UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Jakob Vidmar

λ-račun in kartezične zaprte kategorije

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2012

Kazalo

λ-račun in kartezične zaprte kategorije

Povzetek

Predstavil bom λ-račun, pomemben formalni sistem, ki se pojavlja v teoriji izračunljivosti, logiki in teoriji programskih jezikov. V delu definiram preproste tipe, λ-račun s preprostimi tipi in λ-teorije. Nadalje definiram nekaj kategorično teoretičnih dejstev in podam dokaze nekaterih izrekov o adjungiranih funktorjih. Pridobljeno mehanizacijo uporabim za definicijo t. i. zaprtih kartezičnih kategorij. Z njimi podam polno in zdravo semantiko λ-računa, kar tudi dokažem. Pregled snovi končam z dokazom o ekvivalenci med zaprtimi kartezičnimi kategorijami in λ-teorijami.

λ-Calculus and Cartesian Closed Categories

Abstract

I present λ-calculus, an important formal system that appears in the theory of computability, mathematical logic and theory of programming languages. In this thesis I give the definitions of simple types, simply typed λ-calculus and λ-theories. I continue with a review of some category theory definitions and theorems on adjoint functors. The knowledge so gained is used to define so called cartesian closed categories. In the last section I use such categories to define sound and complete semantics of λ-calculus. I conclude with a proof of equivalence between cartesian closed categories and λ-theories.

Math. Subj. Class. (2010): 03B40, 03G30, 18C10,

Ključne besede: λ-račun, preprosti tipi, zaprte kartezične kategorije, polnost in zdravje semantike

Keywords: λ-calculus, simple types, cartesian closed categories, soundness and completeness of semantics

1. Uvod

V tem delu diplomskega seminarja bom pisal o λ-računu. λ-račun je v resnici skupno ime za več formalnih sistemov, ki temeljijo na notaciji Alonza Churcha iz 30-ih let prejšnjega stoletja. Ti formalni sistemi so nekakšna abstraktna teorija funkcij kot (prepisovalnih) pravil, za razliko od tradicionalnega množično teoretičnega pogleda nanje kot grafe.

λ-račun se lahko v grobem razdeli na dve veliki veji:

- *tipiziran* λ-račun in
- *netipiziran* λ-račun.

V zgodovini je bil pomemben predvsem netipiziran λ-račun, s katerim sta Church in Turing podala sistem, ki ji dovolj močen, da izrazi vse izračunljive funkcije. Dandanes za namene teorije izračunljivosti raje uporabljamo druge koncepte, kot na primer Turingove strojčke. V študiju λ-računa tako raje operiramo s tipizirano verzijo, saj ima ta teorija praktične aplikacije v moderni teoriji funkcijskih programskih jezikov ter matematični logiki (gl. *korespondenca Curry-Howard* [9]).

V tem delu se bomo ukvarjali predvsem z λ-računom s preprostimi tipi. Oblikovali bomo pojem λ-teorije in videli, da obstaja povezava med λ-teorijami in posebno vrsto kategorij.

Na tem mestu bi si rad vzel še nekaj besed prostora za zahvalo mentorju. Mentorju prof. Bauerju se zahvaljujem za predstavitev naslova, ki me je dobesedno popeljal po svetu, za nasvete in za potrpljenje pri spopadu s francosko birokracijo. Hvala.

2. λ-račun

Nad funkcijami imamo dve osnovni operaciji. Prva je aplikacija, ki funkciji f in argumentu a priredi element fa. Druga osnovna operacija je abstrakcija: naj bo t izraz, v katerem se lahko (ni pa nujno) pojavi x, tedaj lahko izrazu t priredimo abstrakcijo (funkcijo) $x \mapsto t$. V λ-računu je λ-abstrakcija točno to, le da uporabimo drugačno notacijo, $\lambda x.t$, ki bo za naše namene bolj uporabna.

V netipiziranem λ-računu ne ločimo med domeno in kodomeno, zato tudi kakršnih koli omejtev nad aplikacijo ni. Tako so izrazi kot na primer $\lambda x.(xx)$ dovoljeni. V tipiziranem λ-računu pa imamo pravila za sestavljanje izrazov, ki imajo vsak svoj tip. Funkciji f tipa $\sigma \to \tau$ lahko tako priredimo le argument tipa σ.

Opomba 2.1. V delu uporabljam notacijo:

$$\frac{\varphi \qquad \psi \qquad \tau}{\gamma}$$

Se pravi, pri danih φ, ψ in τ smemo sklepati γ. Če se nad črto ne pojavlja nobena izjava, lahko vedno sklepamo to, kar se pojavi pod črto.

2.1. **Preprosti tipi.**

> Types are there to stop you from doing bad things.
>
> pripisano Churchu

Za začetek si poglejmo preproste tipe.

Definicija 2.2. Pri dani množici U induktivno zgradimo množico Π_U *preprostih tipov* na naslednji način:

(1) 1 je preprost tip:

$$\frac{}{1 \in \Pi_U}$$

(2) Bazični tipi (elementi množice U) so preprosti tipi:

$$\frac{A \in U}{A \in \Pi_U}$$

(3) Funkcijski tip je preprosti tip:

$$\frac{A \in \Pi_U \qquad B \in \Pi_U}{A \to B \in \Pi_U}$$

Puščica je desno asociativna, torej $A \to B \to C = A \to (B \to C)$.

(4) Kartezični produkt dveh tipov je preprosti tip:

$$\frac{A \in \Pi_U \qquad B \in \Pi_U}{A \times B \in \Pi_U}$$

Množico Π_U pišemo brez indeksa, ko je bazična množica poznana.

To, da ima izraz t tip σ, zapišemo $t : \sigma$. Za začetek si lahko to predstavljamo kot to, da je t član množice σ, vendar bomo s tem pogledom naleteli na težave, ko bomo v razdelku 2.3 obravnavali refleksivni tip.

2.2. **$\lambda_{\beta\eta}$-račun.** Kot sem že omenil, poznamo različne vrste λ-računa. Posvetil se bom predvsem vrsti, ki jo imenujemo *$\lambda_{\beta\eta}$-račun s preprostimi tipi in surjektivnim operatorjem parčkanja.* Razloge, zakaj se tako imenuje, bomo videli tekom razdelka.

Definicija 2.3. Pri dani množici U bazičnih tipov, množici C konstant in števni množici V spremenljivk induktivno zgradimo množico Λ_{Π_U} s spodaj naštetimi pravili. To množico razglasimo za množico vseh *λ-izrazov.*

(1) Vsaka spremenljivka, konstanta iz množice C in enota so λ-izrazi:

$$\frac{x \in V}{x \in \Lambda_\Pi} \qquad \frac{c \in C}{c \in \Lambda_\Pi} \qquad \frac{}{* \in \Lambda_\Pi}$$

(2) Za vsaka λ-izraza t, u je njun par λ-izraz. Projekciji π_1 in π_2 nad λ-izrazom t sta λ-izraza:

$$\frac{t \in \Lambda_\Pi \qquad u \in \Lambda_\Pi}{\langle t, u \rangle \in \Lambda_\Pi} \qquad \frac{t \in \Lambda_\Pi}{(\pi_1 t) \in \Lambda_\Pi} \qquad \frac{t \in \Lambda_\Pi}{(\pi_2 t) \in \Lambda_\Pi}$$

(3) Za vsako spremenljivko x, tip σ in λ-izraz t je abstrakcija λ-izraz. Spremenljivki x v abstrakciji pravimo, da je *vezana.* Za vsak par λ-izrazov t, u je aplikacija λ-izraz:

$$\frac{x \in V \qquad \sigma \in \Pi_U \qquad t \in \Lambda_\Pi}{(\lambda x : \sigma . t) \in \Lambda_\Pi} \qquad \frac{t \in \Lambda_\Pi \qquad u \in \Lambda_\Pi}{(tu) \in \Lambda_\Pi}$$

Ponavadi pri zapisu izpustimo zunanje oklepaje. V nadaljevanju $\equiv$ označuje relacijo enakosti nad množico Λ_Π. Ko je očitno, nad katerimi tipi gradimo λ-izraze, indeks izpustimo.

Notacija 2.4. Za lažji zapis uvedemo naslednji bližnjici:

(1) Naj bo $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V^n$ in $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \Pi^n$. Tedaj pišemo:

$$\lambda \vec{x} : \vec{\sigma}.M \equiv \lambda x_1 : \sigma_1 \dots x_n : \sigma_n.M \equiv \lambda x_1 : \sigma_1.(\lambda x_2 : \sigma_2.(\dots(\lambda x_n : \sigma_n.M)\dots)) \ .$$

(2) Naj bo $\vec{N} = (N_1, \ldots, N_n) \in \Lambda^n$. Tedaj pišemo:

$$M\vec{N} \equiv MN_1 \ldots N_n \equiv (\ldots((MN_1)N_2)\ldots N_n) .$$

Definicija 2.5. $FV : \Lambda \to 2^V$ je funkcija, ki λ-izrazu priredi množico *prostih* spremenljivk. Množica $FV(M)$ je definirana rekurzivno:

$$\begin{aligned}
FV(x) &= \{x\} && \text{če je } x \text{ spremenljivka} \\
FV(c) &= \emptyset && \text{če } c \in C \text{ ali } c \equiv * \\
FV(\langle t, u\rangle) &= FV(t) \cup FV(u) \\
FV(\pi_1 t) &= FV(t) \\
FV(\pi_2 t) &= FV(t) \\
FV(\lambda x : \sigma.t) &= FV(t) \setminus \{x\} \\
FV(tu) &= FV(t) \cup FV(u)
\end{aligned}$$

Definicija 2.6. Naj bosta $t, u \in \Lambda$ in $x \in V$. *Zamenjavo* spremenljivke x z izrazom u v izrazu t označimo z $t[x := u]$ in je definirana na naslednji način:

$$\begin{aligned}
x[x := u] &= u \\
y[x := u] &= y && \text{če } x \neq y \\
\langle u', u''\rangle[x := u] &= \langle u'[x := u], u''[x := u]\rangle \\
(\pi_i u')[x := u] &= \pi_i(u'[x := u]) \\
(t'u')[x := u] &= (t'[x := u]u'[x := u]) \\
(\lambda y : \sigma.u')[x := u] &= (\lambda y : \sigma.u'[x := u]) && \text{če } x \neq y \text{ in } y \notin FV(u)
\end{aligned}$$

V vsakodnevni matematiki ne ločimo med funkcijama $y \mapsto y^2$ in $x \mapsto x^2$. Podobno bi radi enačili tudi λ-izraze, ki se razlikujejo le v vezani spremenljivki, v ta namen definiramo α-ekvivalenco. Najprej pa je potrebno definirati zamenjavo vezane spremenljivke.

Definicija 2.7. Naj bo $t \in \Lambda$ oblike $\lambda x : \sigma.u$, definirajmo *zamenjavo vezane spremenljivke* x s spremenljivko z, kjer to označimo z $t\{x := z\} = \lambda z : \sigma.u[x := z]$ (kjer predpostavimo, da se z ne pojavi v u).

Predpostavka, da se z ne pojavi v u, je ključna. Sicer bi v izrazu $\lambda x : \tau.(zx)$ z zamenjavo vezane spremenljivke x z z, dobil izraz $\lambda z : \tau.(zz)$ za katerega smo že rekli, da ni veljaven.

Definicija 2.8. Izraza t in t' sta si *α-ekvivalentna*, če lahko preidemo iz enega v drugega z zaporednimi zamenjavami vezanih spremenljivk.

Relacija je očitno ekvivalenčna. Konstruktorji λ-izrazov ohranjajo α-ekvivalenco. Oglejmo si nekaj primerov α-ekvivalentnih λ-izrazov.

Primer 2.9. Trivialen in tipičen primer α-ekvivalence:

$$\lambda x : \sigma.x \equiv_\alpha \lambda y : \sigma.y.$$

Primer 2.10. V tem izrazu nastopata dve abstrakciji in obe vežeta spremenljivko x. Oglejmo si nekaj korakov:

$$\begin{aligned}\lambda x:\sigma.x(\lambda x:\tau.x) &\equiv_\alpha \lambda y:\sigma.y(\lambda x:\tau.x)\\ &\equiv_\alpha \lambda y:\sigma.y(\lambda z:\tau.z)\\ &\equiv_\alpha \lambda x:\sigma.x(\lambda z:\tau.z)\end{aligned}$$

Od sedaj bomo razglasili za λ-izraze ekvivalenčne razrede $\Lambda/{\equiv_\alpha}$. Torej, *par abus de notation* pišemo $t \in \Lambda$, ko v resnici mislimo $[t]_\alpha \in \Lambda/{\equiv_\alpha}$.

Preslikavo FV nad $\Lambda/{\equiv_\alpha}$ definiramo s povsem enakim predpisom kot prej. Če smo povsem natančni, bi morali za preslikavo FV pokazati dobro definiranost in obstoj. Obstoj je očiten, funkcija naj vzame nekega predstavnika razreda (recimo minimalnega po leksikografski urejenosti) in mu po zgornjih enačbah priredi proste spremenljivke. Dobra definiranost je tudi očitna, α-ekvivalenca spreminja le vezane spremenljivke, torej ne vpliva na rezultat FV.

Definirali smo preproste tipe in λ-izraze. Sedaj nas zanima, kakšnega tipa so λ-izrazi. Kako vemo, kateri izraz se lahko pojavi kot argument k aplikaciji? Problem se pojavi pri prostih spremenljivkah, saj zanje ne vemo, kakšnega tipa so. V ta namen definiramo kontekste.

Definicija 2.11. Definirajmo $V_{fin} = \{X \in 2^V \mid |X| < \aleph_0\}$, množico vseh končnih podmnožic množice spremenljivk. Množica *kontekstov* je tedaj

$$\mathbf{C} := \bigcup_{X \in V_{fin}} \Pi^X .$$

Torej konteksti so preslikave iz končnih množic spremenljivk v tipe. Ponavadi jih predstavimo kot končna zaporedja parov spremenljivk in tipov, pri čemer se spremenljivke ne smejo ponavljati.

Včasih se zgodi, da bi si želeli povečati kontekst z novimi spremenljivkami. Za kontekst $\Gamma \in \mathbf{C}$, ki ga razširimo z $x : \tau$, pišemo $(x : \tau, \Gamma)$. To si predstavljamo kot novo funkcijo, ki x priredi τ, ostale spremenljivke pa slika tako kot Γ.

