UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Irena Matkovič

Geometrija ploskev

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Sašo Strle

Ljubljana, 2010

Kazalo

Povzetek

Namen seminarja je predstaviti geometrijo sklenjenih orientabilnih ploskev. Delo je razdeljeno v tri vsebinske sklope. Prvi nas seznanja z večini ploskev lastno hiperbolično geometrijo, uvede Poincaréjev model kot njeno realizacijo v evklidskem prostoru in opiše izometrije hiperbolične ravnine. V nadaljevanju se nato povsem posvetimo topološki interpretaciji geometrije. V drugem delu njen pomen razložimo elementarno, zgolj na osnovi geometrijske strukture in algebraičnih razmerij, v zaključnem pa se navežemo na običajen pogled algebraične topologije, ki poda hiperbolično ravnino kot univerzalni krovni prostor sklenjenih ploskev. Objemajoči krajši poglavji prinašata pogled od daleč, uvodno obudi zgodovino spoznavanja ukrivljenih prostorov, zaključno opozori na pomen geometrije v klasifikaciji 3-mnogoterosti.

Abstract

The aim of the present work is to introduce the geometry of closed orientable surfaces. The body consists of three chapters, numbered 2, 3, and 4. In the first one we get acquainted with the hyperbolic geometry that most of the above mentioned surfaces exhibit. Also, the Poincaré disc model (that is, the realization of hyperbolic geometry in a Euclidean space) is introduced, and isometries of the hyperbolic plane are described. In the sequel we focus on the topological interpretation of geometry. In Chapter 3 we explain it in an elementary way, taking into account only the geometric structure and algebraic relations. In Chapter 4 we adopt the way the algebraic topology sees the hyperbolic plane: as a covering space of a closed surface. The two (shorter) outermost chapters present two distant views of the problem. The introductory one provides the history of perceiving the curved spaces, and the final one points out the significance of geometry in the classification of 3-manifolds.

Math. Subj. Class. (2010): 51M10, 57M10
Ključne besede: hiperbolična geometrija, ploskev, grupa tlakovanj, krovni prostor
Keywords: hyperbolic geometry, surface, group of tessellations, covering space

1. Iz niča

Geometrija ploskev – ploskve, ki nas bodo zanimale, so sklenjene orientabilne 2-mnogoterosti (rodu večjega kot 1). Njihova geometrija pa ... Ta je najlepše razvidna iz negativne Eulerjeve karakteristike in s pomočjo Gauss-Bonnetovega izreka in je hiperbolična. Vendar pa je – kot bomo videli – ta Geometrija več kot le integral ukrivljenosti po sklenjeni ploskvi. Določa namreč njihov do izomorfizma edini univerzalni krovni prostor. Vsekakor pa je hiperbolična geometrija kljub svoji vsenavzočnosti – očitno je lastna večini 2-mnogoterosti – še vedno prečudno nova.

Današnje pretežno analitično gledišče v okvir ploskve sicer izrisuje raznotere oblike zmečkanega prta in se zdi ukrivljenost pomemben razločevalni element. A se zanikanju petega Evklidovega aksioma še vedno upira naravnost geometrijskih skic. Očitna – nehote priučena – nujnost po ravnih premicah. Na papir izpisana samoumevnost narave!

A kljub temu je prisotna odsotnost ukrivljenih svetov vseskozi vzbujala dvom. Premice brez skupnih točk – vzporednice ... Očitnost obstoja natanko ene vzporednice k dani premici skozi dano točko v ravnini bi morala biti izpeljana in ne postavljena. Vsesplošna človeška zavest se je tako krhala ob neuspelih dokazovanjih Proclusa, Wallisa, Saccherija, Clairauta, Legendra in Lamberta ter se trdovratno upirala zavrnitvi z mnogimi ekvivalentnimi formulacijami. Dokler ni bila dokončno odrezana vsaj iz znanstvenega sveta.

„Semmiből egy újj más világot teremtettem.“ János Bolyai*

Tako se je v začetku 19. stoletja z Bolyaijevo objavo, Gaussovimi razmišljanji in karakterizacijo Lobačevskega prekinilo tisoč letno prizadevanje, da bi dokazali protislovnost prostora, v katerem ne privzamemo petega Evklidovega aksioma o vzporednicah. Z njegovo negacijo sta se izoblikovala dva nova svetova – dve novi ravninski geometriji: sferična in hiperbolična. Pri tem so hiperbolični prostori tisti, v katerih obstajata premica in točka, skozi katero potekata vsaj dve vzporednici. Sicer pa je hiperbolična ravnina aksiomatično podana z istimi postavkami kot evklidska.

Aksiomi hiperbolične ravnine (s pridihom Evklida):

(1) Dve različni točki določata natanko eno premico.
(2) Premica je neomejena – daljico lahko podaljšamo v neskončnost.
(3) Obstajajo krožnice poljubnega polmera s poljubnim središčem.
(4) Vsi pravi koti so med seboj skladni.
(5) Obstajata premica in taka točka izven nje, da skoznjo potekata vsaj dve vzporednici k dani premici.

Sedaj pa se na hiperbolično geometrijo še enkrat ozrimo kot na tisti prečudni novi svet. Človekovo trdnost je s pripadajočo metriko Minkowskega še enkrat omajala, ko je v začetku 20. stoletja postala temelj prostora-časa v teoriji relativnosti. Hkrati pa s svojo doseženo neskončnostjo izziva umetnost ...

2. Opis hiperbolične geometrije

Razmišljanje o hiperbolični geometriji prehaja med zgodovinsko motiviranim opazovanjem sistema aksiomov in diferencialno geometričnim spremljanjem pojavov na ukrivljenih ploskvah. Zanimive pa so tudi različne ponazoritve hiperbolične ravnine v 2-dimenzionalnem evklidskem prostoru, ki izkoriščajo značilnosti kompleksne ravnine.

*Iz niča sem ustvaril nov drugačen svet.

2.1. **Osnovne poteze hiperboličnih ploskev.** Najprej bomo raziskali prepletenost in povezanost obeh znanstvenih pogledov na hiperbolične ploskve ter pokazali na tisto, v čemer jih vidita kot drugačne in posebne.

Diferencialna geometrija (opiramo se na [8]), ki opazuje izometrične razrede ploskev, svojo delitev gradi na razlikah v ukrivljenosti. Gaussova ukrivljenost je namreč po Gaussovem Theorema Egregium izrazljiva s koeficienti prve fundamentalne forme in zato izometrično invariantna. Tako lahko hiperbolične ploskve vidimo kot ploskve z negativno ukrivljenostjo, pri tem imajo ploskve s pozitivno ukrivljenostjo sferično, tiste z ničelno pa evklidsko geometrijo.

Hiperbolična ravnina je v tem smislu ravnina s konstantno negativno ukrivljenostjo in je lokalno izometrična psevdosferi. Gre za rotacijsko ploskev, dobljeno iz traktoide. Njeno parametrizacijo lahko izpeljemo, če upoštevamo rotacijskost ($\sigma(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$), naravno parametrizacijo osnovne krivulje ($\dot{f}^2 + \dot{g}^2 = 1$) in konstantno negativno ukrivljenost ($K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{(-\ddot{f}\dot{g}+\dot{f}\ddot{g})f\dot{g}}{f^2} = \frac{-f\ddot{f}+f\dot{f}(\dot{f}\ddot{f}+\dot{g}\ddot{g})}{f^2} = -\frac{\ddot{f}}{f} = -1$). Med splošnimi rešitvami $\ddot{f} = f$ nato izberemo najpreprostejšo $f(u) = e^u$ in se omejimo na $u \leq 0$, da znamo izraziti $g(u) = \int \sqrt{1-e^{2u}}du = \sqrt{1-e^{2u}} - \operatorname{arch}(e^{-u})$. Psevdosfero tako opišemo s $\sigma(u,v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, \sqrt{1-e^{2u}} - \operatorname{arch}(e^{-u}))$.

Aksiomatično razumevanje po drugi strani izhaja iz zanikanja petega Evklidovega aksioma o vzporednicah. Pri tem so hiperbolični prostori tisti, v katerih obstajata premica in taka točka izven nje, da skoznjo potekata vsaj dve vzporednici. Sicer pa je hiperbolična ravnina aksiomatično podana z istimi postavkami kot evklidska.

Iz želje po realizaciji takega prostora so se izoblikovali različni modeli. Zdi se očitno, da moramo, če iščemo ponazoritev v 2-dimenzionalnem evklidskem prostoru, prilagoditi obliko premic ali omejiti opazovano območje. Med najbolj znanimi ravninskimi modeli so tako Beltrami-Kleinov krožni model, Poincaréjev model zgornje polravnine in Poincaréjev krožni model. Točke prvega predstavljajo točke enotskega kroga, premice pa so – najenostavneje – kar vse tetive. Medtem ko ta model ni konformen, Poincaréjeva sta. Njune premice so loki krožnic, pravokotni na mejno sfero, ki jo v primeru zgornje polravnine predstavlja realna os, v krožnem primeru pa enotska krožnica. Robne točke v vseh modelih pripadajo točkam v neskončnosti.

Vsi modeli so med sabo izomorfni. Povratnoenolične odnose med njimi bi lahko predstavili kot prevode med različnimi sistemi koordinat. A si zaenkrat za vtis poglejmo le geometrijsko nazorne prehode med gornjimi tremi modeli, osnovane na projekcijskih preslikavah preko spodnje polsfere. Na spodnji polsferi si zamislimo vse loke krožnic, pravokotnih na ekvator, torej vse tiste, ki jih dobimo v preseku z „navpičnimi“ ravninami. Sedaj lahko vsakega od zgornjih modelov opišemo s projekcijo tega prostora na ustrezno ravnino. Beltrami-Kleinov model je pravokotna slika polsfere na ravnino, tangentno v spodnjem polu. Poincaréjev krožni model predstavlja stereografska projekcija iz zgornjega pola v krog, ki ga na tej isti ravnini izreže stereografska slika ekvatorja. Model zgornje polravnine pa dobimo s stereografsko projekcijo na ravnino, tangentno v neki ekvatorialni točki, iz diametralne točke na ekvatorju.

Če razmišljamo o premicah s stališča diferencialne geometrije, se naša pozornost preusmeri na geodetske krivulje, ki jih na psevdosferi – kot rotacijski ploskvi – prepoznavamo s pomočjo Clairautovega principa ([8, poglavje 8.3]). Tako so geodetke (γ) najprej vsi normalni preseki, to so v našem primeru vsi poldnevniki, nato pa še natanko vse tiste krivulje, vzdolž katerih je produkt $\rho \sin\psi$ konstanten. Pri tem je ρ razdalja do rotacijske osi in ψ kot med opazovano krivuljo in poldnevnikom v opazovani točki. Če se sedaj spomnimo parametrizacije psevdosfere in uvedemo zamenjavo koordinat $w = e^{-u}$ (iz $u \leq 0$ $w \geq 1$), dobimo $\tilde{\sigma} = \left(\frac{1}{w}\cos v, \frac{1}{w}\sin v, \sqrt{1-\frac{1}{w^2}} - \operatorname{arch} w\right)$ in za naravno parametrizirane geodetke velja $\dot{v}^2 + \dot{w}^2 = w^2$ ($E\dot{w}^2 + G\dot{v}^2 = 1$) in $\frac{1}{w}\sin\psi = \frac{1}{w^2}\dot{v} = C$ ($\dot{\gamma} = \dot{u}\sigma_u + \dot{v}\sigma_v = \cos\psi\sigma_u + \rho^{-1}\sin\psi\sigma_v$). Rešitve diferencialnega sistema $\dot{v} = Cw^2, \dot{w} = \pm w\sqrt{1-C^2w^2}$ so natanko loki krožnic $(v-v_0)^2 + w^2 = \frac{1}{C^2}$ v zgornji polravnini (v, w), pravokotni na os v. In tako smo se do že opisanega modela zgornje polravnine prebili še iz drugih osnov.

Še nekoliko se zadržimo v svetu diferencialne geometrije in nakažimo še eno temeljnih lastnosti hiperboličnih ploskev, ki nam jo razodeva (lokalni) Gauss-Bonnetov izrek ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi + \int \kappa_g + \int K\, dA$). Gre za vsoto kotov v „premočrtnem" trikotniku, ki je v hiperboličnem primeru vselej manjša od π. Opazujemo namreč geodetske trikotnike, katerih geodetska ukrivljenost stranic je enaka 0, medtem ko je ukrivljenost ploskev po definiciji negativna: $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \pi + \int K\, dA$. Gledano drugače nam ta izraz pove tudi, da je ploščina teh trikotnikov s koti natanko določena in tako v hiperboličnem svetu ni razlike med skladnostjo in podobnostjo.

In kako se te lastnosti odražajo v aksiomatičnem pojmovanju različnih geometrij? Izkaže se, da je večina nasprotnih trditev ekvivalentna (evklidskemu) aksiomu o vzporednicah, tako na primer obstoj pravokotnika in dejstvo, da je vsota notranjih kotov trikotnika enaka 180°. Nanje pa lahko prevedemo tudi razmerje med skladnostjo in podobnostjo. V nadaljevanju bomo privzeli lastnosti nevtralne geometrije, naslanjajoč se na opis v [4, poglavje 4].

Trditev 2.1. *Na hiperboličnih ploskvah ni pravokotnikov. Še več: obstoj pravokotnika je ekvivalenten evklidskemu aksiomu o vzporednicah.*

Trditev 2.2. *Vsota notranjih kotov trikotnika je vselej manjša od* 180°.

Ideja dokaza. Najprej bomo premislili enakovrednost obeh gornjih trditev (v nezanikani obliki) in ju šele nato povezali z obstojem vzporednic. Dokazali bomo, da obstoj trikotnika z vsoto kotov 180° implicira obstoj pravokotnika. S takim trikotnikom imamo namreč vselej pravokotna trikotnika z enako vsoto kotov, dobimo ju z razrezom prvotnega po višini skozi oglišče pri največjem kotu. Da je vsota njunih kotov tudi 180°, razberemo iz postavk nevtralne geometrije, ki za trikotnik predvidevajo vsoto kotov manjšo ali enako 180°. Izračun pokaže, da so odstopanja po delitvi aditivna. Iz pravokotnega trikotnika pa nato sestavimo pravokotnik tako, da najprej prenesemo nepravi kot v drugo oglišče ob hipotenuzi in nato na nastali krak še dolžino nasprotne katete. Če na ploskvi lahko izrišemo pravokotnik, pa sledi celo, da imajo vsi trikotniki v tem prostoru vsoto kotov 180°. Iz obstoječega pravokotnika z diagonalo dobimo pravokotni trikotnik z vsoto kotov 180° in s sestavljanjem pravokotnikov tudi poljubno celoštevilsko povečavo. Zato že obstaja tak, v katerega lahko (s prekrivajočim pravim kotom) vložimo poljuben drug pravokotni trikotnik in ima ta zato tudi želeno vsoto kotov („triangulacija" trikotnika). Iz pravokotnih pa znamo (povratno) zložiti poljubne trikotnike.

Da ob privzemu aksioma o vzporednicah obstajajo pravokotniki in je vsota kotov poljubnega trikotnika 180°, vemo iz evklidske realnosti. Da sam obstoj pravokotnika dopušča obstoj le ene vzporednice skozi dano točko, pa bomo izgradili iz nasprotne predpostavke. Denimo torej, da imamo pravokotnik, a z njim je vsota notranjih kotov vsakega štirikotnika 360°. Privzemimo, da k premici p skozi točko T obstajata dve vzporednici q (pravokotna na pravokotnico) in r. Označimo Y točko na r in X njeno pravokotno projekcijo na q. Ko Y selimo po r vstran od presečišča T, dolžina odseka XY narašča (podobnost) in sčasoma prerase razdaljo točke T od p (TT'). Stalna vsota kotov 360° za štirikotnik s tremi pravimi koti, ki ga dobimo s projekcijo Y na TT' (označimo Z), pove, da je le-ta pravokotnik. S tem sta točki Y in Z na nasprotnem bregu premice p kot T, TY oziroma nevzporednica r pa seka premico p. □

Trditev 2.3. *Če sta trikotnika podobna, sta skladna.*

Dokaz. S protislovjem. Če imamo podobna neskladna trikotnika, je par stranic v enem vselej manjši od pripadajočih stranic drugega. Zaradi skladnosti kotov lahko manjši trikotnik po podobnih stranicah „vstavimo“ v večjega, pri tem pa se nam izoblikuje štirikotnik z vsoto notranjih kotov 360° (suplementarna para ob vsakem od opisanih krakov), kakršni v hiperboličnih prostorih ne obstajajo. □

Pojem, ki je v hiperboličnih prostorih precej širši, kot dopušča vsakdanje evklidsko dojemanje, je pojem vzporednic. V osnovi ločujemo dvoje parov, in sicer tiste, ki določajo skupno pravokotnico, ter tiste, ki se limitno približujejo isti točki v neskončnosti. V nadaljevanju bomo nakazali, da smo s tem zaobjeli vse možnosti in v čem je vsaka od njih značilna.

Trditev 2.4. *Če opazujemo katerikoli vzporedni hiperbolični premici p in p', vsebuje vsaka množica točk p, ki so enako oddaljene od premice p', največ dve točki.*

Dokaz. Predpostavimo nasprotno, da so take točke tri A, B, $C \in p$, B med A in C, in označimo njihove pravokotne projekcije na p' z A', B', C'. Potem imajo štirikotniki $\square A'B'BA$, $\square A'C'CA$, $\square B'C'CB$ enako obliko s pravima kotoma ob stranici, ležeči na premici p', in skladnima preostalima stranicama ob teh kotih. Iz skladnosti trikotnikov (če dorišemo diagonali) sklepamo, da so skladni tudi pari preostalih kotov. Torej: $\angle A'AB = \angle B'BA$, $\angle A'AC (= \angle A'AB) = \angle C'CA$ in $\angle B'BC = \angle C'CB (= \angle C'CA)$, zaradi tranzitivnosti pa tudi $\angle B'BA = \angle B'BC$. Ker sta enaka suplementarna kota prava, bi bili vsi opisani liki pravokotniki, teh pa na hiperboličnih ploskvah ni. □

Trditev 2.5. *Kadar za hiperbolični premici obstaja par točk na eni, ki sta enako oddaljeni od druge, tedaj ti premici določata skupno pravokotnico. Velja pa tudi obratno, če imata premici skupno pravokotnico, sta med seboj vzporedni in vsak par točk, katerih razpolovišče sovpada z nožiščem te pravokotnice, je ekvidistanten do druge premice v paru.*

Dokaz. Izhajajmo najprej iz para od premice p' enako oddaljenih točk $A, B \in p$. Štirikotnik, ki ga opisujeta skupaj s projekcijama $A', B' \in p'$, ima dva para skladnih kotov $\angle A' = \angle B' = 90°$ in $\angle A = \angle B$ ter skladni stranici AA', BB'. Označimo s P razpolovišče daljice AB in s P' razpolovišče $A'B'$. Želimo, da bi PP' določala iskano pravokotnico. In res, iz skladnosti trikotnikov $\Delta PAA'$, $\Delta PBB'$ (SKS) in posledične skladnosti $\Delta PP'A'$, $\Delta PP'B'$ (SKS) dobimo enakost suplementarnih kotov $\angle A'P'P = \angle B'P'P = 90°$ (podobno pri krajišču P).

Prava kota ob skupni pravokotnici odjesta 180°, kar je več kot pripada kateremukoli hiperboličnemu trikotniku, torej sta določujoči premici vzporedni. Označimo ju kot zgoraj p in p', pripadajoči presečišči s pravokotnico pa P, P'. Sedaj izberimo poljubni – od P enako oddaljeni – točki $A, B \in p$ in označimo njuni projekciji na p'

z A', B'. Izhajajoč iz poznanih pravih kotov najprej opazimo skladnost trikotnikov $\Delta APP'$, $\Delta BPP'$ (SKS), s tem pa tudi trikotnikov $\Delta AA'P'$, $\Delta BB'P'$ (SKK) in stranic $\overline{AA'} = \overline{BB'}$. □

Trditev 2.6. *Za vsako premico p in vsako točko T izven nje obstajata žarka TX in TX' na nasprotnih straneh pravokotnice na p skozi T, ki dane premice ne sekata, a hkrati velja, da jo presekajo natanko vsi žarki, ki iz T izhajajo v smereh med X in X'.*

Dokaz. Vemo, da k premici p skozi T obstaja vzporednica p', ki z njo določa skupno pravokotnico t, $T \in t$. Nožišče pravokotnice na p imenujmo N in izberimo poljubno točko na p': $M \neq T$. Opazujmo daljico MN in žarke izhajajoče iz točke T. Daljica tako razpade na množico točk, skozi katere prehajajo žarki, ki presekajo premico p (npr. TN), in tisto, ki določa vzporedne žarke (npr. TM). Velja tudi, da so z vsako točko v eni od množic vsebovane v njej tudi vse točke med izbrano in robno vrednostjo. Zaradi polnosti točk na realni osi obstaja mejna vrednost X, da TX premice p ne preseka, medtem ko jo presekajo vsi žarki, izhajajoči med TN in TX. In simetrično na drugi strani pravokotnice. □

Tako smo spoznali možni obnašanji vzporednic v hiperboličnih prostorih, preveriti pa se da, da sta ti tudi edini, da torej med nelimitnima vzporednicama vselej obstaja skupna pravokotnica.

2.2. **Poincaréjev krožni model.** V tem razdelku si bomo za občutek ogledali elementarno geometrijsko utemeljitev Poincaréjevega krožnega modela. Pomagali si bomo z vpeljavo pojmov, kot so inverzija, potenca točke na krožnico, uporabljali bomo raztege in opazovali odnose med polom in polaro glede na neko krožnico.

Definicija 2.7. *Opazujemo krožnico κ s središčem O in polmerom r. Inverzija glede na κ je preslikava, ki vsako točko $P \neq O$ prenese v tako točko P' na poltraku OP, da velja $\overline{OP}\ \overline{OP'} = r^2$.*

Ta preslikava je očitno involucijska in ohranja točke na definicijski krožnici, medtem ko izmenja njeni notranjost in zunanjost. Pri načrtovanju inverznih točk se spomnimo na pare pol-polara (glej [6, stran 65]), ki jih opazujemo v projektivni geometriji in predstavljajo množice ortogonalnih točk glede na poljubno stožnico (v simbolih za stožnico, podano s simetrično matriko Q, to pomeni: če je $\mathrm{Lin}(p)$ dana točka, je polara premica, podana z $\{\mathrm{Lin}(v);\ p^TQv = 0\}$, in obratno, za dano premico vselej obstaja ortogonalna točka, imenovana pol).

