UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Jaka Kranjc

# Infinitezimalna analiza

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2010

Kazalo

### Povzetek

Seznanimo se s popolnoma drugačnim pristopom k matematični analizi, kjer odsotnost limit nadomeščajo infinitezimali – količine, katerih kvadrat je enak nič. Obstoj takšnih nilpotentnih količin nam zagotovi izključitev zakona o izključeni tretji možnosti, saj tedaj ni mogoče dokazati, da je nabor infinitezimalov trivialen. Uporaba geometrije nam omogoča enostavne in intuitivne izpeljave, ki so na vsakem koraku strogo pravilne in točne. Izkaže se, da se končni rezultati celo ujemajo z rezultati, ki bi jih dobili z upoštevanjem pravil klasične analize.

Po pregledu osnovnih aksiomov gladkega sveta ter njihovih zanimivih posledic definiramo odvod funkcije ene spremenljivke ter izrazimo odvode elementarnih funkcij. Ko obdelamo aksiom integracije oziroma obstoj določenega integrala ter z njim povezana pravila se lotimo parcialnih odvodov in praktične uporabe odvoda ter integrala v geometriji, kjer izpeljemo formule za določanje dolžin, ploščin, površin in prostornin. Za zaključek spoznamo, kako nas iskanje stacionarnih točk privede do lomnega zakona in kako se poišče enačbo verižnice, ter izpeljemo znani parcialni diferencialni enačbi – toplotno in valovno enačbo.

### Abstract

We get acquainted with a completely different approach to mathematical analysis, where the absence of limit is replaced by infinitesimals – quantities whose square is zero. The existence of such nilpotent quantities is guaranteed by the failure of the law of excluded middle. It can not be proved that the collection of infinitesimals is trivial. Intuitive use of geometry allows us to derive theorems rigorously and it turns out that the final results tally with the results that would be obtained using the classical analysis.

After reviewing the basic axioms of the smooth world and their consequences we define derivative of a single-variable function and express derivatives of elementary functions. We introduce the integration axiom or existence of definite integrals and associated rules, we define partial derivatives and conclude with applications of the differential calculus in smooth analysis to a range of traditional geometric and physical problems, such as determination of areas, volumes, arc lengths and derivation of well-known partial differential equations – the heat and wave equations.

**Math. Subj. Class. (2010):** 03F55, 58A03, 35K05, 35L05
**Ključne besede:** infinitezimali, gladka analiza, toplotna enačba, valovna enačba
**Keywords:** infinitesimals, smooth analysis, heat equation, wave equation

# 1. Uvod

Že od 17. stoletja fiziki pri svojem delu uporabljajo infinitezimalne postopke, ob katerih molče predpostavijo, da je svet gladek oziroma da so preslikave dovoljkrat odvedljive. Infinitezimalna analiza predstavlja odlično formalno podlago za intuicionistično izpeljavo rezultatov klasične fizike.

Infinitezimal je količina, ki je manjša od vsake končne količine in ne nujno ničelna. V našem primeru bodo to števila, ki so tako majhna, da lahko zanemarimo njihove kvadrate in posledično vse višje potence tako, da jih enostavno postavimo na nič.

1.1. **Malo o zgodovini.** Za začetek si poglejmo pestro zgodovino uporabe infinitezimalov.

Infinitezimali so se pojavili že v delih grškega filozofa Demokrita, vendar jim je Evdoks onemogočil vklučitev v evklidsko matematiko. Nato so se ob koncu srednjega veka ponovno pojavili v smislu nečesa nedeljivega. Na veliko so jih začeli uporabljali v 16. ter 17. stoletju, med uporabniki so se znašli tudi Kepler, Cavalieri in Barrow. S pomočjo njih so med drugimi že določali ploščine likov, prostornine teles ter iskali tangente na krivulje. Newton jih je poimenoval minljive količine in jih nato uporabil pri svoji analizi. Sledila sta mu še Leibniz in De l'Hospital, ki je avtor razprave, v kateri je omenil, da lahko krivuljo obravnavamo, kot da je narejena iz neskončno drobnih daljic, in da lahko enačimo dve količini, če se razlikujeta za neskončno malo količino. Kasneje jih je Russell opisal z besedami: nepotrebni, napačni in nasprotujejo sami sebi, zato so jih poimenovali duhovi preminulih količin. V drugi polovici 19. stoletja je koncept limite dokončno izpodrinil infinitezimale iz matematike, ki jo poznamo danes.

V drugi polovici 20. stoletja so infinitezimali končno dobili trdno podlago, ko je Abraham Robinson, izhajajoč iz matematične logike, ustvaril t.i. nestandardno analizo, ki omogoča vključitev Leibnizovih nedoločljivih infinitezimalov, zasnovanih predvsem kot neskončno majhna, a neničelna realna števila, v sistem realnih števil brez kršenja aritmetičnih pravil. Približno deset let kasneje se je na podlagi teorije kategorij razvila gladka infinitezimalna analiza (krajše SIA), ki aksiomatsko vpelje nilpotentne infinitezimale in ki omogoča pristop k matematični analizi na način, kot so ga poznali matematiki pred Cauchyjem in kot še dandanes to počnejo fiziki in inženirji. S pomočjo SIA je mogoče nadomestiti zahtevno ocenjevanje, ki nastopa pri $\varepsilon - \delta$ limiti, s preprostimi algebraičnimi manipulacijami.

# 2. Gladka infinitezimalna analiza

Infinitezimalna analiza je vzpostavljena s konstrukcijo matematičnega modela $\mathbb{S}$, ki zagotovi konsistenco predstavljene matematične teorije. Matematični model je struktura določenega tipa. V konkretnem primeru je model $\mathbb{S}$ kategorija tipa topos, ki vsebuje vse običajne geometrijske objekte kot npr. premice in evklidske prostore ter gladke preslikave med njimi.

Ker se ne želimo spuščati v teorijo kategorij, ki jo bi potrebovali za konstrukcijo takega modela, si bomo v tem poglavju pogledali aksiomatski pristop in njegove posledice.

2.1. **Logika.** Predenj se dotaknemo aksiomov, se seznanimo z ustrezno logiko, ki nam bo služila za podlago.

Grobo rečeno je matematična logika nabor pravil, ki so dovoljena v definicijah, trditvah in dokazih. V splošnem lahko podamo pravila na več načinov. Če bi začeli s teorijo kategorij, bi imeli na voljo dva pristopa:

(1) Najprej bi definirali kategorijo, nato pa bi izpeljali pravila logike, ki veljajo v tej kategoriji.
(2) Najprej bi definirali pravila logike in šele nato konstruirali kategorijo, ki jim zadošča.

Zdi se, da je prvi način precej naraven in domač, saj bi definirali pomembnejše lastnosti, vse ostalo pa bi sledilo. Prav tako bi ugotovili, da ima poljubna kategorija tipa topos minimalen nabor logičnih pravil, ti. intuicionistično logiko višjega reda, od koder začnemo.

2.1.1. *Aksiomi intuicionistične logike.* V intuicionistični logiki imamo sledeče aksiome, ki so zapisani s klasičnimi oznakami:

(1) $\bot \Rightarrow \varphi$
(2) $\varphi \Rightarrow \top$
(3) $\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \varphi)$
(4) $(\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \psi))$,
(5) $\varphi \Rightarrow (\chi \Rightarrow (\varphi \wedge \chi))$,
(6) $\varphi \wedge \chi \Rightarrow \varphi$ in $\varphi \wedge \chi \Rightarrow \chi$,
(7) $\varphi \Rightarrow \varphi \vee \chi$ in $\chi \Rightarrow \varphi \vee \chi$,
(8) $(\varphi \Rightarrow \psi) \Rightarrow ((\chi \Rightarrow \psi) \Rightarrow (\varphi \vee \chi \Rightarrow \psi))$,
(9) $(\varphi \Rightarrow \chi) \Rightarrow ((\varphi \Rightarrow \neg\chi) \Rightarrow \neg\varphi)$,
(10) $\neg\varphi \Rightarrow (\varphi \Rightarrow \chi)$,
(11) $(\forall x\, \mathsf{P}(x)) \Rightarrow \mathsf{P}(t)$,
(12) $\mathsf{P}(t) \Rightarrow (\exists x\, \mathsf{P}(x))$ in
(13) $x = x$ in $(\mathsf{P}(x) \wedge (x = y)) \Rightarrow \mathsf{P}(y)$.