Definicija 2.12. Naj bo $\mu : C \to \Pi_U$ funkcija, ki preslika konstante v tipe. *Relacijo tipiziranosti* označimo tako: $\Gamma \vdash t : \sigma$, kjer je Γ kontekst, t λ-izraz in σ tip. Tipiziranost je torej trojiška relacija med konteksti, izrazi in tipi, induktivno definirana z naslednjimi pravili:

(1) Vsaka konstanta ima enolično določen tip, pri čemer za tip $*$ proglasimo 1:

$$\frac{c \in C}{\Gamma \vdash c : \mu(c)} \qquad\qquad \frac{}{\Gamma \vdash * : 1}$$

(2) Prostim spremenljivkam določa tip kontekst:

$$\frac{\Gamma(x) = \sigma}{\Gamma \vdash x : \sigma}$$

(3) Pravila za določanje tipov parov:

$$\frac{\Gamma \vdash t : \sigma \qquad \Gamma \vdash u : \tau}{\Gamma \vdash \langle t, u\rangle : \sigma \times \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi_1 t : \sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash t : \sigma \times \tau}{\Gamma \vdash \pi_2 t : \tau}$$

(4) Pravili za določanje tipov aplikacij in abstrakcij:

$$\frac{\Gamma \vdash t : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash u : \sigma}{\Gamma \vdash (tu) : \tau} \qquad\qquad \frac{(x : \sigma, \Gamma) \vdash t : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma . t) : \sigma \to \tau}$$

Oglejmo si primer izpeljave tipa. Vzemimo tip τ in kontekst Γ. Izraz $\lambda x : \tau . x$ ima tip $\tau \to \tau$, saj je x v kontekstu $(x : \tau, \Gamma)$ tipa τ. Formalna izpeljava izgleda tako:

$$\cfrac{\cfrac{(x : \tau, \Gamma)(x) = \tau}{(x : \tau, \Gamma) \vdash x : \tau}}{\Gamma \vdash (\lambda x : \tau . x) : \tau \to \tau}$$

Torej za vsak $\tau \in \Pi$ in vsak kontekst Γ obstaja λ-izraz tipa $\tau \to \tau$.

Lema 2.13 (Lema o inverziji)**.**

(1) *Če je* $\Gamma \vdash x : \sigma$, *potem je* $\Gamma(x) = \sigma$.
(2) *Če je* $\Gamma \vdash * : \sigma$, *potem je* $\sigma = 1$.
(3) *Če je* $\Gamma \vdash c : \sigma$, *potem je* $\mu(c) = \sigma$.
(4) *Če je* $\Gamma \vdash \langle t, u \rangle : \sigma$, *potem obstajata taka* τ *in* ρ, *da* $\Gamma \vdash t : \tau$ *in* $\Gamma \vdash u : \rho$, *ter da je* $\sigma = \tau \times \rho$.
(5) *Če je* $\Gamma \vdash \pi_1 t : \sigma$, *potem obstaja tak* τ, *da* $\Gamma \vdash t : \sigma \times \tau$ *(ter analogno za* π_2*).*
(6) *Če je* $\Gamma \vdash tu : \sigma$, *potem obstaja tak* τ, *da velja* $\Gamma \vdash t : \tau \to \sigma$ *in* $\Gamma \vdash u : \tau$.
(7) *Če je* $\Gamma \vdash (\lambda x : \tau . t) : \sigma$, *potem obstaja tak* ρ, *da velja* $x : \tau, \Gamma \vdash t : \rho$ *in* $\sigma = \tau \to \rho$.

Dokaz. Oblika izraza določa zadnji korak sklepa o tipu. Ta pa vsebuje (kot argumente pravilu) točno elemente, ki jih iščemo. □

Z uporabo te leme se lahko hitro prepričamo, da noben kontekst Γ in tip σ ne tipizirata izraza xx. Recimo da tak kontekst in tip obstajata. Po lemi o inverziji obstaja tak τ, da velja $\Gamma \vdash x : \tau \to \sigma$ in $\Gamma \vdash x : \tau$. Po vnovični uporabi leme o inverziji $\Gamma(x) = \tau$ in $\Gamma(x) = \tau \to \sigma$, kar pa je v nasprotju z definicijo konteksta.

Ta lema se pojavi tudi v dokazu enoličnosti tipov.

Lema 2.14 (Lema o enoličnosti tipov)**.** *Če veljata* $\Gamma \vdash t : \sigma$ *in* $\Gamma \vdash t : \tau$, *potem velja* $\sigma = \tau$.

Dokaz. Z indukcijo na t.

(1) Če je t spremenljivka, po lemi o inverziji sledi $\sigma = 1$ in $\tau = 1$. Podobno za konstante in enoto $*$.
(2) Če je t par $\langle u, s \rangle$, po prejšnji lemi sledi $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2$ in $\tau = \tau_1 \times \tau_2$. Po indukcijski predpostavki vemo $\sigma_1 = \tau_1$ in $\sigma_2 = \tau_2$. Zato $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_2 = \tau_1 \times \tau_2 = \tau$.
(3) Če je t projekcija $\pi_1 u$, po prejšnji lemi obstaja tak ρ, da velja $\Gamma \vdash u : \sigma \times \rho$ in $\Gamma \vdash u : \tau \times \rho$. Po indukcijski predpostavki vemo $\sigma \times \rho = \tau \times \rho$, iz česar sledi $\sigma = \tau$.
(4) Če je t abstrakcija $\lambda x : \gamma . u$, vemo, da obstaja tak ρ, da velja $x : \gamma, \Gamma \vdash u : \rho$ in $\sigma = \gamma \to \rho$, ter ρ', tako da velja $x : \gamma, \Gamma \vdash u : \rho'$ in $\tau = \gamma \to \rho'$. Po indukcijski predpostavki velja $\rho = \rho'$.
(5) Če je t aplikacija (us), ponovno po lemi o inverziji obstaja tak ρ, da velja $\Gamma \vdash u : \rho \to \sigma$ in $\Gamma \vdash s : \rho$, ter tak ρ' da velja $\Gamma \vdash u : \rho' \to \tau$ in $\Gamma \vdash s : \rho'$. Po indukcijski predpostavki $\rho = \rho'$, ter $\rho \to \sigma = \rho' \to \tau$.

□

Če imamo dva konteksta, recimo Γ in Γ', za katera velja $\Gamma(x) = \Gamma'(x)$ za vse x iz domene Γ, to označimo z $\Gamma \subseteq \Gamma'$.

Lema 2.15 (Lema o prostih spremenljivkah)**.** *Naj velja $\Gamma \vdash t : \sigma$, tedaj:*

(1) *za vsak $\Gamma' \supseteq \Gamma$ velja $\Gamma' \vdash t : \sigma$,*
(2) *$FV(t) \subseteq dom(\Gamma)$,*
(3) *za vsak Γ', ki se z Γ ujema na $FV(t)$, velja $\Gamma' \vdash t : \sigma$.*

Dokaz. (1) dokažemo s strukturno indukcijo na izpeljavo tipa.

- Izpeljava tipa je ene izmed naslednjih oblik:

$$\frac{c \in C}{\Gamma \vdash c : \mu(c)} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash * : 1} \qquad \frac{\Gamma(x) = \sigma}{\Gamma \vdash x : \sigma}$$

  V prvih dveh primerih tip ni odvisen od konteksta, zato $\Gamma' \vdash t : \sigma$. V tretjem velja $x \in \Gamma$ ter $\Gamma(x) = \sigma$ in ker je $\Gamma \subseteq \Gamma'$, sledi $\Gamma'(x) = \sigma$ (saj je Γ' prav tako kontekst), torej $\Gamma' \vdash x : \sigma$.
- Izpeljava se konča z:

$$\frac{\Gamma \vdash t : \sigma \qquad \Gamma \vdash u : \tau}{\Gamma \vdash \langle t, u \rangle : \sigma \times \tau}$$

  Po indukcijski hipotezi velja: $\Gamma' \vdash t : \sigma$ in $\Gamma' \vdash u : \tau$. Tedaj pa je $\Gamma' \vdash \langle t, u \rangle : \sigma \times \tau$.
- Izpeljava se konča z:

$$\frac{\Gamma \vdash t : \sigma_1 \times \sigma_2}{\Gamma \vdash \pi_i t : \sigma_i}$$

  Po indukcijski hipotezi velja: $\Gamma' \vdash t : \sigma_1 \times \sigma_2$. Tedaj pa je $\Gamma' \vdash \pi_i t : \sigma_i$.
- Izpeljava se konča z:

$$\frac{(x : \sigma, \Gamma) \vdash t : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma . t) : \sigma \to \tau}$$

  Predpostavimo lahko da $x \notin \Gamma$ in $x \notin \Gamma'$ (sicer vzamemo svežo spremenljivko), zato je $(x : \sigma, \Gamma) \subseteq (x : \sigma, \Gamma')$ in po indukcijski hipotezi $(x : \sigma, \Gamma') \vdash t : \tau$. Po običajnem pravilu sklepanja sledi: $\Gamma' \vdash (\lambda x : \sigma . t) : \sigma \to \tau$.
- Izpeljava se konča z:

$$\frac{\Gamma \vdash t : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash u : \sigma}{\Gamma \vdash (tu) : \tau}$$

  Po indukcijski hipotezi velja: $\Gamma' \vdash t : \sigma \to \tau$ in $\Gamma' \vdash u : \sigma$. Tedaj pa velja tudi $\Gamma' \vdash (tu) : \tau$.

(2) in (3) podobno dokažemo z indukcijo na izpeljavo tipa. □

Lema 2.16 (Lema o zamenjavi)**.**

(1) *Če velja $\Gamma \vdash t : \sigma$, potem velja $\Gamma[\rho := \tau] \vdash (t : \sigma)[\rho := \tau]$.*
(2) *Če velja $x : \tau, \Gamma \vdash t : \sigma$ in $\Gamma \vdash u : \tau$, potem velja $\Gamma \vdash t[x := u] : \sigma$.*

Dokaz. Dokažemo z indukcijo na izpeljavo tipa. □

V λ-računu se ukvarjamo z enakostmi med izrazi. Videli smo že α-ekvivalenco, sedaj pa si bomo ogledali še $\beta\eta$-ekvivalenco, s čimer se λ-izrazi končno začnejo obnašati kot funkcije. Notacijo $\Gamma \vdash t = u : \sigma$ beremo kot "v kontekstu Γ sta t in u (izraza tipa σ) enaka".

Definicija 2.17. *Relacija $\beta\eta$ enakosti* je ekvivalenčna relacija nad λ-izrazi, parametrizirana nad konteksti in tipi. To pomeni, da lahko primerjamo λ-izraze istih tipov nad istimi konteksti. Definirana je induktivno:

(1) Je ekvivalenčna:

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash t = u : \tau}{\Gamma \vdash u = t : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash t = u : \tau \qquad \Gamma \vdash u = v : \tau}{\Gamma \vdash t = v : \tau}$$

(2) Zakon monotoničnosti (nad konteksti):

$$\frac{x \notin \Gamma \qquad \Gamma \vdash t = v : \tau}{\Gamma, x : \sigma \vdash t = v : \tau}$$

(3) Zakon o enoličnosti enote:

$$\frac{}{\Gamma \vdash * = t : 1}$$

(4) Zakoni produktov:

$$\frac{\Gamma \vdash u = v : \tau \qquad \Gamma \vdash s = t : \sigma}{\Gamma \vdash \langle u, s\rangle = \langle v, t\rangle : \tau \times \sigma}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u = v : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_1 u = \pi_1 v : \tau} \qquad \frac{\Gamma \vdash u = v : \tau \times \sigma}{\Gamma \vdash \pi_2 u = \pi_2 v : \sigma}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = \langle \pi_1 t, \pi_2 t\rangle : \sigma}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \pi_1\langle u, s\rangle = u : \tau} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \pi_2\langle u, s\rangle = s : \tau}$$

(5) Zakoni funkcijskih tipov:

$$\frac{\Gamma \vdash t = u : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash p = q : \sigma}{\Gamma \vdash tp = uq : \tau}$$

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash t = u : \sigma}{\Gamma \vdash (\lambda x : \tau.t) = (\lambda x : \tau.u) : \tau \to \sigma}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\lambda x : \tau.t)u = t[x := u] : \sigma}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\lambda x : \tau.tx) = t : \tau \to \sigma}$$

Zadnjim trem enačbam pravimo ξ, β in η enakosti.

Tako definirani λ-račun imenujemo *$\lambda_{\beta\eta}$-račun s preprostimi tipi in surjektivnim operatorjem parčkanja.* Indeksa $\beta\eta$ dodamo, ker privzamemo β in η-ekvivalenci, surjektivnost $\langle -, -\rangle$ pa nam zagotavlja četrti zakon produktov (vsak izraz produktnega tipa je produkt dveh izrazov).

Definicija 2.18. Če λ-računu dodamo konstante in osnovnim enačbam dodamo še kakšno, dobimo λ-teorijo. Dodanim enačbam pravimo *lastne enačbe.*

Definicija 2.19. Za tipa τ, σ v teoriji pravimo, da sta *izomorfna*, če obstajata izraza $x : \tau \vdash t : \sigma$ in $y : \sigma \vdash u : \tau$ ter v teoriji veljata enačbi:

$$x : \tau \vdash u[y := t] = x : \tau$$

$$y : \sigma \vdash t[x := u] = y : \sigma$$

Primer 2.20 (Abelova grupa)**.** Začnimo samo z bazičnim tipom G in tremi konstantami:

(1) $e : G$
(2) $i : G \to G$
(3) $m : G \times G \to G$

Relaciji enakosti dodamo naslednje aksiome (znane iz teorije grup):

(1) $x : G, y : G \vdash m\langle x, y\rangle = m\langle y, x\rangle : G$
(2) $x : G, y : G, z : G \vdash m\langle m\langle x, y\rangle, z\rangle = m\langle x, m\langle y, z\rangle\rangle : G$
(3) $x : G \vdash m\langle x, e\rangle = x : G$
(4) $x : G \vdash m\langle x, ix\rangle = e : G$

Primer 2.21 (Splošne algebraične teorije)**.** Še več; z λ-teorijami lahko modeliramo splošne algebraične teorije, se pravi teorije, ki jih podamo z operacijami nad množico elementov in enačbami. Imamo bazični tip A in za vsako operacijo nad k-terico svojo konstanto. Vsakemu aksiomu v algebraični teoriji priredimo ustreznega v λ-teoriji, pri čemer dodamo ustrezen kontekst (v katerega vključimo spremenljivke, ki se pojavljajo v aksiomu).

2.3. **Scottova konstrukcija.** Za začetek si najprej oglejmo, kako izgleda netipiziran λ-račun.

Definicija 2.22. Množico *λ-izrazov netipiziranega λ-računa* (ki jo bomo označili kar z Λ) definiramo induktivno:

$$\frac{x \in V}{x \in \Lambda} \qquad \frac{t \in \Lambda}{\lambda x.t \in \Lambda} \qquad \frac{t \in \Lambda \quad u \in \Lambda}{(tu) \in \Lambda}$$

Kot prej za enakost med λ-izrazi vzamemo α-ekvivalenco.