Trditev 2.8. *Inverzna točka točke P glede na κ je:*

- *pol pravokotnice na zveznico OP v točki P, kadar je točka P notranja, in*
- *presečišče polare točke P z zveznico OP, kadar je točka P zunanja.*

Dokaz. Načrtovanje inverzne točke v obeh primerih spremljajo isti koraki, le vloge objektov so nekoliko zamenjane. Spomniti se moramo le, kako določamo pol za premico, ki krožnico preseka, in obratno, kako polaro za točko izven kroga (kot vemo, pripadajo natanko ene drugim). Ustrezne pare povezujeta tangenti na krožnico v presečnih točkah premice, pri tem je njen pol njuno presečišče, oziroma tangenti na krožnico iz dane točke, pri čemer je polara premica skozi dotikališči. Da sta z gornjim opisom dobljeni točki inverzni, vidimo sedaj iz podobnostnih razmerij; če mejni točki tetive označimo z A (in B), sta trikotnika ΔOPA in $\Delta OAP'$ podobna in $\frac{\overline{OP}}{r} = \frac{r}{\overline{OP'}}$. □

Ob načrtovanju inverznih točk smo mimogrede spoznali, kako oblikovati hiperbolično premico skozi podani točki v neskončnosti. Ta mora v danih točkah pravokotno presekati začetno krožnico, kar pomeni, da sta njena polmera v teh točkah usmerjena tangentno, to pa njeno središče postavlja v pol glede na tetivo, ki jo opisujeta ti dve točki. Ne vemo pa še, kako je s premicami, ki jih podajajo običajne „končne“ točke.

Definicija 2.9. *Imejmo krožnico κ in poljubno točko O v ravnini. Če premici, sekajoči se v točki O, presekata krožnico κ v parih (P_1, P_2) in (Q_1, Q_2), sta produkta $\overline{OP_1}\,\overline{OP_2}$, $\overline{OQ_1}\,\overline{OQ_2}$ enaka; za morebitno tangentno premico se to ujema z $\overline{OT}\,\overline{OT}$, kjer je T dotikališče. Opisani produkt imenujemo potenca točke O na krožnico κ.*

Dokaz dobre definiranosti. Obodni koti nad istim lokom so enaki, se pravi: $\angle P_2P_1Q_2 = \angle P_2Q_1Q_2$ in $\angle P_1Q_2Q_1 = \angle P_1P_2Q_1$. Po pravilu skladnih kotov sta zato podobna trikotnika ΔOP_1Q_2 in ΔOQ_1P_2 ter veljajo razmerja $\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OQ_1}} = \frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OP_2}}$. V primeru tangente se ozremo na pravokotni trikotnik OTS, kjer smo s S označili središče κ, in potenco primerjamo s premico OS, ki seka krožnico v P_1, P_2: $(\overline{OT})^2 = (\overline{OS})^2 - (\overline{ST})^2 = (\overline{OS} - \overline{ST})(\overline{OS} + \overline{ST}) = (\overline{OS} - \overline{SP_1})(\overline{OS} + \overline{SP_2}) = \overline{OP_1}\,\overline{OP_2}$. □

In ker nas vseskozi zanimajo predvsem pravokotni pari krožnic, se zaustavimo še ob naslednji trditvi.

Trditev 2.10. *κ naj bo opazovana krožnica in P poljubna „nezaznamovana“ točka (ki ne sovpada s središčem O ali katero izmed točk na κ). Potem krožnica skozi P seka κ pravokotno natanko tedaj, ko hkrati vsebuje inverzno točko P'.*

Dokaz. Naj krožnica λ vsebuje glede na κ inverzni točki P in P'. Po definiciji inverzije središče O ne leži na tetivi PP', le na njeni nosilki. Središče O je tako izven kroga λ in lahko s T označimo dotikališče tangente na λ iz O, potenca glede na to točko se izraža kot $(\overline{OT})^2 = \overline{OP}\,\overline{OP'} = r^2$, iz česar vidimo, da je T s krožnice κ in loka sta med seboj pravokotna.

Obratno, kadar se krožnici κ in λ sekata pravokotno v točkah T_1 in T_2, se tangenti v teh točkah srečata v O izven kroga λ. Vsaka druga premica OP, $P \in \lambda$, preseka λ še v neki drugi točki Q. In izračun potence $r^2 = (\overline{OT_1})^2 = \overline{OP}\,\overline{OQ}$ postavi Q v inverz točke P glede na κ. □

Posledica 2.11. *Krožnici κ in λ sta ortogonalni natanko tedaj, ko inverzija glede na κ preslika λ vase.*

Tako smo končno dokazali enoličnost premice, ki jo določata dve poljubni točki v Poincaréjevem krogu. Taka premica mora namreč poleg danih točk vsebovati še njuna inverza, vemo pa, da je krožnica s tremi točkami natanko določena.

Da bi Poincaréjev krožni model začutili kot naraven, se bomo v nadaljevanju sprehodili še med skladnostnimi aksiomi. Premislek za kote je najlažji, saj le-te merimo ekvivalentno evklidskim (model je konformen), se pravi, da je kot med krivuljama kot med pripadajočima tangentnima vektorjema v presečni točki. Ekvivalenčnost skladnostne relacije tako neposredno sledi. Hkrati lahko pokažemo tudi, da dani kot enolično (do usmerjenosti, brega glede na dani žarek) določa smer, ki s podanim žarkom opisuje skladni kot. To vprašanje nadomestimo z iskanjem (natanko ene) Poincaréjeve premice, podane s tangento v dani točki. Zanjo vemo, da poleg dane zavzame tudi njej inverzno točko, središče pa leži na presečišču simetrale daljice med obema določujočima točkama in pravokotnice na tangento v dani točki.

Skladnost daljic zahteva poznavanje njihovih dolžin; k tovrstnim merjenjem se bomo sicer kasneje še vrnili, zaenkrat pa navrzimo le kot definicijo: razdalja $d(AB) = |\log \mathcal{D}(A,B,P,Q)|$, pri čemer $\mathcal{D}$ označuje dvorazmerje, P in Q pa sta premici AB pripadajoči točki v neskončnosti. Za trenutek se spomnimo homogenih koordinat in formule, ki podaja dvorazmerje točk na afini premici $\mathcal{D}(A,B,P,Q) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}}\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}$ (glej [6, stran 54]). Vemo, da ni neodvisna od vrstnega reda točk, a z izmenjavo opazovanih točk ali točk v neskončnosti zavzame obratno vrednost, kar absolutna vrednost logaritma izenači. Tako je tudi skladnost stranic ekvivalenčna relacija in zaradi zveznega spreminjanja dvorazmerja ob seljenju opazovanih točk lahko na vsaki premici določimo izsek skladen s poljubnim danim. Preveriti pa se da tudi aditivnost tako definiranih dolžin ob sklapljanju daljic na Poincaréjevih premicah.

Za preverjanje skladnosti trikotikov po kriteriju dveh skladnih stranic, ki objemata skladna kota, imamo nekaj več dela. Stremeč za potrditvijo tudi tega „pravila“ si bomo pogledali še nekatere lastnosti inverzij. Vemo namreč, da se skladni objekti z izometričnimi preslikavami preslikajo eden v drugega, kot bomo še omenili, pa lahko poljubne izometrije opisujemo s kombiniranjem inverzij. Poglejmo si nekatere povezave med inverzijo in raztegi.

Definicija 2.12. *Dilatacija (tudi razteg) z izhodiščem O in razteznim količnikom k (označimo $\delta(O,k)$) je preslikava, ki ohranja izhodišče negibno, vsako drugo točko P pa preseli po žarku OP, in sicer na k-kratno razdaljo prvotne. Velja: $\overline{OP'} = k\overline{OP}$.*

Najprej poglejmo geometrijsko utemeljitev tistih lastnosti inverzije, ki jih poznamo iz njene kompleksne interpretacije.

Trditev 2.13. *Bodi sedaj κ krožnica s središčem O in polmerom r in λ krožnica s središčem S in polmerom s, da O leži zunaj kroga λ. S p označimo potenco točke O glede na λ in izračunamo $k = \frac{r^2}{p}$. λ' naj označuje sliko λ pri inverziji na κ. Tedaj velja, da je krožnica λ' enaka sliki raztega $[\delta(O,k)](\lambda)$. Tangenti t' na λ' v P' in t na λ v P povezuje zrcaljenje čez simetralo PP'.*

Dokaz. Premica skozi O naj seka λ v točkah P in Q (lahko $P = Q$). Če inverzija glede na κ slika P v P', prenese ustrezen razteg v P' točko Q. Zato izračunamo razmerje $\frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ}}\frac{\overline{OP}}{\overline{OP}} = \frac{r^2}{p}$ in je res $k = \frac{r^2}{p}$.

Glede tangent pa le toliko. Tisti v točkah P' in Q sta vzporedni (povezuje ju razteg), medtem ko tisti v točkah P in Q s tetivo tvorita enakokraki trikotnik. Ker tako tangente v vseh izpostavljenih točkah s premico OP (na njej ležijo $P,Q \in \lambda$, $P',Q' \in \lambda'$) oklepajo isti kot, je tudi trikotnik s stranicami PP', t in t' enakokrak in velja gornja trditev. □

Trditev 2.14. *Opazujemo inverzijo glede na krožnico κ s središčem O. Velja, da sta si premica, ki središča O ne vsebuje, in krožnica skozi O, katere premer v O določa pravokotnica na premico in inverz njenega nožišča N (torej ON'), z izvzetim središčem O med seboj inverzni.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da se točke na premici p z inverzijo glede na κ preslikajo v krožnico p' s premerom ON'. Izberimo poljubno točko $T \in p$, $T \neq N$ in označimo s P (drugo) presečišče premice OT s krožnico p'. Pravokotna trikotnika $\Delta OPN'$ in ΔONT sta podobna (skupen kot pri O), zato velja $\frac{\overline{OP}}{\overline{ON'}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OT}} \Rightarrow \overline{OT}\,\overline{OP} = \overline{ON}\,\overline{ON'} = r^2$, torej je točka P res inverz točke T na κ.

Preverimo še, da so vse točke na p' (razen O) slike točk iz p pri inverziji čez κ. Če je $P \in p'$ poljubna točka, $P \neq O$, označimo s T presečišče premice OP s p in od prej vemo, da je inverz točke T glede na κ enak točki P. Zaradi simetričnosti odnosa je tudi T inverz P.

Ker je inverzija involucija, velja tudi obrat. Se pravi, da je inverz krožnice λ, ki vsebuje središče inverzije O, vzporednica k tangenti na λ v točki O, in sicer tista skozi inverz O diametralne točke. $\square$

Trditev 2.15. *Inverzija ohranja velikost, a obrača smer usmerjenega kota.*

Dokaz. Kot med krivuljama je kot med tangentama v presečni točki. Trditev sedaj neposredno sledi iz zadnjega stavka trditve 2.13 o zrcalnosti tangent v inverznih točkah. $\square$

Iz gornjega je jasno, da inverzija v evklidskem svetu ni izometrija, razen tega, da ne ohranja razdalj, slika ravne objekte v ukrivljene. A s hiperboličnimi premicami in hiperboličnimi razdaljami je drugače.

Lema 2.16. *Postavimo O za središče krožnice κ in točki P in Q naj bosta nekolinearni z O, opazujemo inverzijo glede na κ. Tedaj sta trikotnika ΔPOQ in $\Delta Q'OP'$ podobna.*

Dokaz. Omenjena trikotnika si delita kot $\angle POQ = \angle P'OQ'$, razen tega pa sta objemajoči ga stranici v istem razmerju. Slednje sledi iz inverznosti opazovanih točk $\overline{OP}\ \overline{OP'} = r^2 = \overline{OQ}\ \overline{OQ'}$. $\square$

Trditev 2.17. *Inverzija ohranja dvorazmerje.*

Dokaz. Središče krožnice označimo z O, opazovane točke naj bodo A, B, P, Q, medtem ko njihove slike podajamo s črticami A', B', P', Q'. Dvorazmerje izraža produkt $\mathcal{D}(A, B, P, Q) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}}$. Sedaj pa bomo vse dolžine zamenjali s preslikanimi z uporabo prejšnje leme. Najprej za trikotnika ΔOAP in ΔOAQ veljata razmerji $\frac{\overline{AP}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'P'}}{\overline{OP'}}$ in $\frac{\overline{AQ}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'Q'}}{\overline{OQ'}}$, kar da $\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{OQ'}}{\overline{OP'}} \frac{\overline{A'P'}}{\overline{A'Q'}}$. Podobno bi dobili za trikotnika ΔOBP in ΔOBQ, a lahko v rezultat prenesemo le zamenjavo črk $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{OP'}}{\overline{OQ'}} \frac{\overline{B'Q'}}{\overline{B'P'}}$. Produkt po krajšanju izraža želeno dvorazmerje slik. $\square$

Če povzamemo, smo za delovanje inverzij na premicah v krožnem modelu hiperbolične ravnine dokazali, da slika model vase ter hkrati ohranja skladnost in incidenčne relacije. Vemo namreč, da inverzije na ortogonalnih krožnicah ohranjajo osnovno krožnico, v gornjih trditvah pa smo pokazali tudi, da ob tem slikajo Poincaréjeve premice v druge ortogonalne loke ali na premice skozi središče. Tako hkrati ohranjajo tudi notranjost kroga. Zadnji dve trditvi utemeljita še ohranjanje skladnostnih razmerij. Torej so inverzije izometrije.

Spomnimo se, da smo o lastnostih inverzije začeli razmišljati v želji, da bi proučili skladnost trikotnikov, in se ponovno ozrimo na odnos dveh trikotnikov s skladnima stranicama ob skladnem kotu. Naj bosta to trikotnika ΔABC in ΔXYZ in naj velja $\angle A = \angle X$, $d(AC) = d(XZ)$ in $d(AB) = d(XY)$. Taka trikotnika lahko vselej premaknemo tako, da se bosta stikala v skupnem oglišču, in postavimo to oglišče v središče Poincaréjevega kroga. Nakažimo ta premik za trikotnik ΔABC in prenos oglišča A v središče O. λ naj označuje krožnico, nosilko stranice AB, in μ nosilko sosednje stranice AC. Ti krožnici se sekata v točki A in njej inverzni točki A'. Zamenjajmo vloge opazovanih točk in si zamislimo krožnico ν s središčem v A' in polmerom s, za katero sta točki A in O inverzni, velja: $s^2 = \overline{AA'}\ \overline{A'O}$. Ker so točke O, A, A' kolinearne, je $\overline{AA'} = \overline{A'O} - \overline{AO}$ in s tem $s^2 = (\overline{A'O})^2 - \overline{AO}\ \overline{A'O} = (\overline{A'O})^2 - r^2$. Torej sta – kot razberemo iz Pitagorovega izreka – krožnici ν in začetna κ ortogonalni, opazovana inverzija „s središčem A'“ pa prenese A v O in ΔABC v skladen trikotnik z ogliščem O – označimo ga $\Delta OB'C'$. Podobno bi lahko ΔXYZ zamenjali z $\Delta OY'Z'$.

Sedaj bi si radi pomagali z evklidsko izometrijo, in sicer zasukom Poincaréjevega kroga. A za to bi morali poznati evklidske dolžine stranic (z enim krajiščem v O). Preverimo torej, kako se evklidska razdalja $\overline{OB}$ izraža s hiperbolično $d(OB)$. Če s P, Q označimo premici OB pripadajoči točki v neskončnosti, izrazimo d kot $d = \log \mathcal{D}(O, B, P, Q)$ (s primernim izborom neskončnih točk – Q bliže O in P bliže B – se znebimo absolutne vrednosti). Torej je $e^d = \mathcal{D}(O, B, P, Q) = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} \frac{\overline{BQ}}{\overline{BP}} = \frac{r+\overline{OB}}{r-\overline{OB}}$, kar da $\overline{OB} = r\frac{e^d-1}{e^d+1}$. Torej sta enako dolgi hiperbolični daljici skladni tudi v evklidskem smislu in zasuk glede na središče Poincaréjevega kroga deluje povratno enolično med opazovanima trikotnikoma.

Da pretrgamo občutek enakosti med evklidskimi in hiperboličnimi prostori, ki ga je morda vzbudilo preverjanje skladnostnih aksiomov, bomo razdelek zaključili s pojmom, ki je skoraj definicijsko hiperboličen in se nanaša na limitno vzporednost. Poznamo ga pod imenom kot vzporednosti in v odvisnosti od opazovane premice in točke izven nje predstavlja kot, ki ga s pravokotnico na premico oklepa limitna vzporednica skozi dano točko.

Trditev 2.18. *V Poincaréjevem krožnem modelu se kot vzporednosti* $\Pi(d)$ *v odvisnosti od oddaljenosti* d *točke od premice izraža kot* $e^{-d} = \operatorname{tg}\left[\frac{\Pi(d)}{2}\right]$.

Dokaz. Preberimo vpeljane oznake in dopolnimo sliko s tistimi, na katere se bomo še sklicevali. d je torej hiperbolična razdalja točke T od premice p, $\Pi(d) = \alpha$ kot (v radianih) med limitno vzporednico k p in pravokotnico nanjo (obe iz točke T). Nožišče pravokotnice označimo z N, stičišče v neskončnosti pa kar ∞. S prej opisanimi premiki trikotnikov lahko zagotovimo, da bo izpostavljena premica p nek premer, točka T na pravokotnem premeru, limitna vzporednica (lok λ) pa je tako določena s točkama T in ∞.

Tangenta v točki T na λ preseka p v $P \in N\infty$, ki je pol tetive $T\infty$ glede na λ, in kota $\angle PT\infty = \angle P\infty T = \beta$ sta enaka. Zunanji kot trikotnika $\Delta TP\infty$ pri P je tako njun dvakratnik in imamo $\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta$. Če prepišemo odnos med evklidsko in hiperbolično razdaljo $e^d = \frac{r+\overline{TN}}{r-\overline{TN}}$ ter upoštevamo enotskost Poincaréjevega kroga in odnose v pravokotnem trikotniku: $\overline{TN} = r\tan\beta$, dobimo $e^d = \frac{1+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}^{-1}\frac{\alpha}{2}$. $\square$

2.3. **Merjenja in izometrije.** Zdi se, da bomo sedaj ponovili nekaj, kar smo tako ali drugače že premislili. Vendar smo ta način sopostavljanj in dvojnih pogledov izbrali namenoma, ker se zdi, da nam vsako stališče bolj približa druge poteze hiperboličnih prostorov. Tako bo to poglavje prvenstveno posvečeno klasifikaciji izometrij in njihovi – morda najbolj enotni – ponazoritvi z Möbiusovimi transformacijami, ob čemer bomo ponovili nekatere pojme iz kompleksne analize. Prav tako pa bomo izpeljali metriko na „kompleksnih“ modelih hiperbolične ravnine. Ker smo bolj vajeni „razmišljanja v ravnih črtah“ in ker je parametrizacija tega modela precej enostavnejša, bomo vse glavne premisleke prepustili Poincaréjevemu modelu zgornje polravnine in jih šele na koncu z znano Möbiusovo transformacijo prenesli na krožni model, ki bo imel sicer v našem nadaljnem delu osrednjo vlogo.

Zanimajo nas transformacije, ki ohranjajo geometrijsko strukturo, se pravi izometrije oziroma v svoji najlažji interpretaciji razdalje ohranjajoče preslikave. Vsaka izometrija je zvezna in injektivna. Dodatno pa za izometrije hiperbolične ravnine pričakujemo, da le-to tudi ohranjajo, so torej surjektivne in s tem aditivne, kar z zveznostjo implicira afinost (Mazur-Ulamov izrek, [9, stran 94]).

Vendar se ob tem zatakne že pri pojmu razdalje in njene definicije na modelih hiperbolične ravnine. Zato bomo raje izhajali iz težnje zaobjeti vse tiste preslikave kompleksne ravnine, ki slikajo krožnice v krožnice (premice v premice), in se šele nato omejili na tiste, ki hkrati ohranjajo naš model. Kot smo že omenili, je razmišljanje v polravnini lažje, ker pa sta oba Poincaréjeva modela izomorfna, lahko vse že dokazane sklepe o vzporednicah neposredno prenesemo. V nadaljevanju bomo Poincaréjevo polravnino (odprto polravnino, odslej $\mathcal{H}$, s točkami v neskončnosti na $\bar{\mathbb{R}}$) opazovali kot podprostor Riemannove sfere oziroma s točko ∞ kompaktificirane kompleksne ravnine ($\bar{\mathbb{C}}$).

Spomnimo se torej, kateri homeomorfizmi kompleksne ravnine slikajo krožnice v krožnice; opazovano (grupo) bomo odslej označevali s $\mathrm{Homeo}^{\mathrm{C}}(\bar{\mathbb{C}})$. Najprej pomislimo na Möbiusove transformacije, to je linearne lomljene preslikave $m : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ oblike $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, kjer so $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ in $ad - bc \neq 0$. Vemo, da tvorijo grupo, in ker so zapisljive kot kompozicije linearnih preslikav $f(z) = az + b$ in invertiranja $f(z) = \frac{1}{z}$, očitno pripadajo množici $\mathrm{Homeo}^{\mathrm{C}}(\bar{\mathbb{C}})$.

In kaj lahko še povemo o njih? Zanima nas seveda, kako delujejo na različnih objektih in koliko točk jih enolično določa. – Naslednjih trditev, ki se nanašajo na splošne preslikave kompleksne ravnine, ne bomo dokazovali; mnoge so (vsaj) znane iz kompleksne analize, poleg tega pa bi se tako že preveč oddaljili od osnovnega toka našega razmišljanja.