Tu so $\varphi$, $\chi$ in $\psi$ izjave, $\top$ resnična izjava, $\bot$ neresnična izjava in $\mathsf{P}$ predikat v spremenljivki $x$. Poleg tega imamo še dve pravili sklepanja:

(1) Modus ponens: Iz $\varphi$ in $\varphi \Rightarrow \psi$ sledi $\psi$.
(2) Generalizacija: Iz $\varphi \Rightarrow \psi(x)$ sledi $\varphi \Rightarrow \forall x\, \psi(x)$ in iz $\psi(x) \Rightarrow \varphi$ sledi $\exists x\, \psi(x) \Rightarrow \varphi$, kjer je $x$ spremenljivka, ki se ne pojavi v $\varphi$.

Omenimo še, če dodamo zakon o izključeni tretji možnosti $\varphi \vee \neg\varphi$ kot aksiom, dobimo klasično logiko. Ker je zakon dvojne negacije $(\neg\neg\varphi) \Rightarrow \varphi$ ekvivalenten zakonu o izključeni tretji možnosti, tega zakona prav tako ne moremo uporabiti, kar predstavlja resno omejitev tudi pri dokazovanju, kjer moramo biti še posebno previdni.

Posledično v intuicionistični logiki ne moremo dokazati izjave

$$\neg\forall x\, \mathsf{P}(x) \Rightarrow \exists x \neg\mathsf{P}(x), \tag{1}$$

medtem ko obrat in različica $\neg\exists x\, \mathsf{P}(x) \Leftrightarrow \forall x \neg\mathsf{P}(x)$ veljata. Poleg tega obstajajo, v klasični logiki sicer dokazljive trditve, katerih prav tako ne moremo dokazati s sredstvi intuicionistične logike. Med njimi je znan izrek o povprečni vrednosti, ki zahteva uporabo izjave (1).

Kljub odsotnosti tega zakona klasične logike, razvoj gladke infinitezimalne analize ni oviran, saj je konstruktivistične narave, kar pomeni, če želimo dokazati obstoj rešitve, jo moramo skonstruirati ali jo kar podati.

2.2. **Gladka premica.** Osrednji objekt infinitezimalne analize je gladka premica $\mathcal{R}$, ki si jo lahko predstavljamo kot ravno homogeno premico. Objekt $\mathcal{R}$ sestoji iz točk, katere ponavadi označimo z malimi črkami iz začetka ali iz konca angleške abecede. Iz poljubnih točk sestavljamo dele. Če del $A$ vsebuje točko $a$ ali točka $a$ pripada delu $A$, pišemo $a \in A$. Če del ne vsebuje točk, je prazen.

Vsaka točka predstavlja tudi številsko vrednost, tj. usmerjeno razdaljo od izhodišča.

2.2.1. *Aksiomi algebraične strukture gladke premice* $\mathcal{R}$. Predpostavimo, da v $\mathcal{R}$ obstajata točki, ki ju označimo z 0 in 1 ter ju poimenujemo nič in enota.

Privzemimo, da je na $\mathcal{R}$ definirana operacija zrcaljenja preko izhodišča – točke 0, ki jo označimo z $-$. Operacija vsaki točki $a \in \mathcal{R}$ priredi točko $-a \in \mathcal{R}$ ter zadošča pogojema

$$-(-a) = a \quad \text{in} \quad -0 = 0.$$

Privzemimo, da je na $\mathcal{R}$ definirana operacija seštevanja, ki jo označimo s $+$. Operacija vsakemu paru točk $a$, $b \in \mathcal{R}$ priredi točko $a + b \in \mathcal{R}$ ter zadošča pogojem

$$0 + a = a\,, \quad a - a = 0\,, \quad a + b = b + a \quad \text{in} \quad (a + b) + c = a + (b + c),$$

kjer z $a-b$ označimo $a+(-b)$. Privzemimo, da je na $\mathcal{R}$ definirana operacija množenja, ki jo označimo z $\cdot$. Operacija vsakemu paru točk $a$, $b \in \mathcal{R}$ priredi točko $a \cdot b \in \mathcal{R}$, kar raje označimo z $ab$, ter zadošča pogojem

$$\begin{aligned} &0 \cdot a = 0\,, \quad 1 \cdot a = a\,, \quad a \cdot b = b \cdot a\,, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c\,, \\ &a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{in} \quad (a \neq 0) \Rightarrow \exists\, a^{-1}\, (a \cdot a^{-1} = 1), \end{aligned}$$

kjer lahko z $a/b$ označimo $ab^{-1}$ in kjer je $\neq$ relacija, ki jo bomo definirali v definiciji 2.1. V splošnem iz $ab = 0$, ne moremo sklepati na $a = 0$ ali $b = 0$.

Če si zamislimo objekt $\mathcal{R}$ kot množico, dobi objekt z omenjenimi operacijami strukturo komutativnega obsega. Prav tako pa omenimo, da je mogoče vse te operacije skonstruirati geometrijsko. Iz objekta $\mathcal{R}$ lahko tvorimo kartezični produkt $\mathcal{R} \times \mathcal{R}, \ldots, \mathcal{R}^n$, kar je mogoče, saj je $\mathbb{S}$ topos in torej zaprt za kartezični produkt. Točke dobljenega objekta označimo z velikimi črkami ali z $n$-tericami $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{R}^n$, kjer so komponente $a_i \in \mathcal{R}$. Poljubni točki $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathcal{R}^n$ sovpadata, kar pišemo $A = B$, če za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$ velja $a_i = b_i$.

2.2.2. *Aksiomi urejenosti gladke premice* $\mathcal{R}$. Predpostavimo, da imamo na $\mathcal{R}$ definirano relacijo urejenosti, ki jo označimo z $<$, kjer si lahko $a < b$ predstavljamo v smislu, da je točka $a$ strogo levo od točke $b$, ter zadošča pogojem

$$\begin{aligned} &(a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c\,, \quad a < b \Rightarrow (a + c) < (b + c)\,, \quad (a < b \wedge 0 < c) \Rightarrow ac < bc\,, \\ &(0 < a) \vee (a < 1)\,, \quad \neg(a < a)\,, \quad 0 < a \Rightarrow 0 < a^{-1} \quad \text{in} \quad (a < b) \Rightarrow (a < c \vee c < b). \end{aligned}$$

Vidimo, da relacija strogo loči točki 0 in 1, saj $0 < 1$, in da v splošnem ni res, da za poljubni točki $a$, $b \in \mathcal{R}$ velja $(a < b) \vee (a = b) \vee (b < a)$. Sedaj lahko definiramo relacijo razločnosti.

**Definicija 2.1.** *Za poljubni točki $a$, $b \in \mathcal{R}$ definiramo relacijo $\neq$ kot*

$$a \neq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (b < a).$$

Hitro se lahko prepričamo, da za relacijo $\neq$ velja

$$a \neq b \Rightarrow b \neq a\,, \quad a \neq b \Rightarrow a \neq c \vee c \neq b \quad \text{in} \quad \neg(a \neq a).$$

Če velja $\neg(a \neq b)$, pravimo, da sta točki nerazločni. Zaradi odsotnosti zakona dvojne negacije v splošnem iz nerazločnosti dveh točk ne moremo sklepati na njuno enakost, vendar velja obrat. Prav tako ne moremo dokazati izjave $\neg(a = b) \Rightarrow a \neq b$.

**Trditev 2.2.** *Za poljubni točki $a$, $b \in \mathcal{R}$ velja $a \neq b \Rightarrow \neg(a = b)$.*

*Dokaz.* Naj bo $a \neq b$ in denimo, da velja $a = b$. Po irefleksivnosti relacije $\neq$ velja $\neg(a \neq a)$, kjer upoštevamo $a = b$, in dobimo $\neg(a \neq b)$, kar je v nasprotju s predpostavko $a \neq b$. $\square$

Naj $\{x \in \mathcal{R}\,;\, \mathsf{P}(x)\}$ označuje nabor vseh takšnih točk iz $\mathcal{R}$, ki zadoščajo lastnosti $\mathsf{P}$. Nabor $\{x \in \mathcal{R}\,;\, 0 < x\}$ označimo s $\mathcal{R}^+$ in privzemimo, da za poljubno točko $a \in \mathcal{R}^+$ obstaja takšna točka $b \in \mathcal{R}^+$, da velja $a = b^2$. Točko $b$ te predpostavke označimo tudi z $a^{\frac{1}{2}}$ oziroma z $\sqrt{a}$, kar poimenujemo kvadratni koren.