Izrazom brez prostih spremenljivk pravimo, da so *zaprti* oziroma, da so *kombinatorji*. Izkaže se, da lahko vsak zaprt izraz izrazimo kot neko zaporedje aplikacij naslednjih treh kombinatorjev:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \lambda x, y, z.xz(yz) \\ \mathbf{K} &= \lambda x, y.x \\ \mathbf{I} &= \lambda x.x \end{aligned}$$

Dokaz, da kombinatorji $\mathbf{S}, \mathbf{K}$ in $\mathbf{I}$ tvorijo bazo Λ_0, najdemo v [4, izrek 2.1.26].

Kot posledico *leme o inverziji* smo videli, da se izraza xx ne da tipizirati (in zato tudi $\lambda x : \tau.xx$ ne), v netipiziranem λ-računu pa je to povsem običajen izraz. Izraz $\lambda x.xx$ pogosto označimo z ω in aplikacijo samega nase z $\Omega = \omega\omega$. Zanimiva lastnost tega izraza je, da se reducira sam vase.

V netipiziranem λ-računu imamo tako izraze, ki jih tipizirana verzija ne sprejme. Posledično je netipiziran λ-račun sposoben predstaviti večji nabor funkcij.

Izrek 2.23. *Za vsak $f \in \Lambda$ obstaja kombinator Y, tako da velja $Yf =_\beta fYf$ (z $=_\beta$ označujemo uporabo β-enakosti). Takemu kombinatorju pravimo* kombinator fiksne točke*.*

Dokaz. Naj bo $Y = \lambda f.(\lambda x.fxx)(\lambda x.fxx)$

$$
\begin{aligned}
Yg &= (\lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))g \\
&=_\beta ((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))[f := g] \\
&= (\lambda x.g(xx))(\lambda x.g(xx)) \\
&=_\beta (\lambda x.g(xx))[x := (\lambda x.g(xx))] \\
&= g((\lambda x.g(xx))(\lambda x.g(xx))) \\
&=_\beta g(Yg)
\end{aligned}
$$

□

Tako definiran kombinator ni edini kombinator fiksne točke.

Primer 2.24 (Kolpov kombinator fiksne točke)**.** Definirajmo

$$
\begin{aligned}
L &= \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisafixedpointcombinator) \\
\$ &= \underbrace{LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL}_{\text{26-krat}}
\end{aligned}
$$

Tedaj je \$ operator fiksne točke.

Zanimivo je, da lahko netipiziran λ-račun predstavimo kot tipizirano λ-teorijo.

Primer 2.25 (λ-teorija refleksivnega tipa)**.** Teorijo delamo nad enim bazičnim tipom D. Dodamo dve konstanti:

$$
\begin{aligned}
r &: D \to D \to D \\
s &: (D \to D) \to D
\end{aligned}
$$

in enačbi:

$$
\begin{aligned}
f : D \to D &\vdash r(sf) = f : D \to D \\
x : D &\vdash s(rx) = x : D
\end{aligned}
$$

Prva pravi, da je $D \to D$ retrakt D, z drugo pa lahko pokažemo, da sta tipa D in $D \to D$ izomorfna.

To λ-teorijo je v 80-ih predstavil Dana Scott kot model netipiziranega λ-računa [7]. Vzemimo λ-izraz t. Množico $\mathrm{FV}(t)$ proglasimo za kontekst, pri čemer je vsaka spremenljivka tipa D. Nato pa rekurzivno prevedemo netipiziran λ-izraz t v tipiziranega t^* na naslednji način:

$$
\begin{aligned}
x^* &= x && x \in V \\
(ut)^* &= (ru^*)t^* \\
(\lambda x.t)^* &= s(\lambda x : D.t^*)
\end{aligned}
$$

Ta model enači izraze natanko tedaj kot originalna (netipizirana) teorija λ-računa [7].

To je primer, ko se nam intuicija tipi-kot-množice zruši. Če bi bil tip D množica, v tej teoriji zahtevamo, da je množica funkcij $D \to D$ izomorfna D. Za D, ki niso enaki enojcu, pa to ne drži.

3. Zaprte kartezične kategorije

Razdelek začnimo z definicijo kategorij in funktorjev.

Definicija 3.1. *Kategorija* $\mathbf{C}$ je matematična struktura, podana z:

- *razredom objektov* $\mathbf{C}_0$,
- razredom *morfizmov* $\mathbf{C}_1$,
- parom preslikav *dom* in *cod*, ki slikajo iz $\mathbf{C}_1 \to \mathbf{C}_0$, tako da morfizmu f določijo *domeno* in *kodomeno*,
- operacijo *komponiranja*, ki morfizmoma $f : A \to B$ in $g : B \to C$, priredi morfizem $(g \circ f) : A \to C$.

Struktura kategorije je podvržena naslednjim aksiomom:

(1) Za vsak $A \in \mathbf{C}_0$ obstaja morfizem $1_A : A \to A$, ki mu pravimo identiteta.
(2) Za preslikavo $\circ$ velja asociativnost. Torej, za morfizme $f : A \to B$, $g : B \to C$ in $h : C \to D$ velja $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
(3) Za vsak morfizem $f : A \to B$ je $1_B \circ f = f$ in $f \circ 1_A = f$.

Definicija 3.2. Naj bosta $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ kategoriji, *funktor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ je par preslikav, ki:

- vsakemu objektu $X \in \mathbf{C}_0$ priredi objekt $FX \in \mathbf{D}_0$,
- vsakemu morfizmu $f : A \to B$ v $\mathbf{C}$ priredi morfizem $Ff : FA \to FB$.

Pri tem ohranja identitete in kompozicije. Torej:

(1) $F1_X = 1_{FX}$,
(2) $F(g \circ_{\mathbf{C}} f) = Fg \circ_{\mathbf{D}} Ff$.

Znanje o kategorijah si lahko bralec osveži v [5] in [3].

3.1. **Nekaj o kategorijah.** Recimo, da imamo dve kategoriji $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$. Zanima nas kako so funktorji povezani med seboj. Zberimo torej vse funktorje in jih proglasimo za objekte nove kategorije $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$. Kaj so morfizmi te nove kategorije? Izkaže se da so naravne transformacije $\tau : F \to G$ iskani morfizmi v kategoriji funktorjev.

Definicija 3.3. Naj bosta $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funktorja. *Naravna transformacija* $\tau : F \to G$ je družina morfizmov v $\mathbf{D}$ ($\tau_C : FC \to GC$, kjer C teče po objektih kategorije $\mathbf{C}$), tako da za vsak $f : C \to C'$ v $\mathbf{C}$ velja $\tau_{C'} \circ Ff = Gf \circ \tau_C$. Torej, naslednji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
FC \arrow[r, "\tau_C"] \arrow[d, "Ff"'] & GC \arrow[d, "Gf"] \\
FC' \arrow[r, "\tau'_C"'] & GC'
\end{tikzcd}$$

Primer 3.4 (Nasprotna grupa)**.** Vsaka grupa je naravno izomorfna nasprotni grupi. Funktor $-^{\mathrm{op}} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Grp}$ obdrži nosilec operacije grupe, operacijo pa obrne $a \bullet^{\mathrm{op}} b = b \bullet a$. Funktor je identična preslikava na morfizmih. Radi bi videli, da obstaja naravni izomorfizem $1_{\mathbf{Grp}} \to -^{\mathrm{op}}$. Definirajmo morfizem $\eta_G : G \to G^{\mathrm{op}}$, ki elementu grupe priredi inverz. Ta je očitno izomorfizem, saj je predpis sam sebi inverz. Vzemimo torej morfizem $f : G \to H$, tedaj velja $(\eta_H \circ f)(a) = \eta_H(f(a)) = f(a)^{-1} = f(a^{-1}) = (f \circ \eta_G)(a)$. Torej je η naravni izomorfizem.

Primer 3.5 (Determinanta)**.** Determinanta je naravna transformacija. Naj bo $\mathbf{det}_K M$ determinanta $n \times n$ matrike M z elementi komutativnega kolobarja K, K^* pa naj bo grupa obrnljivih elementov. Matrika M je obrnljiva natanko tedaj, ko je $\mathbf{det}_K M$ element K^*. Morfizem $\mathbf{det}_K$ je tako morfizem grup med $GL_n^K \to K^*$. Ker pa je $\mathbf{det}$ določena enako za vsak K, vsak morfizem $f : K \to K'$ porodi komutativen diagram, podoben zgornjemu:

$$\begin{tikzcd}
GL_n^K \arrow[r, "\mathbf{det}_K"] \arrow[d, "GL_n f"'] & K^* \arrow[d, "f^*"] \\
GL_n^{K'} \arrow[r, "\mathbf{det}_{K'}"'] & K'^*
\end{tikzcd}$$

Determinanta parametrizirana nad K je tako naravna transformacija med funktorjema GL_n in $-^*$ ($\mathbf{CRng} \to \mathbf{Grp}$).

Definicija 3.6. Pravimo, da sta kategoriji $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ *ekvivalentni*, če obstaja par funktorjev $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ in $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, za katera velja, da obstaja par naravnih izomorfizmov $\epsilon : F \circ G \to 1_{\mathbf{D}}$ in $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to G \circ F$.

Definicija 3.7. Naj bo $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funktor.

- Funktor je *poln*, če je preslikava $f \mapsto Ff$ med $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, D) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FC, FD)$ surjektivna.
- Funktor je *zvest*, če je preslikava $f \mapsto Ff$ med $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, D) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FC, FD)$ injektivna.
- Funktor je *v bistvu surjektiven*, če je vsak objekt $D \in \mathbf{D}_0$ izomorfen FC, za objekt $C \in \mathbf{C}_0$.

Izrek 3.8. *Kategoriji sta ekvivalentni, če obstaja funktor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, ki je poln, zvest in v bistvu surjektiven.*

Dokaz. (Skica, [3, Izrek 7.25]) Potrebno je definirati funktor v obratno smer, $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$. Ker je F v bistvu surjektiven izberemo objekte tako, da bo $FG(D)$ izomorfen D z izomorfizmom ϵ_D. Ker je F poln in zvest, lahko izberemo morfizme Gh tako, da velja $FGh = \epsilon_{D'} \circ h \circ \epsilon_D^{-1}$ in zato so izomorfizmi $\epsilon_D : D \to FG(D)$ naravni. Za naravni izomorfizem v drugo smer izberemo praslike $F^{-1}(\epsilon_{FC})$ (lahko, saj je poln in zvest). □

Definicija 3.9. *Diagram* tipa $\mathbf{I}$ v kategoriji $\mathbf{C}$ je kovarianten funktor $D : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$.

Kategoriji $\mathbf{I}$ pravimo indeksna kategorija in je nekakšen kategorično teoretični analog indeksni množici. Sami objekti $\mathbf{I}$ niti niso pomembni, zanimajo nas predvsem povezave med njimi. Pogosto vzamemo za indeksno kategorijo kar usmerjen multigraf (lahko z zankami v točkah) in njemu prirejeno prosto kategorijo.

Primer 3.10 (Diskreten graf)**.** Naj bo $\mathcal{G}$ graf, ki nima povezav med točkami in je brez zank v točkah. Diagram tipa $\mathcal{G}$ v kategoriji $\mathbf{C}$ je tedaj nek izbor objektov v $\mathbf{C}$, oziroma funktor $D : \mathbf{G} \to \mathbf{C}$, kjer je $\mathbf{G}$ prosta kategorija nad $\mathcal{G}$.

Definicija 3.11. Naj bo $D : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ diagram tipa $\mathbf{I}$ v kategoriji $\mathbf{C}$. *Stožec* nad diagramom D je objekt $C \in \mathbf{C}$ skupaj z naravno transformacijo $\varphi : \chi_C \to D$, kjer je $\chi_C : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ konstanten funktor v C:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "\varphi_X"'] \arrow[dr, "\varphi_Y"] & \\
D(X) \arrow[rr, "Df"'] & & D(Y)
\end{tikzcd}$$

Stožcev nad diagramom je lahko mnogo. Limitni objekt je v nekem smislu najboljši tak stožec, namreč skozenj lahko razcepimo morfizme drugih stožcev na en sam način.

Definicija 3.12. *Limita* diagrama $D : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ je tak stožec $\langle L, \psi \rangle$, da za vsak drugi stožec $\langle C, \varphi \rangle$ obstaja natanko en morfizem $u : C \to L$, da velja $\psi_X \circ u = \varphi_X$ za vsak $X \in \mathbf{I}_0$. Oziroma, v sliki:

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi_X"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_Y"] & \\
& L \arrow[dl, "\psi_X"'] \arrow[dr, "\psi_Y"] & \\
DX \arrow[rr, "Df"'] & & DY
\end{tikzcd}$$

Primer 3.13 (Končni objekti)**.** Naj bo $\mathbf{I}$ prazna kategorija. Tedaj obstaja samo en diagram tipa $\mathbf{I}$ v kategoriji $\mathbf{C}$ (kot v teoriji množic). Stožci so vsi objekti kategorije $\mathbf{C}$, kjer za naravne transformacije $\varphi : \chi_C \to D$ vzamemo prazen nabor morfizmov. Limitni objekt diagrama je tedaj objekt, ki ima enolično določen morfizem $u : C \to L$, za vsak C. L je torej končen objekt.

Definicija 3.14. Naj bo $\mathbf{I}$ prosta kategorija, prirejena končnemu diskretnemu grafu. Tedaj je diagram $D : \mathbf{I} \to \mathbf{C}$ zbirka objektov. Stožci so tedaj oblike $\langle N, \varphi \rangle$, kjer je $\varphi_X : N \to D(X)$ ($X \in \mathbf{I}_0$) brez dodatnih pogojev (tj. imamo prosto izbiro morfizmov). Limitnemu objektu tedaj pravimo *produkt*.

Primer takega končnega produkta nad tremi objekti:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[dr, "\psi_X"'] \arrow[drrr, "\psi_Y"] \arrow[drrrrr, "\psi_Z"] & & & & & & C \arrow[llllll, dotted, bend right, "u"'] \arrow[dlllll, "\varphi_X"] \arrow[dlll, "\varphi_Y"] \arrow[dl, "\varphi_Z"] \\
& DX & & DY & & DZ &
\end{tikzcd}$$

Pravimo, da ima kategorija končne produkte, če ima limitne objekte (produkte) za vsak diagram tipa $\mathbf{I}$, kjer je $\mathbf{I}$ poljubna končna diskretna kategorija. Taki kategoriji pravimo tudi *kartezična kategorija*.