Trditev 2.19. *Čim Möbiusova transformacija $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ohranja tri različne točke $\bar{\mathbb{C}}$, podaja identično preslikavo.*

Trditev 2.20. *Grupa Möbiusovih transformacij deluje enolično tranzitivno na urejenih trojicah točk. Torej med trojicama (z_1, z_2, z_3) in (w_1, w_2, w_3) obstaja enolično določena preslikava, da velja $m(z_i) = w_i$ za $i = 1, 2, 3$.*

Trditev 2.21. *Grupa Möbiusovih transformacij deluje tranzitivno na množici krožnic in prav tako na množici krogov v $\bar{\mathbb{C}}$.*

Preden dopolnimo našo grupo, razmislimo še, koliko različnih preslikav kompleksne ravnine pravzaprav določajo Möbiusove transformacije. Njihova izvorna sorodnost z dvodimenzionalnimi matrikami se zdi očitna in je do večkratnosti koeficientov, ki se v racionalni Möbiusovi funkciji pokrajšajo, tudi naravno določena. Tako je grupa Möbiusovih transformacij izomorfna $GL_2(\mathbb{C})/\{\alpha I; \alpha \in \mathbb{C}\}$, kar sovpada z grupo projektivnosti $PGL_2(\mathbb{C})$. Ponazoritev z matrikami jasno izraža, da so si mnoge preslikave v temeljih enake, tako vse tiste, ki so med seboj konjugirane. Izkaže se, da lahko vse zreduciramo na eno od treh osnovnih oblik, ki po vrsti predstavljajo (glej [1, poglavji 2.4, 2.5]):

(1) parabolične transformacije z eno negibno točko: $m(z) = z + 1$,
(2) eliptične transformacije z dvema negibnima točkama: $m(z) = e^{2i\vartheta} z$,
(3) loksodromične transformacije z dvema negibnima točkama: $m(z) = \rho e^{2i\vartheta} z$, $\rho \neq 1$.

Trditev 2.22. *Če Möbiusove transformacije v matričnem zapisu normaliziramo, tako da gledamo predstavnika ekvivalenčnega razreda z determinanto 1, potem se gornja delitev ujema z delitvijo glede na vrednost sledi:*

(1) *m je parabolična, kadar je $(\mathrm{sl}(m))^2 = 4$,*
(2) *m je eliptična, kadar $(\mathrm{sl}(m))^2$ zavzame realne vrednosti na $[0, 4)$,*
(3) *m je loksodromična, kadar je vrednost $(\mathrm{sl}(m))^2$ nerealna ali z intervalov $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$; realne loksodromične transformacije so hiperbolične.*

Najpreprostejši homeomorfizem kompleksne ravnine, ki ga zaenkrat pogrešamo, je kompleksno konjugiranje ali zrcaljenje čez razširjeno realno os $\bar{\mathbb{R}}$. Zato poglejmo, kako se spremenijo lastnosti naše grupe, če dopustimo še poljubno komponiranje s preslikavo $f(z) = \bar{z}$.

Definicija 2.23. *Splošna Möbiusova grupa* Möb *je grupa generirana z Möbiusovimi transformacijami in kompleksnimi konjugiranji. Vsak njen element lahko zapišemo bodisi v obliki $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ bodisi kot $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, kjer so koeficienti $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ in $ad - bc \neq 0$.*

Očitno je, da se na grupo Möb prenesejo vse tranzitivnosti delovanja na trojicah točk, na krožnicah in na krogih. Za ostale lastnosti grupe si najprej poglejmo geometrijski pomen konjugiranja. Le-to seveda predstavlja zrcaljenje čez realno os in ker Möbiusove transformacije delujejo tranzitivno na krožnicah v $\bar{\mathbb{C}}$, lahko definiramo zrcaljenje čez poljubno krožnico kot $zrc_\kappa = m \circ k \circ m^{-1}$, kjer je k konjugiranje in m Möbiusova transformacija, ki prenese $\bar{\mathbb{R}}$ na κ. Tako smo izpeljali analitični opis inverzij; z razpisom vsakega od generatorjev Möbiusove grupe:

- translacije $t(w) = w + b$ z zrcaljenjem čez pravokotnici na os premika v 0, $\frac{b}{2}$,
- zasuka $z(w) = e^{2i\vartheta} w$ z zrcaljenjema čez $\bar{\mathbb{R}}$ in premico z naklonom ϑ,
- raztega $r(w) = a^2 w,\ a \in \mathbb{R}$, pa z zrcaljenjema čez S^1 in $\mathcal{K}(0, a)$,
- obratno vrednost $o(w) = \frac{1}{w}$ dobimo s konjugiranjem in naknadnim zrcaljenjem čez S^1,
- konjugiranje $k(w) = \bar{w}$ pa je že želene obliike,

lahko sedaj pokažemo naslednjo trditev.

Trditev 2.24. *Vsak element splošne Möbiusove grupe lahko izrazimo s komponiranjem zaporednih zrcaljenj (inverzij) čez končno mnogo krožnic v $\bar{\mathbb{C}}$.*

In kar je najpomembneje (za dokaz glej [1, izrek 2.21 in izrek 2.23]):

Izrek 2.25. *Grupa* Möb *pokrije natanko celotno grupo* $\mathrm{Homeo}^{\mathrm{C}}(\bar{\mathbb{C}})$.

Trditev 2.26. *Elementi* Möb *so konformni homeomorfizmi kompleksne ravnine $\bar{\mathbb{C}}$.*

Končno se lahko vrnemo k proučevanju pretvorb znotraj hiperbolične ravnine v Poincaréjevem polravninskem modelu. Pregledali bomo, kake omejitve nam na splošni Möbiusovi grupi postavlja želja, da se ob tem ohranja zgornja polravnina. Tako določeno „skrčeno“ grupo bomo nagovarjali z $\text{Möb}(\mathcal{H}) = \{m \in \text{Möb}; m(\mathcal{H}) = \mathcal{H}\}$. In kot nam $\mathcal{H}$ v kompleksni ravnini določa robna krožnica $\bar{\mathbb{R}}$, si bomo tudi pri opisu preslikav pomagali z $\text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})$, grupo transformacij, ki ohranjajo razširjeno realno os. To nam olajša razlikovanje med konjugiranimi elementi.

Trditev 2.27. *Vsak element* $\text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})$ *je bodisi oblike $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ bodisi $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, kjer so koeficienti a, b, c, d vsi realni ali pa vsi čisto imaginarni ter velja $ad - bc = 1$.*

Dokaz. Splošno Möbiusovo grupo predstavljajo elementi oblike $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ in $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc = 1$. Med vsemi nas zanimajo le tisti, za katere je $m(\bar{\mathbb{R}}) = \bar{\mathbb{R}}$, in ker konjugiranje realno os ohranja, se lahko v nadaljevanju omejimo le na prve (druge dobimo v kompoziciji s konjugiranjem).

Ohranjanje $\bar{\mathbb{R}}$ določa realni značaj točk $m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$, $m(\infty) = \frac{a}{c}$ in $m^{-1}(0) = -\frac{b}{a}$. Kadar sta $a, c \neq 0$, lahko Möbiusovo transformacijo prepišemo kot $m(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{m(\infty)cz - m^{-1}(0)m(\infty)c}{cz - m^{-1}(\infty)c}$; iz vrednosti determinante $1 = ad - bc = c^2 m(\infty)(m^{-1}(0) - m^{-1}(\infty))$ sedaj sklepamo, da je c^2 realno, torej c in z njim vsi koeficienti bodisi realni bodisi imaginarni. Podobno v primeru, ko je $a = 0$, iz $ad - bc = 1$ sledi $c \neq 0$. Koeficiente tokrat izrazimo z $m(1) = \frac{b}{c+d}$ in $m^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ in dobimo za determinanto $1 = (m^{-1}(\infty) - m(1))c^2$. Končno, če je $c = 0$, sta $a, d \neq 0$, $m(z)$ zapišemo kot $m(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ in koeficiente izrazimo z realnimi vrednostmi $m(0) = \frac{b}{d}$, $m(1) = \frac{a+b}{d}$, se pravi: $1 = (m(1) - m(0))d^2$. Zaključek je v vseh primerih enak.

Da vse preslikave gornje oblike ohranjajo $\bar{\mathbb{R}}$ vidimo neposredno, saj je trojica parov (ki določajo krožnico in njeno sliko) $m(0)$, $m(\infty)$, $m^{-1}(\infty)$ realna. □

Vse preslikave, pripadajoče $\text{Möb}(\bar{\mathbb{R}})$, bodisi ohranjajo bodisi izmenjajo zgornjo in spodnjo polravnino, po čemer sklepamo, da pogojem $\text{Möb}(\mathcal{H})$ zadoščajo le nekatere.

Trditev 2.28. *Vsak element* $\text{Möb}(\mathcal{H})$ *ima eno izmed oblik:* $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *in* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *ali* $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ *in* $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$.

Dokaz. Sedaj izbiramo tiste transformacije iz opisa predhodne trditve, ki ohranjajo polravnini. Posebej so torej zaželene tiste, za katere je $\text{Im}[m(i)] > 0$. Preverimo za vsako od oblik posebej:

- $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $\text{Im}[m(i)] = \text{Im}[\frac{ai+b}{ci+d}] = \frac{ad-bc}{c^2+d^2} = \frac{1}{c^2+d^2} > 0$
- $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$: $\text{Im}[m(i)] = \text{Im}[\frac{-ai+b}{-ci+d}] = \frac{-ad+bc}{c^2+d^2} = \frac{-1}{c^2+d^2} < 0$

V imaginarnih primerih imaginarno komponento opisuje isti produkt, edina sprememba je predznak vsote kvadratov v imenovalcu. Se pravi:

- $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$: $\text{Im}[m(i)] < 0$
- $m(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$: $\text{Im}[m(i)] > 0$.

Če povzamemo izračune, smo izvzeli natanko opisane preslikave. □

Trditev 2.29. $\text{Möb}(\mathcal{H})$ *deluje tranzitivno na* $\mathcal{H}$ *in deluje tranzitivno tudi na množici hiperboličnih premic v* $\mathcal{H}$.

Dokaz. Opazujemo delovanje grupe, se pravi, da zadošča za vsak $z \in \mathcal{H}$ poiskati $m \in \text{Möb}(\mathcal{H})$, da $m(z) = i$. Zapišimo $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, in zgradimo kompozitum preslikav, ki zadoščajo našemu pogoju. Najprej prenesemo z na pozitivno imaginarno os s preslikavo $p(w) = w - a$, nato rezultat normaliziramo s $q(w) = \frac{1}{b}w$: $q(p(z)) = i$. Ker sta $-a \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{b} > 0$, sta obe preslikavi p, q in z njima tudi $q \circ p$ v $\text{Möb}(\mathcal{H})$.

Za premice postopamo podobno: vsaki hiperbolični premici p priredimo transformacijo, ki jo prenese v pozitivni del imaginarne osi I. Določimo jo kot tisto transformacijo, ki prenese njeni robni točki (točki na realni osi, točki v neskončnosti) v 0 oziroma v ∞. Taka preslikava ima za $x < y \in \mathbb{R}$ obliko $m(z) = \frac{z-y}{z-x}$, $m(y) = 0$, $m(x) = \infty$, $\det = y - x > 0$ in vsi koeficienti so realni. □

Posledica 2.30. *Če z izrazom (odprta) polravnina označujemo komponenti komplementa posamezne hiperbolične premice v $\mathcal{H}$, potem* $\text{Möb}(\mathcal{H})$ *deluje tranzitivno tudi na množici polravnin v $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Tokrat bomo za vsako polravnino π podali tisto Möbiusovo transformacijo, ki jo pretvori v prvi kvadrant, torej desno polravnino glede na hiperbolično premico $I: \ \pi_1 = \{z \in \mathcal{H}; \text{Re}(z) > 0\}$. Vemo že, da za vsako premico p obstaja $m \in \text{Möb}(\mathcal{H})$, da $m(p) = I$, in ta preslikava prenese polravnini, določeni s p v polravnini, ki ju razmejuje I. Če je $m(\pi) = \pi_1$, smo končali. V nasprotnem m komponiramo z zrcaljenjem čez I (inverzija) s predpisom $k(z) = -\bar{z} \in \text{Möb}(\mathcal{H})$ in iskano preslikavo podaja $k \circ m$. □

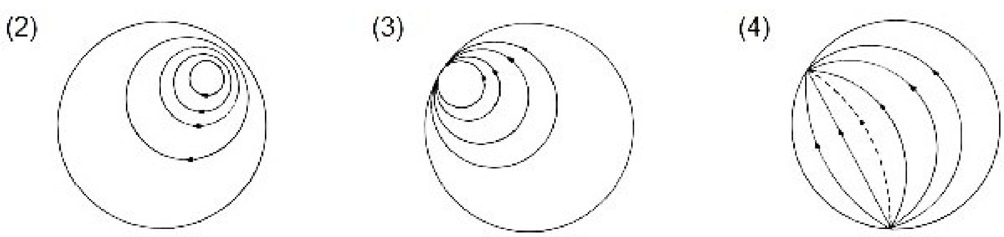
Posledica 2.31. $\text{Möb}(\mathcal{H})$ *deluje tranzitivno na trojicah točk razširjene realne osi* $\bar{\mathbb{R}}$.

Dokaz. Za poljubno trojico (x_1, x_2, x_3) podajmo prenos v $(0, 1, \infty)$. Iz znane tranzitivnosti delovanja $\text{Möb}(\mathcal{H})$ na hiperboličnih premicah izberemo transformacijo m, ki pretvori premico x_1x_3 v 0∞ (I). Ker (kot vse $\text{Möb}(\mathcal{H})$) ohranja $\bar{\mathbb{R}}$, preslika x_2 v nek $y \in \mathbb{R}: \ m(x_2) = y$. Če je $y > 0$, m komponiramo s $p(z) = \frac{1}{y}z$ do želene transformacije. V nasprotnem taka preslikava ne ohranja $\mathcal{H}$, zato za $y < 0$ m komponiramo s $q(z) = \frac{1}{y}\bar{z}$. □

Primerjava s klasifikacijo navadnih Möbiusovih transformacij in opazovanje položaja negibnih točk v $\mathcal{H}$ nam osmislita še geometrijski vidik opisanih transformacij. Spodnji izrek tako povzema in razlaga pomen vseh različnih oblik izometrij hiperbolične ravnine.

Izrek 2.32. *Imejmo Möbiusovo transformacijo (element* $\text{Möb}(\mathcal{H})$*) oblike* $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *in* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*. Ta tedaj opisuje eno izmed naslednjih preslikav:*

(1) *identiteto na $\mathcal{H}$,*
(2) *eliptično transformacijo in ima natanko eno negibno točko znotraj $\mathcal{H}$, njeno delovanje bi lahko v tem primeru opisali kot rotacijo okrog omenjene točke (orbite delovanja so hiperbolične krožnice s središčem v tej točki), po obliki je konjugirana* $m(z) = \frac{\cos(\vartheta)z+\sin(\vartheta)}{-\sin(\vartheta)z+\cos(\vartheta)}$*;*
(3) *parabolično transformacijo in ima eno samo negibno točko v neskončnosti (na* $\bar{\mathbb{R}}$*), taka preslikava ohranja vse krožnice v $\mathcal{H}$, ki so v negibni točki tangentne na* $\bar{\mathbb{R}}$*, po obliki ustreza konjugiranki* $m(z) = z + 1$*;*
(4) *loksodromično transformacijo in ima dve negibni točki v neskončnosti (na* $\bar{\mathbb{R}}$*), pri čemer ohranja hiperbolično premico, ki ju povezuje, in loke ostalih evklidskih krožnic skoznju, deluje namreč kot translacija vzdolž opisanih objektov, po obliki je konjugirana* $m(z) = \lambda z, \ \lambda \in \mathbb{R}$.



Če opazujemo transformacijo (element $\text{Möb}(\mathcal{H})$*) oblike* $\frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$*, kjer so koeficienti* $\alpha, \beta, \gamma, \delta\ \in i\mathbb{R}$*, pa nam delitev določa že obstoj negibnih točk znotraj* $\mathcal{H}$*:*

(1) *če ima* m *negibno točko v* $\mathcal{H}$*, potem obstaja taka hiperbolična premica, da je* m *zrcaljenje čeznjo;*

(2) *kadar* m *nima negibnih točk v* $\mathcal{H}$*, ohranja negibni dve točki v neskončnosti (na* $\bar{\mathbb{R}}$*) in se obnaša kot zrcalni pomik vzdolž hiperbolične premice, ki jo določata.*

Dokaz. Poglejmo najprej orientacijo ohranjajoče preslikave. Negibnim točkam transformacije $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1)$ ustrezajo ničle polinoma $p(z) = cz^2 + (d - a)z - b$. Kadar je $c = 0$, imamo realni negibni točki, in sicer ∞ in če je $a \neq d$, še $\frac{b}{d-a}$. V primeru $c \neq 0$ pa je delitev pogojena z značajem ničel kvadratnega polinoma: $z_{1,2} = \frac{1}{2}(a - d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc})$, torej ena realna, ko $(a - d)^2 + 4bc = (a + d)^2 - 4 = 0$, dve realni, ko $(a + d)^2 - 4 > 0$, in konjugirani kompleksni, ko $(a + d)^2 - 4 < 0$. V prvih dveh primerih imamo negibne točke v neskončnosti, v zadnjem je znotraj $\mathcal{H}$ le ena (s pozitivno imaginarno komponento). Ta delitev se natanko ujema z delitvijo iz trditve 2.22. Zato imenujemo transformacijo:

- eliptična, kadar je vrednost $(\text{sl}(m))^2 < 4$; tedaj ima znotraj $\mathcal{H}$ negibno točko (druga je tej konjugirana in tako izven opazovanega prostora) in pravimo, da je njeno delovanje rotacija (ne evklidska) okrog te točke. V splošnem je taka transformacija konjugirana $m(z) = e^{2i\vartheta}z$, a ker ta nima konjugiranega para negibnih točk, vzamemo za modelno transformacijo (dobimo jo s konjugacijo gornje s prehodno preslikavo, ki prenese $i \to 0,\ -i \to \infty$), ki ohranja i in $-i$, to je $m(z) = \frac{\cos(\vartheta)z+\sin(\vartheta)}{-\sin(\vartheta)z+\cos(\vartheta)}$.
- parabolična, kadar je vrednost $(\text{sl}(m))^2 = 4$ in se negibni točki zlijeta v eno samo $x \in \bar{\mathbb{R}}$; orbite njenega delovanja so krožnice, dotikajoče se realne osi v negibni točki. V primeru negibne ∞ ima predpis $m(z) = z + 1$ in ohranja (z ∞ kompaktificirane) vodoravne evklidske premice, za katerokoli drugo realno točko je njena konjugiranka; obstoj prehoda nam zagotavlja tranzitivno delovanje $\text{Möb}(\mathcal{H})$ na $\bar{\mathbb{R}}$.
- loksodromična (hiperbolična), kadar je vrednost $(\text{sl}(m))^2 > 4$; dve realni negibni točki $x, y \in \bar{\mathbb{R}}$ tedaj povezuje hiperbolična premica, ki je poleg vseh ostalih evklidskih krožnic skozi x, y orbita njenega delovanja, opisana preslikava se obnaša kot translacija vzdolž njih. Kadar sta negibni $0, \infty$, ohranja pozitivno imaginarno os in ima obliko $m(z) = \lambda z$, sicer je njej konjugirana.

Ostale transformacije $\frac{\alpha\bar{z}+\beta}{\gamma\bar{z}+\delta}$, $\alpha = ai, \beta = bi, \gamma = ci, \delta = di \in i\mathbb{R}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ so med seboj bolj sorodne. Za negibne točke velja $c\,|z|^2 + dz - a\bar{z} - b \overset{z=x+iy}{=} cx^2 + cy^2 + (d - a)x - b + (d + a)iy = 0$. Zožitev na imaginarno komponento prinaša $d = -a$, zato poenostavimo $cx^2 + cy^2 + 2dx - b = 0$. Če je $c = 0$, je negibna premica $\{z \in \mathcal{H}; \text{Re}(z) = \frac{b}{2d}\}$, če $c \neq 0$, dopolnimo gornji izraz do popolnih kvadratov $x^2 + y^2 + \frac{2d}{c}x - \frac{b}{c} = (x + \frac{d}{c})^2 + y^2 - \frac{1}{c^2} = 0$, da razkrije hiperbolično premico – lok krožnice s središčem $-\frac{d}{c}$ in polmerom $\frac{1}{|c|}$. Tako je vselej negibna celotna premica in če bi opisano transformacijo kombinirali z zrcaljenjem čeznjo, bi dobili orientacijo ohranjajočo preslikavo z več kot dvema negibnima točkama, čemur ustreza le identiteta, zato je v gornjih primerih m sam tako zrcaljenje. Preostane le še primer, ko m nima negibnih točk v $\mathcal{H}$, potem so te lahko le med točkami v neskončnosti (na $\bar{\mathbb{R}}$) in izpolnjujejo enačbo $cx^2+(d-a)x-b = 0$. Če je $c = 0$, sta to $\frac{b}{2d}$

in ∞, sicer korena kvadratnega polinoma, v obeh primerih pa transformacija ohranja hiperbolično premico, a ne posameznih točk ter izmenja polravnini. Predstavlja zrcalni pomik, v kombinaciji z inverzijo se prelevi v hiperbolično translacijo. $\square$

Grupo transformacij hiperbolične ravnine smo osnovali na težnji po ohranjanju krožnic v kompleksni ravnini. Sedaj bomo ustrezno prilagodili še način merjenja razdalj, da bo zgornji opis pokril iskano in željeno grupo izometrij hiperbolične ravnine. Kot vemo, dolžino krivulj običajno povezujemo s pojmom ločne dolžine in jo podajamo kot: $\int |f'(t)|\, dt = \int_f |dz|$, kjer $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ opisuje pot. A ker je hiperbolično merjenje v evklidskem modelu po svoje prirejeno, bomo to zaenkrat označevali z neznano utežjo: $\int \rho(f(t))\, |f'(t)|\, dt = \int_f \rho(z)\, |dz|$. Želimo si, da bi Möbiusove transformacije tako definirano hiperbolično dolžino ohranjale, in upamo, da to dejstvo smiselno omeji izbor uteži.

Naj bo torej $m \in \text{Möb}(\mathcal{H})$ in poglejmo, kaj nam da enakost $\int \rho(f(t))\, |f'(t)|\, dt = \int \rho((m \circ f)(t))\, |(m \circ f)'(t)|\, dt$ ali enakovredno $\int [\rho(f(t)) - \rho((m \circ f)(t))\, |m'(f(t))|]\, |f'(t)|\, dt = 0$. Če upoštevamo še zveznost izraza v oglatih oklepajih, lahko ničelnost integrala nadomestimo z ničelnostjo integranda, kar omejitev na utež poenostavi v: $\rho(z) - \rho(m(z))\, |m'(z)| = 0$.

