ohranja razdaljo, velja tudi $d_{\mathbb{H}}(f(u), f(z)) = d_{\mathbb{H}}(f(v), f(z))$ za vsak $z \in L$, torej je $f(L)$ simetrala odseka $\ell_{[f(u),f(v)]}$. To dejstvo bomo uporabili v dokazu naslednjega pomembnega izreka.

Izrek 5.6. *Grupa izometrij v $\mathbb{H}$ je enaka Möb($\mathbb{H}$).*

Dokaz. Iz trditve 4.11 vemo že, da so elementi Möb($\mathbb{H}$) izometrije. Naj bo f izometrija v $\mathbb{H}$. Če dokažemo, da je $f \in$ Möb($\mathbb{H}$), potem bo dokaz izreka zaključen.

Naj bosta u in v različni točki na pozitivni imaginarni osi ℓ_0. Po posledici 5.3 je $f(\ell_0)$ hiperbolična premica, zato obstaja $m \in$ Möb($\mathbb{H}$), tako da je $m(f(\ell_0)) = \ell_0$ in $m(f(u)) = u$ in $m(f(v)) = v$, saj je $d_{\mathbb{H}}(f(u), f(v)) = d_{\mathbb{H}}(u,v)$. Privzamemo lahko, da m ohranja *hiperbolični polravnini, določeni s premico* ℓ_0,

$$H_1 = \{z \in \mathbb{H} \,|\, \mathrm{Re}(z) < 0\} \quad \text{in} \quad H_2 = \{z \in \mathbb{H} \,|\, \mathrm{Re}(z) > 0\},$$

saj sicer lahko m zamenjamo z $B \circ m$, kjer je $B \in$ Möb($\mathbb{H}$), $B(z) = -\overline{z}$, tako da potem ohranja H_1 in H_2.

Naj bo w poljubna točka na ℓ_0. Ker je w po lemi 5.4 natanko določena z razdaljema $d_{\mathbb{H}}(u,w)$ in $d_{\mathbb{H}}(v,w)$ in ker je $m \circ f(\ell_0) = \ell_0$ ter $d_{\mathbb{H}}(m \circ f(u), m \circ f(w)) = d_{\mathbb{H}}(u,w)$ in $d_{\mathbb{H}}(m \circ f(v), m \circ f(w)) = d_{\mathbb{H}}(v,w)$, je w negibna točka preslikave $m \circ f$. Ker je vsaka točka na ℓ_0 element kakega odseka premice ℓ_0, sledi, da so vse točke iz premice ℓ_0 negibne za preslikavo $m \circ f$.

Naj bo sedaj z poljubna točka iz $\mathbb{H}$, ki ne leži na ℓ_0. Naj bo H tista hiperbolična polravnina, določena s premico ℓ_0, v kateri leži z in naj bo L hiperbolična premica, ki gre skozi z in je pravokotna na ℓ_0. V tem primeru je L simetrala nekega odseka premice ℓ_0. Ker je $m \circ f$ izometrija, je po argumentu, danem v odstavku pred izrekom, $m(f(L)) = L$.

Naj bo w_0 presečišče L z ℓ_0. Ker je $d_{\mathbb{H}}(m(f(w_0)), m(f(z))) = d_{\mathbb{H}}(w_0, z)$ in ker $m(f(z))$ leži na $L \cap H$, je z negibna točka preslikave $m \circ f$. Tako smo dokazali, da so vse točke iz $\mathbb{H}$ negibne za $m \circ f$, torej je $m \circ f$ identična preslikava oziroma $f = m^{-1} \in$ Möb($\mathbb{H}$). $\square$

Literatura

[1] J. W. Anderson, *Hyperbolic geometry*, 2nd ed., Springer undergraduate mathematics series, Springer, London, 2005.

[2] J. W. Cannon, W. J. Floyd, R. Kenyon in W. R. Parry, *Hyperbolic geometry*, v: Flavors of geometry (ur. S. Levy), MSRI publications **31**, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, str. 59–64.

[3] J. Globevnik in M. Brojan, *Analiza II*, verzija 10. 8. 2010, [ogled 19. 7. 2011], dostopno na `http://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf`.

[4] R. S. Millman, *The upper half plane model for hyperbolic geometry*, Amer. Math. Monthly **87** (1980) 48—53.

[5] P. Pavešić, *Splošna topologija*, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva **43**, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2008.