Izrek 3.15. *Naj bo* $\mathbf{C}$ *kategorija s končnimi produkti, tedaj vsebuje dvojiške produkte in končen objekt.*

Dokaz. V primeru 3.13 smo videli, da je limitni objekt diagrama prazne kategorije končen objekt. Dvojiške produkte pa dobimo, če delamo produkte nad diskretno kategorijo $\mathbf{2}$. □

Definicija 3.16. Naj bo $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ funktor in D objekt kategorije $\mathbf{D}$. *Univerzalni morfizem* iz D v F je par $\langle R, u\rangle$, kjer je R objekt kategorije $\mathbf{C}$ in $u : D \to F(R)$ morfizem kategorije $\mathbf{D}$, tako da za vsak par $\langle C, f\rangle$, kjer je C objekt kategorije $\mathbf{C}$ in $f : D \to F(C)$ morfizem kategorije $\mathbf{D}$, obstaja natanko en $f' : R \to C$ morfizem kategorije $\mathbf{C}$, za katerega velja $Ff' \circ u = f$. Diagramsko:

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & FR \arrow[d, dotted, "Ff'"] & R \arrow[d, dotted, "f'"] \\
& FC & C
\end{tikzcd}
$$

Primer 3.17. Naj bo M prost monoid nad množico A. Funktor $U : \mathbf{Mon} \to \mathbf{Set}$ pa pozabljivi funktor. Naj bo $i : A \to UM$ kanonična injekcija. Tedaj je univerzalni morfizem iz A v U par $\langle M, i\rangle$. Res! Za vsak nadaljnji monoid M' in funkcijo $f : A \to UM'$ obstaja enolično določen homomorfizem monoidov $f' : M \to M'$, tako da velja $Uf' \circ i = f$.

Primer 3.18. Naj bo $- + Y : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ funktor, ki objekt X preslika v $X + Y$ in morfizme $f : X \to Z$ v $[f, 1_Y] : X + Y \to Z + Y$. Tedaj za vsak objekt X obstaja univerzalen morfizem iz X v $- + Y$, ki je oblike $\langle X, i\rangle$ in i je kanonična injekcija $X \to X + Y$. Tako obstoj kot enoličnost sledita iz lastnosti koprodukta.

Postavimo se v kategorijo **Set** in vzemimo dva objekta X ter Y. Zanimajo nas lastnosti objekta Y^X, množice vseh funkcij $X \to Y$. Opazimo tudi, da je evaluacija funkcije v svojem bistvu tudi funkcija, ki slika iz $Y^X \times X \to Y$.

Definicija 3.19. Naj bo $\mathbf{C}$ kategorija z (vsaj) dvojiškimi produkti, $- \times Y : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ funktor in Z objekt kategorije $\mathbf{C}$. *Eksponentni objekt* je tedaj kouniverzalen (univerzalen v $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$) morfizem iz $- \times Y$ v Z. Tak objekt označimo z $\langle Z^Y, \epsilon\rangle$. Diagramsko:

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[d, dotted, "\tilde{f} \times 1_Y"'] \arrow[dr, "f"] & & X \arrow[d, dotted, "\tilde{f}"] \\
Z^Y \times Y \arrow[r, "\epsilon"'] & Z & Z^Y
\end{tikzcd}
$$

Morfizem $\tilde{f}$ imenujemo *transponiranka* f.

Z drugimi besedami: za eksponentni objekt z morfizmom ϵ (ki mu pravimo evaluacijski morfizem) velja, da za vsak $X \times Y \to Z$ obstaja natanko en morfizem (transponirani), tako da zgornji diagram komutira.

Primer 3.20 (Boolove algebre)**.** Naj bo $\mathbb{B}$ boolova algebra. Tedaj elemente nosilca $\mathbb{B}$ razglasimo za objekte, morfizmi med objekti pa so relacije $A \leq B$ $(f : A \to B)$.

- Konjunkcija $A \wedge B$ je produkt.
  Po definiciji je $A \wedge B \leq A$ in $A \wedge B \leq B$ in naj bo $C \leq A$ in $C \leq B$. Ker je $A \wedge B$ infimum, sledi $C \leq A \wedge B$. Enoličnost morfizmov sledi iz definicije kategorije (med dvema objektoma obstaja največ en morfizem).

- Implikacija $A \Rightarrow B$, definirana kot $\neg A \vee B$, pa je eksponentni objekt.

  Naj bo $A \wedge B \leq C$, tedaj je $A \vee \neg B \leq \neg B \vee C$ in $A \leq A \vee \neg B$, zato $A \leq B \Rightarrow C$. Vemo tudi $(B \Rightarrow C) \wedge B \leq C$ (modus ponens).

Primer 3.21 (Delno urejene množice)**.** Oglejmo si kategorijo **Poset** z delno urejenimi množicami kot objekti in monotonimi funkcijami kot morfizmi. Če množico vseh funkcij delno uredimo (po točkah), vidimo, da je $\mathrm{Hom}(X, Y)$ spet objekt v kategoriji in funkcija evaluacije je monotona. Torej je $\mathrm{Hom}(X, Y)$ eksponentni objekt v **Poset**.

Naslednji izrek potrebujemo v dokazu izreka 3.24, zato ga omenimo na tem mestu.

Izrek 3.22. $\mathrm{Hom}(X \times Y, Z) \cong \mathrm{Hom}(X, Z^Y)$

Dokaz. Dokaz sledi po definiciji adjunktov 3.32 in iz izreka 3.33 ter 3.35. □

Definicija 3.23. Kategorija je *zaprta kartezična* natanko tedaj, ko je kartezična in ima eksponente.

Takim kategorijam v angleščini pravimo *cartesian closed categories*, zaradi česar tudi uporabljamo kratico CCC. Funktorjem med dvema CCC, ki ohranjajo strukturo, pravimo *zaprti kartezični funktorji.*

Izrek 3.24. *Naj bo* **C** *CCC z začetnim objektom* 0 *in končnim objektom* 1*. Tedaj veljajo naslednje trditve:*

(1) $0 \cong 0 \times X$,
(2) $X^0 \cong 1$,
(3) $X^1 \cong X$,
(4) $1^X \cong 1$.

Zadnji dve enakosti veljata v vsaki CCC.

Dokaz. (1) Pokazati je potrebno, da je $0 \times X$ začetni objekt. Izomorfnost sledi iz definicije. Naj bo torej A objekt v kategoriji. Iz izreka 3.22 vemo $\mathrm{Hom}(0 \times X, A) \cong \mathrm{Hom}(0, A^X)$, kar pomeni, da imamo za vsak objekt A natanko en morfizem $0 \times X \to A$.

Iz simetrije produkta sledi tudi, da je $X \times 0 \cong 0$.

(2) Podobno kot prej: $\mathrm{Hom}(A, X^0) \cong \mathrm{Hom}(A \times 0, X)$

(3) Dokažemo s sledenjem po diagramih. Naj bo $\varphi : A \times 1 \to A$ izomorfizem in $\chi : A^1 \times 1 \to A^1$ tudi izomorfizem. Iz lastnosti eksponentnega objekta vemo, da obstaja tak $\epsilon : A^1 \times 1 \to A$, da je $\epsilon \circ \tilde{\varphi} \times 1_1 = \varphi$ in velja tudi, da je $\varphi^{-1} \circ \epsilon$ inverz $\tilde{\varphi} \times 1_1$ (za vsak $f : X \times 1 \to X^1 \times 1, (\tilde{\varphi} \times 1_1 \circ \varphi^{-1} \circ \epsilon) \circ f = f$, iz lastnosti eksponentnega objekta). Trdimo, da je $\epsilon \circ \chi^{-1} : A^1 \to A$ izomorfizem z obratom $\chi \circ \tilde{\varphi} \times 1_1 \circ \varphi^{-1} : A \to A^1$.

$$
\begin{aligned}
(\epsilon \circ \chi^{-1}) \circ \chi \circ \tilde{\varphi} \times 1_1 \circ \varphi^{-1} &= \\
= \epsilon \circ \tilde{\varphi} \times 1_1 \circ \varphi^{-1} &= \varphi \circ \varphi^{-1} = \\
&= 1_A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\chi \circ \tilde{\varphi} \times 1_1 \circ \varphi^{-1} \circ \epsilon \circ \chi^{-1} &= \\
= \chi \circ (\tilde{\varphi} \times 1_1 \circ \varphi^{-1} \circ \epsilon) \circ \chi^{-1} &= \\
= \chi \circ \chi^{-1} &= \\
&= 1_{A^1}
\end{aligned}
$$

(4) Podobno kot v primeru (1), (2): $\mathrm{Hom}(A, 1^X) \cong \mathrm{Hom}(A \times X, 1)$; 1^X je končen.
$\square$

3.2. **Primeri CCC.**

Primer 3.25 (**Set**)**.** **Set** je prototipičen primer CCC. Enojci so končni objekti, $A \times B$ so kartezični produkti. Eksponentni objekt A^B je množica vseh funkcij $B \to A$ in evaluacijski morfizem je običajno izvrednotenje funkcije $\langle f, x\rangle \mapsto f(x)$.

Primer 3.26 (**Cat**)**.** **Cat** je kategorija majhnih kategorij. Diskretna kategorija **1** je končni objekt. Produkt $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ je kartezični produkt kategorij, $\mathbf{A}^{\mathbf{B}}$ pa je kategorija funktorjev $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$. Evaluacijski morfizem je funktor $\epsilon : \mathbf{A}^{\mathbf{B}} \times \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, ki slika objekte $\langle F, C\rangle \mapsto FC$, morfizme pa $(\langle \eta, f\rangle : \langle F, C\rangle \to \langle G, D\rangle) \mapsto (Gf \circ \eta_A : FA \to GB)$.

Primer 3.27 (**Top** ni CCC)**.** **Top** ni zaprta kartezična kategorija. Enojec je topološki prostor, ki igra vlogo končnega objekta – obstaja natanko ena zvezna funkcija v enojec iz kateregakoli prostora. Imamo tudi dvojiške produkte, kar kartezičen produkt topoloških prostorov. Kaj pa eksponentni objekti? Izkaže se, da eksponentni objekt v splošnem ni definiran. Kandidat za eksponentni objekt Y^X je sicer kot množica definiran, vendar ga v splošnem ne znamo nujno opremiti s primerno topologijo tako, da je ϵ morfizem; npr. za X lokalno kompakten T_2 prostor, lahko Y^X opremimo s kompaktno-odprto topologijo.

Primer 3.28 (**Grp** ni CCC)**.** Podobno kot v prejšnjem primeru množici Y^X v splošnem ne znamo prirediti primerne grupne strukture.

Primer 3.29 (**Poset**, ω**CPO**)**.** Kot smo videli v primeru 3.21 ima kategorija **Poset** tako produkte, kot eksponente. Enojci so objekti v kategoriji in so končni objekti; **Poset** je torej CCC.

Oglejmo si še ω**CPO**. Delno urejena množica je ωCPO, če vsebuje vse kolimite tipa $\omega = (\mathbb{N}, \leq)$. Torej za vsako verigo $d_0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots$ imamo kolimito $d_\omega = \varinjlim d_n$ (obstajajo supremumi števnih verig). Vzemimo podkategorijo **Poset**, kjer kot objekte vzamemo samo ωCPO množice in vse monotone preslikave med njimi, ki ohranjajo supremume števnih verig. Tako produkti kot eksponentni objekti obstajajo (slednji so urejeni po točkah). Kategorijo poimenujemo ω**CPO**.

ω**CPO** je pomembna struktura v teoriji domen (ki se ukvarja predvsem z denotacijsko semantiko programskih jezikov in modeli λ-računa).

Primer 3.30 (**Rel** ni CCC)**.** **Rel** je kategorija z množicami za objekte in relacijami za morfizme, torej $\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$. Kompozicija dveh morfizmov $r : X \to Y$ in $h : Y \to Z$ je podana z:

$$\{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y. r(x, y) \wedge h(y, z)\}$$

Identiteta je $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$. Očitno je kategorija **Set** podkategorija **Rel**. Končni objekt je prazna množica: $\mathrm{Hom}(X, 0) = \mathcal{P}(X \times 0) = 1$. Produkt dveh objektov je disjunktna unija, s projekcijami oblike (kjer je ι_i kanonična injekcija):

$$\pi_i = \{(\iota_i(x), x) \in (X_1 \amalg X_2) \times X_i \mid x \in X_i\}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, dotted, "f"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
X_1 & X_1 \amalg X_2 \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & X_2
\end{tikzcd}
$$

Morfizem f je enolično definiran in sicer:

$$f = \{(z, \iota_i x) \in Z \times (X_1 \amalg X_2) \mid \forall i \in \{1,2\}. f_i(z,x)\}$$

Za eksponentni objekt velja enačba $\mathrm{Hom}(X \amalg Y, Z) \cong \mathrm{Hom}(X, Z^Y)$. Nastavimo $|X| = 2, |Y| = 3$ in $|Z| = 3$. Veljati mora torej:

$$2^{(|X|+|Y|)|Z|} = 2^{|X||Z^Y|}$$

$$(|X| + |Y|)|Z| = |X||Z^Y|$$

$$5 \cdot 3 = 2 \cdot \gamma$$

Leva stran je liha, desna pa soda, očitno tak objekt ne more obstajati.

3.3. **Ekvivalentne definicije.**

Definicija 3.31. Kategorija $\mathbf{C}$ je CCC natanko tedaj, ko zadošča naslednjim pogojem:

- Obstaja objekt 1, tako da za vsak objekt C iz kategorije $\mathbf{C}$ obstaja morfizem $!_C : C \to 1$ in za vsak nadaljnji morfizem $f : C \to 1$ velja:
$$f = !_C \; .$$
- Za vsak par objektov $A, B \in \mathbf{C}_0$ obstaja objekt $A \times B \in \mathbf{C}_0$ z morfizmoma $\pi_1 : A \times B \to A$ in $\pi_2 : A \times B \to B$, tako da za vsak nadaljnji objekt $Z \in \mathbf{C}_0$ in par morfizmov $f : Z \to A$, $g : Z \to$ obstaja morfizem $\langle f, g\rangle : Z \to A \times B$ in ti zadoščajo naslednjim enačbam:
$$\begin{aligned} \pi_1\langle f, g\rangle &= f \\ \pi_2\langle f, g\rangle &= g \\ \langle \pi_1 h, \pi_2 h\rangle &= h \qquad\qquad \text{za vsak } h \in \mathrm{Hom}(Z, A \times B) \end{aligned}$$
- Za vsak par objektov $A, B \in \mathbf{C}_0$ obstaja objekt B^A in morfizem $\epsilon : B^A \times A \to B$ in za vsak morfizem $f : Z \times A \to B$ obstaja morfizem $\tilde{f} : Z \to A^B$, tako da velja:
$$\begin{aligned} \epsilon \circ (\tilde{f} \times 1_A) &= f \\ (\epsilon \circ (h \times 1_A))^{\sim} &= h \qquad\qquad \text{za vsak } h \in \mathrm{Hom}(Z, A^B) \end{aligned}$$
Za $g \times h$ vzamemo $\langle g \circ \pi_1, h \circ \pi_2\rangle$.