**Definicija 2.3.** *Za poljubni točki $a$, $b \in \mathcal{R}$ definiramo relacijo $\leq$ kot*

$$a \leq b \Leftrightarrow \neg(b < a).$$

Sedaj lahko definiramo odprt interval kot $(a, b) = \{x \in \mathcal{R}\,;\, (a < x) \wedge (x < b)\}$ in zaprt interval kot $[a, b] = \{x \in \mathcal{R}\,;\, (a \leq x) \wedge (x \leq b)\}$. Omenimo še, da lahko pišemo $b > a$ namesto $a < b$ in $b \geq a$ namesto $a \leq b$.

2.2.3. *Del $\Delta$.* Označimo z $\Delta$ nabor vseh takšnih točk gladke premice $\mathcal{R}$, za katere velja, da je njihov kvadrat enak 0, oziroma krajše $\Delta = \{\varepsilon \in \mathcal{R}\,;\, \varepsilon^2 = 0\}$. Del $\Delta$ poimenujemo mikrookolica (točke 0) in vsebuje točke, ki jih ponavadi označimo z malimi črkami grške abecede $\varepsilon$, $\zeta$, $\eta$, ... in ki jih poimenujemo infinitezimali oziroma mikrokoličine.

**Definicija 2.4.** *Del $A$ objekta $\mathcal{R}$ je* stabilen za prištevanje mikrokoličin *oziroma* mikrostabilen*, če za vsak $a \in A$ in za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $a + \varepsilon \in A$. Dve točki $a$, $b \in \mathcal{R}$ sta* sosednji*, če se razlikujeta za mikrokoličino oziroma če $a - b \in \Delta$.*

Očitno je relacija sosednosti refeksivna, saj je $0 \in \Delta$, ter simetrična, saj $(b-a)^2 = (-(a-b))^2 = (a-b)^2$, vendar ni tranzitivna, kar bomo dokazali v trditvi 2.14.

**Trditev 2.5.** *Naj bo $\varepsilon \in \Delta$ poljubna mikrokoličina. Tedaj velja*

(1) $\neg(\varepsilon < 0 \vee 0 < \varepsilon)$,
(2) $\varepsilon \leq 0 \wedge 0 \leq \varepsilon$,
(3) *za vsak* $a \in \mathcal{R}$ *velja* $a\varepsilon \in \Delta$,
(4) $0 < a \Rightarrow 0 < a + \varepsilon$ *in*
(5) $[a, b] = [a + \varepsilon, b + \zeta]$, *kjer sta* $a$, $b \in \mathcal{R}$ *in* $\zeta \in \Delta$ *poljubni.*

*Dokaz.* Dokazali bomo veljavnost točk (1), (2) in (4). Naj bo $\varepsilon \in \Delta$. (1) Denimo, da velja $\varepsilon < 0 \vee 0 < \varepsilon$. Če velja $\varepsilon < 0$, potem po aksiomu aditivnosti sledi $0 < -\varepsilon$ in po množenju $0 < \varepsilon^2 = 0$, kar po aksiomu irefleksivnosti relacije ni res. Primer $0 < \varepsilon$ dokažemo podobno. (2) Pokazali bomo $\varepsilon \leq 0$ in $0 \leq \varepsilon$, kar po definiciji relacije $\leq$ pomeni $\neg(0 < \varepsilon)$ in $\neg(\varepsilon < 0)$. Po točki (1) vemo, da trditvi $\varepsilon < 0$ in $0 < \varepsilon$ kršita predpostavko o definiciji dela $\Delta$, zato sta obe trditvi neresniči, torej je njuna negacija pravilna trditev. (4) Naj bo $0 < a$. Tedaj po linearnosti velja $0 < a + \varepsilon \vee a + \varepsilon < a$. Prva neenakost je za nas ugodna, medtem ko nas druga neenakost vodi v protislovje s točko (1). $\square$

V dokazu točk (1) in (4) nismo uporabili zakona dvojne negacije, ampak smo dokazali, da je izjava neresnična, kar storimo tako, da izjavo predpostavimo in iz nje izpeljemo neresnico.

**Posledica 2.6.** *Interval $[a,b]$ je mikrostabilen.*

2.2.4. *Temeljni aksiomi infinitezimalne analize.* Najprej se seznanimo s pojmom funkcije oziroma preslikave med dvema objektoma iz $\mathbb{S}$.

Funkcija je predpis, ki vsaki točki iz domene priredi natanko določeno točko iz kodomene. Za označevanje funkcij uporabimo običajen zapis $f : X \to Y$, ki označuje funkcijo $f$ definirano na domeni $X$ z vrednostmi v kodomeni $Y$. Z $Y^X$ označimo prostor vseh funkcij iz $X$ v $Y$. Če so domena, kodomena in slike $f(x)$ funkcije $f$ znane, lahko pišemo tudi $x \mapsto f(x)$ oziroma $y = f(x)$.

Iz poljubnih dveh funkcij $f$, $g : A \to \mathcal{R}$ lahko dobimo novi funkciji $f+g$, definirano kot $x \mapsto f(x) + g(x)$, in $fg$, definirano kot $x \mapsto f(x)g(x)$.

Preko relacije sosednosti definiramo zveznost funkcije.

**Definicija 2.7.** *Funkcija $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ je* zvezna*, če iz $a$, $b \in \mathcal{R}$ in $a - b \in \Delta$ sledi $f(a) - f(b) \in \Delta$ oziroma če slika sosednji točki v sosednji točki.*

Naj bo $I$ enak $\mathcal{R}$ ali poljubnemu zaprtemu intervalu. Tedaj funkcija $f : I \to \mathcal{R}$ določa krivuljo $y = f(x)$, katero enačimo z njenim grafom, kar je nabor točk oblike $(x, f(x))$ v $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$.

Za poljubno krivuljo, ki je določena s funkcijo iz $\mathcal{R}$ v $\mathcal{R}$, bi radi, da bi veljalo načelo mikroravnosti, ki zagotavlja, da je krivulja $y = f(x)$ v mikrosegmentu, tj. v dovolj majhni okolici, vsake svoje točke ravna. Brez škode za splošnost izberimo točko $(0, f(0))$, sicer naredimo premik $g(y) = f(x + y)$, okoli katere bi želeli imeti mikrosegment $N$, ki se ujema s tangento v tej točki. V primeru, da je $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ polinom, pogledamo $N$ kot sliko $\Delta$ preko funkcije $f$. Tedaj velja $f(\varepsilon) = a_1\varepsilon + a_0$ za poljuben $\varepsilon \in \Delta$ in $(\varepsilon, f(\varepsilon))$ leži na tangenti na krivuljo v točki $(0, f(0))$.

V primeru, ko $f$ ni polinom, moramo to načelo predpostaviti, a že zadostuje zožitev $f|_\Delta$ funkcije $f$ na $\Delta$. Tedaj postane graf funkcije $f|_\Delta$ kos ravne premice skozi točko $(0, f(0))$ oziroma funkcija $f|_\Delta$ je afina. To predpostavko zapakiramo v aksiom mikroafinosti oziroma aksiom Kock-Lawvere.

**Aksiom 2.8** (Aksiom mikroafinosti)**.** *Za vsak $f \in \mathcal{R}^\Delta$ obstaja enolična točka $b \in \mathcal{R}$, da za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $f(\varepsilon) = f(0) + b\varepsilon$.*

Aksiom mikroafinosti skupaj z intuicionistično logiko naredi infinitezimalno analizo drugačno od klasične. Sedaj lahko mikrookolico $\Delta$ transliramo in rotiramo, kar nam omogoča, da jo lahko postavimo na poljubno točko poljubne krivulje, kjer se bo ujemala s tangentnim vektorjem. Poglejmo še ostale posledice.