Definicija 2.33. *Za vsako odsekoma gladko pot $f : [a, b] \to \mathcal{H}$ definiramo hiperbolično dolžino f z $\int_f \frac{1}{\text{Im}(z)}\, |dz| = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(t))}\, |f'(t)|\, dt$.*

Dokaz dobre definiranosti. Ker gornji pogoj velja za vse preslikave $\text{Möb}(\mathcal{H})$, ga lahko z opazovanjem posameznih še precej poenostavimo.

- $m(z) = z + b, b \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \rho(z) = \rho(z + b)$ in je ρ realna funkcija imaginarne komponente: $\rho(z) = r(\text{Im}(z))$;
- $m(z) = az, a > 0 \;\Rightarrow\; \rho(z) = a\rho(az) \;\Rightarrow\; r(ay) = \frac{1}{a}r(y)$ tudi za $y = 1$, kar pomeni $\rho(z) = r(\text{Im}(z)) = \frac{c}{\text{Im}(z)}$.

Zadošča preveriti, da se opisana oblika obdrži tudi ob delovanju preostalih generatorjev $\text{Möb}(\mathcal{H})$:

- za obratno vrednost $o(z) = -\frac{1}{z}$, $o'(z) = \frac{1}{z^2}$, opazujemo razliko $\rho(z) - \rho(-\frac{1}{z})\frac{1}{|z|^2}$; ko vstavimo $\rho(z) = \frac{c}{\text{Im}(z)}$, $\rho(-\frac{1}{z}) = \rho(-\frac{\bar{z}}{|z|^2}) = \frac{c|z|^2}{\text{Im}(-\bar{z})} = \frac{c|z|^2}{\text{Im}(z)}$, dobimo željeno izničenje;
- za konjugiranje $k(z) = -\bar{z}$, ki ni holomorfno, pogledamo neposredno v izračun: pot in konjugirana pot se izražata kot $f(t) = x(t) + iy(t)$ oziroma $k \circ f(t) = -x(t) + iy(t)$, imamo torej $|(k \circ f)'(t)| = |f'(t)|$ in $\text{Im}((k \circ f)(t)) = y(t) = \text{Im}(f(t))$; zato res $\text{dolžina}_{\mathcal{H}}(k \circ f) = \int_a^b \frac{c}{\text{Im}((k \circ f)(t))}\, |(k \circ f)'(t)|\, dt = \int_a^b \frac{c}{\text{Im}(f(t))}\, |f'(t)|\, dt = \text{dolžina}_{\mathcal{H}}(f)$.

Ker konstante c nič ne zavezuje, postavimo kar najenostavneje $c = 1$. $\square$

Izpeljani način merjenja krivulj povsem običajno določa razdalje v hiperbolični ravnini, in sicer $d_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ in $d_{\mathcal{H}}(x, y) = \inf \{\text{dolžina}_{\mathcal{H}}(f);\ f \text{ pot med } x, y\}$.

Lema 2.34. *Za vsako transformacijo $m \in \text{Möb}(\mathcal{H})$ in vsak par točk $x, y \in \mathcal{H}$ velja $d_{\mathcal{H}}(x, y) = d_{\mathcal{H}}(m(x), m(y))$.*

Dokaz. Slika odsekoma gladke poti med x, y je odsekoma gladka pot med $m(x), m(y)$, njena dolžina pa je enaka prvotni: $\text{dolžina}_{\mathcal{H}}(m \circ f) = \text{dolžina}_{\mathcal{H}}(f)$. Za razdalje lahko izračunamo $d_{\mathcal{H}}(m(x), m(y)) = \inf \{\text{dolžina}_{\mathcal{H}}(g);\ g \text{ pot med } m(x), m(y)\} \leq$

$\inf\{\text{dolžina}_{\mathcal{H}}(m\circ f);\ f \text{ pot med } x,y\} = \inf\{\text{dolžina}_{\mathcal{H}}(f);\ f \text{ pot med } x,y\} = d_{\mathcal{H}}(x,y)$ in ker je $\text{Möb}(\mathcal{H})$ grupa, z inverzno transformacijo m^{-1} dokažemo še obratno neenakost. $\square$

Izrek 2.35. *$(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ je metrični prostor. Razdalja med točkama pa natanko sovpada s (hiperbolično) dolžino odseka hiperbolične premice skozi ti dve točki.*

Dokaz. Najprej navzočnost poti med x, y z dolžino njune oddaljenosti. Kot vemo, poljubni različni točki x, y določata hiperbolično premico, naj bo p, zanjo pa obstaja $m \in \text{Möb}(\mathcal{H})$, da je $m(p) = I$. Tako sta sliki $m(x) = \mu i$, $m(y) = \lambda i$, $\mu < \lambda$ (če $\lambda < \mu$, m nadomestimo z $-\frac{1}{m(z)}$). Zaradi gornje leme nam zadošča obstoj take poti med $\mu i, \lambda i$. Najprej izračunajmo dolžino neke (zdi se) smiselno izbrane vezi, to je $f_0 : [\mu, \lambda] \to \mathcal{H}$, $f_0(t) = it$ z dolžino $\int_\mu^\lambda \frac{1}{t} dt = \log\frac{\lambda}{\mu}$. Sedaj preverimo, da je res najkrajša, da torej za poljubno pot $f : [a, b] \to \mathcal{H}$ med $\mu i, \lambda i$ velja $\text{dolžina}_{\mathcal{H}}(f_0) \le \text{dolžina}_{\mathcal{H}}(f)$. $f(t)$ opisujemo kot $x(t) + iy(t)$, če spregledamo realno komponento, pa dobimo kvečjemu krajšo pot med $\mu i, \lambda i$ oblike $g(t) = \text{Im}(f(t))i = y(t)i$. Res: $\text{dolžina}_{\mathcal{H}}(g) = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(g(t))} |g'(t)|\, dt = \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(y'(t))^2} dt \le \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = \int_a^b \frac{1}{\text{Im}(f(t))} |f'(t)|\, dt = \text{dolžina}_{\mathcal{H}}(f)$. Po drugi strani pa je dolžina vsake poti $g : [a, b] \to \mathcal{H}$ oblike $g(t) = iy(t)$ med $\mu i, \lambda i$ večja ali enaka dolžini f_0. Slika $g([a, b])$ je namreč odsek hiperbolične premice, ki povezuje $\alpha i, \beta i$ ($\alpha \le \mu < \lambda \le \beta$), in če razpišemo $g = f_1 \circ (f_1^{-1} \circ g)$, kjer je f_1 pot $f_1 : [\alpha, \beta] \to \mathcal{H}$, $f_1(t) = it$ z dolžino $\log\frac{\beta}{\alpha} \ge \log\frac{\lambda}{\mu}$, zaradi surjektivnosti kompozituma $(f_1^{-1} \circ g)$ sledi: $\text{dolžina}_{\mathcal{H}}(f_1) \le \text{dolžina}_{\mathcal{H}}(g)$ in s tem $\text{dolžina}_{\mathcal{H}}(f_0) \le \text{dolžina}_{\mathcal{H}}(f)$ za vsako pot f. Razdalja $d_{\mathcal{H}}(\mu i, \lambda i) = \log\frac{\lambda}{\mu}$ je tako uresničena s hiperbolično daljico med tema točkama, za poljubni $x, y \in \mathcal{H}$ pa uporabimo tranzitivnost $\text{Möb}(\mathcal{H})$, invariantnost hiperboličnih dolžin in hiperboličnih razdalj za Möbiusove transformacije.

In še tri metrične zapovedi. Razdalja $d_{\mathcal{H}}$ je vselej nenegativna (nenegativen integrand, nenegativen integral dolžine poti med točkama in s tem nenegativen njihov infimum). Ker med poljubnima točkama obstaja pot, ki uresničuje njuno razdaljo, je ta za neenaki točki pozitivna, saj so vse vezi med njima nekonstantne. Primerjajmo sedaj dolžine poti med x, y in med y, x: poljubna pot $f : [a, b] \to \mathcal{H}$ med x, y, združena s primernim $h : [a, b] \to [b, a]$, $h(t) = a + b - t$, prerase v enako dolgo pot med y, x (in obratno). Zato sta množici dolžin, ki jih zavzamejo poti med x, y in med y, x, enaki, s tem pa tudi njun infimum. Trikotniško neenakost preverimo neposredno s stikom poti, ki uresničujeta razdalji med x, y oziroma y, z, ta je namreč kvečjemu dalši od najkrajše poti med x, z. $\square$

Smiselno bi bilo izraziti hiperbolično dolžino neposredno z opazovanima točkama. Vendar je to enostavno le na premicah, ki ustrezajo evklidskim; tedaj se razdalja izraža kot $d_{\mathcal{H}}(x, y) = d_{\mathcal{H}}(\mu i, \lambda i) = \left|\log\frac{\lambda}{\mu}\right|$. V vseh ostalih primerih sicer vemo, da obstaja Möbiusova transformacija, ki problem prevede na opisanega, a je to dokaj zamudno. Po drugi strani pa je tudi eksplicitna formula v splošnem primeru zelo nepregledna; o hiperboličnih premicah moramo razmišljati v evklidskem smislu kot o krožnicah, parametriziranih s $f(t) = s + re^{it}$, kjer je s središče in parameter t teče med kotoma φ_1, φ_2, določujočima obe točki. Za razdaljo tako dobimo izraz: $d_{\mathcal{H}}(z_1, z_2) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sin(t)} dt = \log\left|\frac{\csc(\varphi_2) - \text{ctg}(\varphi_2)}{\csc(\varphi_1) - \text{ctg}(\varphi_1)}\right| = \left|\log\left|\frac{(x_1 - s - r)y_2}{y_1(x_2 - s - r)}\right|\right|$.

Sorazmerno grd opis pa vendarle ne pokvari ugodja, da z opisano metriko naša transformacijska grupa prerase v grupo izometrij, za katero smo stremeli vse od začetka razdelka.

Izrek 2.36. *Grupa izometrij hiperbolične ravnine sovpada z „zoženo“ splošno Möbiusovo grupo:* $\mathrm{Isom}(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}}) = \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathcal{H})$.

Dokaz. Iz konstrukcije metrike $d_{\mathcal{H}}$ na $\mathcal{H}$ vemo $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathcal{H}) \subset \mathrm{Isom}(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$; preveriti moramo le obratno inkluzijo. Kot v evklidskih prostorih tudi tu trikotniška neenakost doseže enačaj le, kadar so točke vzete iz iste hiperbolične premice, kar pomeni, da hiperbolična izometrija slika premice v premice. Slika daljice je daljica med slikama njenih krajišč, slika simetrale simetrala slike. Po drugi strani pa Möbiusova transformacija (element $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathcal{H})$) med paroma točk iz $\mathcal{H}$ obstaja, natanko kadar sta ti v obeh enako oddaljeni (oba para lahko prenesemo na imaginarno os v točki i, $e^{d_{\mathcal{H}}}i$).

Opazujmo odslej konkretno hiperbolično izometrijo f. Bodita $x, y \in I$ (pozitivna imaginarna os). Vemo, da obstaja $m \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathcal{H})$, da je $m(f(x)) = x$ in $m(f(y)) = y$, točki x, y in $f(x), f(y)$ sta enako oddaljeni. Se pravi, da $m \circ f$ ohranja negibni x, y, slika I v I in po potrebi nadomeščen s konjugirano transformacijo $-\overline{m(z)}$ ohranja polravnini. Preverimo, kaj tak kompozitum pomeni za ostale točke iz $\mathcal{H}$. Točke imaginarne osi so enolično določene z razdaljama do x, y in ker se obe z $m \circ f$ ohranjata, so vse te točke negibne za opisani kompozitum. Naj bo sedaj $w \in \mathcal{H}$, $w \notin I$ in p hiperbolična premica skozi w, pravokotna na I. p bi lahko opisali kot simetralo neke daljice na I, ker pa kompozicija ohranja vse točke I, ohranja tudi daljice in njihove simetrale. Prav tako ohranja tudi oddaljenost naše točke od presečišča p, I in po prej opisanem popravku breg glede na premico I. Torej preslika vase tudi vsako nezaznamovano točko w, je identična preslikava, f pa ustreza $m^{-1} \in \mathrm{M\ddot{o}b}(\mathcal{H})$. □

Poglavje bomo sklenili s kratkim premislekom o veljavnosti izpeljanih sklepov v Poincaréjevem krožnem modelu, ki ga izpostavljamo, ker se bo izkazal za najugodnejšo skico naših nadaljnih razmišljanj. V poenotenosti Riemannove sfere razumemo prehod med Poincaréjevima modeloma kot preprosto zamenjavo opazovanega kroga v ravnini ter ga opisujemo z znano Möbiusovo transformacijo $p(z) = \frac{iz+1}{-z-i}$ (iz kroga v polravnino) in obratno $p^{-1} = p$. Preglejmo še, kako ta pretvorba vpliva na opis hiperbolične geometrije (do konca poglavja bomo za krožni model uporabljali simbol $\tilde{\mathcal{H}}$).

Trditev 2.37. *Zožitev splošne Möbiusove grupe na enotski krog vključuje elemente, konjugirane elementom* $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathcal{H})$. *Po obliki so to lomljene preslikave* $m(z) = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ *ali* $m(z) = -\frac{a\bar{z}+b}{\bar{b}\bar{z}+\bar{a}}$, *kjer sta* $a, b \in \mathbb{C}$ *in* $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

Dokaz. Elementi grupe $\mathrm{M\ddot{o}b}(\mathcal{H})$ imajo eno od naslednjih oblik: $m(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ali $n(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$, $a, b, c, d \in i\mathbb{R}$ (če normaliziramo, še $ad - bc = 1$). Prehod $p : S^1 \to \mathbb{R}$, $\tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ opišemo s $p(z) = \frac{iz+1}{-z-i}$. Izračunajmo sedaj konjugiranke, pripadajoče grupi $\mathrm{M\ddot{o}b}(\tilde{\mathcal{H}})$:

- $\mu(z) = p^{-1} \circ m \circ p = \frac{(-a-d-(b-c)i)z+(b+c+(a-d)i)}{(b+c-(a-d)i)z+(-a-d+(b-c)i)} = \frac{\alpha z+\beta}{\bar{\beta}z+\bar{\alpha}}$
- $\nu(z) = p^{-1} \circ n \circ p = \frac{(a-d-(b+c)i)\bar{z}+(-b+c+(a+d)i)}{(b-c+(a+d)i)\bar{z}+(-a+d-(b+c)i)} = -\frac{\gamma\bar{z}+\delta}{\bar{\delta}\bar{z}+\bar{\gamma}}$. □

Trditev 2.38. *Hiperbolična dolžina v krožnem modelu izpolnjuje pogoj:* dolžina$_{\tilde{\mathcal{H}}}(f)$ $=$ dolžina$_{\mathcal{H}}(p \circ f)$. *Za odsekoma gladko pot* $f : [a, b] \to \tilde{\mathcal{H}}$ *je podana uteženo z* $\int_f \frac{2}{1-|z|^2}\,|dz|$.

Dokaz. Dolžino v krožnem modelu smo definirali z dolžina$_{\tilde{\mathcal{H}}}(f) =$ dolžina$_{\mathcal{H}}(p \circ f) = \int_a^b \frac{1}{\mathrm{Im}((p\circ f)(t))}\,|(p \circ f)'(t)|\,dt = \int_a^b \frac{1}{\mathrm{Im}(p(f(t)))}\,|p'(f(t))|\,|f'(t)|\,dt = \int_f \frac{1}{\mathrm{Im}(p(z))}\,|p'(z)|\,|dz|$. Vstavimo sedaj vrednosti za zgoraj opisan in normaliziran prehod: $\mathrm{Im}(p(z)) = \mathrm{Im}\left(\frac{\frac{i}{\sqrt{2}}z+\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}z-\frac{i}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{1-|z|^2}{|-z-i|^2}$, $|p'(z)| = \frac{2}{|z+i|^2}$ in dobimo: dolžina$_{\tilde{\mathcal{H}}}(f) = \int_f \frac{2}{1-|z|^2}\,|dz|$.

Za dobro definiranost moramo preveriti, da je gornji izračun neodvisen od prehoda. Naj bo torej f poljubna odsekoma gladka pot v $\tilde{\mathcal{H}}$ in q poljuben Möbiusov prenos $\tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$. Tedaj je $p \circ f$ odsekoma gladka pot v $\mathcal{H}$, $q \circ p^{-1} \in$ Möb$(\mathcal{H})$; invariantnost hiperboličnih dolžin glede na delovanje Möb$(\mathcal{H})$ da: dolžina$_{\mathcal{H}}(p \circ f) =$ dolžina$_{\mathcal{H}}((q \circ p^{-1}) \circ p \circ f) =$ dolžina$_{\mathcal{H}}(q \circ f)$. □

Trditev 2.39. $(\tilde{\mathcal{H}}, d_{\tilde{\mathcal{H}}})$ *je metrični prostor; razdalja med točkama, dana z* $d_{\tilde{\mathcal{H}}}(x, y) =$ $\inf\{$dolžina$_{\tilde{\mathcal{H}}}(f)$; f *pot med* $x, y\}$, *pa natanko sovpada s (hiperbolično) dolžino odseka hiperbolične premice skozi ti dve točki. Hkrati velja:* Isom$(\tilde{\mathcal{H}}, d_{\tilde{\mathcal{H}}}) =$ Möb$(\tilde{\mathcal{H}})$.

Dokaz. Sprehodimo se skozi nabor lastnosti, ki jih ohranja prehodna Möbiusova transformacija $p : \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$. Pokažimo najprej, da p ohranja razdalje: $d_{\tilde{\mathcal{H}}}(z, w) =$ $\inf\{$dolžina$_{\tilde{\mathcal{H}}}(f)$; f pot med $z, w\}$ $=$ $\inf\{$dolžina$_{\mathcal{H}}(p \circ f)$; f pot med $z, w\}$ $\geq$ $\inf\{$dolžina$_{\mathcal{H}}(g)$; g pot med $p(z), p(w)\}$ $=$ $d_{\mathcal{H}}(p(z), p(w))$, enako bi veljalo za inverzno transformacijo. Metrika $d_{\mathcal{H}}$ na $\mathcal{H}$ tako inducira metriko $d_{\tilde{\mathcal{H}}}$ na $\tilde{\mathcal{H}}$, naš p pa podaja homeomorfizem med metričnima prostoroma $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$, $(\tilde{\mathcal{H}}, d_{\tilde{\mathcal{H}}})$, ki ohranja razdalje. Kot tak slika hiperbolično daljico (odsek hiperbolične premice med dvema točkama dolžine njune oddaljenosti) v hiperbolično daljico med slikama. Poleg tega pa je Möb$(\tilde{\mathcal{H}})$ natanko grupa izometrij $(\tilde{\mathcal{H}}, d_{\tilde{\mathcal{H}}})$, saj je Möb$(\mathcal{H})$ natanko grupa izometrij $(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$, vsak Möbiusov prehod pa je razdalje ohranjajoč homeomorfizem, torej izometrija. Ali eksplicitno: za $f \in$ Isom$(\tilde{\mathcal{H}}, d_{\tilde{\mathcal{H}}})$ je $p \circ f \circ p^{-1} \in$ Isom$(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ in s tem $\in$ Möb$(\mathcal{H})$, kar potrdi $f \in$ Möb$(\tilde{\mathcal{H}})$, obratno za $f \in$ Möb$(\tilde{\mathcal{H}})$ je $p \circ f \circ p^{-1} \in$ Möb$(\mathcal{H})$, $\in$ Isom$(\mathcal{H}, d_{\mathcal{H}})$ in ker p, p^{-1} ohranjata razdalje, $f \in$ Isom$(\tilde{\mathcal{H}}, d_{\tilde{\mathcal{H}}})$. □

3. Geometrija ploskev

Za trenutek se ponovno ozrimo na naslov: Geometrija ploskev. Očitno bomo govorili o hiperbolični geometriji, omejili pa se bomo tudi pri ploskvah. Razumeli jih bomo v njihovem zoženem pomenu kot (povezane) sklenjene orientabilne 2-mnogoterosti, katerih rod bomo označevali z r. Po topološkem klasifikacijskem izreku so to povezane vsote r torusov. Vemo pa tudi, da jih lahko v ravnini ponazorimo kot kvociente mnogokotnikov ($4r$-kotnikov) s paroma identificiranimi stranicami po pravilu zaporednih komutatorjev.

Pričakujemo torej, da je geometrija teh ploskev hiperbolična, in tako smo postavili tudi osrednjo trditev našega razmišljanja.

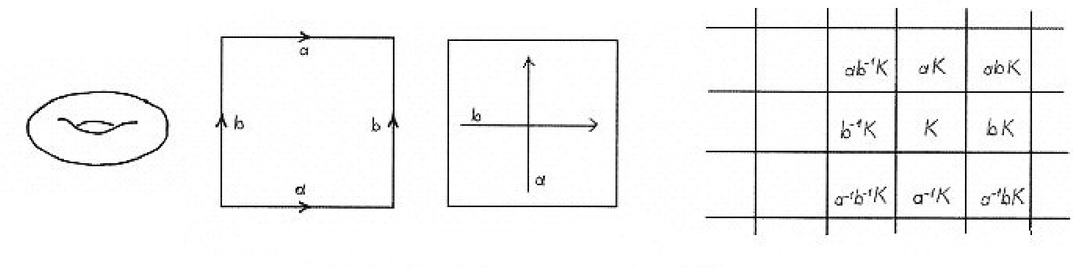
Izrek 3.1. *Za vsako sklenjeno orientabilno ploskev, rodu večjega kot 1, obstaja taka grupa hiperboličnih translacij, da je kvocientni prostor hiperbolične ravnine po tej grupi homeomorfen dani ploskvi.*

Opomba 3.2. *Sklenjena orientabilna ploskev rodu 0 je sfera, ki je „sferična ravnina“ sama. Za sklenjeno orientabilno ploskev rodu 1 – torus – pa obstaja gornjemu sličen opis z evklidsko ravnino in običajno grupo translacij. Ta nam bo vseskozi služil kot motivacijski zgled.*

V nadaljevanju se bomo posvetili nekoliko razširjeni spodnji obliki izreka, katerega neposredna posledica pa bo končno tudi naša prejšnja trditev.