Definicija očitno ustreza prejšnji definiciji CCC, saj enačbe zahtevajo točno univerzalne lastnosti produktov in eksponentnih objektov.

Oglejmo si še eno ekvivalentno definicijo CCC. V ta namen vpeljemo pojem adjunkcije:

Definicija 3.32. *Adjunkcija* je $\langle F, G, \eta\rangle$, kjer sta $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ in $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ funktorja, $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to G \circ F$ naravna transformacija, tako da je za vsak objekt C

kategorije $\mathbf{C}$, $\langle FC, \eta_C \rangle$ univerzalen morfizem iz C v G – pravimo, da je F levi adjunkt G, kar ponavadi označimo $F \dashv G$. V diagramu to izgleda tako:

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[dr, "f"'] & G(FC) \arrow[d, dotted, "Gf'"] & FC \arrow[d, dotted, "f'"] \\
& GD & D
\end{tikzcd}
$$

Iz dualnosti sledi, da sta funktorja $F \dashv G$ adjungirana, če obstaja naravna transformacija, recimo ji $\epsilon : F \circ G \to 1_{\mathbf{D}}$, tako da je $\langle GD, \epsilon_D \rangle$ kouniverzalen morfizem iz F v D:

$$
\begin{tikzcd}
FC \arrow[d, dotted, "Fg'"'] \arrow[dr, "g"] & & C \arrow[d, dotted, "g'"] \\
F(GD) \arrow[r, "\epsilon_D"'] & D & GD
\end{tikzcd}
$$

Izrek 3.33. *Naj bosta $\mathbf{C}$ in $\mathbf{D}$ kategoriji in $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ funktorja. Tedaj sta naslednja pogoja ekvivalentna:*

(1) *F je levi adjunkt G;*
(2) *za vsak $C \in \mathbf{C}_0$ in $D \in \mathbf{D}_0$ obstaja izomorfizem $\Phi : \mathrm{Hom}(FC, D) \to \mathrm{Hom}(C, GD)$, ki je naraven v C in D.*

Še več; držita naslednji formuli:

$$
\begin{aligned}
\Phi(g) &= G(g) \circ \eta_C \\
\eta_C &= \Phi(1_{FC})
\end{aligned}
$$

Dokaz. Dokaz začnimo v smeri iz (1) v (2). Za morfizem Φ vzemimo kar predlaganega; tj. $\Phi : g \mapsto G(g) \circ \eta_C$. Prepričajmo se, da je to res izomorfizem. Iz definicije 3.32 sledi, da za vsak morfizem $f : C \to GD$ obstaja natanko en $f' : FC \to D$, tako da je $f = G(f') \circ \eta_C$, torej je Φ res izomorfizem (obstoj nam da surjektivnost, enoličnost pa injektivnost).

Oglejmo si še naravnost argumenta C. Pokazali bi radi, da za vsak $C \in \mathbf{C}_0$ in vsak $f : C' \to C$ velja enakost: $\mathrm{Hom}(f, GD) \circ \Phi_{C,D} = \Phi_{C',D} \circ \mathrm{Hom}(Ff, D)$. Ker je η naravna transformacija med $1_{\mathbf{C}}$ in $G \circ F$, za morfizem $f : C' \to C$ velja enakost: $\eta_C \circ f = GFf \circ \eta_{C'}$. Vzemimo torej morfizem $h : FC \to D$ in poglejmo, kam ga preslika $\Phi_{C',D} \circ \mathrm{Hom}(Ff, D)$.

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{C',D} \circ \mathrm{Hom}(Ff, D))(h) &= \Phi_{C',D}(h \circ Ff) \\
&= G(h \circ Ff) \circ \eta_{C'} \\
&= Gh \circ GFf \circ \eta_{C'} = Gh \circ \eta_C \circ f \\
&= (Gh \circ \eta_C) \circ f \\
&= \Phi_{C,D}(h) \circ f \\
&= (\mathrm{Hom}(f, GD) \circ \Phi_{C,D})(h)
\end{aligned}
$$

Torej je Φ naraven izomorfizem v C. Poglejmo si še argument D. Tedaj bi radi videli, da za vsak $D \in \mathbf{D}_0$ in vsak $g : D \to D'$ velja $\Phi_{C,D'} \circ \mathrm{Hom}(FC, g) = \mathrm{Hom}(C, Gg) \circ \Phi_{C,D}$. Vzemimo $h : FC \to D$ in si oglejmo:

$$\begin{aligned}(\Phi_{C,D'} \circ \mathrm{Hom}(FC, g))(h) = \Phi_{C,D'}(g \circ h) &= G(g \circ h) \circ \eta_C \\ &= Gg \circ (Gh \circ \eta_C) \\ &= (Gg \circ \Phi_{C,D})(h) \\ &= (\mathrm{Hom}(C, Gg) \circ \Phi_{C,D})(h)\end{aligned}$$

Kot želeno je torej Φ naraven v obeh argumentih.

Želeli bi dokazati še implikacijo v drugo smer – torej iz (2) sledi (1). Iščemo naravno transformacijo $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to G \circ F$ z univerzalno lastnostjo. Za η postavimo predlaganega – torej $\eta_C = \Phi(1_{FC}) : C \to GFC$. Pokažimo, da ima $\langle FC, \eta_C \rangle$ lastnost univerzalnega morfizma iz C in G. Za dani $g : C \to GD$ iščemo $g' : FC \to D$, tako da velja $g = Gg' \circ \eta_C = Gg' \circ \Phi(1_{FC})$. Po predpostavki je Φ naraven v D, kar pomeni, da imamo za morfizem $f : FC \to D$ in morfizem $g : D \to D'$ v preslikani množici morfizmov dve poti, namreč $Gg \circ \Phi(f) : C \to GD'$ in $\Phi(g \circ f) : C \to GD'$, ki se morata ujemati:

$$\Phi(g \circ f) = Gg \circ \Phi(f).$$

Uporabimo sedaj to na prej napisani verigi enakosti: $g = Gg' \circ \Phi(1_{FC}) = \Phi(g' \circ 1_{FC}) = \Phi(g')$, tak g' pa mora obstajati in je enolično določen, saj smo predpostavili, da je Φ izomorfizem. $\square$

Izrek 3.34. *Naj bodo $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ in $U, V : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ funktorji, tako da je $F \dashv U$ in $F \dashv V$. Trdimo, da so adjunkti določeni do izmorfizma natančno, torej $U \cong V$.*

Dokaz. Naj bodo funktorji kot v predpostavki izreka. Označimo naslednje morfizme:

$$\begin{aligned}\phi_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FC, D) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, UD) \\ \psi_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, UD) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FC, D) \\ \phi_{C,D}(g) &= Ug \circ \eta_C \\ \psi_{C,D}(f) &= \epsilon_D \circ Ff \\ \hat{\phi}_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FC, D) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, VD) \\ \hat{\psi}_{C,D} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, VD) &\to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FC, D) \\ \hat{\phi}_{C,D}(g) &= Vg \circ \hat{\eta}_C \\ \hat{\psi}_{C,D}(f) &= \hat{\epsilon}_D \circ Ff\end{aligned}$$

V prejšnjem izreku (3.33) smo videli, da sta tako definirana morfizma ϕ in $\hat{\phi}$ izomorfizma – iz dualnosti enako sledi za ψ in $\hat{\psi}$. Zadostuje dokazati, da sta za vsak D naslednji preslikavi naravna izomorfizma:

$$\begin{aligned}\theta_D &= \psi^{-1}_{VD,D}(\hat{\epsilon}_D) : VD \to UD \\ \hat{\theta}_D &= \hat{\psi}^{-1}_{UD,D}(\epsilon_D) : UD \to VD\end{aligned}$$

Ker je $\psi_{C,D}(f) = \epsilon_D \circ Ff$, velja $\psi_{VD,D}(\theta_D) = \epsilon_D \circ F(\theta_D) = \hat{\epsilon}_D$ in podobno $\hat{\psi}_{UD,D}(\hat{\theta}_D) = \hat{\epsilon}_D \circ F(\hat{\theta}_D) = \epsilon_D$.

$$\begin{tikzcd}
 & D \\
FUD \arrow[ur, "\epsilon_D"] & \\
 & FVD \arrow[ul, "F(\theta_D)"] \arrow[uu, "\hat{\epsilon}_D"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & D \\
FVD \arrow[ur, "\hat{\epsilon}_D"] & \\
 & FUD \arrow[ul, "F(\hat{\theta}_D)"] \arrow[uu, "\epsilon_D"']
\end{tikzcd}$$

Ker komutirata ta dva trikotnika, velja $\epsilon_D \circ F(\theta_D \circ \hat{\theta}_D) = \epsilon_D = \epsilon_D \circ F(1_{UD})$, kar pomeni, da ψ preslika $\theta_D \circ \hat{\theta}_D$ in 1_{UD} v isti morfizem. Preslikava ψ pa je injektivna, zato velja enačba $\theta_D \circ \hat{\theta}_D = 1_{UD}$. Podobno pridemo do zaključka $\hat{\theta}_D \circ \theta_D = 1_{VD}$, torej sta izomorfizma. Vzemimo nek morfizem $f : D \to C$. Iz lastnosti adjunktnih funktorjev ($f \circ \epsilon_D = \epsilon_C \circ FUf$) sledi naslednji sklep:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_{UD,C}(\hat{\theta}_C \circ Uf) &= \hat{\epsilon}_C \circ F(\hat{\theta}_C) \circ FUf \\
&= \epsilon_C \circ FUf \\
&= f \circ \epsilon_D \\
&= f \circ \hat{\epsilon}_D \circ F(\hat{\theta}_D) \\
&= \hat{\epsilon}_C \circ FVf \circ F(\hat{\theta}_D) \\
&= \hat{\psi}_{UD,C}(Vf \circ \hat{\theta}_D)
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
FUD \arrow[r, "FUf"] \arrow[d, "\epsilon_D"'] \arrow[dd, bend right=60, "F(\hat{\theta}_D)"'] & FUC \arrow[d, "\epsilon_C"'] \arrow[dd, bend left=60, "F(\hat{\theta}_C)"] \\
D \arrow[r, "f"] & C \\
FVD \arrow[r, "FVf"'] \arrow[u, "\hat{\epsilon}_D"] & FVC \arrow[u, "\hat{\epsilon}_C"]
\end{tikzcd}$$

Ponovno, ker je $\hat{\psi}_{UD,C}$ bijekcija, velja $\hat{\theta}_C \circ Uf = Vf \circ \hat{\theta}_D$ in v drugo smer podobno. Torej sta θ in $\hat{\theta}$ res naravna izomorfizma. □

Videli smo kaj so adjungirani funktoriji v vsej svoji abstraktnosti. Oglejmo si sedaj konkretne primere, ki nas bodo pripeljali do še ene definicije zaprtih kartezičnih kategorij.

Naj bo $\mathbf{C}$ kategorija. Definirajmo diagonalen funktor $\Delta : \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, ki vsakemu objektu C priredi parček $\langle C, C \rangle$, morfizmom prav tako $f : C \to C' \mapsto \langle f, f \rangle : \langle C, C \rangle \to \langle C', C' \rangle$. Zanima nas desni adjunkt tega funktorja (oz. ekvivalentno, kateremu funktorju je Δ levi adjunkt): torej neki funktor $G : \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, tako da velja $\mathrm{Hom}(C, G(X,Y)) \cong \mathrm{Hom}(\Delta C, \langle X, Y \rangle)$. Ta množica morfizmov pa je izomorfna $\mathrm{Hom}(\Delta C, X) \times \mathrm{Hom}(\Delta C, Y)$. Primeren funktor bi tako lahko bil $\times$ – oglejmo si torej, ali je $\Delta \dashv \times$. Za naravno transformacijo $\eta : 1_{\mathbf{C}} \to \times \circ \Delta$ vzemimo $\eta_C = \langle 1_C, 1_C \rangle$. Po univerzalni lastnosti produktov imamo za vsak $f : C \to X \times Y$ enolično določene morfizme $f_1 : C \to X$ in $f_2 : C \to Y$, tako da:

$$\begin{aligned}(f_1 \times f_2) \circ \eta_C &= \langle f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2 \rangle \circ \eta_C \\ &= \langle f_1 \circ \pi_1 \circ \eta_C, f_2 \circ \pi_2 \circ \eta_C \rangle \\ &= \langle f_1 \circ \pi_1, f_2 \circ \pi_2 \rangle \\ &= f\end{aligned}$$

Funktor Δ ima desni adjunkt natanko tedaj, ko ima kategorija $\mathbf{C}$ dvojiške produkte.

Vzemimo kategorijo $\mathbf{C}$ in definirajmo funktor $! : \mathbf{C} \to 1$, ki vse objekte slika v $*$, edini objekt kategorije 1, in vse morfizme v $1_* : * \to *$. Zahtevamo torej bijekcijo $\mathrm{Hom}(!C, *) \cong \mathrm{Hom}(C, G*)$, za vsak C – v besedah, za vsak C obstaja natanko en morfizem $C \to G*$. To je pa definicija končnega objekta. Funktor ! ima torej desni adjunkt natanko tedaj, ko ima kategorija C končni objekt.

Nazadnje v naši kategoriji $\mathbf{C}$ fiksirajmo objekt A in definirajmo funktor $- \times A : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ – ta naj deluje na objektih tako: $X \mapsto X \times A$, morfizme $f : X \to Y$ pa slika v $f \times 1_A : X \times A \to Y \times A$. Kot prej iščemo torej funktor G, ki zadosti $\mathrm{Hom}(X \times A, Y) \cong \mathrm{Hom}(X, GY)$. Poskusimo, ali nam uspe s funktorjem potenciranja. Objekte slikamo po naslednjem pravilu $Y \mapsto Y^A$, morfizme pa tako: $g \mapsto (g \circ \epsilon)^\sim$. Zanima nas torej, ali je $\langle C^A, \epsilon_C \rangle$ kouniverzalen morfizem iz $- \times A$ v C – to pa je točno definicija eksponentnega objekta.

S tem zadnjim razmislekom lahko povemo naslednji izrek.