**Posledica 2.9.** *Med objektoma $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ in $\mathcal{R}^\Delta$ obstaja bijektivna preslikava $\Phi$. Če si zamislimo objekta kot kolobarja, kjer sta operaciji $+$ in $\cdot$ definirani na $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ kot $(a,b) + (c,d) = (a + c, b + d)$ in $(a,b) \cdot (c,d) = (ac, bc + ad)$ ter na $\mathcal{R}^\Delta$ kot $(f + g)(\varepsilon) = f(\varepsilon) + g(\varepsilon)$ in $(f \cdot g)(\varepsilon) = f(\varepsilon) \cdot g(\varepsilon)$, potem je $\Phi$ celo izomorfizem kolobarjev z enoto.*

*Dokaz.* Naj bosta $a$, $b \in \mathcal{R}$ poljubni točki. Tedaj definiramo $\Phi_{a,b} : \Delta \to \mathcal{R}$ kot $\Phi_{a,b}(\varepsilon) = a + b\varepsilon$. Iskana bijekcija je $\Phi : (a,b) \mapsto \Phi_{a,b}$. □

**Posledica 2.10.** *Vsaka funkcija $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ je zvezna.*

*Dokaz.* Vzemimo poljubno funkcijo $f$ in poljubni sosednji točki $x$ in $y$ iz $\mathcal{R}$. Tedaj po sosednosti velja $y = x + \varepsilon$ za nek $\varepsilon \in \Delta$. Definirajmo $g(\varepsilon) = f(x + \varepsilon)$ in poglejmo razliko $f(y) - f(x) = f(x + \varepsilon) - f(x) = g(\varepsilon) - g(0) = (g(0) + b\varepsilon) - g(0) = b\varepsilon - 0$, kar je očitno mikrokoličina, in funkcija $f$ je zvezna. □

Naslednja posledica aksioma je tako uporabna, da si zasluži svoj izrek.

**Izrek 2.11** (Načelo mikrokrajšanja)**.** *Naj bosta $a$, $b \in \mathcal{R}$ poljubni točki. Če za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $a\varepsilon = b\varepsilon$, potem velja $a = b$. V posebnem primeru, če za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $a\varepsilon = 0$, potem $a = 0$.*

*Dokaz.* Naj za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $a\varepsilon = b\varepsilon$. Definirajmo funkcijo $f : \Delta \to \mathcal{R}$ kot $f(\varepsilon) = a\varepsilon$. Tedaj velja tudi $f(\varepsilon) = b\varepsilon$. Sledi $a = b$ po enoličnosti, ki jo zagotavlja aksiom mikroafinosti za funkcijo $f$. □

Z uporabo načela si zagotovimo, da mikrokoličine niso zajete v končnih rezultatih. Zapomniti si velja, da je krajšanje mikrokoličin pri $a\varepsilon = b\varepsilon$ dovoljeno le, kadar to velja za vsak $\varepsilon \in \Delta$. Seveda ni dovolj, če enakost velja zgolj za kak $\varepsilon \in \Delta$, namreč pri $\varepsilon = 0$ sta lahko $a$ in $b$ čisto poljubni točki.

Naslednji izrek zagotavlja obstoj neničelnih mikrokoličin, kar je ključnega pomena pri infinitezimalni analizi.

**Izrek 2.12.** *Sledeče izjave so resnične.*

(1) *Interval* $[0, 0]$ *vsebuje vse točke iz* $\Delta$*, kar označimo z* $\Delta \subseteq [0, 0]$.
(2) *Točka* $0$ *ni edina točka v* $\Delta$ *oziroma* $\neg(\Delta = \{x \in \mathcal{R}\,;\, x = 0\})$.
(3) *Poljubna točka iz* $\Delta$ *je nerazločna od točke* $0$ *oziroma* $\neg(\varepsilon \neq 0)$.
(4) *Ni res, da za vsak* $\varepsilon \in \Delta$ *velja* $(\varepsilon = 0) \vee (\varepsilon \neq 0)$.

*Dokaz.* (1) V trditvi 2.5 smo že pokazali, da za točke iz $\Delta$ velja $0 \leq \varepsilon$ in $\varepsilon \leq 0$, kar je po definiciji interval $[0, 0]$. (2) Denimo sedaj, da je $\Delta = \{x \in \mathcal{R}\,;\, x = 0\}$, in vzemimo funkcijo $f : \Delta \to \mathcal{R}$ definirano kot $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Po aksiomu mikroafinosti velja $f(0) = f(0) + b0$ tako za $b = 0$ kot tudi za $b = 1$. Ker smo privzeli $\neg(0 = 1)$, nimamo enoličnosti točke $b$, ki jo zagotavlja aksiom mikroafinosti. (3) Za poljuben $\varepsilon \in \Delta$ vemo, da velja $\varepsilon^2 = 0$. Denimo, da velja $\varepsilon \neq 0$. Tedaj obstaja $\varepsilon^{-1}$, da velja $\varepsilon\varepsilon^{-1} = 1$. Pišimo $0 = 0\varepsilon^{-1} = \varepsilon^2\varepsilon^{-1} = \varepsilon\varepsilon\varepsilon^{-1} = \varepsilon$, kar je v nasprotju s predpostavko $\varepsilon \neq 0$. (4) Denimo, da za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $(\varepsilon = 0) \vee (\varepsilon \neq 0)$. Po pravkar dokazanem za poljuben $\varepsilon$ ne velja $\varepsilon \neq 0$, zato mora za vsak $\varepsilon \in \Delta$ veljati $\varepsilon = 0$, kar pa je po točki (2) neresnično. Torej predpostavka ne velja in izrek je dokazan. □

**Lema 2.13.** *Ni res, da za vsaki točki* $\varepsilon$, $\zeta \in \Delta$ *velja* $\varepsilon\zeta = 0$.

*Dokaz.* Denimo, da za vsaki točki $\varepsilon$, $\zeta \in \Delta$ velja $\varepsilon\zeta = 0$ in pišimo $\varepsilon\zeta = 0\zeta$. Po načelu mikrokrajšanja za $\zeta$ dobimo, da za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $\varepsilon = 0$, kar pa po prejšnem izreku ne velja. □

**Trditev 2.14.** *Relacija sosednosti ni tranzitivna.*

*Dokaz.* Naj bosta $\varepsilon$, $\zeta \in \Delta$ poljubni mikrokoličini in vzemimo točke $a = 0$, $b = \varepsilon$ in $c = \varepsilon + \zeta$. Očitno sta točki $a$ in $b$ ter $b$ in $c$ sosednji. Po definiciji sta točki $a$ in $c$ sosednji, če velja $a - c \in \Delta$, kar je enakovredno $(a - c)^2 = 0$. Pišimo $(a - c)^2 = (\varepsilon + \zeta)^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\zeta + \zeta^2 = 2\varepsilon\zeta$, kar po lemi 2.13 ni nujno enako 0. Uporabimo obrat izjave (1) in trditev je dokazana. □

**Trditev 2.15.** *Del* $\Delta$ *ni mikrostabilen.*

*Dokaz.* Dokazujemo po definiciji mikrostabilnosti. Vzemimo poljubni mikrokoličini $\varepsilon$, $\zeta \in \Delta$ in želimo $\varepsilon + \zeta \in \Delta$. Pišimo $(\varepsilon + \zeta)^2 = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\zeta + \zeta^2 = 2\varepsilon\zeta$, kar po lemi 2.13 ni nujno enako 0. Torej $\Delta$ ni mikrostabilen. □

**Trditev 2.16.** *Ni res, da za vsaki točki $x$, $y \in \mathcal{R}$, ki zadoščata pogoju $x^2 + y^2 = 0$, velja $x^2 = 0$.*

*Dokaz.* Vzemimo $x = (\varepsilon + \zeta)^2$ in $y = (\varepsilon - \zeta)^2$, kjer sta $\varepsilon$, $\zeta \in \Delta$ poljubni točki. Pišimo $x^2+y^2 = \varepsilon^2+2\varepsilon\zeta+\zeta^2+\varepsilon^2-2\varepsilon\zeta+\zeta^2 = 0$ in $x^2 = \varepsilon^2+2\varepsilon\zeta+\zeta^2 = 2\varepsilon\zeta$, kar po lemi 2.13 ni nujno enako 0. Uporabimo obrat izjave (1) in trditev je dokazana. □

**Definicija 2.17.** *Funkcija $f : A \to \mathcal{R}$ je* konstantna (na $A$)*, če za vsaki točki $x$, $y \in A$ velja $f(x) = f(y)$.*

Od sedaj naprej privzemimo, da je $A$ poljuben mikrostabilen del.

**Aksiom 2.18** (Načelo konstantne preslikave)**.** *Naj bo $f \in \mathcal{R}^A$ funkcija. Če za vsak $x \in A$ in za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $f(x + \varepsilon) = f(x)$, potem za vsaki točki $x$, $y \in A$ velja $f(x) = f(y)$.*

Aksiom pove, če je funkcija $f$ na mikrosegmentu vsake svoje točke konstantna, potem je funkcija konstantna na $A$.