Izrek 3.3. *Če ploskev ponazorimo s kompaktnim mnogokotnikom v ravnini in nanj delujemo s pripadajočo grupo translacij, so njegove slike za različne grupne elemente različne in tvorijo tlakovanje celotne hiperbolične ravnine.*

Idejo izreka najprej ponazorimo na primeru torusa, ki ima evklidsko geometrijo, kot ploskev pa je homeomorfen kvocientu $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

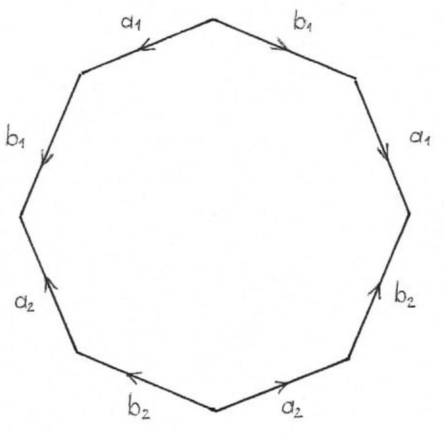


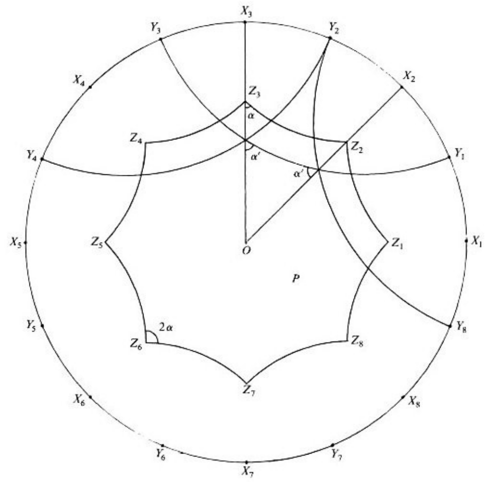
- Torus običajno prikažemo v ravnini z enotskim kvadratom z nasprotno identificiranima stranicama ($aba^{-1}b^{-1}$).
- Identifikaciji lahko enakovredno nadomestimo s preslikavama: $a(x, y) = (x, y + 1)$ in $b(x, y) = (x + 1, y)$, torej translacijama za 1 v smereh x in y, da se leva stranica preslika v desno in spodnja v zgornjo.
- Grupa translacij je tako generirana z a in b, očitno pa je tudi, da po zaporednih premikih $a\ b\ a^{-1}\ b^{-1}$ pridemo v izhodiščno lego, kar je do konjugiranja faktorjev in obratnega vrstnega reda edina taka pot. Imamo torej grupo, generirano z dvema generatorjema, ki med seboj komutirata: $\langle a, b; aba^{-1}b^{-1} = id\rangle = \mathbb{Z}^2$.
- Vidimo tudi, da slike enotskega kvadrata pri delovanju grupe $\mathbb{Z}^2$ dajo tlakovanje ravnine.

Podobne korake bi želeli ponoviti pri izpeljavi dokaza za hiperbolične ploskve. Ker jih ponazarjajo ustrezni $4r$-kotniki, bomo tlakovanje očitno lahko dosegli le v hiperbolični ravnini, kjer obstajajo poljubni (pravilni) mnogokotniki z vsoto notranjih kotov 2π.

3.1. **Ponazoritev v Poincaréjevem modelu.** Sklenjeno orientabilno ploskev bomo – podobno kot torus s kvadratom – prikazali s pripadajočim osnovnim mnogokotnikom.

Definicija 3.4. *Osnovni mnogokotnik sklenjene orientabilne ploskve je pravilni $4r$-kotnik z notranjimi koti $\frac{2\pi}{4r}$.*





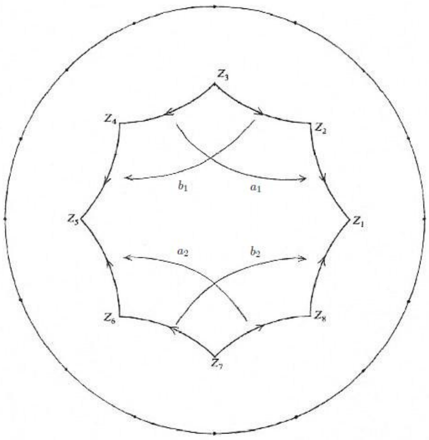
Tak lik v Poincaréjevem krožnem modelu hiperbolične ravnine načrtujemo na sledeči način. Če je r rod opazovane ploskve, označimo z n njegov štirikratnik ($n = 4r$) in sprva opazujemo n-te korene enote – na mejni krožnici jih ponazarjajo točke v neskončnosti, ki jih zaporedoma označimo z $X_1,\ X_2, ...,\ X_n$. Te točke kot oglišča določajo idealni n-kotnik, tak, katerega vsota kotov je enaka 0. Predstavljamo si lahko, da bomo od tu do želenega lika prišli s „skrčitvijo“ glede na središče opazovanega kroga.

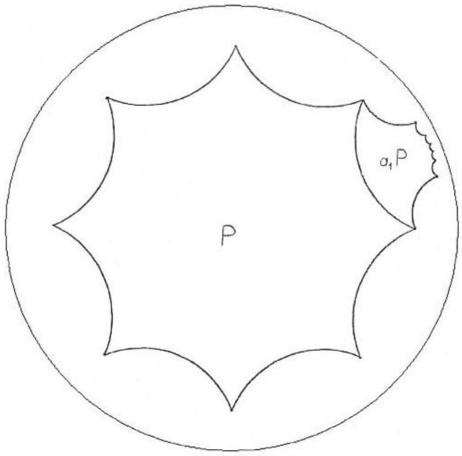
Na mejni krožnici označimo še točke $Y_1,\ Y_2, ...,\ Y_n$, tako da je Y_i razpolovišče loka X_iX_{i+1}, pri čemer je i ciklični indeks po modulu n. V preseku levih polprostorov, ki jih določajo hiperbolične premice Y_iY_{i+2}, se izoblikuje kompaktni n-kotnik z notranjimi koti $2\alpha'$ in oglišči $Z'_1,\ Z'_2, ...,\ Z'_n$. (Res: Vsaka druga hiperbolična premica se predhodne tangentno dotika v skupnem Y_i, vmesna premica $Y_{i-1}Y_{i+1}$ pa ju preseka v različnih točkah, ki na njej izrežeta stranico $Z'_iZ'_{i+1}$. Zaradi simetrične postavitve izbranih neskončnih točk se sosednji hiperbolični premici sekata natanko na zveznici središča O z vmesnim X, za $Y_{i-2}Y_i$ in $Y_{i-1}Y_{i+1}$ na OX_i.) Če sedaj vse Z'_i enakomerno selimo po pripadajočih povezavah OX_i in skozi sosednje pare vselej načrtamo hiperbolične premice (vzporednice k Y_iY_{i+2} s skupno pravokotnico v smeri OY_{i+1}), vidimo, da se notranji kot zmanjšuje s približevanjem neskončnosti. Ob tem lahko zavzame vse vrednosti med 0 in $2\alpha'$.

Za iskani osnovni mnogokotnik lahko oglišča Z_i določimo na kotu $2\alpha = \frac{2\pi}{n}$ pripadajoči enakomerni oddaljenosti od središča na zveznici Z'_iX_i. Preveriti moramo le še, da je kot $2\alpha'$ dovolj velik. Zadostuje opazovati izsek X_iOX_{i+1}: za vsebovana trikotnika $OZ'_iZ'_{i+1}$ in $Y_iZ'_iZ'_{i+1}$ velja namreč $2\alpha' + \frac{2\pi}{n} < \pi$ in $2\pi - 4\alpha' < \pi$, kar nam vrednost $2\alpha'$ omeji: $\frac{2\pi}{4} < 2\alpha' < \pi(1 - \frac{2}{n})$. Ustrezno izbrani Z_i nam torej dajo osnovni mnogokotnik ploskve, ki ga bomo označevali s P.

Od ustreznega osnovnega mnogokotnika do ploskve pridemo z lepljenjem stranic. Kot vemo, je primerna identifikacija v zaporedju komutatorjev. Tako enačimo točke prve in tretje, druge in četrte, pete in sedme, šeste in osme ... stranice. Te identifikacije lahko nadomestimo s (hiperboličnimi) translacijami.

Definicija 3.5. *Če oglišča osnovnega mnogokotnika P označimo po vrsti v pozitivni smeri z $Z_1,\ Z_2, ...,\ Z_n$, potem hiperbolična izometrija a_i preslika stranico $Z_{4i-1}Z_{4i}$ v $Z_{4i-2}Z_{4i-3}$, hiperbolična izometrija b_i pa stranico $Z_{4i-1}Z_{4i-2}$ v $Z_{4i}Z_{4i+1}$, pri čemer je $i = 1, ..., r$.*





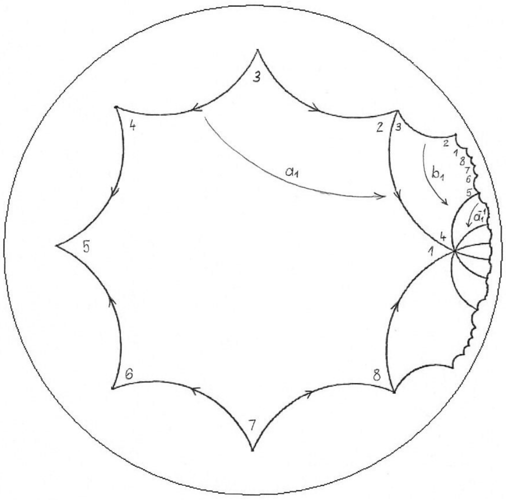
Zastavlja se vprašanje, ali take izometrije sploh obstajajo in kako vemo, da so enolično določene. Oboje nam zagotavljajo lastnosti Möbiusovih transformacij: tranzitivnost delovanja Möb($\mathcal{H}$) na množici hiperboličnih premic in enolična tranzitivnost splošne Möbiusove grupe na trojicah točk.

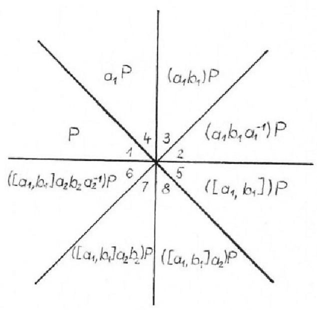
Trditev 3.6. *Izometrije a_i in b_i so hiperbolične translacije.*

Dokaz. Zgoraj definirane izometrije izenačujejo pare točk na nesosednjih stranicah in to so tudi edine točke, ki so skupne osnovnemu in poljubnemu preslikanemu mnogokotniku. Med točkami posamezne stranice osnovnega mnogokotnika in tistimi, ki se z dano izometrijo preslikajo v te točke, je tako vselej neka pozitivna razdalja, večja ali enaka dolžini stranice. Med slikami in originali tako ob delovanju izometrij a_i, b_i ni točk, ki bi bile poljubno blizu ena drugi, čemur v hiperboličnih prostorih (med orientacijo ohranjajočimi preslikavami) ustrezajo edino translacije. □

3.2. **Tlakovanje hiperbolične ravnine.** V tem razdelku se bomo ukvarjali z grupo translacij G_r, generirano s preslikavami $a_1, b_1, ..., a_r, b_r$, in opazovali grupne slike osnovnega mnogokotnika P (gP za $g \in G_r$). Zaradi preglednosti predhodno definirajmo še $c_i = [a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ za $i = 1, ..., r$.

Trditev 3.7. *Ko g preteče elemente a_1, a_1b_1, $a_1b_1a_1^{-1}$, $c_1, ...,$ $c_1 \cdots c_r = id$, se slike mnogokotnika gP zvrstijo v negativni smeri okrog oglišča Z_1, tako da se zaporedni prilegata vzdolž stranice, vse pa tvorijo celotno okolico skupnega oglišča Z_1.*





Dokaz. Najprej pokažimo, da se sosednja mnogokotnika vselej stikata v skupnem robu. Med njima je eden zmeraj za generator ali inverz generatorja preslikani drugi. Torej je par le translirani par začetnega mnogokotnika in njegove prve slike, ta pa se po definiciji izbranih izometrij ujema v identificirani stranici. Tako sta na primer mnogokotnika a_1b_1P in $a_1b_1a_1^{-1}P$ sosednja in sta za a_1b_1 preslikani par P in $a_1^{-1}P$, ki se stikata s stranicama Z_3Z_4 v P in Z_2Z_1 v sliki $a_1^{-1}P$.

Nadalje vidimo, da $4r$ (slik) mnogokotnikov, vsak s kotom $\frac{2\pi}{4r}$ pri Z_1, tvori celotno okolico oglišča. Vsak se namreč s predhodnim ujema v stranici, $4r$-ta slika pa ustreza identiteti: če je $g = c_1 \cdots c_r$, je $gP = P$. Res je $gZ_1 = Z_1$, za izračun česar lahko uporabimo opažanje, da je $c_iZ_{4i+1} = Z_{4i-3}$. In ker g ohranja orientacijo (kot produkt translacij), je s tem $gZ_i = Z_i$ za vsa oglišča mnogokotnika P; edina izometrija, ki ima več kot dve negibni točki, pa je identiteta. $\square$

Enako velja tudi za vsa ostala oglišča, kjer dobimo želene okolice s ciklično permutacijo $4r$ faktorjev v produktu $c_1c_2 \cdots c_r$. In tudi za oglišča gZ_i poljubnega preslikanega mnogokotnika gP, ki imajo za okolico primerno transformirano okolico oglišča Z_i.

Radi bi pokazali, da grupne slike osnovnega mnogokotnika tvorijo tlakovanje hiperbolične ravnine, da torej pokrijejo celotno ravnino brez prekrivanja. Opazovali smo že prileganje slik vzdolž robov in okrog oglišč, preostane pa nam še premislek o morebitnem celostnem prekrivanju mnogokotnikov. Ker želimo pokazati enakost med unijo slik mnogokotnikov ($\tilde{\mathcal{H}}$) in hiperbolično ravnino ($\mathcal{H}$), bomo definirali preslikavo p med obema (predpostavimo različnima) prostoroma in dokazali njeno bijektivnost.

Sprva se nekoliko zadržimo ob strukturi novodefiniranega prostora $\tilde{\mathcal{H}}$. Tvorijo ga kopije vseh grupnih slik osnovnega mnogokotnika $\{gP; g \in G\}$, ki jih bomo ustrezno označevali z $\{g\tilde{P}; g \in G\}$. Če označimo z X množico generatorjev grupe G_r in z X^{-1} množico njihovih inverzov, lahko zapišemo, da se $g\tilde{P}$ in $h\tilde{P}$ prilegata vzdolž robu natanko takrat, ko je $g^{-1}h \in X \cup X^{-1}$. In velja, če je e skupni rob P in $g^{-1}hP$ ter s tem ge skupni rob gP in hP, se $g\tilde{P}$ in $h\tilde{P}$ stikata v kopiji natanko tega robu. Prostor $\tilde{\mathcal{H}}$ je $\cup g\tilde{P}$ z upoštevanjem opisanih identifikacij po stranicah. Očitno je lokalno enak $\mathcal{H}$, saj zožitev preslikave $p : \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ prenese $\tilde{P}$ identično na P, to pa pomeni, da so koti, razdalje in geometrija lokalno enaki.

Za globalno enakost opazovanih prostorov sedaj zadošča bijektivnost preslikave $p : \tilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$. Tako bomo najprej dokazali surjektivnost s standardnim argumentom za preslikave v povezani prostor.

Trditev 3.8. *Slika preslikave p, to je $\cup gP$, je hkrati odprta in zaprta v prostoru $\mathcal{H}$.*

Dokaz. Množica $\cup gP$ je očitno odprta v $\mathcal{H}$, saj ima vsaka njena točka odprto okolico, ki je vsebovana v uniji. Notranje točke mnogokotnikov gP imajo tako okolico po definiciji, za točke v notranjosti identificiranih stranic se sestavita polokolici (polodprti okolici robne točke) znotraj dveh stikajočih se mnogokotnikov. Slike mnogokotnikov pa po prejšnji trditvi tvorijo polno okolico oglišč – vse obkrožajoče stranice se med seboj paroma identificirajo.

In je tudi zaprta. Enaka je namreč svojemu zaprtju: $\cup gP = \overline{\cup gP}$. Za točke iz nekega (in vsakega) mnogokotnika gP velja, da zanje obstaja pozitivna razdalja, znotraj katere so zajete točke bodisi iz istega ali sosednjega mnogokotnika. Torej: za vsak $A \in gP$ obstaja δ, da iz $d(A, B) < \delta$ sledi $B \in gP$ ali $B \in hP$ za $gh^{-1} \in$

$X \cup X^{-1}$, če je A oglišče, sosednjost zajema obkrožajoči cikel mnogokotnikov. To je posledica dejstva, da so pravilni mnogokotniki (v hiperboličnem smislu) konveksni, njihov premer pa je končen in tako lahko za δ postavimo na primer polovico dolžine stranice. Iz prvega dela dokaza sedaj razberemo, da ima vsaka točka unije $\cup gP$ kakšno okolico (bazna okolica $\mathcal{K}(\cdot, \delta)$), ki seka le končno slik mnogokotnikov gP. Tako je $\{gP;\ g \in G\}$ lokalno končna družina podmnožic v $\mathcal{H}$. In ker so le-te tudi zaprte, je zaprta v $\mathcal{H}$ tudi njihova unija. □

Pri dokazu injektivnosti si bomo pomagali z dvigom poti.

Definicija 3.9. *Pravimo, da ima preslikava p lastnost dviga poti, če za poljubno pot v prostoru $\alpha : I \to \mathcal{H}$ ($I = [0, 1]$) in tako točko $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{H}}$, katere p-slika sovpada z $\alpha(0)$, to je $p\tilde{A} = \alpha(0)$, obstaja enolično določena pot $\tilde{\alpha} : I \to \tilde{\mathcal{H}}$, da je $p\tilde{\alpha} = \alpha$ in $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{A}$. Tako definirano pot $\tilde{\alpha}$ imenujemo dvig poti α.*

Trditev 3.10. *Preslikava p ima lastnost dviga poti.*

Dokaz. Uporabili bomo dejstvo, da se preslikava p lokalno – glede na posamezne mnogokotnike – obnaša kot identični homeomorfizem. Naj bo torej $\tilde{V}$ oglišče nekega mnogokotnika $g\tilde{P}$ v $\tilde{\mathcal{H}}$ in označimo z $U(\tilde{V})$ notranjost unije vseh mnogokotnikov, ki si to oglišče delijo. Če sprostimo $\tilde{V}$, da preteče vsa oglišča, smo dobili pokritje prostora $\tilde{\mathcal{H}}$ z odprtimi množicami $U(\tilde{V})$. In ker že vemo, da je preslikava p surjektivna, in $p\left[U(\tilde{V})\right]$ (definirano lokalno) dajo identične kopije množic $U(\tilde{V})$ v prostoru $\mathcal{H}$, je tako tudi unija množic $p\left[U(\tilde{V})\right]$ pokritje prostora $\mathcal{H}$.

Če opazujemo le poti, ki so vsebovane v posamezni množici opisanega pokritja, lahko zanje dvig poti enolično definiramo kot $\tilde{\alpha} = (p|_{U(\tilde{V})})^{-1}\alpha$. Vsako drugo pot pa lahko razdelimo na manjše odseke. Kot slika intervala je namreč kompaktna in s tem vsebovana v nekem omejenem krogu znotraj hiperbolične ravnine. Ker smo tako v kompaktnem metričnem prostoru, nam Lebesguovo število določa tak premer množic, da so le-te vsebovane v posameznem elementu pokritja. S tem pa tudi delitev naše poti in pripadajočo delitev intervala $[0, 1]$. Delilne točke intervala $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ torej izberemo tako, da $\alpha_i = \alpha|_{[t_i,t_{i+1}]}$ leži znotraj nekega $p\left[U(\tilde{V})\right]$ za vsak $i = 0, ..., \ n-1$. Tako lahko pot dvignemo korakoma po odsekih. Predpostavimo, da smo dvig za $0 \le t \le t_i$ že uresničili, in premislimo o odseku α_i – njegov dvig je enolično določen, saj leži v enem izmed $p\left[U(\tilde{V})\right]$ in je položaj začetne točke določen z $\tilde{\alpha}_i(t_i) = \tilde{\alpha}_{i-1}(t_i)$. Zato lahko dvig $\alpha|_{[0,t_i]}$ razširimo do dviga $\alpha|_{[0,t_{i+1}]}$ in tako po n korakih prenesemo celotno pot.

Sedaj premislimo še enoličnost take konstrukcije. Denimo nasprotno, da obstaja še nek dvig α' in je $\alpha(0) = \alpha'(0)$. Postavimo $\xi = \sup\{t; 0 \le t \le 1,\ \tilde{\alpha}|_{[0,t]} = \tilde{\alpha'}|_{[0,t]}\}$ in vidimo: če bi bil $\xi < 1$, bi obstajal ϵ, za katerega bi delček poti $\alpha(\xi - \epsilon, \xi + \epsilon)$ ležal znotraj posameznega $p\left[U(\tilde{V})\right]$, kar bi pomenilo enoličen dvig in s tem razširitev enakosti dvignjenih poti $\tilde{\alpha}$ in $\tilde{\alpha}'$ na območje $[0, \xi + \epsilon)$, to pa je protislovno z definicijo ξ. □

In kako nam ta lastnost določa injektivnost preslikave? Denimo torej, da je ne in je $p(\tilde{A}) = p(\tilde{B}) = A$. Povežimo točki $\tilde{A}$ in $\tilde{B}$ s potjo $\tilde{\alpha}$, ki je enoličen dvig zanke α v točki $A = \alpha(0) = \alpha(1)$. A ker hiperbolično ravnino $\mathcal{H}$ predstavlja konveksna množica v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$, je le-ta kontraktibilna in tako nas prema homotopija $\alpha_t(x) = t\alpha(x) + (1-t)A,\ 0 \le x \le 1$, skozi družino sklenjenih poti v točki A vodi od zanke α do trivialne poti. Če se ob tem ozremo na njihove dvige $\tilde{\alpha}_t$, se pot, povezujoča $\tilde{A}$ in $\tilde{B}$ počasi krči, dokler točki ne sovpadata. Zato je $\tilde{A} = \tilde{B}$ in preslikava p je injektivna.

Vse to razmišljanje nas je privedlo do sklepa, da je p bijektivna in ker hkrati ohranja geometrijsko strukturo, je na začetku razdelka vpejani prostor $\tilde{\mathcal{H}}$ le identična kopija hiperbolične ravnine in mnogokotniki gP tvorijo želeno tlakovanje.