Izrek 3.35. *Kategorija* $\mathbf{C}$ *je zaprta kartezična kategorija natanko tedaj, ko imajo naslednji funktorji desne adjunkte:*

$$\begin{aligned} !_{\mathbf{C}} &: \mathbf{C} \to \mathbf{1} \\ \Delta &: \mathbf{C} \to \mathbf{C} \times \mathbf{C} \\ - \times A &: \mathbf{C} \to \mathbf{C} \qquad\qquad \text{za vsak } A \in \mathbf{C}_0 \end{aligned}$$

4. Semantika λ-računa

V prejšnjih poglavjih smo definirali pojem λ-teorij in zaprtih kartezičnih kategorij. V tem poglavju si bomo ogledali povezavo med tema dvema pojmoma. V ta namen bomo vpeljali T-strukture in interpretacije, modele, pojma polnosti in zdravja ter končali z ekvivalenco med zaprtimi kartezičnimi kategorijami in λ-teorijami. Naš namen je formalnemu sintaktičnemu sistemu prirediti matematične objekte (semantika), s katerimi lahko sklepamo o lastnostih originalnega sistema.

Definicija 4.1. *T-struktura* $\mathcal{M}$ λ-teorije $\mathbb{T}$ v zaprti kartezični kategoriji $\mathbf{C}$ je definirana s preslikavo iz baričnih tipov λ-teorije v objekte kategorije $\mathbf{C}$ ($\mathcal{M} : U \to \mathbf{C}_0$), ki jo razširimo do $\Pi \to \mathbf{C}_0$ na naraven način – tako je $\mathcal{M}1$ končen objekt v kategoriji, $\mathcal{M}(\sigma \times \tau)$ je produkt $\mathcal{M}\sigma \times \mathcal{M}\tau$, funkcijski tip $\sigma \to \tau$ pa se preslika v eksponentni objekt $\mathcal{M}\tau^{\mathcal{M}\sigma}$. Za vsako konstanto c teorije $\mathcal{M}$ izbere morfizme oblike $1 \to \mathcal{M}\tau_c$.

V λ-teorijah govorimo o izrazih v kontekstu. To modeliramo s pojmom interpretacije.

Definicija 4.2. Naj bo $\mathcal{M}$ T-struktura λ-teorije $\mathbb{T}$ v zaprti kartezični kategoriji $\mathbf{C}$, tedaj lahko vsakemu λ-izrazu t v kontekstu Γ tipa τ ($\Gamma \vdash t : \tau$) priredimo *interpretacijo* (morfizem) v strukturi $\mathcal{M}$, ki jo označimo z $[\![\Gamma \vdash t : \tau]\!]_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}\Gamma \to$

$\mathcal{M}\tau$. Pri tem z $\mathcal{M}\Gamma$ označimo produkt tipov spremenljivk, ki nastopajo v kontekstu. Če je le-ta prazen, ga preslikamo v 1 (enoto za produkt). Interpretacija λ-izrazov je definirana rekurzivno na naslednji način:

(1) Če je $t = x_i$ spremenljivka, tedaj:

$$[\![\Gamma \vdash x_i : \tau_i]\!]_{\mathcal{M}} = \pi_i : \mathcal{M}\Gamma \to \mathcal{M}\tau_i.$$

(2) Če je $t = c$ konstanta, tedaj:

$$[\![\Gamma \vdash c : \tau_c]\!]_{\mathcal{M}} = \mathcal{M}c \circ !_{\mathcal{M}\Gamma} : \mathcal{M}\Gamma \to \mathcal{M}\tau_c,$$

kjer je $\mathcal{M}c$ neki vnaprej izbrani morfizem konstante c (kot ga izbere $\mathcal{M}$).

(3) Če je $t = *$ enota, tedaj:

$$[\![\Gamma \vdash * : 1]\!]_{\mathcal{M}} = !_{\mathcal{M}\Gamma} : \mathcal{M}\Gamma \to 1.$$

(4) Če je $t = \langle s, u\rangle$ par, tedaj:

$$[\![\Gamma \vdash \langle s, u\rangle : \sigma \times \tau]\!]_{\mathcal{M}} = \langle [\![\Gamma \vdash s : \sigma]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\Gamma \vdash u : \tau]\!]_{\mathcal{M}}\rangle : \mathcal{M}\Gamma \to \mathcal{M}\sigma \times \mathcal{M}\tau.$$

(5) Če je $t = \pi_i s$ projekcija, tedaj:

$$[\![\Gamma \vdash \pi_i s : \tau_i]\!]_{\mathcal{M}} = \pi_i \circ [\![\Gamma \vdash s : \tau_1 \times \tau_2]\!]_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}\Gamma \to \mathcal{M}\tau_i.$$

(6) Če je $t = \lambda x : \tau.s$ abstrakcija, tedaj:

$$[\![\Gamma \vdash \lambda x : \tau.s : \tau \to \sigma]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\Gamma, x : \tau \vdash s : \sigma]\!]^{\sim}_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}\Gamma \to \mathcal{M}\sigma^{\mathcal{M}\tau},$$

kjer je $[\![\Gamma, x : \tau \vdash s : \sigma]\!]^{\sim}$ transponiranka morfizma:

$$[\![\Gamma, x : \tau \vdash s : \sigma]\!] : \mathcal{M}\Gamma \times \mathcal{M}\tau \to \mathcal{M}\sigma,$$

pri čemer predpostavimo, da $x \notin \Gamma$, sicer ustrezno preimenujemo vezano spremenljivko.

(7) Če je $t = (su)$, tedaj:

$$[\![\Gamma \vdash (su) : \sigma]\!]_{\mathcal{M}} = \epsilon \circ \langle [\![\Gamma \vdash s : \tau \to \sigma]\!]_{\mathcal{M}}, [\![\Gamma \vdash u : \tau]\!]_{\mathcal{M}}\rangle : \mathcal{M}\Gamma \to \mathcal{M}\sigma,$$

kjer je ϵ evaluacijski morfizem za eksponentni objekt $\mathcal{M}\sigma^{\mathcal{M}\tau}$.

Če lahko z nekim končnim zaporedjem sklepov iz osnovnih in lastnih enačb λ-teorije $\mathbb{T}$ dokažemo enakost dveh λ-izrazov ($t = u$), pravimo, da *teorija dokaže* enakost. Če se interpretaciji dveh λ-izrazov v strukturi $\mathcal{M}$ ujemata: $[\![\Gamma \vdash t : \tau]\!]_{\mathcal{M}} = [\![\Gamma \vdash u : \tau]\!]_{\mathcal{M}}$, pravimo da struktura $\mathcal{M}$ *zadosti* enakosti. Če struktura zadosti lastnim enačbam λ-teorije $\mathbb{T}$, pravimo, da je $\mathcal{M}$ *model* λ-teorije $\mathbb{T}$. Z indukcijo na izpeljavo enakosti dokazljivih enačb λ-izrazov v λ-teoriji $\mathbb{T}$ (pravila sklepanja ohranjajo enakosti), vidimo, da model zadosti vsaj enačbam, ki jih dokaže teorija (*lahko* pa še kaki več).

Oglejmo si korak indukcije v primeru ξ-enakosti:

$$\frac{\Gamma, x : \tau \vdash t = u : \sigma}{\Gamma \vdash (\lambda x : \tau.t) = (\lambda x : \tau.u) : \tau \to \sigma}$$

Po indukcijski predpostavki tedaj velja $[\![\Gamma, x : \tau \vdash t : \sigma]\!] = [\![\Gamma, x : \tau \vdash u : \sigma]\!]$, zato sta tudi transponiranki interpretacij enaki. Torej, $[\![\Gamma \vdash \lambda x : \tau.t : \tau \to \sigma]\!] = [\![\Gamma, x : \tau \vdash t : \sigma]\!]^{\sim} = [\![\Gamma, x : \tau \vdash u : \sigma]\!]^{\sim} = [\![\Gamma \vdash \lambda x : \tau.u : \tau \to \sigma]\!]$, kar pomeni da se ξ-ekvivalenca ohranja. Za pravila η in β si lahko zelo podroben dokaz ogledamo v [8, lema 11.2 in izrek 11.2], ostala pravila pa dokažemo podobno kakor zgoraj.

S tem smo tudi prišli do enega izmed ključnih izrekov tega dela, namreč:

Izrek 4.3 (Izrek o polnosti in zdravju)**.** *λ-teorija $\mathbb{T}$ dokaže enačbo $\Gamma \vdash t = u : \tau$, natanko tedaj, ko vsi modeli teorije $\mathbb{T}$ zadostijo enačbi.*

Dokaz v eno smer smo že premislili – modeli zadostijo vsaj dokazljivim enačbam. Semantika je tako zdrava. Poglejmo si še implikacijo v drugo smer, torej polnost semantike.

Hitro vidimo, da bi nam koristil nekakšen minimalen model – če bi bilo možno, celo takšen, ki enači natanko tiste λ-izraze, ki jih enači λ-teorija. Takim modelom pravimo univerzalni modeli in se v logiki pogosto pojavijo. V ta namen poskusimo vpeljati semantično kategorijo.

Definicija 4.4. Naj bo $\mathbb{T}$ λ-teorija. Tedaj definiramo *sintaktično kategorijo $S(\mathbb{T})$*, katere objekti so tipi teorije $\mathbb{T}$, morfizmi pa ekvivalenčni razredi relacije dokazljive enakosti λ-izrazov v kontekstu: $x : \tau \vdash t : \sigma$. Operacijo komponiranja definiramo s substitucijo – pri danih morfizmih oblike $x : \tau \vdash t : \sigma$ in $y : \sigma \vdash u : \varphi$ je kompozicija torej $x : \tau \vdash u[y := t] : \varphi$. Morfizem identitete je tedaj očitno $x : \tau \vdash x : \tau$.

Opomba 4.5. To, da je relacija dokazljive enakosti ekvivalenčna, je lahko videti. V ta namen uporabimo točno tiste tri osnovne enačbe, s katerimi smo hoteli zagotoviti ekvivalenčnost (prve tri enačbe).

Opomba 4.6. Z uporabo leme o ohranitvi tipov 2.16 in indukcijo se prepričamo, da je kompozicija dobro definirana.

Naj bosta izraza t in s enaka, torej $x : \tau \vdash t = s : \sigma$. Videli bi radi, da $x : \tau \vdash u[y := t] = u[y := s] : \varphi$. To dokažemo z indukcijo na strukturo izraza u.

Na drugi strani imamo izraza u in v, tako da $y : \sigma \vdash u = v : \varphi$. Kot prej bi radi videli, da je $x : \tau \vdash u[y := t] = v[y := s] : \varphi$. To dokažemo z indukcijo na dokaz enakosti izrazov u in v.

Opomba 4.7. Vemo, da λ-teorija lahko enači λ-izraze tipizirane nad kontekstom z več kot le eno spremenljivko, vendar je lahko videti, da se interpretaciji $[\![x : \tau_1, y : \tau_2 \vdash t : \sigma]\!]$ in $[\![w : \tau_1 \times \tau_2 \vdash t[x := \pi_1 w, y := \pi_2 w] : \sigma]\!]$ ujemata – ta postopek ponavljamo za kontekst z večimi spremenljivkami.

Lema 4.8. *$S(\mathbb{T})$ je zaprta kartezična kategorija*

Dokaz.

- Začnimo s končnim objektom. V kategoriji $S(\mathbb{T})$ je končni objekt 1. Naj bo $\sigma \in \Pi$, tedaj je $x : \sigma \vdash * : 1$ morfizem $\sigma \to 1$. Po definiciji $S(\mathbb{T})$ so morfizmi ekvivalenčni razredi λ-izrazov in ena izmed osnovnih enačb nam pove, da je vsak λ-izraz tipa 1 enak enoti $\Gamma \vdash t = * : 1$ – torej je 1 res končni objekt v kategoriji $S(\mathbb{T})$.
- Vzemimo par objektov $\sigma, \tau \in S(\mathbb{T})$. Njun produkt je tip $\sigma \times \tau$ z morfizmoma $x : \sigma \times \tau \vdash \pi_1 x : \tau$ in $x : \sigma \times \tau \vdash \pi_2 x : \sigma$. Naj bosta $z : \varphi \vdash t : \sigma$ in $z : \varphi \vdash u : \tau$. Želeli bi videti, da obstaja morfizem $\varphi \to \sigma \times \tau$, ki zadošča enačbam iz definicije 3.31. Vemo, da obstaja $z : \varphi \vdash \langle t, u \rangle : \sigma \times \tau$, za katerega osnovne enačbe λ-računa povejo $z : \varphi \vdash \pi_1 \langle t, u \rangle = t : \sigma$ in $z : \varphi \vdash \pi_2 \langle t, u \rangle = u : \tau$. Za vsak morfizem $h : \varphi \to \sigma \times \tau$ pa vemo $z : \varphi \vdash \langle \pi_1 h, \pi_2 h \rangle = h : \sigma \times \tau$. Torej izbrani objekt zadošča enačbam za produkte.
- Ponovno vzemimo par objektov $\sigma, \tau \in S(\mathbb{T})$ in dokažimo, da je $\sigma \to \tau$ eksponentni objekt z morfizmom evaluacije $\epsilon := x : (\sigma \to \tau) \times \sigma \vdash (\pi_1 x)(\pi_2 x) : \tau$. Naj bo $h = p : \varphi \times \sigma \vdash t : \tau$, za njegovo transponiranko $\tilde{h}$ razglasimo

morfizem $z : \varphi \vdash \lambda x : \sigma.t[p := \langle z, x\rangle] : \sigma \to \tau$. Radi bi videli, da velja $\epsilon \circ (\tilde{h} \times 1_\sigma) = h$.

$$\begin{aligned}
\epsilon \circ (\tilde{h} \times 1_\sigma) &= \epsilon \circ [p : \varphi \times \sigma \vdash \langle (\lambda x : \tau.t[p := \langle \pi_1 p, x\rangle]), \pi_2 p\rangle : (\sigma \to \tau \times \sigma)] \\
&= [p : \varphi \times \sigma \vdash (\pi_1 x)(\pi_2 x)[x := \langle (\lambda x : \tau.t[p := \langle \pi_1 p, x\rangle]), \pi_2 p\rangle] : \tau] \\
&= [p : \varphi \times \sigma \vdash (\lambda x : \tau.t[p := \langle \pi_1 p, x\rangle])\pi_2 p : \tau] \\
&= [p : \varphi \times \sigma \vdash t[p := \langle \pi_1 p, \pi_2 p\rangle] : \tau] \\
&= [p : \varphi \times \sigma \vdash t[p := p] : \tau] \\
&= [p : \varphi \times \sigma \vdash t : \tau] = h
\end{aligned}$$

Torej $\epsilon \circ (\tilde{h} \times 1_\sigma) = h$. Naj bo $z : \varphi \vdash s : \sigma \to \tau$, ki zadosti enačbi $(s[z := \pi_1 p])(\pi_2 p) = t$. Videli bi radi, da je tedaj $s = \lambda x : \sigma.t[p := \langle z, x\rangle]$.

$$\begin{aligned}
t[p := \langle z, x\rangle] &= ((s[z := \pi_1 p])(\pi_2 p))[p := \langle z, x\rangle] \\
&= (s[z := \pi_1\langle z, x\rangle])(\pi_2\langle z, x\rangle) \\
&= (s[z := z])x = sx
\end{aligned}$$

Kar pomeni, da velja $\lambda x : \sigma.t[p := \langle z, x\rangle] = \lambda x : \sigma.sx = s$. Torej je transponirani morfizem enolično določen.