**Definicija 2.19.** *Topos $\mathbb{S}$ je model za infinitezimalno analizo, če v njem lahko interpretiramo intuicionistično logiko in gladko premico $\mathcal{R}$ skupaj z aksiomi iz razdelkov 2.2.1–2.2.4.*

## 3. Funkcije ene spremenljivke

V tem poglavju si bomo ogledali osnovni dve operaciji, ki delujeta na funkcijah, elementarne funkcije ter izpeljali njihove odvode.

### 3.1. **Odvod.**

Začnimo z določanjem odvoda poljubne funkcije $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$.

Za izbran $x \in \mathcal{R}$ definirajmo pomožno funkcijo $g_x : \Delta \to \mathcal{R}$ kot $g_x(\varepsilon) = f(x + \varepsilon)$. Funkcija $g_x$ je dobro definirana, saj je gladka premica $\mathcal{R}$ mikrostabilna. Po aksiomu mikroafinosti za funkcijo $g_x$ obstaja enolična točka $b_x$, da za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja

$$f(x + \varepsilon) = g_x(\varepsilon) = g_x(0) + b_x\varepsilon = f(x) + b_x\varepsilon. \tag{2}$$

Vidimo, da zgornji predpis vsaki točki $x \in \mathcal{R}$ priredi natanko določeno točko $b_x \in \mathcal{R}$, kar določa funkcijo, ki jo označimo z $f'$ in ki jo poimenujemo odvod funkcije $f$. Torej velja $f'(x) = b_x$ in enačba (2) postane

$$f(x + \varepsilon) = f(x) + f'(x)\varepsilon,$$

kjer sta $x \in \mathcal{R}$ in $\varepsilon \in \Delta$ poljubni točki. To je temeljna enačba odvoda v $\mathbb{S}$.

Ker je funkcija $f'$ definirana na $\mathcal{R}$, kamor tudi slika, lahko zanjo po zgornjem postopku konstruiramo $f''$ in iterativno še vse višje odvode. Velja namreč rekurzivna formula $f^{(n-1)}(x + \varepsilon) = f^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x)\varepsilon$, kjer $f^{(n)}$ pomeni $n$-ti odvod funkcije $f$. Sledi, da je mogoče funkcijo $f$ poljubno mnogokrat odvajati oziroma je gladka. Analogno vpeljemo odvod tudi za funkcije, ki so definirane na poljubnem mikrostabilnem delu $A$, npr. na zaprtem intervalu, kar je v klasični analizi mogoče le z uporabo (nepravih) levih in desnih odvodov.

Definicija odvoda nam skupaj z načelom mikrokrajšanja omogoča algebraičen način izpeljave odvodov.

**Trditev 3.1** (Pravilo za odvod vsote)**.** *Naj bosta $f$, $g : A \to \mathcal{R}$ poljubni funkciji. Tedaj za odvod funkcije $f + g$ velja $(f + g)' = f' + g'$.*

*Dokaz.* Naj bosta $x \in \mathcal{R}$ in $\varepsilon \in \Delta$ poljubni točki. Po definiciji odvoda velja

$$(f+g)(x+\varepsilon) - (f+g)(x) = (f+g)'(x)\varepsilon$$

ter po definiciji vsote funkcij

$$\begin{aligned}(f+g)(x+\varepsilon) - (f+g)(x) &= (f(x+\varepsilon) + g(x+\varepsilon)) - (f(x) + g(x)) \\ &= f'(x)\varepsilon + g'(x)\varepsilon.\end{aligned}$$

Ker to velja za vsak $\varepsilon$, lahko uporabimo načelo mikrokrajšanja in dobimo $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$. □

**Trditev 3.2** (Pravilo za odvod produkta)**.** *Naj bosta $f$, $g : A \to \mathcal{R}$ poljubni funkciji. Tedaj za odvod funkcije $fg$ velja $(fg)' = f'g + fg'$.*

*Dokaz.* Naj bosta $x \in \mathcal{R}$ in $\varepsilon \in \Delta$ poljubni točki. Po eni strani imamo

$$(fg)(x+\varepsilon) = (fg)(x) + (fg)'(x)\varepsilon$$

in po drugi $(fg)(x+\varepsilon) = f(x+\varepsilon)g(x+\varepsilon) = (f(x) + f'(x)\varepsilon)(g(x) + g'(x)\varepsilon)$, kar zmnožimo in, ko upoštevamo $\varepsilon^2 = 0$, dobimo

$$(fg)(x) + (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\varepsilon.$$

Po načelu mikrokrajšanja sledi $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. □

**Posledica 3.3.** *Naj bo $g : A \to \mathcal{R}$ taka funkcija, da za vsak $x \in A$ velja $g(x) \neq 0$. Tedaj lahko za poljubno funkcijo $f : A \to \mathcal{R}$ definiramo funkcijo $f/g$ kot $x \mapsto f(x)/g(x)$ in velja $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.*

*Dokaz.* Podobno kot prej. □

Enostavno je videti, da lahko s pomočjo odvoda izrazimo načelo konstantne preslikave v ekvivalentni obliki, ki se glasi: Funkcija $f : A \to \mathcal{R}$ je konstantna, če za vsak $x \in A$ velja $f'(x) = 0$. Neposredno sledi, da se funkciji z enakim odvodom razlikujeta za največ konstanto.

**Trditev 3.4.** *Če je $f : A \to \mathcal{R}$ konstantna funkcija, potem za vsak $x \in A$ velja $f'(x) = 0$.*

*Dokaz.* Enakost $0\varepsilon = 0 = c - c = f(x+\varepsilon) - f(x) = f'(x)\varepsilon$ mikrokrajšamo. □

**Posledica 3.5.** *Naj bo $f : A \to \mathcal{R}$ poljubna funkcija in $c \in \mathcal{R}$. Tedaj za odvod funkcije $cf$ velja $(cf)' = cf'$.*

Načelo konstantne preslikave ima tudi presenetljivo posledico, katero zapišemo v sledeči izrek.

**Definicija 3.6.** *Del $U$ je* razdružljiv del *gladke premice $\mathcal{R}$, če je za poljuben $x \in \mathcal{R}$ res, da bodisi $x \in U$ bodisi $\neg(x \in U)$.*

**Izrek 3.7.** *Edina razdružljiva dela gladke premice $\mathcal{R}$ sta $\mathcal{R}$ in prazen del.*

*Dokaz.* Naj bo $U$ razdružljiv del gladke premice $\mathcal{R}$. Tedaj na domeni $\mathcal{R}$ definirano funkcijo $f$ kot $f(x) = 1$, če $x \in U$, in $f(x) = 0$, če $\neg(x \in U)$. Naj bosta $x \in \mathcal{R}$ in $\varepsilon \in \Delta$ poljubni točki. Tedaj imamo 4 različne možnosti:

(1) $f(x) = 0$ in $f(x+\varepsilon) = 0$
(2) $f(x) = 0$ in $f(x+\varepsilon) = 1$
(3) $f(x) = 1$ in $f(x+\varepsilon) = 0$
(4) $f(x) = 1$ in $f(x+\varepsilon) = 1$

Ker je funkcija $f$ po posledici 2.10 zvezna in ker sta točki $x + \varepsilon$ ter $x$ sosednji, izključimo drugo in tretjo možnost. Iz prve in četrte možnosti dobimo $f(x) = f(x+\varepsilon)$. Ker to velja za vsak $x \in \mathcal{R}$ in za vsak $\varepsilon \in \Delta$, je po načelu konstantne preslikave funkcija $f$ konstantna, torej za vsak $x \in \mathcal{R}$ velja $f(x) = 0$ ali $f(x) = 1$. V prvem primeru je $U$ prazen del, v drugem pa je $U$ kar $\mathcal{R}$. □

Gladka premica $\mathcal{R}$ torej ne more na kakršen koli način razpasti na dva disjunktna neprazna dela. Analogno pokažemo, da to velja tudi za vsak mikrostabilen del $A$.

3.1.1. *Odvodi elementarnih funkcij.*

**Trditev 3.8.** *Naj bo $k$ poljubno naravno število in $f(x) = x^k$. Tedaj je $f'(x) = kx^{k-1}$.*

*Dokaz.* Ker je $f(x+\varepsilon) = (x+\varepsilon)^k = x^k + kx^{k-1}\varepsilon + \cdots + kx\varepsilon^{k-1} + \varepsilon^k = x^k + kx^{k-1}\varepsilon$, velja $f(x+\varepsilon) - f(x) = kx^{k-1}\varepsilon = f'(x)\varepsilon$ in zato $f'(x) = kx^{k-1}$. □

Zgornja trditev je veljavna tudi za števila $k$, kjer je $-k$ naravno število. Namreč, če na enačbi $1 = x^{-k}x^k$ uporabimo pravilo za odvod produkta, dobimo $0 = -kx^{-k-1}x^k + x^{-k}(x^k)'$ oziroma $(x^k)' = kx^{-k-1}x^k x^k = kx^{k-1}$.