3.3. **Struktura grupe translacij.** Ugotovili smo, da so grupne slike osnovnega mnogokotnika za različne grupne elemente različne in da tvorijo tlakovanje hiperbolične ravnine $\mathcal{H}$. Slike gP so torej v bijektivni korespondenci z elementi grupe G_r, vendar za to grupo doslej poznamo samo generatorje: $a_1, ..., a_r, b_1, ..., b_r$, ki jih povezuje relacija: $[a_1, b_1] \cdots [a_r, b_r] = \mathrm{id}$. V nadaljevanju bomo spoznali, da je to „edina“ netrivialna relacija naše grupe, in tako bo G_r z generatorji in zgornjo relacijo do izomorfizma določena.

Zato definirajmo grupo $\hat{G}_r$ in preslikavo $\Phi : \hat{G}_r \to G_r$, ki izpolnjujeta vse že ugotovljene značilnosti. $\hat{G}_r$ naj bo prosta nekomutativna grupa, generirana z $2r$ elementi: $\hat{a}_1,\ \hat{b}_1, ...,\ \hat{a}_r,\ \hat{b}_r$, in Φ homomorfizem, definiran pričakovano kot: $\Phi(\hat{a}_i) = a_i,\ \Phi(\hat{b}_i) = b_i$ za $i = 1, ..., r$. Vemo tudi, da je $\hat{c} = [\hat{a}_1,\ \hat{b}_1] \cdots [\hat{a}_r,\ \hat{b}_r]$ element jedra te preslikave; poiskati identične elemente grupe G_r pa sedaj pomeni isto kot določiti podgrupo $\ker \Phi = \{\hat{g} \in \hat{G}_r; \Phi(\hat{g}) = \mathrm{id}\}$.

Zapišimo vse, kar lahko o jedru Φ razberemo iz G_r in njene geometrijske ponazoritve s tlakovanjem. Poljuben element $\hat{g} \in \hat{G}$ znamo zapisati v obliki produkta $\hat{g} = \hat{x}_1 \cdots \hat{x}_k$, kjer so $\hat{x}_i \in \hat{X} \cup \hat{X}^{-1}$ in sta $\hat{X}$, $\hat{X}^{-1}$ podobno kot prej množici generatorjev in njihovih inverzov. Če je $\hat{g}$ element jedra, imamo zaporedje mnogokotnikov $P_1,\ P_2 = x_k P_1,\ P_3 = x_{k-1} x_k P_1, ...,\ P_k = x_2 \cdots x_{k-1} x_k P_1$, v katerem si poljuben zaporedni par deli skupno stranico in velja $P_{k+1} = x_1 P_k = P_1$.

Poglejmo si, kako tako zaporedje mnogokotnikov vidimo znotraj celotne hiperbolične ravnine. Osredotočimo se na unijo notranjosti mnogokotnikov P_i skupaj z unijo notranjosti vseh identificiranih stranic in opazovani lik označimo z R. Območje, ki smo ga s tem likom ogradili, sestavlja bodisi množica oglišč bodisi omejena množica mnogokotnikov. Položaj nas nekoliko spominja na Jordan-Brouwerjev izrek.

Lema 3.11. *Prostor $\mathcal{H} - R$ razpade na neomejeno zunanjo komponento in omejeno zaprto množico N.*

Dokaz. Robni lik R smo zgradili iz končnega števila mnogokotnikov; gre torej za relativno kompaktno množico in s tem omejeno. Lik R, ki ga izvzamemo, je tako vsebovan v nekem krogu $K(0, r)$, njegov komplement – neomejeni del $\mathcal{H}$ – pa povezan in zato del samo ene komponente. Vse ostale – opazovana notranjost N – ležijo znotraj kroga in so zato omejene.

Poleg tega je podprostor $\mathcal{H} - R$ zaprt v $\mathcal{H}$, saj je komplement R, ki ga homeomorfno opišemo kot odprti kolobar $\Gamma \times (0, 1)$, kjer je Γ poljuben graf. Komponente za povezanost so vselej zaprte množice in ker so komponente zaprtega podprostora, so zaprte tudi gledano v $\mathcal{H}$. □

Sedaj pa se vrnimo k jedru našega homomorfizma Φ, katerega elemente bomo prepoznavali s pomočjo omejene množice N.

Trditev 3.12. *Do konjugiranja in invertiranja edini element jedra preslikave Φ je produkt komutatorjev $\hat{c}$.*

Dokaz. Elemente jedra preslikave Φ bomo glede na strukturo tlakovanja iskali z indukcijo na število točk, ki jih v omejeno komponento zaobjame R.

Denimo najprej, da v množici N ostane zgolj posamezno oglišče. Če je to Z_1, pomeni, da so se morali mnogokotniki ciklično zvrstiti okrog te točke, in ker na oziroma z vsake stranice slika le ena, natanko določena preslikava, je edino primerno zaporedje produkt $\hat{c}$ ali njegov obrat (glej trditev 3.7). Če je to katerokoli drugo oglišče Z_i osnovnega mnogokotnika, ga lahko gledamo kot prvo oglišče ustreznega preslikanega mnogokotnika v ciklu okrog Z_i. In tako lahko za poljubno opazovano oglišče označimo z g grupni element, ki vanj prenese oglišče Z_1 (osnovni mnogokotnik v tisti mnogokotnik iz okolice opazovane točke, ki ima v tej točki svoje prvo oglišče gZ_1), ustrezne zaporedne translacije so zato konjugirane prvotnim in to pomeni, da je tudi celoten obhod konjugiran bodisi

$$(\hat{g}\hat{a}_1\hat{g}^{-1})(\hat{g}\hat{b}_1\hat{g}^{-1})\cdots(\hat{g}\hat{b}_r^{-1}\hat{g}^{-1}) = \hat{g}\hat{c}\hat{g}^{-1} \text{ v negativni bodisi}$$

$$(\hat{g}\hat{b}_r\hat{g}^{-1})(\hat{g}\hat{a}_r\hat{g}^{-1})\cdots(\hat{g}\hat{a}_1^{-1}\hat{g}^{-1}) = \hat{g}\hat{c}^{-1}\hat{g}^{-1} \text{ v pozitivni smeri.}$$

Ker je jedro podgrupa edinka, so s $\hat{c}$ v njem tudi vsi elementi $\prod_{i=1}^{m}\hat{g}_i\hat{c}^{\epsilon_i}\hat{g}_i^{-1}$ za $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$. Naš namen je pokazati, da so to tudi edini elementi jedra, zaenkrat pa uvedimo oznako $\hat{H}$ za podgrupo jedra, generirano z elementi gornje oblike.

Najprej obdelajmo primere, ko N zajema končno število točk, to je med seboj izolirana oglišča. Indukcijsko pokažimo, da ustrezna zaporedja translacij pripadajo podgrupi edinki $\hat{H} \triangleleft \hat{G}$. Ob predpostavki, da je vsak obhod n oglišč že vsebovan v $\hat{H}$, opazujemo obhod $n+1$ oglišč. Predstavljamo si lahko, da je beseda, ki ga opisuje, okrajšana; opomnimo le, da se ob tej predpostavki končno število točk identificira z grafom na danih vozliščih – do izoliranih točk nas namreč privedejo zaporedni inverzni koraki, ki prestopajo vsako od povezav. Opisujočo besedo bi želeli preoblikovati tako, da bi se izražala kot produkt korakov, ki obidejo n zajetih oglišč, in cikla, ki obkroža preostalo točko. Očitno je, da ne bomo mogli izločiti točke, katere vsi obkrožajoči mnogokotniki so hkrati vsebovani v ciklih preostalih opazovanih točk. Zato se moramo predhodno zavedati, da v N vselej obstaja točka, za katero vsaj en okoliški mnogokotnik nima več kot dveh sosedov (ta dva si z njim delita to isto oglišče; praznih zaporedij pa nimamo, saj je opisujoča beseda okrajšana) – taka so na primer oglišča robnih mnogokotnikov, ki v končnem zaporedju vselej obstajajo. Označimo sedaj prvotni produkt s $t = \hat{x}_1 \cdots \hat{x}_k$. Vemo, da nekateri od teh faktorjev opisujejo translacije, ki obkrožajo „$(n+1)$-vo“ točko. In ker so z vsako zaobjeto točko v produktu raztresene vse translacije, ki opisujejo prehode med obkrožajočimi mnogokotniki, se moramo, če naenkrat ne obhodimo celotnega cikla, nekje v nadaljevanju vrniti po še nezajete premike. Do robnega mnogokotnika lahko pri tem dostopamo le preko obeh sosedov v okolici opazovane točke, zato sta ti dve translaciji v celotnem produktu zaporedni (zaporednih inverznih premikov ne priznavamo). Naj bosta to pomika $\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}$ v t, ki sta hkrati j-ti in $(j+1)$-vi element cikla (člene cikla bomo označevali s piko: $\dot{x}_l$); sedaj lahko ustrezno preoblikujemo t, in sicer:

$$\begin{aligned} t = {} & \hat{x}_1 \cdots \hat{x}_i \hat{x}_{i+1} \cdots \hat{x}_k \\ = {} & \underbrace{\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_{i-1} \dot{x}_{j-1}^{-1} \cdots \dot{x}_1^{-1}}_{\hat{g}}\, \hat{c}\, \underbrace{\dot{x}_{4r}^{-1} \cdots \dot{x}_{j+2}^{-1} \hat{x}_{i+2} \cdots \hat{x}_k}_{\hat{h}} \\ = {} & \hat{g}\hat{c}\hat{g}^{-1}\hat{g}\hat{h}. \end{aligned}$$

Tako smo iz obhoda izločili en prehod robnega mnogokotnika, produkt $\hat{g}\hat{h}$ vsebuje namreč eno zaporedje $\dot{x}_j\dot{x}_{j+1}$ manj od prvotnega t. In s ponavljanjem gornjega postopka lahko izrinemo vse take prehode, tako da v končnem $\hat{g}\hat{h}$ opazovana točka ni več zajeta, saj manjka eden od njenih okoliških mnogokotnikov. Po indukcijski predpostavki je ta produkt že vsebovan v $\hat{H}$, prav tako je ustrezne oblike tudi konjugirani element $\hat{c}$ in s tem tudi njun produkt – prvotni obhod t.

Predpostavimo končno, da N vsebuje vsaj en mnogokotnik, po indukcijski predpostavki lahko primere, v katerih je N manjši že opišemo z elementi grupe $\hat{H}$. Recimo, da naš R predstavlja zaporedje mnogokotnikov $P_1, ..., P_k$; vselej jih lahko preimenujemo tako, da P_k meji na notranjost N. Označimo sedaj s Q_1 nekega soseda P_k v N in oblikujmo znotraj N zaporedje sosednjih mnogokotnikov $Q_1,\ Q_2, ...,\ Q_{l-1} = P_1,\ Q_l = P_k$, ki mu pripada element jedra $q = \hat{y}_1 \cdots \hat{y}_l$. Po indukcijski predpostavki je $q \in \hat{H}$, hkrati pa pripada $\hat{H}$ tudi zaporedje translacij r, ki opisuje cikel mnogokotnikov $P_1,\ P_2, ...,\ P_k,\ Q_1,\ Q_2, ...,\ Q_{l-2}$. Zanima nas, kaj to pomeni za opis produkta $\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_k$. Izpišimo:

$$\begin{array}{lcl} P_k & = & \hat{x}_2 \cdots \hat{x}_k P_1 \\ Q_1 & = & \hat{y}_1 P_k = \hat{y}_1 \hat{x}_2 \cdots \hat{x}_k P_1 \\ Q_2 & = & \hat{y}_l Q_1 = \hat{y}_l \hat{y}_1 \hat{x}_2 \cdots \hat{x}_k P_1 \\ & & \vdots \\ Q_{l-2} & = & \hat{y}_4 \cdots \hat{y}_l \hat{y}_1 \hat{x}_2 \cdots \hat{x}_k P_1 \\ P_1 & = & \hat{y}_3 \cdots \hat{y}_l \hat{y}_1 \hat{x}_2 \cdots \hat{x}_k P_1 \end{array}$$

Torej je $r = \hat{y}_2^{-1} \hat{y}_1^{-1} q \hat{y}_1 \hat{x}_1^{-1} \hat{x}_1 \cdots \hat{x}_k = (\hat{y}_1 \hat{y}_2)^{-1} q (\hat{y}_1 \hat{y}_2) \hat{x}_1 \cdots \hat{x}_k$, saj je $\hat{y}_2 = \hat{x}_1^{-1}$. Če od tod izrazimo produkt $\hat{x}_1 \cdots \hat{x}_k = (\hat{y}_1 \hat{y}_2)^{-1} q^{-1} (\hat{y}_1 \hat{y}_2) r$ in se zavedamo, da q in r pripadata $\hat{H}$ in je ta po obliki podgrupa edinka v $\hat{G}$, leži v $\hat{H}$ tudi zaporedju R pripadajoči produkt in indukcijski korak je dokazan. □

Za vsak rod sklenjene orientabilne ploskve lahko iskano grupo translacij izrazimo z generatorji in relacijami kot: $\langle a_1,\ b_1, ...,\ a_r,\ b_r;\ [a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_r, b_r] = id \rangle$.

Končno se vrnimo tudi k uvodni trditvi našega razmišljanja, ki nam opazovane ploskve predstavlja kot prostore orbit. Doslej smo te ploskve poznali kot kvociente mnogokotnikov s paroma enačenimi stranicami, po gornjem pa vemo, da vse te identifikacije natanko določajo generatorji naše grupe translacij in tudi obratno, da vsak tak generator pripada natanko določeni identifikaciji. Če imamo dve stranici mnogokotnika, ki ju nek grupni element izenačuje, in imamo ta isti mnogokotnik in njegovo za generator translirano sliko, ki se prejšnjega dotika v eni od izpostavljenih stranic, sta opazovani grupni element in generatorska translacija enaka. Grupne slike osnovnega mnogokotnika so namreč geometrijska realizacija naše grupe. To pa pomeni, da je vsaka taka ploskev res kvocientni prostor hiperbolične ravnine pri delovanju pripadajoče grupe. Ali na kratko: ploskev rodu r je homeomorfna $\mathcal{H}/G_r$.

4. Univerzalni krovni prostor sklenjene orientabilne ploskve

Spremenjen jezik tega poglavja po svoje osmišlja predstavljeni odnos med hiperbolično ravnino in ploskvami. Topološko lahko namreč zamisel prejšnjega poglavja prevedemo v dejstvo, da predstavlja hiperbolična ravnina (z ustrezno kvocientno preslikavo) univerzalni krovni prostor vsake sklenjene orientabilne ploskve (rodu večjega kot 1). In to bomo sedaj – skoraj zrcalno – izgradili skozi naslednja opažanja. $\mathcal{H}$ vidimo kar najenostavneje kot povezan, lokalno s potmi povezan prostor, G_r kot neko grupo njegovih avtomorfizmov. In ker je delovanje G_r na $\mathcal{H}$ prosto in povsem nezvezno, po izreku iz algebraične topologije sledi, da je $(\mathcal{H}, p)$, pri čemer je $p : \mathcal{H} \to \mathcal{H}/G_r$, regularni krovni prostor kvocienta $\mathcal{H}/G_r$. $\mathcal{H}$ je hkrati enostavno povezan, G_r je istočasno fundamentalna grupa opazovane ploskve in tako smo dobili univerzalnost ter izomorfizem $\mathcal{H}/G_r \cong rT$. Želeno tlakovanje hiperbolične ravnine pa je posledica trditve, da G_r kot grupa avtomorfizmov krovnega prostora $(\mathcal{H}, p)$ deluje tranzitivno na prasliki vsake točke $p^{-1}(x), x \in rT$.

Navrženo reinterpretacijo izreka bomo v naslednjih odsekih razčlenili. Najprej bomo predstavili fundamentalno grupo poljubne sklenjene orientabilne ploskve, nato odnose med različnimi krovnimi prostori. Pri tem prvi razdelek v paru ponavlja znane in neznane pojme, drugi pa izpostavlja trditve, ki se našega razmišljanja bolj neposredno dotikajo.

4.1. **Ponovitev pojma fundamentalne grupe.** Ker nas je že prejšnje poglavje po svoje povedlo v algebraično klasifikacijo ploskev, se spomnimo pojma, ki kot topološka invarianta podaja eno od oblik „redukcije“ topoloških prostorov.

Definicija 4.1. *Fundamentalna grupa prostora X glede na bazno točko $x_0 \in X$ (oznaka: $\pi(X, x_0)$) je množica homotopnih razredov sklenjenih poti v točki x_0 (začetna in končna točka), ki z operacijo stika poti tvori grupo:*

$$f \cdot g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{za } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ g(2t-1) & \text{za } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Za s potmi povezane prostore je neodvisna od izbire bazne točke.

Dobra definiranost izhaja iz usklajenosti ekvivalenčne relacije homotopije in operacije stika na množici poti. Prav tako tudi njena grupna struktura, ki jo za usklajene poti (srečanje konca in začetka komponiranih poti) najpregledneje podajajo ponazoritve z enotskim kvadratom homotopije. Enoto v grupi predstavlja ničelna pot (konstantna preslikava), inverz je pot, prehojena v nasprotni smeri: $f^{-1}(t) = f(1-t)$. Edina omejitev glede prekrivajočih se koncev poti pa je za zanke vselej izpolnjena. Neodvisnost od bazne točke v prostorih, povezanih s potmi, lahko razumemo kot izomorfnost grup z vezjo začetnih točk konjugiranih zank.

A definicijsko določanje fundamentalne grupe je za večino prostorov prezahtevno. Zato bomo v nadaljevanju pregledali, kako nanjo vplivajo zvezne preslikave med prostori in kdaj si lahko pomagamo z razčlenitvijo prostora (produkti, unije).

Zvezna preslikava $\varphi : X \to Y$ preslika pot v pot, zanko v zanko, homotopne poti v homotopne poti, produkt poti v produkt slik (enoto v enoto, inverz v inverz). Spremljajoča preslikava $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ tako opisuje homomorfizem fundamentalnih grup. Pri tem za zvezni preslikavi $\varphi : X \to Y$ in $\psi : Y \to Z$ velja $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$, za identično preslikavo $\varphi : X \to X$ pa je $\varphi_*(\alpha) = \alpha$. In posebej, če je φ homeomorfizem, je φ_* izomorfizem.

Pomembno poenostavitev prinaša deformacijski retrakt prostora. Gre za podprostor, ki ga določa retrakcija $r : X \to A$, homotopna identiteti $X \to X$. Zanj torej obstaja homotopija $F : X \times I \to X$ od $F(x, 0) = x$ do $F(x, 1) = r(x)$, pri čemer za vsak $a \in A$ in vsak $t \in I$ velja $F(a, t) = a$.

Trditev 4.2. *Vložitev $i : A \to X$ za deformacijski retrakt A prostora X inducira izomorfizem fundamentalnih grup $\pi(A, a)$ in $\pi(X, a)$.*

Dokaz. Če $r : X \to A$ označuje pripadajočo retrakcijo in $i : A \to X$ „inverzno“ inkluzijsko preslikavo, opisuje ri identično preslikavo in s tem r_*i_* identični homomorfizem

$\pi(A,a)$. Iz same retrakcije prepoznamo torej i_* kot vložitev in $i_*\pi(A,a) \leq \pi(X,a)$. Zadoščalo bi prepoznati identičnost kompozicije i_*r_* na $\pi(X,a)$. Slednje pa potrjuje dejstvo, da je ir homotopna identiteti glede na $\{a\}$, saj kot taka inducira isti homomorfizem fundamentalnih grup. $\square$

Struktura nekaterih prostorov omogoča, da njihovo fundamentalno grupo izrazimo s pomočjo fundamentalne grupe njihovih podprostorov. Spodnji trditvi podajata, kako se na fundamentalni grupi odraža produktna struktura prostora in kako unija.

Trditev 4.3. *Fundamentalna grupa produktnega prostora $\pi(X\times Y,(x,y))$ je izomorfna direktnemu produktu fundamentalnih grup $\pi(X,x)\times\pi(Y,y)$.*

Dokaz. Izomorfizem definiramo naravno s projekcijskima preslikavama: zanki $\alpha \in \pi(X\times Y,(x,y))$ priredimo par $(p_*\alpha, q_*\alpha)$, kjer sta p_*, q_* inducirani $p: X\times Y \to X$ in $q: X\times Y \to Y$. Izhajamo iz osnovne lastnosti produktne topologije, da je preslikava v produktni prostor zvezna, natanko kadar sta zvezni obe komponentni preslikavi. Tako je zanka v $X\times Y$ z izhodiščem (x,y) ekvivalentna paru zank v X in Y, izhajajočih iz x oziroma y, in podobno homotopija paru homotopij. $\square$

Izrek 4.4. *(Seifert-Van Kampen) Naj bo X s potmi povezan topološki prostor, $\{U_\lambda; \lambda\in\Lambda\}$ njegovo pokritje s s potmi povezanimi množicami, pri čemer je presek poljubnih (dveh) množica iz pokritja, bazna točka x_0 pa je vsebovana v vseh: $\forall\lambda\ x_0 \in U_\lambda$. Homomorfizme fundamentalnih grup, inducirane z inkluzijskimi preslikavami, označimo: $\varphi_{\lambda\mu*}: \pi(U_\lambda)\to\pi(U_\mu)$ za $U_\lambda\subset U_\mu$ in $\varphi_{\lambda*}: \pi(U_\lambda)\to\pi(X)$. Tedaj za poljubno grupo H in poljuben tak izbor homomorfizmov $\rho_\lambda: \pi(U_\lambda)\to H$, da pri $U_\lambda\subset U_\mu$ komutira diagram:*

$$\begin{tikzcd} \pi(U_\lambda) \arrow[dd, "\varphi_{\lambda\mu*}"'] \arrow[dr, "\rho_\lambda"] & \\ & H \\ \pi(U_\mu) \arrow[ur, "\rho_\mu"'] & \end{tikzcd},$$

obstaja natanko en homomorfizem $\sigma: \pi(X)\to H$, da za vsak $\lambda\in\Lambda$ komutira tudi:

$$\begin{tikzcd} \pi(U_\lambda) \arrow[r, "\varphi_{\lambda*}"] \arrow[dr, "\rho_\lambda"'] & \pi(X) \arrow[d, "\sigma"] \\ & H \end{tikzcd}.$$

Dokaz. Enostavno vidimo, da je grupa $\pi(X)$ generirana z unijo slik $\varphi_{\lambda*}(\pi(U_\lambda))$. Lebesguovo število pokritja $\{U_\lambda\}$ določa namreč delitev intervala, da so deli poti vsebovani v njegovem posameznem elementu. Če sliko dopolnimo z vezmi med robovi teh podintervalov in „središčem“ x_0, pa lahko vsako zanko prostora X sklopimo iz zank v množicah pokritja, saj se zaporedna inverzna prečkanja vezi s središčem izničijo. Zato lahko sleherno pot $\alpha\in\pi(X)$ izrazimo kot produkt $\alpha = \varphi_{\lambda_1*}(\alpha_1)\cdots\varphi_{\lambda_n*}(\alpha_n)$, kar nas napelje na definicijo $\sigma(\alpha) = \rho_{\lambda_1}(\alpha_1)\cdots\rho_{\lambda_n}(\alpha_n)$. Pokazati moramo, da je ta neodvisna od parametrizacije, torej od izbire odsekov poti oziroma pokritja.