Po definiciji 3.31 je $S(\mathbb{T})$ zaprta kartezična kategorija □

Po definiciji $S(\mathbb{T})$ vemo, da T-struktura $\mathcal{M}_\mathbb{T}$, ki pošlje bazične tipe teorije v bazične tipe v $S(\mathbb{T})$, zadosti natanko enačbam, ki jih dokaže λ-teorija $\mathbb{T}$. Torej izrek 4.3 velja.

Definicija modelov nas hitro spomni na funktorje. Poglejmo ali bi se modelu dalo pridružiti zaprt kartezični funktor $F : S(\mathbb{T}) \to \mathbf{C}$. Modelu $\mathcal{M}$ priredimo funktor $F^\mathcal{M} : S(\mathbb{T}) \to \mathbf{C}$, ki slika tipe (objekte $S(\mathbb{T})$) tako:

$$\tau \mapsto \mathcal{M}\tau$$

in ekvivalenčne razrede λ-teorije (morfizme v $S(\mathbb{T})$) v $\mathcal{M}$ interpretacije, torej:

$$[x : \tau \vdash t : \sigma] \mapsto [\![x : \tau \vdash t : \sigma]\!]_\mathcal{M}$$

Ker vsi modeli zadostijo vsaj enačbam, ki jim zadosti teorija, je $F^\mathcal{M}$ kot preslikava dobro definiran. Preverimo, da $F^\mathcal{M}$ zadosti pogojem za funktorje. Morfizem identitete očitno preslika v identiteto ($[\![x : \tau \vdash x : \tau]\!]_\mathcal{M} = \pi_1 : \mathcal{M}\tau \times 1 \to \mathcal{M}\tau = 1_{\mathcal{M}\tau}$). Preverimo še operacijo komponiranja:

$$\begin{aligned}
&F^\mathcal{M}([x : \tau \vdash t : \sigma]) \circ F^\mathcal{M}([u : \varphi \vdash v : \tau]) = \\
&= [\![x : \tau \vdash t : \sigma]\!]_\mathcal{M} \circ [\![u : \varphi \vdash v : \tau]\!]_\mathcal{M} \\
&= \epsilon \circ \langle [\![x : \tau \vdash t : \sigma]\!]^{\sim}_\mathcal{M}, [\![u : \varphi \vdash v : \tau]\!]_\mathcal{M}\rangle \\
&= \epsilon \circ \langle [\![\vdash (\lambda x : \tau.t) : \tau \to \sigma]\!]_\mathcal{M}, [\![u : \varphi \vdash v : \tau]\!]_\mathcal{M}\rangle \\
&= [\![u : \varphi \vdash (\lambda x : \tau.t)v : \sigma]\!]_\mathcal{M} \\
&= [\![u : \varphi \vdash t[x := v] : \sigma]\!]_\mathcal{M} \\
&= F^\mathcal{M}([x : \tau \vdash t : \sigma] \circ [u : \varphi \vdash v : \tau])
\end{aligned}$$

Torej je $F^\mathcal{M}$ korektno definiran funktor. Velja obratno, vsakemu CC funktorju $F : S(\mathbb{T}) \to \mathbf{C}$ lahko na naraven način priredimo model $\mathcal{M}^F$, ki slika bazične tipe teorije kot funktor F in za morfizme konstant vzamemo $F([\vdash c : \tau_c])$.

V soju tega razmisleka lahko brez večjih moralnih zadržkov uvedemo naslednjo definicijo:

Definicija 4.9. Model λ-teorije $\mathbb{T}$ v zaprti kartezični kategoriji $\mathbf{C}$ je zaprt kartezičen funktor $F : S(\mathbb{T}) \to \mathbf{C}$.

Morfizmi modelov so tedaj natanko naravne transformacije funktorjev.

4.1. **λThr in kategorija majhnih zaprtih kartezičnih kategorij.** V teoriji kategorij se pogosto pojavi težnja po organizaciji različnih struktur v kategorije. Naredimo sedaj to za λ-teorije, za kar je potrebno definirati primeren pojem morfizma med dvema λ-teorijama. V ta namen uvedimo *prevode*.

Definicija 4.10. Prevod $\xi : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ iz λ-teorije $\mathbb{T}$ v λ-teorijo $\mathbb{U}$ je podan s preslikavo nad tipi in preslikavo nad izrazi:

- Definiramo preslikavo iz baričnih tipov $\mathbb{T}$ v tipe $\mathbb{U}$, ki jo razširimo na vse tipe $\mathbb{T}$ na naraven način.
- Definiramo preslikavo iz konstant teorije $\mathbb{T}$ tako, da vsaki konstanti c priredimo izraz ξc tipa $\xi\tau_c$ v $\mathbb{U}$. Razširimo jo na vse izraze teorije $\mathbb{T}$ na naslednji način:

$$\begin{aligned} \xi(\pi_i t) &= \pi_i \xi t \\ \xi\langle t, u\rangle &= \langle \xi t, \xi u\rangle \\ \xi(tu) &= (\xi t)(\xi u) \\ \xi(\lambda x : \tau . t) &= \lambda x : \xi\tau . \xi t \\ \xi x &= x \qquad \text{če je } x \text{ spremenljivka} \end{aligned}$$

Kontekst je preveden po komponentah (oz. $\xi(\Gamma) = \xi \circ \Gamma$). Nadalje zahtevamo, da prevod ohranja osnovne in lastne enačbe teorije $\mathbb{T}$. Torej izraze ki jih enači teorija $\mathbb{T}$ v kontekstu Γ, preslikamo v izraze, ki jih enači teorija $\mathbb{U}$ v kontekstu $\xi\Gamma$.

Kompozicija dveh prevodov je kompozicija dveh funkcij, zato je asociativna. Zanimiva je opazka, da so prevodi v resnici modeli teorije $\mathbb{T}$ v kategoriji $S(\mathbb{U})$. Med dvema prevodoma lahko definiramo analog naravne transformacije. Naj bosta ξ in ζ prevoda $\mathbb{T} \to \mathbb{U}$. *Naravna transformacija* $t : \xi \to \zeta$, je družina izrazov t_τ v teoriji $\mathbb{U}$ $(x : \xi\tau \vdash t_\tau : \zeta\tau)$, tako da za vsak nadaljnji izraz u v teoriji $\mathbb{T}$ $(y : \tau \vdash u : \sigma)$ velja $x : \xi\tau \vdash (\zeta u)[y := t_\tau] = t_\sigma[x := (\xi u)] : \zeta\sigma$.

Dvem teorijam pravimo, da sta ekvivalentni, če obstajata dva prevoda $\xi : \mathbb{T} \leftrightarrow \mathbb{U} : \zeta$ tako, da obstajajo izomorfizmi tipov $\xi\zeta\tau \cong \tau$ in $\zeta\xi\sigma \cong \sigma$. Ti izomorfizmi morajo biti naravni, torej podajajo naravni transformaciji prevodov $\xi\zeta \to 1$ in $\zeta\xi \to 1$.

Definicija 4.11. λ**Thr** je kategorija, katere objekti so λ-teorije in morfizmi so prevodi.

Če na λ-teorije pogledamo z drugega konca spektra, lahko vidimo, da vsaki CCC lahko priredimo neko λ-teorijo. Naj bo $\mathbf{C}$ majhna zaprta kartezična kategorija. Definirajmo λ-teorijo $\mathbb{L}(\mathbf{C})$, kateri rečemo *notranji jezik* kategorije $\mathbf{C}$:

- Za vsak objekt $A \in \mathbf{C}_0$ definiramo bazični tip $\ulcorner A \urcorner$ (tej notaciji ne moremo pobegniti, če želimo ločiti med $\ulcorner A \times B \urcorner$ in $\ulcorner A \urcorner \times \ulcorner B \urcorner$).
- Za vsak morfizem $f : A \to B$ definiramo konstanto $\ulcorner f \urcorner$, katere tip je $\ulcorner A \urcorner \to \ulcorner B \urcorner$.

- Za morfizme identitet dodamo lastno enačbo: $x : \ulcorner A \urcorner \vdash \ulcorner 1_A \urcorner x = x : \ulcorner A \urcorner$, ki pove da je aplikacija konstante $\ulcorner 1_A \urcorner$ na spremenljivko tipa $\ulcorner A \urcorner$ enaka kar spremenljivki sami.
- Za morfizme $f : A \to B, g : B \to C$ in $h : A \to C$, ki ustrezajo enačbi $h = g \circ f$, dodamo lastno enačbo $x : \ulcorner A \urcorner \vdash \ulcorner h \urcorner x = \ulcorner g \urcorner (\ulcorner f \urcorner x) : \ulcorner C \urcorner$.
- Definiramo naslednje konstante:

$$\begin{aligned} \mathtt{T} &: 1 \to \ulcorner 1 \urcorner \\ \mathtt{P}_{A,B} &: \ulcorner A \urcorner \times \ulcorner B \urcorner \to \ulcorner A \times B \urcorner && \text{za vse } A, B \in \mathbf{C}_0 \\ \mathtt{E}_{A,B} &: (\ulcorner A \urcorner \to \ulcorner B \urcorner) \to (\ulcorner A^B \urcorner) && \text{za vse } A, B \in \mathbf{C}_0 \end{aligned}$$

  Ter dodamo še naslednje lastne enačbe:

$$\begin{aligned} x : \ulcorner 1 \urcorner &\vdash T* = x : \ulcorner 1 \urcorner \\ x : \ulcorner A \times B \urcorner &\vdash P_{A,B} \langle \ulcorner \pi_0 \urcorner x, \ulcorner \pi_1 \urcorner x \rangle = x : \ulcorner A \times B \urcorner \\ x : \ulcorner A \urcorner \times \ulcorner B \urcorner &\vdash \langle \ulcorner \pi_0 \urcorner (P_{A,B} x), \ulcorner \pi_1 \urcorner (P_{A,B} x) \rangle = x : \ulcorner A \urcorner \times \ulcorner B \urcorner \\ f : \ulcorner B^A \urcorner &\vdash E_{A,B}(\lambda x : \ulcorner A \urcorner . (\ulcorner \epsilon \urcorner (P_{A,B} \langle f, x \rangle))) = f : \ulcorner A^B \urcorner \\ f : \ulcorner A \urcorner \to \ulcorner B \urcorner &\vdash \lambda x : \ulcorner A \urcorner . (\ulcorner \epsilon \urcorner (P_{A,B} \langle (E_{A,B} f), x \rangle)) = f : \ulcorner A \urcorner \to \ulcorner B \urcorner \end{aligned}$$

  Tako zagotovimo izomorfizme med tipi $1 \cong \ulcorner 1 \urcorner$, $\ulcorner A \times B \urcorner \cong \ulcorner A \urcorner \times \ulcorner B \urcorner$ in $\ulcorner B^A \urcorner \cong \ulcorner A \urcorner \to \ulcorner B \urcorner$.

Če vzamemo na kup majhne zaprte kartezične kategorije in zaprte kartezične funktorje, dobimo kategorijo **Ccc**. Prej opisani postopek lahko razširimo na funktorje tako, da jih predelamo v prevode in na tak način dobimo funktor $\mathbb{L} : \mathbf{Ccc} \to \lambda\mathbf{Thr}$. Oglejmo si torej, kako CC funktorju $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ pridelamo prevod:

- Bazični tip $\ulcorner A \urcorner$ pošljemo v $\ulcorner FA \urcorner$.
- Konstanto $\ulcorner f \urcorner$ pošljemo v $\ulcorner Ff \urcorner$.
- Konstanto $\mathtt{T}$ preslikamo v $\mathtt{T}$, $\mathtt{P}_{A,B}$ v $\mathtt{P}_{FA,FB}$ in $\mathtt{E}_{A,B}$ v $\mathtt{E}_{FA,FB}$.

Tako definiran postopek očitno pošlje identiteto v identiteto, ter komutira s komponiranjem.

Z druge strani imamo že definiran postopek, kako pridobiti (sintaktično) kategorijo iz λ-teorije. Razširimo ga še na prevode tako, da dobimo funktor $S : \lambda\mathbf{Thr} \to \mathbf{Ccc}$. Prevodu $\xi : \mathbb{T} \to \mathbb{U}$ priredimo funktor, ki preslika bazične tipe $\tau \in S(\mathbb{T})_0$ v $\xi\tau \in S(\mathbb{U})_0$, morfizme konstant $[x : 1 \vdash c : \tau_c]$ preslika v $[x : 1 \vdash \xi c : \xi\tau_c]$. Ostalo strukturo prenesemo na naraven način.

V luči teh dveh funktorjev (in prejšnjih izrekov) bi morda hoteli pokazati, da sta kategoriji ekvivalentni, vendar bi se hitro zaleteli v zid – namreč dvakrat preslikana kategorija $S(\mathbb{L}(\mathbf{C}))$ ima lahko *mnogo* več objektov kot originalna. Vseeno pa se nam zdi, da sta kategoriji zelo podobni. To domnevo povemo v naslednjem izreku:

Izrek 4.12. *Funktorja $S : \lambda\mathbf{Thr} \to \mathbf{Ccc}$ in $\mathbb{L} : \mathbf{Ccc} \to \lambda\mathbf{Thr}$ inducirata ekvivalenco kategorij do ekvivalence natančno. Torej za vsako kategorijo $\mathbf{C} \in \mathbf{Ccc}_0$ velja: $\mathbf{C} \simeq S(\mathbb{L}(\mathbf{C}))$ in vsako teorijo $\mathbb{T} \in \lambda\mathbf{Thr}_0$ velja: $\mathbb{T} \simeq \mathbb{L}(S(\mathbb{T}))$.*

Dokaz. Za majhno zaprto kartezično kategorijo $\mathbf{C}$ definirajmo funktor $\eta_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to S(\mathbb{L}(\mathbf{C}))$, ki slika objekte $A \in \mathbf{C}_0$ v bazični tip $\ulcorner A \urcorner$ in morfizme $f : A \to B$ v ekvivalenčni razred $[x : \ulcorner A \urcorner \vdash \ulcorner f \urcorner x : \ulcorner B \urcorner]$. Zaradi dodanih lastnih enačb teoriji prirejeni kategoriji $\mathbf{C}$ tako definirana preslikava preslika identiteto v identiteto in komutira s komponiranjem, torej je funktor – še več, iz istega razloga je ta funktor zvest in poln. Dokažimo še, da je v bistvu surjektiven. Naj bo $X \in S(\mathbb{L}(\mathbf{C}))_0$

objekt, želeli bi pokazati da obstaja objekt $\theta_{\mathbf{C},X} \in \mathbf{C}_0$, katerega slika je izomorfna X. Tak objekt definiramo rekurzivno na strukturo X:

$$
\begin{aligned}
\theta_{\mathbf{C},1} &= 1 \\
\theta_{\mathbf{C},\ulcorner A \urcorner} &= A \\
\theta_{\mathbf{C},Y\times Z} &= \theta_{\mathbf{C},Y} \times \theta_{\mathbf{C},Z} \\
\theta_{\mathbf{C},Y\to Z} &= (\theta_{\mathbf{C},Z})^{\theta_{\mathbf{C},Y}}
\end{aligned}
$$

Izomorfizmi tipov se prenesejo skupaj s funktorjem S v izomorfizme objektov, torej bo tako definiran objekt res primeren, zato je $\eta_{\mathbf{C}}(\theta_{\mathbf{C},X}) \cong X$.