**Posledica 3.9.** *Za odvod polinoma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ velja $f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1$.*

*Dokaz.* Uporabimo zadnji dve trditvi in pravilo za odvod vsote. □

Definirajmo kompozitum funkcij in spoznajmo pomembno pravilo za odvod kompozituma.

**Definicija 3.10.** Kompozitum *poljubnih dveh funkcij $f : B \to \mathcal{R}$ in $g : A \to B$ je funkcija $f \circ g : A \to \mathcal{R}$ definirana s predpisom $x \mapsto f(g(x))$.*

**Trditev 3.11** (Verižno pravilo)**.** *Za odvod kompozituma $f \circ g$ velja $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$.*

*Dokaz.* Po temeljni enačbi odvoda imamo

$$(f \circ g)(x+\varepsilon) - (f \circ g)(x) = (f \circ g)'(x)\varepsilon$$

in po definiciji kompozituma

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x+\varepsilon) - (f \circ g)(x) &= f(g(x+\varepsilon)) - f(g(x)) \\ &= f(g(x) + g'(x)\varepsilon) - f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\varepsilon,\end{aligned}$$

saj je $g'(x)\varepsilon \in \Delta$. Po mikrokrajšanju dobimo $(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x)g'(x)$. □

**Posledica 3.12** (Pravilo za odvod inverzne funkcije)**.** *Naj za funkcijo $f : A_1 \to A_2$ obstaja inverz, tj. taka funkcija $g : A_2 \to A_1$, da za vsak $x \in A_1$ in vsak $y \in A_2$ velja $g(f(x)) = x$ in $f(g(y)) = y$. Tedaj funkciji $f'$ in $g'$ povezujeta zvezi $(f' \circ g)g' = 1$ in $(g' \circ f)f' = 1$.*

*Dokaz.* Na predpostavkah $(g \circ f) = \mathrm{id}$ in $(f \circ g) = \mathrm{id}$, kjer je $\mathrm{id}(x) = x$, uporabimo verižno pravilo. □

Sedaj vzemimo funkcijo $f$ s predpisom $x \mapsto \sqrt{x}$, kjer je $\sqrt{x}$ točka z lastnostmi, katere smo privzeli pri aksiomih urejenosti in iz katerih sledi, da je funkcija definirana na $\mathcal{R}^+$, kamor tudi slika. Ker je $\mathcal{R}^+$ po trditvi 2.5 mikrostabilen, lahko definiramo odvod funkcije $f$. Če si pomagamo s pravilom za odvod inverzne funkcije $g(x) = x^2$, dobimo $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$.

Privzemimo prisotnost funkcij

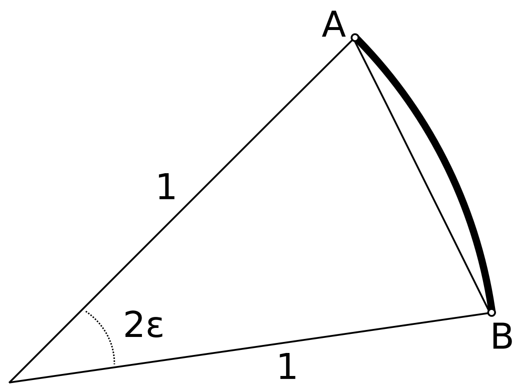
$$\sin : \mathcal{R} \to \mathcal{R} \quad \text{in} \quad \cos : \mathcal{R} \to \mathcal{R},$$

ki ju poimenujemo sinus in kosinus in ki zadoščata lastnostim

$$\sin(0) = 0\,, \quad \cos(0) = 1\,, \quad \sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1\,, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \text{ in} \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\,, \end{aligned} \tag{4}$$

ter velja $a = c\cos(x)$ in $b = c\sin(x)$, kjer sta $a$ in $b$ dolžini katet in $c$ dolžina hipotenuze pravokotnega trikotnika in $x$ velikost kota v radianih.




Slika 1. Določanje $\sin(\varepsilon)$

Vzemimo poljuben $\varepsilon \in \Delta$ in si poglejmo krožnico z enotskim polmerom in lok, ki pripada kotu velikosti $2\varepsilon$. Ker je velikost kota definirana z dolžino loka na enotski krožnici, je lok $AB$, dolžine $2\varepsilon$, po aksiomu mikroafinosti raven ter posledično sovpada z daljico $AB$, ki ima dolžino $2\sin(\varepsilon)$. Torej velja $\sin(\varepsilon) = \varepsilon$. Poleg tega dobimo iz lastnosti (3) še

$$1 = \sin(\varepsilon)^2 + \cos(\varepsilon)^2 = \varepsilon^2 + \cos(\varepsilon)^2 = \cos(\varepsilon)^2 \text{ oziroma } \cos(\varepsilon) = 1.$$

Sedaj lahko s pomočjo adicijskega pravila (4) določimo odvod funkcije sin. Pišimo $\sin(x) + \sin'(x)\varepsilon = \sin(x+\varepsilon) = \sin(x)\cos(\varepsilon) + \cos(x)\sin(\varepsilon) = \sin(x) + \cos(x)\varepsilon$. Po mikrokrajšanju sledi

$$\sin'(x) = \cos(x).$$

Podobno pokažemo $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Privzemimo še prisotnost funkcije $\exp : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, ki jo poimenujemo eksponentna funkcija in ki za vsak $x \in \mathcal{R}$ zadošča lastnostim

$$\exp(x) > 0\,, \quad \exp'(x) = \exp(x) \quad \text{in} \quad \exp(0) = 1.$$

**Trditev 3.13.** *Za funkcijo* $\exp$ *in poljubni* $x$, $y \in \mathcal{R}$ *velja* $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.

*Dokaz.* Če odvajamo funkcijo $f : x \mapsto \exp(x+y)/\exp(x)$ po pravilu za kvocient, dobimo

$$(\exp'(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp'(x))/\exp(x)^2 = 0.$$

Ker slednje velja za poljuben $x \in \mathcal{R}$, po načelu konstantne preslikave obstaja tak $c \in \mathcal{R}$, da za vsak $x \in \mathcal{R}$ velja $\exp(x+y)/\exp(x) = c$. Če sedaj vzamemo $x = 0$, mora veljati $c = \exp(0+y)/\exp(0) = \exp(y)$. Od tod sledi $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. $\square$

**Posledica 3.14.** *Za vsak* $x \in \mathcal{R}$ *velja* $\exp(-x) = 1/\exp(x)$.

*Dokaz.* Pišimo $1 = \exp(0) = \exp(x - x) = \exp(x + (-x)) = \exp(x)\exp(-x)$, kar pomnožimo z $1/\exp(x)$. □

**Trditev 3.15.** *Naj bosta* $a \in \mathcal{R}$ *in* $b \in \mathcal{R}^+$ *poljubni točki. Funkcija* $u : x \mapsto b\exp(ax)$ *je edina funkcija, za katero velja* $u(0) = b$, $u'(x) = au(x)$ *in* $u(x) > 0$.

*Dokaz.* Denimo, da obstaja še kakšna funkcija $v$, ki ustreza tem lastnostim, in si poglejmo odvod kvocienta ter vrednost kvocienta v točki 0.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v(x)^2} = 0 \qquad \frac{u(0)}{v(0)} = \frac{b}{b} = 1$$

Po načelu konstantne preslikave za vsak $x \in \mathcal{R}$ velja $v(x) = u(x)$. □

V nadaljevanju si poglejmo stacionarne točke funkcij in uporabo odvoda za določevanje le-teh.

3.1.2. *Stacionarne točke.* Začnimo z definicijo stacionarne točke.

**Definicija 3.16.** *Točka* $a \in \mathcal{R}$ *je* stacionarna točka *dane funkcije* $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, *če za vsak* $\varepsilon \in \Delta$ *velja* $f(a + \varepsilon) = f(a)$.

**Trditev 3.17.** *Točka* $a \in \mathcal{R}$ *je stacionarna točka funkcije* $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ *natanko tedaj, ko je* $f'(a) = 0$.