Zadošča videti, da se ničelni produkt odsekov poti preslika v ničelni produkt: če je torej $\varphi_{\lambda_1 *}(\beta_1)\cdots\varphi_{\lambda_q *}(\beta_q) = 1$, mora biti tudi $\rho_{\lambda_1}(\beta_1)\cdots\rho_{\lambda_q}(\beta_q) = 1$. Želimo prepoznati homotopijo s konstanto, zato vpeljemo predpostavljeno homotopijo F (produkta $\prod_{i=1}^{q}\varphi_{\lambda_i *}(\beta_i)$ z 1) in opazujemo pokritje kvadrata $I\times I$ oblike $\{F^{-1}(U_\lambda); \lambda \in \Lambda\}$ z Lebesguovim številom ϵ. Pri tem $I \times I$ razdelimo na pravokotničke, premera manjšega od ϵ, tako da prvi interval razrežemo po vrednostih s_i ($s_1 = 0, ..., s_m = 1$), med katerimi so vsi robovi intervalov zoženih poti ($[\frac{i-1}{q}, \frac{i}{q}] \to U_{\lambda_i}$ in zato $\frac{i}{q} \in \{s_j\}_j\ \forall i$), drugega pa po vrednostih t_i ($t_1 = 0, ..., t_n = 1$).

V dobljeni mreži označimo vozlišča z $v_{ij} = (s_i, t_j)$, intervale na obeh oseh z $I_i = [s_{i-1}, s_i]$ oziroma $J_j = [t_{j-1}, t_j]$ in pripadajoče pravokotničke kot $P_{ij} = I_i \times J_j$. Nadalje naj bodo njihovi robovi, vzporedni osi s, imenovani $a_{ij} = I_i \times \{t_j\}$, pravokotni nanje pa $b_{ij} = \{s_i\} \times J_j$. S pomočjo teh pravokotnikov lahko opišemo „novo“ odprto pokritje prostora X, in sicer tako, da bo sleherno oglišče vsebovano v notranjosti vsaj enega elementa. Tako bomo z $U_{\lambda(i,j)}$ nagovarjali unijo vseh tistih U_λ, v katere se preslika katerikoli izmed pravokotničkov iz okolice oglišča v_{ij}. Posebej izpostavimo še nekatere poti, ki se bodo pojavljale v delitvi osnovnega obhoda, tako naj bo $A_{ij} : I_i \to X$ zožitev homotopije na a_{ij}, torej $A_{ij}(s) = F(s, t_j) = F|_{a_{ij}}$, in analogno $B_{ij} : J_i \to X$ zožitev $B_{ij}(t) = F(s_i, t) = F|_{b_{ij}}$. In končno naj $g_{ij} : I \to U_{\lambda(i,j)}$ označuje vez med x_0 in sliko vozlišča $F(v_{ij})$.

Slike majhnih zank (iz posameznega elementa pokritja $\{U_\lambda\}$) v H opisujemo kot $\alpha_{ij} = \rho[g_{i-1,j}A_{ij}(g_{ij})^{-1}]$ ali $\beta_{ij} = \rho[g_{i,j-1}B_{ij}(g_{ij})^{-1}]$. In če premislimo, je produkt po slikah spodnjega robu kvadrata homotopije enak iskanemu produktu $\prod_{i=1}^{q}\rho_{\lambda_i}(\beta_i) = \prod_{i=1}^{m}\alpha_{i0}$. Vemo še, da so poti na vseh ostalih robovih konstantne: za vsak $i,\ j$ je $\alpha_{in} = \beta_{0j} = \beta_{mj} = 1$, kajti $F(s, 1) = F(0, t) = F(1, t) = x_0$. Velja pa tudi zveza $\alpha_{i,j-1}\beta_{ij} = \beta_{i-1,j}\alpha_{ij}$, iz robov pravokotničkov lahko namreč preberemo ustrezno ekvivalenco $A_{i,j-1}B_{ij} = B_{i-1,j}A_{ij}$, ki je vrinjeni inverzni produkti vezi g in prenos prostorov ρ ne pokvarijo. Želimo si enakost $\prod_{i=1}^{m}\alpha_{i0} = 1$, ki jo dobimo rekurzivno. Pri tem uporabimo zvezo $\prod_{i=1}^{m}\alpha_{i,j-1} = \prod_{i=1}^{m}\alpha_{ij}$, ki se izpiše, če prvi produkt pomnožimo z desne s konstanto β_{mj} in jo s prejšnjo formulo korakoma izrivamo proti začetku, dokler po m korakih ne izpade in vrne želeno desno stran. Končno izvedemo gornje n-krat in dobimo $\prod_{i=1}^{m}\alpha_{i0} = \prod_{i=1}^{m}\alpha_{in} = 1$. □

Kot univerzalni objekt je tako fundamentalna grupa unije enolično določena.

4.2. **Določitev fundamentalne grupe ploskev.** V naslednjih trditvah bomo pregledali fundamentalne grupe tistih prostorov, ki jih bomo neposredno potrebovali za določitev fundamentalne grupe sklenjenih orientabilnih ploskev.

Trditev 4.5. *Fundamentalna grupa krožnice S^1 je izomorfna neskončni ciklični grupi.*

Dokaz. Zgradili bomo izomorfizem med fundamentalno grupo $(\pi(S^1), \cdot)$ in aditivno grupo celih števil $(\mathbb{Z}, +)$. Definicijo bomo zasnovali na običajni kvocientni preslikavi $p : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ s predpisom $p(t) = e^{2\pi i t}$ in zanjo značilni lastnosti dviga poti (definicija 3.9). Naj odslej α predstavlja homotopni razred zank v točki $(1, 0)$, $\tilde{\alpha}$ pa njihov enolični dvig z začetkom v 0. Tedaj lahko (ker imajo homotopne preslikave homotopne dvige) podamo preslikavo $\varphi : \pi(S^1, (1, 0)) \to \mathbb{Z}$ s $\varphi(\alpha) = \tilde{\alpha}(1)$ kot vrednost končne točke dviga. Zaloga vrednosti so res cela števila, saj opazujemo poti, katerih projekcije so zaključene zanke: $p(\tilde{\alpha}(1)) = \alpha(1) = (1, 0)$. Surjektivnosti zadostimo enostavno, saj za vsak $n \in \mathbb{Z}$ obstaja zanka $\alpha_n(t) = e^{2\pi i n t}$, katere dvig opisuje $\tilde{\alpha_n}(t) = nt$ s končno točko n. Injektivnost zahteva, da sta preslikavi z istim koncem dviga homotopni. In res, če velja $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$, tedaj se dviga ujemata v robnih točkah $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = 0$ in $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ ter med njima v prostoru $\mathbb{R}$ obstaja linearna homotopija $(1-s)\tilde{\alpha}(t) + s\tilde{\beta}(t)$, iskana homotopija med zankama v S^1 je enaka njeni projekciji $F(t,s) = p((1-s)\tilde{\alpha}(t) + s\tilde{\beta}(t))$ in $\alpha = \beta$. Za preslikavo φ kot homomorfizem grup mora končno veljati še $\varphi(\alpha \cdot \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ in ker lahko dvig staknjenih poti opišemo kot $\widetilde{\alpha \cdot \beta}(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t) & \text{za } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \tilde{\beta}(2t-1) + \tilde{\alpha}(1) & \text{za } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$, je res tudi $\varphi(\alpha \cdot \beta) = \widetilde{\alpha \cdot \beta}(1) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$. □

Sedaj naravno pričakujemo razširitev vedenja na poljuben šop zank v skupni točki in s tem na kroge s poljubno luknjami, te lahko namreč z deformacijsko retrakcijo preobrazimo do zank. Ob tem navedimo najprej preprosto posledico izreka o fundamentalni grupi unije.

Trditev 4.6. *Če je prostor X unija s potmi povezanih množic $U \cup V$ in je njun presek $U \cap V$ enostavno povezan, se fundamentalna grupa $\pi(X)$ izraža kot prosti produkt $\pi(U)$ in $\pi(V)$ glede na „vložitvi“ $\varphi_{U*} : \pi(U) \to \pi(X)$ in $\varphi_{V*} : \pi(V) \to \pi(X)$.*

Dokaz. Če se ozremo na trditev izreka 4.4, nam le-ta za dve množici, katerih presek je enostavno povezan, omogoča poljuben izbor homomorfizmov ρ_λ. Edini vsebovanosti med množicami pokritja sta namreč $U \cap V \subset U$ in $U \cap V \subset V$, trivialna fundamentalna grupa preseka pa se vedno preslika v ničelno podgrupo. Komutirajoči diagram, ki definira preslikavo $\sigma : \pi(X) \to H$, za presek prav tako definicije nikakor ne zavezuje, medtem ko za obe preostali množici natanko ustreza definiciji prostega objekta, torej fundamentalne grupe $\pi(X)$ kot koprodukta $\pi(U)$ in $\pi(V)$. □

Razmislimo še o naših zankah; problem nastane, ker krožnice (dotikajoče se v skupni točki) niso odprte podmnožice opazovane „pentlje“. Kako primerno prilagoditi odprte množice, si najprej poglejmo na najpreprostejšem primeru „osmice“. Na obeh zankah izberimo po eno točko (označimo a in b), različno od dotikališča, in podajmo novo pokritje kot $U = X - \{b\}$ in $V = X - \{a\}$. Zanki sta sedaj deformacijska retrakta množic U, V, njun presek („križ“) je enostavno povezan in $\pi(X)$ je po gornji trditvi prosti produkt neskončnih cikličnih grup, se pravi prosta grupa na dveh generatorjih. Za „večperesno deteljico“ lahko sklepamo indukcijsko, pri čemer vzamemo za ustrezno pokritje „pentlji“ s prerezanimi $n-1$ zankami in tisto s prerezano n-to. Rezultat je prosta grupa na n generatorjih, ki jih lahko uresničimo z obhodi posameznih zank.

Še preprosteje se fundamentalna grupa unije izraža, če je eden od prostorov pokritja kar enostavno povezan.

Trditev 4.7. *Imejmo s potmi povezan prostor, unijo odprtih podmnožic, povezanih s potmi, $X = U \cup V$ in $x_0 \in U \cap V$. Privzemimo, da je V enostavno povezan. Tedaj je preslikava $\varphi_{U*} : \pi(U) \to \pi(X)$ surmorfizem z jedrom najmanjše podgrupe edinke v $\pi(U)$, ki vsebuje $\varphi_{U\cap V, U*}(\pi(U \cap V))$.*

Dokaz.

$$
\begin{tikzcd}
 & \pi(U) \arrow[dr, "\varphi_{U*}"] & \\
\pi(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi_{U\cap V,U*}"] \arrow[rr, "\varphi_{U\cap V*}"] \arrow[dr, "\varphi_{U\cap V,V*}"'] & & \pi(X) \\
 & \pi(V) \arrow[ur, "\varphi_{V*}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Vse grupe in homomorfizmi med njimi so definirani kot zgoraj, poleg tega gornji diagram komutira. Tako najprej vidimo, da trivialnost grupe $\pi(V)$ zahteva vsebovanost slike vložitve $\varphi_{U\cap V,U*}$ v jedru preslikave φ_{U*} in istočasno surjektivnost druge vložitve φ_{U*}, saj je fundamentalna grupa prostora generirana s slikami fundamentalnih grup posameznih elementov pokritja. Preostane nam še vprašanje, ali je jedro φ_{U*} res najmanjša podgrupa edinka, ki vsebuje $\operatorname{im}\varphi_{U\cap V,U*}$. Naj bo zato odslej N taka podgrupa edinka (kot vemo $N \leq \ker\varphi_{U*}$) in $H = \pi(U)/N$. Uporabili bi radi izrek 4.4, zato uvedimo še homomorfizme, ki ustrezajo zahtevanim komutirajočim razmerjem: $\rho_U : \pi(U) \to H$ naj bo naravni surmorfizem, $\rho_V : \pi(V) \to H$ in $\rho_{U\cap V} : \pi(U \cap V) \to H$ konstantni preslikavi. Po omenjenem izreku sedaj obstaja homomorfizem $\sigma : \pi(X) \to H$, da je $\sigma\varphi_{U*} = \rho_U$, kar pomeni, da je $\ker\varphi_{U*} \subset \ker\rho_U = N$. To pa z začetno postavko o N razkrije, da je jedro surmorfizma φ_{U*} res najmanjša želena podgrupa. $\square$

In končno fundamentalna grupa povezane vsote r torusov. Seveda vidimo problem $4r$-kotnika s paroma identificiranimi stranicami po pravilu komutatorjev ($\prod_{i=1}^{r}[a_i, b_i]$), ki po identifikaciji prerasejo v zanke na površini. Elementa pokritja oblikujemo iz osnovnega mnogokotnika po odstranitvi njegovega središča in iz notranjosti tega mnogokotnika. V kvocientu tako $U = rT - \{s\}$ predstavlja komplement središčne točke, njegov deformacijski retrakt pa je unija $2r$ zank, izhajajočih iz skupnega vozlišča, medtem ko je V homeomorfen odprtemu krogu in zato enostavno povezan. Homotopski tip preseka je ekvivalenten krožnici in grupa $\pi(U \cap V)$ je neskončna ciklična ali izraženo z „nadomestnimi“ stranicami $\prod_{i=1}^{r}[a'_i, b'_i]$ (nadomestne stranice so konjugirane prvotnim $a'_i = d^{-1}a_i d$, $b'_i = d^{-1}b_i d$ in so iz notranjosti mnogokotnika ter zato brez identifikacije). Po zadnji trditvi je fundamentalna grupa sklenjene orientabilne ploskve rodu r enaka kvocientu: $\pi(rT) = \langle a_1, b_1, ...a_r, b_r;\ \prod_{i=1}^{r}[a_i, b_i]\rangle$. Torej natanko grupa G_r iz prejšnjega poglavja.

4.3. **Krovni prostori in dvig preslikav.** Vse doslej smo se izmikali neposredni omembi krovnega prostora, čeprav je intuitivno jasno, da z obravnavano hiperbolično ravnino ploskve pokrivamo in da opisani kvocienti opisujejo le način, kako pokrivamo. Vsaj pri ovijanju evklidske ravnine okrog torusa je to zelo nazorno. Zato končno tudi formalna definicija.

Definicija 4.8. *Krovni prostor prostora X je tak par prostora $\tilde{X}$ in (zvezne) preslikave $p : \tilde{X} \to X$, da obstaja odprto pokritje $\{U_x\}$ za X, za katerega je praslika $p^{-1}(U_x)$ pri vsakem x disjunktna unija odprtih množic v $\tilde{X}$, katerih vsaka se s p preslika homeomorfno nazaj na U_x.*
Za odprto množico U_x se uporablja oznaka elementarna okolica, medtem ko prasliko posamezne točke $p^{-1}(x)$ za $x \in X$ nagovarjamo z vlaknom nad x (diskretne točke).

Iz gornjega predpisa razberemo, da je krovna projekcija lokalno (glede na elementarne okolice) homeomorfizem in kot taka odprta preslikava. Več njenih lastnosti pa se odraža v lastnostih dvignjenih preslikav.

Trditev 4.9. *(enoličnost dviga) Naj bo $(\tilde{X}, p)$ krovni prostor prostora X in Y poljuben povezan prostor. Tedaj za dviga $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \to \tilde{X}$ preslikave $f : Y \to X$ velja, da je njuna incidenčna množica $Y_0 = \{y \in Y; \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$ bodisi prazna bodisi cel Y.*

Dokaz. Zaradi povezanosti Y zadošča prepoznati zaprtost in odprtost incidenčne množice v Y. Če vzamemo najprej nek y iz komplementa $y \in Y - Y_0$, to pomeni, da sta točki $\tilde{f}_1(y)$ in $\tilde{f}_2(y)$ v različnih komponentah $p^{-1}(U)$, kjer je U elementarna okolica $f(y)$, in ti sta odprti. Zaradi zveznosti obeh dvigov obstaja odprta okolica y, vsebovana v $Y - Y_0$, in Y_0 je zaprta. Po drugi strani pa za elementarno množico V in $z \in Y_0 \cap f^{-1}(V)$ sliki $\tilde{f}_1(z) = \tilde{f}_2(z)$ ležita v komponenti $\tilde{V}$, da je $p|_{\tilde{V}}$ homeomorfizem $\tilde{V} \to V$. Tako sta oba dviga blizu z podana z istim predpisom $(p|_{\tilde{V}})^{-1} \circ f$, s tem pa je vsaka točka iz okolice z prav tako vsebovana v $Y_0 \cap f^{-1}(V)$ in Y_0 odprta. Kar pomeni, da je $Y_0 = Y$ in se dviga, ki sovpadata v posamezni točki, ujemata na celotnem definicijskem območju. □

Trditev 4.10. *(enolični dvig homotopije) Projekcijska preslikava p iz definicije krovnega prostora ima lastnost dviga poti. Poleg tega je dvig $\tilde{\alpha} \in \tilde{X}$ zvezno odvisen od poti $\alpha \in X$, se pravi, da zvezno homotopijo α_t poti α z začetkom $\alpha_t(0) = x_0$ in $\alpha_0 = \alpha$ dvigne do zvezne homotopije poti $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_0$.*

Dokaz te trditve zvesto sledi prikazu na posebnem primeru krovne preslikave v odseku o tlakovanju hiperbolične ravnine (dokaz injektivnosti v trditvi 3.10). Izognimo se ponovitvi. Navedimo pa še preprosto posledico dviga poti, ki za s potmi povezan prostor X podaja bijekcijo $p^{-1}(x_1) \to p^{-1}(x_2)$ za poljubni različni točki prostora X (dvig povezave); le-ta pove, da je moč vseh vlaken $p^{-1}(x), x \in X$, enaka in opisuje, koliko listni je pripadajoči krovni prostor.

Kot vselej nas posebej zanimajo odnosi fundamentalnih grup: lastnost dviga homotopije tako za inducirani homomorfizem predpisuje naslednje.

Trditev 4.11. *$(\tilde{X}, p)$ naj označuje krovni prostor prostora X, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ imenujmo točko, za katero je $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Potem je inducirani homomorfizem $p_* : \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi(X, x_0)$ injektiven, torej vložitev.*

Trditev 4.12. *Za $(\tilde{X}, p)$ krovni prostor prostora X in $x_0 \in X$ predstavljajo podgrupe $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ za $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$ natanko konjugacijski razred podgrup grupe $\pi(X, x_0)$.*

Dokaz. Najprej pokažimo, da sta p_*-sliki fundamentalnih grup dveh različnih točk istega vlakna med seboj konjugirani v $\pi(X, x_0)$. Vzemimo taki točki $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}$, da je $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0$. Izomorfizem med pripadajočima fundamentalnima grupama v krovnem prostoru podajamo z vezjo γ, in sicer $\varphi : \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ kot $\varphi(\alpha) = \gamma^{-1}\alpha\gamma$. Če ta izomorfizem z inducirano vložitvijo p_* prenesemo v prostor zank $\pi(X, x_0)$, se med preslikanimi zankami vzpostavi preslikava $\psi(\beta) = (p_*\gamma)^{-1}\beta(p_*\gamma)$, pri čemer je $p_*\gamma$ res sklenjena in zato element $\pi(X, x_0)$.

Sedaj preverimo še, da je vsaka grupa v konjugacijskem razredu $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ slika $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ za nek $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$. Te grupe so oblike $\alpha^{-1}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)]\alpha$ za $\alpha \in \pi(X, x_0)$, zato ustrezno točko $\tilde{x}_1$ določimo kot končno točko enoličnega dviga zanke

α v $\tilde{X}$ z začetkom v $\tilde{x}_0$. Tedaj res velja: $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = \alpha^{-1}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)]\alpha$ za $\alpha \in \pi(X, x_0)$. $\square$

V nadaljevanju vse preslikave ne bodo poti, zato še pogoj za poljubne dvige.

Trditev 4.13. *Opazujemo preslikavo iz povezanega, lokalno s potmi povezanega prostora Y v X in njen dvig v krovni prostor $(\tilde{X}, p)$. Pri tem naj bo $y_0 \in Y$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ in $x_0 = p(\tilde{x}_0)$. Velja: za preslikavo $\varphi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ obstaja dvig $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, če in samo če fundamentalni grupi zadoščata $\varphi_*\pi(Y, y_0) \subset p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.*

Dokaz. Denimo najprej, da dvig $\tilde{\varphi}$ obstaja. Tedaj iz induciranega komutirajočega diagrama med fundamentalnimi grupami zlahka razberemo potrebni pogoj za njegov resničen obstoj.

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\
\pi(Y, y_0) \arrow[ur, "\tilde{\varphi}_*"] \arrow[r, "\varphi_*"'] & \pi(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

Ker je p_* vložitev, $\tilde{\varphi}_*$ obstaja, ko je slika φ_* vsebovana v sliki p_*.

V dokazu zadostnosti tega pogoja pa moramo definirati primerno preslikavo $\tilde{\varphi}$. Pomagamo si s potmi v nastopajočih prostorih in že dokazanimi lastnostmi za dvige. Vsako točko $y \in Y$ določimo s potjo f v Y, ki to točko povezuje z izhodiščno y_0; φf je pot v X z začetkom x_0, $g := \tilde{\varphi} f$ pa njen dvig. Preslikavo $\tilde{\varphi} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ definirajmo kot $\tilde{\varphi}(y) =$ končna točka poti g. Po konstrukciji ustreza zvezi $p\tilde{\varphi} = \varphi$, saj je g enoličen dvig φf in zato $pg = \varphi f$. Preveriti moramo še neodvisnost definicije od izbire poti f in zveznost tako dobljenega $\tilde{\varphi}$.