Pri dani teoriji $\mathbb{T}$ definiramo prevod $\xi_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \to \mathbb{L}(S(\mathbb{T}))$, ki "doda oklepaje":

$$
\begin{aligned}
\xi_{\mathbb{T}}\tau &= \ulcorner \tau \urcorner && \text{za bazični tip } \tau \\
\xi_{\mathbb{T}}c &= \ulcorner [x : \ulcorner 1 \urcorner \vdash c : \xi_{\mathbb{T}}\tau_c] \urcorner && \text{za konstanto tipa } \tau_c
\end{aligned}
$$

V drugo smer je potrebno definirati prevod $\zeta_{\mathbb{T}} : \mathbb{L}(S(\mathbb{T})) \to \mathbb{T}$, ki "odstrani oklepaje":

$$
\begin{aligned}
\zeta_{\mathbb{T}}\ulcorner \tau \urcorner &= \tau && \text{za bazični tip } \ulcorner \tau \urcorner \\
\zeta_{\mathbb{T}}\ulcorner [x : \sigma \vdash c : \tau_c] \urcorner &= \lambda x : \zeta_{\mathbb{T}}\sigma . c && \text{za konstanto tipa } \sigma \to \tau_c
\end{aligned}
$$

pri čemer dodane konstante $\mathtt{T}, \mathtt{P}_{A,B}$ in $\mathtt{E}_{A,B}$ preslika v $\lambda x : \tau . x$ (kjer je τ tip enote, produktni tip ali funkcijski tip). Iz konstrukcije je očitno, da za tip τ velja $\zeta_{\mathbb{T}}(\xi_{\mathbb{T}}\tau) = \tau$ in prevod $\zeta_{\mathbb{T}} \circ \xi_{\mathbb{T}}$ je očitno naravno izomorfen identičnemu prevodu. Izomorfizem v drugo smer ($\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}\tau) \cong \tau$) preverimo induktivno:

- če je $X = 1$, potem je $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}1) = 1$;
- če je $X = \ulcorner \tau \urcorner$ in τ tip v $\mathbb{T}$, dokažemo z indukcijo na strukturo τ:
  - če je $\tau = 1$, je $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}\ulcorner 1 \urcorner) = 1$, za ta izomorfizem smo poskrbeli s konstanto $\mathtt{T}$,
  - če je τ bazični tip, potem $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}\ulcorner \tau \urcorner) = \ulcorner \tau \urcorner$,
  - če je $\tau = \sigma \times \varphi$ bazični tip, potem $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}\ulcorner \sigma \times \varphi \urcorner) = \ulcorner \sigma \urcorner \times \ulcorner \varphi \urcorner$, za izomorfizem smo poskrbeli s konstanto $\mathtt{P}_{\sigma,\varphi}$,
  - če je $\tau = \sigma \to \varphi$, je $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}\ulcorner \sigma \to \varphi \urcorner) = \ulcorner \sigma \urcorner \to \ulcorner \varphi \urcorner$. Izomorfizem je konstanta $\mathtt{E}_{\sigma,\varphi}$;
- če je $\tau = \sigma \times \varphi$, potem $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}\sigma \times \varphi) = \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\sigma)) \times \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\varphi))$. Po indukcijski hipotezi vemo $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\sigma)) \cong \sigma$ in $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\varphi)) \cong \varphi$. Izomorfizem je sedaj $x : \sigma \times \varphi \vdash \langle t_1\pi_1 x, t_2\pi_2 x\rangle : \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\sigma)) \times \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\varphi))$ in $x : \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\sigma)) \times \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\varphi)) \vdash \langle u_1\pi_1 y, u_2\pi_2 y\rangle : \sigma \times \varphi$ (kjer so t_1, t_2, u_1 in u_2 izrazi dobljeni iz indukcijske hipoteze);
- če je $\tau = \sigma \to \varphi$, potem $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}} \to \varphi) = \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\sigma)) \to \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\varphi))$. Kot prej nam indukcijska hipoteza pove $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\sigma)) \cong \sigma$ in $\xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\varphi)) \cong \varphi$. Izraza za izomorfizem tipov sta: $x : \sigma \to \varphi \vdash \lambda z : \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\sigma)).t_2[x := x(t_1[x := z])] : \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\sigma)) \to \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\varphi))$ in $x : \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\sigma)) \to \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\varphi)) \vdash \lambda z : \xi_{\mathbb{T}}(\zeta_{\mathbb{T}}(\sigma)).u_2[x := x(u_1[x := z])] : \sigma \to \varphi$.

Naravnost teh izomorfizmov lahko preverimo z indukcijo na zgradbo izraza u, ki nastopa v definiciji naravnih transformacij prevodov. $\square$

4.2. **Objekti naravnih števil.** Izbrano λ-teorijo $\mathbb{T}$ lahko razširimo z objektom naravnih števil - tako lahko izrazimo vse primitivno rekurzivne funkcije. To storimo tako, da bazičnim tipom dodamo odlikovan tip `Nat` in konstante $\mathtt{primrec}_\tau$ tipa

$\tau \to (\tau \to \texttt{Nat} \to \tau) \to \texttt{Nat} \to \tau$ za vsak tip τ teorije $\mathbb{T}$, konstanti $0 : \texttt{Nat}$ ter $S : \texttt{Nat} \to \texttt{Nat}$. Za $\texttt{primrec}_\tau$ dodamo naslednji lastni enačbi:

$$t : \tau, u : \tau \to \texttt{Nat} \to \tau \vdash \texttt{primrec}_\tau\ t\ u\ 0 = t : \tau$$
$$t : \tau, u : \tau \to \texttt{Nat} \to \tau, v : \texttt{Nat} \vdash \texttt{primrec}_\tau\ t\ u\ (Sv) = u\ (\texttt{primrec}_\tau\ t\ u\ v)\ v : \tau$$

S temi konstantami lahko hitro ustvarimo λ-izraze, ki ustrezajo aritmetičnim operacijam.

Primer 4.13. Za operacijo $+$ v Peanovi aritmetiki veljata naslednji pravili:

$$x + 0 = x$$
$$x + Sy = S(x + y)$$

Za iskani λ-izraz postavimo $\texttt{plus} = \lambda x : \texttt{Nat}, y : \texttt{Nat}.\ \texttt{primrec}_{\texttt{Nat}}\ x\ (\lambda u : \texttt{Nat}, v : \texttt{Nat}.Su)\ y$. Preverimo, ali predlagani izraz zadosti aksiomom PA:

$$\begin{aligned}
\texttt{plus}\ x\ 0 &= \texttt{primrec}_{\texttt{Nat}}\ x\ (\lambda u : \texttt{Nat}, v : \texttt{Nat}.Su)\ 0 \\
&= x \\
\texttt{plus}\ x\ Sy &= \texttt{primrec}_{\texttt{Nat}}\ x\ (\lambda u : \texttt{Nat}, v : \texttt{Nat}.Su)\ (Sy) \\
&= (\lambda u : \texttt{Nat}, v : \texttt{Nat}.Su)\ (\texttt{primrec}_{\texttt{Nat}}\ x\ (\lambda u : \texttt{Nat}, v : \texttt{Nat}.Su)\ y)\ y \\
&= S(\texttt{primrec}_{\texttt{Nat}}\ x\ (\lambda u : \texttt{Nat}, v : \texttt{Nat}.Su) y) \\
&= S(\texttt{plus}\ x\ y)
\end{aligned}$$

Primer 4.14. Podobno lahko definiramo operacijo množenja:

$$\texttt{mult} = \lambda x : \texttt{Nat}, y : \texttt{Nat}.\ \texttt{primrec}_{\texttt{Nat}}\ 0\ (\lambda u : \texttt{Nat}, v : \texttt{Nat}.\texttt{plus}\ u\ v)\ y$$

in operacijo potenciranja:

$$\texttt{exp} = \lambda x : \texttt{Nat}, y : \texttt{Nat}.\texttt{primrec}_{\texttt{Nat}}\ (S0)\ (\lambda u : \texttt{Nat}, v : \texttt{Nat}.\texttt{mult}\ u\ v)\ y$$

Ker so tako definirane teorije le poseben primer splošnih λ-teorij, zanje veljajo vsi prej dokazani izreki. Vendar lahko zaradi posebne strukture ojačamo izreke. V ta namen uvedemo naslednji pojem.

Definicija 4.15. Objekt N je *objekt naravnih števil*, če velja, da obstaja morfizem $0 : 1 \to N$ in $S : N \to N$, tako da za vsak nadaljnji objekt X s takimi morfizmi obstaja morfizem $u : N \to X$, da spodnji diagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
& N \arrow[r, "S"] \arrow[d, "u"] & N \arrow[d, "u"] \\
1 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "f"'] & & \\
& X \arrow[r, "g"'] & X
\end{tikzcd}$$

Takim objektom pravimo tudi *šibki* objekti naravnih števil, saj ne zahtevamo enoličnosti morfizmov $N \to X$.

Če pogledamo sintaktično kategorijo, vidimo, da je tip $\texttt{Nat}$ skupaj z morfizmoma $[\vdash 0 : \texttt{Nat}]$ in $[n : \texttt{Nat} \vdash Sn : \texttt{Nat}]$ objekt naravnih števil. Morfizem oblike $n : \texttt{Nat} \vdash \texttt{primrec}_\tau\ f\ (\lambda u : \tau, v : \texttt{Nat}.(\lambda x : \tau.g)u)\ n$ pa je po zaslugi dodanih enačb iskani morfizem u. Velja še več: v izreku 4.12 lahko kategorijo **Ccc** nadomestimo s kategorijo $\mathbf{Ccc}_N$, ki ima za objekte majhne CCC kategorije, ki vsebujejo objekt naravnih števil in CC funktorje, ki ga ohranjajo, za morfizme.

Če za izraze $\mathtt{primrec}_\tau$ definiramo η-ekvivalenco, dobimo *močni* objekt naravnih števil (v Γ sta vsebovana vsaj $t : \tau$ in $u : \tau \to (\mathtt{Nat} \to \tau)$):

$$\frac{\Gamma \to \tau \vdash f\ t\ u\ 0 = t : \tau \qquad \Gamma, v : \mathtt{Nat} \vdash f\ t\ u\ (Sv) = u\ (f\ t\ u\ v)\ v : \tau}{\Gamma \vdash f = \mathtt{primrec}_\tau : \tau \to (\tau \to \mathtt{Nat} \to \tau) \to \mathtt{Nat} \to \tau}$$

Tedaj je prej izpisani morfizem u enolično določen.

4.3. **Zgodovinski pregled semantike λ-računa.** Definicijo modela iz prejšnjega razdelka lahko posplošimo. Struktura $\mathcal{M}$ naj tipom priredi objekte kategorije $\mathbf{C}$ *na nekakšen način* – za $\mathbf{C}$ ne zahtevamo, da je zaprta kartezična kategorija. Prej definiranemu modelu pravimo *standardni* model.

Kratek pregled zgodovine semantike λ-računa je podan v [2]. Če opustimo zahtevo, da je model standarden, je Henkin že v 50. letih, pokazal, da obstaja poln nestandarden sistem **Set** modelov. Friedman je pokazal, da za vsako λ-teorijo obstaja standardni model v **Set**, ki je poln in zdrav, če je λ-teorija osnoven λ-račun z enim bazičnim tipom. Plotkin je to nadgradil in pokazal, da zadostujejo že posebne kategorije delno urejenih množic. Friedmanov izrek je do meje pripeljal Čubrić, ki je pokazal, da velja tudi za λ-teorije z dodanimi konstantami, brez enačb – to pa je tudi konec poti za **Set** semantiko, razlog zakaj smo videli v razdelku 2.3.

Z Yonedovim izrekom se da pokazati, da kategorija vseh predsnopov $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}}$ že zadošča za izrek o polnosti in zdravju. Moggi in Mitchell pa sta pokazala, da je zadosti vzeti že samo funktorje iz posetov. Awodey omeji njun izrek in dokaže, da obstaja polna semantika nad kategorijo snopov nad topološkim prostorom [2].

Literatura

[1] S. Awodey in A. Bauer, *Introduction to categorical logic*, zapiski s predavanj *Kategorna logika.*

[2] S. Awodey, *Topological representation of the lambda calculus*, Math. Struct. in Comp. Science **10** (2000) 81–96.

[3] ———, *Category theory*, Oxford logic guides **49**, Oxford University Press, New York, 2006.

[4] H. P. Barendregt, *The lambda calculus, its syntax and semantics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics **103**, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[5] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Graduate texts in mathematics **5**, Springer, New York, 1998.

[6] J. Lambek in P. J. Scott, *Introduction to higher-order categorical logic*, Cambridge studies in advanced mathematics **7**, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[7] D. Scott, *Relating theories of the lambda calculus*, v: To H. B. Curry : Essays in Combinatory Logic, lambda calculus and Formalisms (ur. R. Hindley in J. Seldin), Academic Press, London, 1980, str. 403-450.

[8] T. Streicher, *Introduction to category theory and categorical logic*, [ogled: 24.09.2011], dostopno na `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/CTCL.pdf`.

[9] M. Sorensen in P. Urzyczyn, *Lectures on the Curry-Howard isomorphism*, [ogled 13.09.2011], dostopno na `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.107.3462`.

[10] A. S. Troelstra in H. Schwichtenberg, *Basic proof theory*, Cambridge tracts in theoretical computer science **43**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.