*Dokaz.* Naj bo $a$ stacionarna točka funkcije $f$. Tedaj za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $f(a+\varepsilon) = f(a)$. Če uporabimo temeljno enačbo odvoda, dobimo $f(a) = f(a + \varepsilon) = f(a) + f'(a)\varepsilon$, iz česar sledi $f'(a) = 0$. Dokažimo še obrat. Naj bo $f'(a) = 0$ in vemo, da za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja $f(x + \varepsilon) = f(a) + f'(a)\varepsilon = f(a)$. □

Vidimo, da se zadosten in potreben pogoj za stacionarno točko ujema z rezultatom klasične analize.

3.2. **Integral.** Na začetku spoznajmo aksiom, ki poljubni funkciji $f : [0, 1] \to \mathcal{R}$ priredi funkcijo $g : [0, 1] \to \mathcal{R}$, katere odvod je $f$.

**Aksiom 3.18** (Aksiom integracije)**.** *Za vsako funkcijo* $f : [0, 1] \to \mathcal{R}$ *obstaja enolična funkcija* $g : [0, 1] \to \mathcal{R}$, *da velja* $g' = f$ *ter* $g(0) = 0$.

Po navadi pišemo $\int_0^x f(t)\,dt$ namesto $g(x)$, kar poimenujemo določeni integral funkcije $f$.

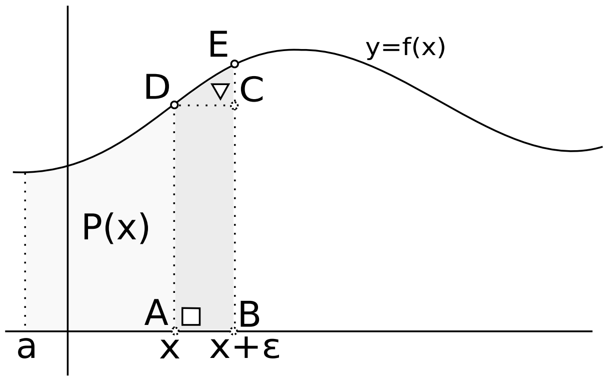
**Izrek 3.19** (Fundamentalni izrek analize)**.** *Naj bo* $f : A \to \mathcal{R}$ *poljubna funkcija. Naj za poljuben* $x \in A$ *predstavlja* $P(x)$ *ploščino območja, ki je omejeno s krivuljo, ki jo določa funkcija* $f$, *z* $x$*-osjo, tj.* $y = 0$, *ter s premicama z abcisama* $a$ *in* $x$, *ki sta vzporedni k* $y$*-osi, in kjer ploščino obravnavamo kot vsoto ploščin tankih četverokotnikov* $ABED$ *(glej sliko 2). Tedaj za funkcijo* $P : x \mapsto P(x)$, *ki jo poimenujemo funkcija ploščine funkcije* $f$, *velja zveza* $P'(x) = f(x)$.

*Dokaz.* Naj bo dana funkcija $f : A \to \mathcal{R}$ in denimo, da za funkcijo ploščine funkcije $f$ velja temeljna enačba odvoda. Ko se premaknimo za poljubno mikrokoličino $\varepsilon \in \Delta$, dobimo

$$P(x + \varepsilon) - P(x) = P'(x)\varepsilon. \tag{5}$$

Iz slike 2 je razvidno, da velja tudi

$$P(x + \varepsilon) - P(x) = \square + \triangledown, \tag{6}$$




SLIKA 2. Sprememba ploščine pod grafom

kjer je $\square$ ploščina pravokotnika $A$, $B$, $C$, $D$ in $\bigtriangledown$ ploščina območja $C$, $D$, $E$. Po aksiomu mikroafinosti je lok $DE$ raven, zato je območje $C$, $D$, $E$ resnično pravokotni trikotnik z osnovnico dolžine $\varepsilon$ in višino $f'(x)\varepsilon$, torej imamo $\bigtriangledown = \frac{1}{2}f'(x)\varepsilon^2 = 0$. Očitno velja še $\square = f(x)\varepsilon$. Ko združimo enačbi (5) in (6), dobimo $P'(x)\varepsilon = f(x)\varepsilon$. Ker je $\varepsilon \in \Delta$ poljubna mikrokoličina, uporabimo mikrokrajšanje in dobimo iskano zvezo. $\square$

Omenimo še, da je ploščina spremenjenega območja neodvisna od delitve na pravokotnik in trikotnik. Namreč, če bi izbrali pravokotnik višine $f(x+\varepsilon)$, bi dobili $f(x+\varepsilon)\varepsilon = (f(x) + f'(x)\varepsilon)\varepsilon = f(x)\varepsilon$, kar je enako ploščini $\square$ iz dokaza.

**Trditev 3.20.** *Naj bosta $f$, $g : [0,1] \to \mathcal{R}$ funkciji in $c \in \mathcal{R}$. Tedaj za določeni integral veljajo enakosti*

- $\int_0^x f + g \,\mathrm{d}t = \int_0^x f \,\mathrm{d}t + \int_0^x g \,\mathrm{d}t$,
- $\int_0^x cf \,\mathrm{d}t = c\int_0^x f \,\mathrm{d}t$,
- $\int_0^x f' \,\mathrm{d}t = f(x) - f(0)$ *in*
- $\int_0^x f'g \,\mathrm{d}t = f(x)g(x) - f(0)g(0) - \int_0^x fg' \,\mathrm{d}t$ *(integracija po delih).*

Večina dokazov tega razdelka temeljí na načelu konstantne preslikave, ki jo uporabimo na odvodu razlike leve in desne strani enakosti. Nato pa z izbiro poljubne točke določimo konstanto.

*Dokaz.* Dokažimo le zadnji dve točki. Poglejmo si odvod funkcije $h : x \mapsto \int_0^x f' \,\mathrm{d}t - (f(x) - f(0))$. Po definiciji določenega integrala dobimo $h'(x) = f'(x) - f'(x) + (f(0))' = 0$, kar velja za poljuben $x$, torej je funkcija $h$ konstantna na $[0,1]$. Ko vzamemo $x = 0$, dobimo $h(0) = 0$. Ko odvajamo funkcijo $h(x) = \int_0^x f'g \,\mathrm{d}t - (f(x)g(x) - g(0)f(0) - \int_0^x fg' \,\mathrm{d}t)$, dobimo $h'(x) = f'(x)g(x) - (f(x)g(x))' + (f(0)g(0))' + f(x)g'(x) = 0$, kjer smo upoštevali pravilo za odvod produkta. Sledi zaključek kot zgoraj. $\square$

Pojem določenega integrala bi radi razširili na poljuben interval. Dokažimo sledečo lemo, ki jo bomo kasneje uporabili pri dokazu.

**Lema 3.21** (Hadamard)**.** *Za $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ in poljubni točki $x$, $y \in [a,b]$ velja $f(y) - f(x) = (y-x)\int_0^1 f'(x + t(y-x)) \,\mathrm{d}t$.*

*Dokaz.* Za dani točki $x$, $y \in [a,b]$ definirajmo funkcijo $h : [0,1] \to [a,b]$ kot $h(t) = x + t(y-x)$. Velja $h'(t) = y - x$ in $f(y) - f(x) = f(h(1)) - f(h(0)) = \int_0^1 (f \circ h)'(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 (f' \circ h)(t)(y-x) \,\mathrm{d}t = (y-x)\int_0^1 f'(x + t(y-x))(t) \,\mathrm{d}t$. $\square$

**Trditev 3.22.** *Za vsako funkcijo $f : [a,b] \to \mathcal{R}$ obstaja enolična funkcija $g : [a,b] \to \mathcal{R}$, da velja $g' = f$ ter $g(a) = 0$.*

*Dokaz.* Enoličnost funkcije $g$ sledi iz Hadamardove leme. Namreč, če imamo dve funkciji $g_1$ in $g_2$, definiramo njuno razliko $h = g_1 - g_2$ in velja $h' = f - f$. Tedaj za poljuben $x \in [a,b]$ velja

$$h(x) - h(a) = (x-a)\int_0^1 h'(a + t(x-a))\,\mathrm{d}t = (x-a)\int_0^1 0\,\mathrm{d}t = 0.$$

Obstoj funkcije $g$ zagotovimo tako, da jo definiramo kot

$$g(x) = (x-a)\int_0^1 f(a + t(x-a))\,\mathrm{d}t.$$

Očitno velja $g(a) = 0$ in $g'(x) = \int_0^1 f(a+t(x-a))\,\mathrm{d}t + (x-a)(\int_0^1 f(a+t(x-a))\,\mathrm{d}t)'$, kjer zadnji integral vsebuje parameter $x$. Odvod tega integrala je po trditvi 4.4, ki jo bomo dokazali kasneje, enak $\int_0^1 tf'(a+t(x-a))\,\mathrm{d}t$. Sedaj fiksirajmo $x$, definirajmo $h(t) = a + t(x-a)$ in integrirajmo odvod integrala s parametrom po delih, torej

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^1 f(h(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^1 tf'(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(h(t))\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t(f\circ h)'(t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^1 f(h(t))\,\mathrm{d}t + [t(f\circ h)(t)]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 (f(h(t))\,\mathrm{d}t = \\ &= [t(f\circ h)(t)]_{t=0}^{t=1} = 1f(x) - 0f(a) = f(x). \end{aligned}$$

□

Tudi tokrat namesto $g(x)$ pišemo $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ in veljajo podobna pravila kot v trditvi 3.20, ki jih navedemo brez dokaza.