Glede neodvisnosti, za homotopne poti že vemo, da imajo homotopne dvige in s tem iste konce. Če sta poti, ki podajata točko $y \in Y$, neekvivalentni (denimo α in β), pogledamo produkt $\alpha\beta^{-1} \in \pi(Y, y_0)$ (očitno zanka v y_0). Pogoj zahteva $\varphi_*(\alpha\beta^{-1}) \in p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ in posledično je dvig produkta $(\varphi_*\alpha)(\varphi_*\beta)^{-1}$ sklenjena pot v $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Sklenemo, da imata dviga obeh faktorjev isto končno točko.

Zveznost $\tilde{\varphi}$ preverimo po definiciji: za $y \in Y$ in odprto okolico V za $\tilde{\varphi}(y)$ iščemo okolico U za y, da $\tilde{\varphi}(U) \subset V$. Množico U bomo izbrali tako, da bo njena slika $\varphi(U)$ (φ zvezna) vsebovana v neki elementarni okolici $\varphi(y) = p\tilde{\varphi}(y)$. Določimo sedaj to elementarno okolico: najenostavneje bi bilo vzeti kar nek V' okolico $\varphi(y)$, da $V' \subset p(V)$, vendar komponenta dviga $p^{-1}(V')$, ki vsebuje $\tilde{\varphi}(y)$, ni nujno podmnožica V (v splošnem $A \subset f^{-1}(f(A))$). Označimo zato z W omenjeno komponento $p^{-1}(V')$ in naj bo V'' elementarna okolica $\varphi(y)$, da $V'' \subset p(V \cap W)$. Tudi komponenta dviga $p^{-1}(V'')$, ki vsebuje $\tilde{\varphi}(y)$, je sedaj pod V, saj je p, zožena na komponento p^{-1}(elementarne množice), injektivna. Torej moramo U izbrati tako, da $\varphi(U) \subset V''$. $\square$

4.4. **Kvocientni prostor regularnega krovnega prostora.** Zadnji razdelek našega pojasnjevanja bo preko odnosa med različnimi krovnimi prostori razodel, v čem je prav hiperbolična ravnina za sklenjene ploskve tako posebna. Pomemben del pa bo posvečen preslikavam na krovnih prostorih, da tako vzpostavimo vez med krovnimi lastnostmi kvocienta in grupo tlakovanj.

Definicija 4.14. *Homomorfizem krovnih prostorov* $(\tilde{X}_1, p_1)$ *in* $(\tilde{X}_2, p_2)$ *je taka preslikava* $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$*, da zanjo komutira diagram:*

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Če obstaja tudi obratni homomorfizem $\psi : \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$*, da sta* $\psi\varphi$ *in* $\varphi\psi$ *identični preslikavi, sta krovna prostora izomorfna (kot prostora homeomorfna).*
Posebej avtomorfizme krovnega prostora imenujemo krovne transformacije: grupa $\mathrm{Aut}(\tilde{X}, p)$*.*

Za odnose med različnimi krovnimi preslikavami veljajo naslednje trditve, vse preproste posledice lastnosti dvigov.

Trditev 4.15. *Če obstajata homomorfizma* φ *in* ψ *med krovnima prostoroma* $(\tilde{X}_1, p_1)$ *in* $(\tilde{X}_2, p_2)$ *in obstaja točka* $x \in \tilde{X}_1$*, za katero sta sliki enaki* $\varphi(x) = \psi(x)$*, tedaj sta preslikavi tudi globalno enaki* $\varphi = \psi$*.*

Za delovanje grupe avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\tilde{X}, p)$ *na prostoru* $\tilde{X}$ *to pomeni, da nima negibnih točk.*

Trditev 4.16. *Homomorfizem iz krovnega prostora* $(\tilde{X}_1, p_1)$ *v* $(\tilde{X}_2, p_2)$*, ki povezuje izbrani taki točki* $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$*,* $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$*, da je* $p_1(\tilde{x}_1) = p_2(\tilde{x}_2) = x_0$*, obstaja, natanko kadar je* $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1) \subset p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$*. Za izomorfizem morata biti grupi enaki.*

Posledično sta krovna prostora izomorfna, če in samo če sta preslikani fundamentalni grupi $p_{1*}\pi(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)$ *in* $p_{2*}\pi(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)$ *med seboj konjugirani.*

Glede avtomorfizmov krovnega prostora pa to pomeni, da imamo krovno transformacijo, ki izmenjuje izbrani točki, natanko kadar je $p_{1*}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_{2*}\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_2)$*.*

Določili bi radi vseskozi izpostavljano grupo krovnih transformacij; zanjo velja:

Izrek 4.17. *Naj bo* $x \in X$ *in* $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$*. Grupa avtomorfizmov krovnega prostora* $\mathrm{Aut}(\tilde{X}, p)$ *je tedaj izomorfna kvocientni grupi* $\mathrm{N}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})]/p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$*, kjer je* $\mathrm{N}[p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})]$ *največja podgrupa* $\pi(X, x)$*, ki vsebuje* $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ *kot edinko.*

Dokaz. Označimo $H := p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$. V splošnem vemo, da se zamenjava bazne točke $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x)$ z $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x)$ odraža v konjugiranju H z elementom $\alpha \in \pi(X, x)$, kjer se α dvigne v vez $\tilde{\alpha}$ med $\tilde{x}_0$ in $\tilde{x}_1$. In ta α je element $\mathrm{N}[H]$, natanko kadar je $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$.

Definirajmo sedaj preslikavo $\Phi : \mathrm{N}[H] \to \mathrm{Aut}(\tilde{X})$, pri tem naj bo $\Phi(\alpha)$ krovna transformacija $\tau : \tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1$. Tak Φ je homomorfizem; produkt $\alpha \cdot \alpha'$, kjer je α' zanka z dvigom $\tau' : \tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1'$, se namreč dvigne v produkt $\tilde{\alpha}(\tau(\tilde{\alpha}'))$, torej pot od $\tilde{x}_0$ do $\tau(\tilde{x}_1') = \tau\tau'(\tilde{x}_0)$ in $\tau\tau'$ je krovna transformacija, ki pripada $\alpha \cdot \alpha'$. Gornja karakterizacija elementov grupe $\mathrm{N}[H]$ je zaradi lastnosti dviga poti ekvivalentna obstoju avtomorfizma $\tilde{x}_0 \mapsto \tilde{x}_1$, kar zagotavlja surjektivnost homomorfizma Φ. Njegovo jedro pa podajajo ekvivalenčni razredi poti α, ki se dvignejo v zanke na $\tilde{X}$, in to so natanko elementi $p_*(\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$. Če povzamemo, nam gornji odstavek podaja izomorfizem med $\mathrm{N}[H]/H$ in $\mathrm{Aut}(\tilde{X})$. □

Ker je gornja vpeljava precej nemotivirana, si privoščimo naslednjo krajšo algebraično zastranitev. Ugotovili bomo namreč, da grupa avtomorfizmov krovnega prostora sovpada z avtomorfizmi posameznega vlakna pri delovanju $\pi(X)$.

Standardno označimo $(\tilde{X}, p)$ krovni prostor prostora X, $x \in X$ in premislimo kako smiselno definirati delovanje grupe $\pi(X,x)$ na množici $p^{-1}(x)$ (torej $p^{-1}(x) \times \pi(X,x) \to p^{-1}(x)$). Spet se oprimemo lastnosti dviga poti za krovno projekcijo p. Za vsako točko iz vlakna $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ in vsako zanko $\alpha \in \pi(X,x)$ podamo $\tilde{x} \cdot \alpha \in p^{-1}(x)$ kot končno točko dviga $\tilde{\alpha}$ z začetkom v $\tilde{x}$.

Vidimo, da je tako vpeljano delovanje tranzitivno na množici $p^{-1}(x)$. Med različnima točkama vlakna $\tilde{x}_1$ in $\tilde{x}_2$ obstaja namreč v s potmi povezanem prostoru $\tilde{X}$ vezna pot $\tilde{\alpha}$. Ustrezen element grupe $\pi(X,x)$ je projekcija $\alpha = p_*(\tilde{\alpha})$, saj očitno: $\tilde{x}_1 \cdot \alpha = \tilde{x}_2$.

Iz znanih odnosov med zankami razberemo, da je stabilizator poljubne točke $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ natanko podgrupa $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$, kajti fundamentalna grupa $\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ vsebuje le vse homotopne razrede sklenjenih poti v tej točki in delovanje ji tako prireja nepremaknjene konce. Množica $p^{-1}(x)$ ob delovanju grupe $\pi(X,x)$ torej prerase v prostor, izomorfen kvocientu $\pi(X,x)/p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$.

Poleg tega pa je to delovanje usklajeno z avtomorfizmi krovnega prostora, kar izkoristimo za opis grupe $\mathrm{Aut}(\tilde{X}, p)$.

Trditev 4.18. *Za poljuben avtomorfizem $\varphi \in \mathrm{Aut}(\tilde{X}, p)$, poljubno točko $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ in poljubno zanko $\alpha \in \pi(X,x)$ velja: $\varphi(\tilde{x} \cdot \alpha) = (\varphi\tilde{x}) \cdot \alpha$.*

Dokaz. Če še enkrat premislimo definicijo našega delovanja, $\tilde{x} \cdot \alpha$ podaja končno točko $\tilde{\alpha}$, ki je dvig poti α v $\tilde{X}$ z začetkom $\tilde{x}$. Torej je $\tilde{\alpha}$ pot med $\tilde{x}$ in $\tilde{x} \cdot \alpha$ v $\tilde{X}$ in avtomorfizem φ jo transformira do poti $\varphi_*\tilde{\alpha}$ z začetkom $\varphi(\tilde{x})$ in koncem $\varphi(\tilde{x} \cdot \alpha)$. Po drugi strani definicija delovanja za $(\varphi\tilde{x}) \cdot \alpha$ pomeni končno točko poti $\varphi_*(\tilde{\alpha})$. Če povzamemo, zato res: $(\varphi\tilde{x}) \cdot \alpha = \varphi(\tilde{x} \cdot \alpha)$. □

Trditev 4.19. *Grupa avtomorfizmov $\mathrm{Aut}(\tilde{X}, p)$ krovnega prostora $(\tilde{X}, p)$ prostora X je izomorfna grupi avtomorfizmov množice $p^{-1}(x)$, $x \in X$, kot prostora delovanja grupe $\pi(X,x)$.*

Dokaz. Po gornji trditvi vemo, da lahko homomorfizem med grupama podamo kar z zožitvijo. Tako potrebujemo le bijektivnost $\varphi \mapsto \varphi|_{p^{-1}(x)}$, kjer je φ poljubni avtomorfizem $(\tilde{X}, p)$. Injektivnost preprosto sledi iz dejstva, da je avtomorfizem natanko določen s sliko posamezne točke. Za surjektivnost bomo premislili, zakaj naša slika ni prava podgrupa avtomorfizmov vlakna z delovanjem.

Uvedimo naslednjo pomožno trditev: grupa A avtomorfizmov prostora X z (tranzitivnim) delovanjem G je celotna grupa avtomorfizmov natanko tedaj, ko med poljubnima točkama $x, y \in X$ z istim stabilizatorjem obstaja $\varphi \in A : \ \varphi(x) = y$. Če je namreč A celotna grupa avtomorfizmov, znamo za vsaka x, y z istim stabilizatorjem izgraditi tak φ. In sicer sliko poljubnega $z \in X$ določa tisti element $g \in G$, za katerega je $z = x \cdot g$ (obstaja zaradi tranzitivnosti), podana pa je s predpisom $\varphi(z) = \varphi(x \cdot g) = (\varphi x) \cdot g = y \cdot g$. Neodvisnost od g zagotavlja isti stabilizator točk x, y, usklajenost z delovanjem sledi iz konstrukcije, bijektivnosti zadostimo z inverzom $\varphi^{-1}(y) = x$. Kadar A ni celotna grupa avtomorfizmov, obstaja $\psi \in \mathrm{Aut} - A$ in $x, \psi(x)$ imata (zaradi usklajenosti avtomorfizmov z delovanjem) isti stabilizator. Ker pa je avtomorfizem med točkama enolično določen, to pomeni, da ni takega $\varphi \in A$, da bi $\varphi(x) = \psi(x)$.

Spomnimo se sedaj, da krovne transformacije obstajajo natanko med točkami z isto projekcijo fundamentalne grupe (istim stabilizatorjem glede na delovanje

$\pi(X,x)$ na $p^{-1}(x)$). Gornja ekvivalenca tako za dobljeno zoženo grupo avtomorfizmov pove, da zajame celotno grupo avtomorfizmov vlakna in naša vložitev je izomorfizem. □

Grupa avtomorfizmov prostora z delovanjem je v splošnem izomorfna kvocientu $\mathrm{N}[H]/H$, kjer je H stabilizator vsebovane točke. V našem primeru pa smo se tako vrnili na trditev izreka 4.17.

Glede na obnašanje grupe $p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$ ločimo tudi posebno skupino krovnih prostorov. Že po zapisu grupe avtomorfizmov se zdi, da bodo izpostavljeno vlogo odigrali tisti prostori, katerih projekcija fundamentalne grupe je že sama podgrupa edinka.

Definicija 4.20. *Krovni prostor je regularen, kadar je projekcija njegove fundamentalne grupe podgrupa edinka v fundamentalni grupi prostora:* $p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}) \triangleleft \pi(X,x)$. *Tedaj za grupo avtomorfizmov velja izomorfizem:* $\mathrm{Aut}(\tilde{X},\tilde{x}) \cong \pi(X,x)/p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$.

Enostavno povezan (regularni) krovni prostor imenujemo univerzalni krovni prostor. Njegova fundamentalna grupa je trivialna in pripadajoča grupa avtomorfizmov je kar fundamentalna grupa $\pi(X)$.

Če se spomnimo pogoja za obstoj homomorfizma med krovnima prostoroma, opazimo, da je zahteva o vsebovanosti projekcije fundamentalne grupe prvega v projekciji grupe drugega za homomorfizme iz univerzalnega krovnega prostora vselej izpolnjena. Lahko je dokazati, da je v takem paru prvi prostor s preslikavo opisanega homomorfizma krovni prostor drugega. Kar povzdigne univerzalni krovni prostor v krovni prostor vseh krovnih prostorov danega prostora.

Zanima nas še, ali definicija regularnega krovnega prostora vzdrži tudi svoj obrat. In res lahko preverimo, da obstaja tak prostor $\tilde{X}_N$ za vsako podgrupo edinko fundamentalne grupe $N \triangleleft \pi(X,x) =: G$. Tvorijo ga odseki $\{n\tilde{x}\}_{n\in N}$ za $\tilde{x}$ iz univerzalnega krovnega prostora. Grupa G/N pa deluje nanj sledeče: $[g]\{n\tilde{x}\} = \{g \cdot n\tilde{x}\} \overset{N \text{ edinka}}{=} \{n_1\, g\tilde{x}\} \in \tilde{X}_N$. In tako je vsak regularni krovni prostor določen s kratko eksaktno vrstico $1 \to N \to G \to G/N \to 1$, kjer je N njegova fundamentalna grupa, G/N pa grupa avtomorfizmov.

Hiperbolična ravnina je enostavno povezana, spomnimo se tudi, da grupa, ki smo jo spoznavali v zvezi s tlakovanji, sovpada s fundamentalno grupo naših ploskev. A preden zaključimo, še nekoliko splošnejši pogled.

Že v motivacijo krovnega prostora je vpeta kvocientnost krovne projekcije. Krovni prostor je prostor, ki pokriva, in pri tem se identificirajo točke znotraj posameznih vlaken. Vseeno ne moremo za kakršenkoli krov prostora opazovati kot prostora orbit pri delovanju neke grupe. To je namreč res le, kadar grupa avtomorfizmov krovnega prostora na vlaknih deluje tranzitivno. In tako so za lepe ponovno označeni regularni krovni prostori.

Trditev 4.21. *Krovni prostor* $(\tilde{X},p)$ *prostora* X *je regularni krovni prostor natanko tedaj, ko grupa avtomorfizmov* $\mathrm{Aut}(\tilde{X},p)$ *deluje tranzitivno na vlaknu* $p^{-1}(x)$.

Dokaz. Projekcije fundamentalnih grup krovnega prostora, baziranih v različnih točkah istega vlakna, so med seboj konjugirane glede na elemente $\pi(X,x)$ (trditev 4.12). Za avtomorfizme pa vemo, da obstajajo med tistimi točkami krovnega prostora, ki imajo enako projekcijo fundamentalne grupe (trditev 4.16). V primeru regularnega krovnega prostora, ko je $p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$ podgrupa edinka v $\pi(X,x)$, je to natanko celo vlakno. □

A gledano s stališča „neznalčka“ iz prejšnjega poglavja nimamo ne krovnih prostorov ne vlaken. Vidimo le hiperbolično ravnino kot nek enostavno povezan topološki prostor in neko grupo njegovih (notranjih) homeomorfizmov. Izpostavili smo, da so grupne slike (osnovnega mnogokotnika) za različne grupne elemente različne, in prav to nas opozarja na ključno lastnost delovanja te neke grupe na nekem prostoru, da bo ta prostor krov dobljenega kvocienta.

Trditev 4.22. *Imejmo povezan, lokalno s potmi povezan prostor Y; delovanje grupe G na Y naj bo prosto (brez negibnih točk) in povsem nezvezno (vsaka točka ima okolico U, da so množice iz $\{g(U); g \in G\}$ paroma disjunktne). Če $p : Y \to Y/G$ označuje naravno projekcijo, potem je (Y, p) regularni krovni prostor kvocienta Y/G in G grupa avtomorfizmov $G = \mathrm{Aut}(Y, p)$.*

Dokaz. Delovanje G na Y je povsem nezvezno, torej ima vsaka točka $y \in Y$ okolico U, da so slike $g(U)$, $g \in G$, paroma disjunktne. Kvocientna preslikava p identificira vse te homeomorfne množice $\{g(U); g \in G\}$ z odprto množico $p(U)$ v Y/G. Po definiciji kvocientne topologije na Y/G pa je (ustrezna) zožitev p homeomorfizem iz $g(U)$ na $p(U)$ za vsak $g \in G$. Imamo torej krovni prostor, vsak element G je krovna transformacija in krovni prostor je regularen, kajti produkt $g_2 g_1^{-1}$ slika $g_1(U)$ v $g_2(U)$.

Ugotovili smo, da je grupa G podgrupa $\mathrm{Aut}(Y, p)$. Poglejmo sedaj poljubno krovno transformacijo φ: za izbrano točko $y \in Y$ sta y in $\varphi(y)$ vselej v isti orbiti (trditev 4.16) in obstaja $g \in G$, tako da $g(y) = \varphi(y)$. Avtomorfizem je s sliko ene točke natanko določen (prosto delovanje grupe Aut na krovnem prostoru) in zato je tudi globalno $\varphi = g$. □

5. Do ...

Naša omejitev na orientabilne ploskve vse glasneje odzvanja v uporniškem „kaj sicer“. Kaj, če so ploskve neorientabilne ali pa nas zanimajo celo višjedimenzionalni prostori?

Projektivno ravnino $\mathbb{R}P^2$ že poznamo kot kvocientni prostor 2-sfere: S^2/S^0. Če s p označimo naravno projekcijo $S^2 \to \mathbb{R}P^2$, ki jo opisuje antipodna preslikava $x \mapsto -x$, razumemo par (S^2, p) kot krovni prostor projektivne ravnine. Njen univerzalni krov pa je tako hkrati univerzalni krov sfere, ki je – kot vemo – kar sfera sama.

Podobno za poljubno sklenjeno neorientabilno ploskev P obstaja orientabilna ploskev $\tilde{P}$ in 2-listna krovna projekcija $\tilde{P} \to P$. Če $\tilde{P}$ opremimo z geometrijsko strukturo, lahko za krovno translacijo vzamemo izometrijo, ki obrne orientacijo. S stališča fundamentalnih grup vidimo, da množica orientacijo ohranjajočih zank predstavlja podgrupo indeksa 2 v fundamentalni grupi neorientabilne ploskve (ta ima med generatorji vselej torzijski element reda 2). Iz poligonalizacije in Eulerjeve karakteristike zlahka razberemo, da je dvojni krov neorientabilne ploskve rodu r (rP s $\chi = 2 - r$) vselej homeomorfen orientabilni ploskvi za ena manjšega rodu ($(r-1)T$ s $\chi = 4 - 2r = 2 - 2(r-1)$). S tem pa si ustrezata tudi pripadajoči geometriji.

Razmišljanje o višjedimenzionalnih prostorih nas vodi po mnogo manj znanih poteh. Navsezadnje nam opisana geometrizacija podaja svojevrstno klasifikacijo ploskev. In vendar je prav taka v osnovi določitve 3-mnogoterosti.

Tu geometrijska struktura sicer ni enotna – sklenjene 3-mnogoterosti zahtevajo predhodni prafaktorski razrez vzdolž sfer in nadaljni razrez vzdolž torusov. Prav tako je več (skupaj 8) med seboj različnih geometrij: poleg sferične S^3, evklidske E^3 in hiperbolične $\mathcal{H}^3$ še geometriji $S^2 \times \mathbb{R}$ in $\mathcal{H}^2 \times \mathbb{R}$, geometrija univerzalnega krova $SL_2(\mathbb{R})$ ter nilpotentna in rešljiva geometrija. Lahko pa modelno geometrijo podobno opišemo z enostavno povezano mnogoterostjo X in tranzitivnim delovanjem 3-dimenzionalne (matrične) Liejeve grupe G na njej. Pri tem je geometrijska struktura 3-mnogoterosti homeomorfna kvocientu X/H, kjer diskretna podgrupa $H \leq G$ deluje prosto na X. Za neorientabilne prostore lahko tudi tu opazujemo orientabilni dvojni krov.

A iz daljave spet vidimo le imena – velika imena: slavno Poincaréjevo domnevo, Thurstona in njegovo geometrizacijsko razširitev, Richarda Hamiltona in Grigorija Perelmana.

Literatura

[1] J. W. Anderson, *Hyperbolic Geometry.* Springer-Verlag, London, 2005.

[2] R. Fenn, *Techniques of Geometric Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[3] R. Fenn, *What is the Geometry of a Surface?*, Amer. Math. Monthly **90** (1983) 87–98.

[4] M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History.* W. H. Freeman and Company, New York, 1994.

[5] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[6] T. Košir, B. Magajna, *Transformacije v geometriji.* Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1997.

[7] W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1967.

[8] A. Pressley, *Elementary differential geometry.* Springer-Verlag, London, 2001.

[9] J. Vrabec, *Metrični prostori.* Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1990.