**Trditev 3.23.** *Naj bosta $f, g : [a,b] \to \mathcal{R}$ funkciji in $c \in \mathcal{R}$. Tedaj za določeni integral veljajo enakosti*

- $\int_a^x f + g\,\mathrm{d}t = \int_a^x f\,\mathrm{d}t + \int_a^x g\,\mathrm{d}t,$
- $\int_a^x cf\,\mathrm{d}t = c\int_a^x f\,\mathrm{d}t,$
- $\int_a^x f'\,\mathrm{d}t = f(x) - f(a)$ *in*
- $\int_a^x f'g\,\mathrm{d}t = f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x fg'\,\mathrm{d}t$ *(integracija po delih).*

Za zaključek razdelka si poglejmo še pravilo zamenjave spremenljivk.

**Trditev 3.24.** *Naj bo $a < b$, $c < d$, $h : [a,b] \to [c,d]$ takšna naraščajoča funkcija, da velja $h(a) = c$ ter $h(b) = d$, in $f : [c,d] \to \mathcal{R}$. Tedaj velja $\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t$.*

*Dokaz.* Če definiramo funkciji $f_1(x) = \int_c^{h(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ in $f_2(x) = \int_a^x f(h(t))h'(t)\,\mathrm{d}t$ ter ju odvajamo, vidimo, da imata obe funkciji enak odvod in velja $f_1(a) = 0 = f_2(a)$. □

## 4. Funkcije več spremenljivk

V tem poglavju bomo razširili pojem odvoda na funkcije z več spremenljivkami.

4.1. **Parcialni odvod.** Začnimo z definicijo parcialnega odvoda poljubne funkcije $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$.

Za izbran $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ in za vsak $i = 1, 2, \dots, n$ definirajmo pomožno funkcijo $g_i : \Delta \to \mathcal{R}$ kot

$$g_i(\varepsilon) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Po aksiomu mikroafinosti obstaja enolična točka $b_i \in \mathcal{R}$, da za vsak $\varepsilon \in \Delta$ velja

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) = g_i(\varepsilon) = g_i(0) + b_i\varepsilon = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + b_i\varepsilon.$$

Funkcijo, ki vsaki $n$-terici $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ priredi točko $b_i$ po zgornjem predpisu, označimo z $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in jo poimenujemo $i$-ti parcialni odvod funkcije $f$. Torej velja

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \varepsilon, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)\varepsilon. \tag{7}$$

Če je $f$ funkcija spremenljivk $x$, $y$, $z$, …, kjer je $x_1 = x$, $x_2 = y$, …, ponavadi za $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ pišemo $f_x$, za $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ $f_y$, …. Postopek konstruiranja parcialnih odvodov ponavljamo, da pridobimo višje parcialne odvode $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, …, kar lahko zapišemo krajše $f_{x_i x_j}$, $f_{x_i x_i}$, ….

**Trditev 4.1** (Verižno pravilo)**.** *Naj bo funkcija $f : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ definirana s predpisom $f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y))$, kjer so $g, u, v : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ funkcije. Tedaj velja $f_x = g_u u_x + g_v v_x$ in analogno za ostalo spremenljivko $y$.*

*Dokaz.* Naj bo $\varepsilon \in \Delta$ poljubna mikrokoličina. Pišimo

$$\begin{aligned} f_x(x, y)\varepsilon &= f(x + \varepsilon, y) - f(x, y) \\ &= g(u(x + \varepsilon, y), v(x + \varepsilon, y)) - f(x, y) \\ &= g(u(x, y) + u_x(x, y)\varepsilon, v(x + \varepsilon, y)) - f(x, y) \\ &= g(u(x, y), v(x + \varepsilon, y)) + g_u(u(x, y), v(x + \varepsilon, y))u_x(x, y)\varepsilon - f(x, y) \\ &\ \vdots \\ &= (g_v(u(x, y), v(x, y))v_x(x, y) + g_u(u(x, y), v(x, y))u_x(x, y))\varepsilon \end{aligned}$$

□

**Posledica 4.2.** *Zgornja trditev velja za poljubno mnogo spremenljivk.*

**Trditev 4.3.** *Naj bo $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ funkcija. Tedaj so mešani odvodi, to so $f_{x_i x_j}$ za $i \neq j$, enaki.*

*Dokaz.* Dokažimo za $n = 2$. Naj bosta $\varepsilon$, $\zeta \in \Delta$ poljubni mikrokoličini. Tedaj velja

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon, y + \zeta) &= f(x + \varepsilon, y) + f_y(x + \varepsilon, y)\zeta = \\ &= (f(x, y) + f_x(x, y)\varepsilon) + (f_y(x, y)\zeta + f_{yx}\zeta\varepsilon) \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} f(x + \varepsilon, y + \zeta) &= f(x, y + \zeta) + f_x(x, y + \zeta)\varepsilon = \\ &= (f(x, y) + f_y(x, y)\zeta) + (f_x(x, y)\varepsilon + f_{xy}\varepsilon\zeta), \end{aligned}$$

kjer krajšamo enake člene ter dvakrat mikrokrajšamo. □

Sedaj lahko dokažemo trditev, ki smo jo uporabili v dokazu 3.22.

**Trditev 4.4** (Odvod integrala s parametrom)**.** *Naj bo* $f : [0,1] \times [a,b] \to \mathcal{R}$ *in definirajmo* $g(x) = \int_0^1 f(t,x)\,\mathrm{d}t$*. Tedaj velja* $g'(x) = \int_0^1 f_x(t,x)\,\mathrm{d}t$*.*

*Dokaz.* Naj bosta $x \in \mathcal{R}$ in $\varepsilon \in \Delta$ poljubni točki. Tedaj imamo

$$\begin{aligned} g'(x)\varepsilon &= g(x+\varepsilon) - g(x) \\ &= \int_0^1 f(t, x+\varepsilon)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t,x)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (f(t,x) + f_x(t,x)\varepsilon - f(t,x))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f_x(t,x)\,\mathrm{d}t\,\varepsilon. \end{aligned}$$

□

**Definicija 4.5.** *Naj bosta* $\varepsilon, \zeta \in \Delta$*. Par* $(\varepsilon,\zeta)$ *je* sorazmeren*, če ostajata takšni točki* $a, b \in \mathcal{R}$*, da velja* $a \neq 0$*,* $b \neq 0$ *in* $a\varepsilon + b\zeta = 0$*. Par* $(\varepsilon,\zeta)$ *je* vzajemen za krajšanje*, če velja* $\varepsilon\zeta = 0$*.*

Naj $\Delta_n$ vsebuje take $n$-terice mikrokoličin oblike $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$, da je vsak par $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ vzajemen za krajšanje. Vsaka taka $n$-terica predstavlja neko smer iz izhodišča, zato jo poimenujemo mikrosmer. Del $\Delta_n$ poimenujemo mikroprostor smeri v $\mathcal{R}^n$. Očitno velja, če je par $(\varepsilon,\zeta)$ sorazmeren, potem je tudi vzajemen za krajšanje. Po lemi 2.13 vemo, da ni res, da je vsak par mikrokoličin vzajemen za krajšanje, torej ni res, da je vsak par mikrokoličin sorazmeren.

**Izrek 4.6.** *Naj bo* $f : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ *poljubna funkcija. Tedaj za vsako točko* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ *in za vsako mikrosmer* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \Delta_n$ *velja*

$$f(x_1 + \varepsilon_1, \ldots, x_n + \varepsilon_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)\varepsilon_i.$$

*Dokaz.* Dokazujemo z indukcijo na $n$. Za $n = 1$ je trditev poseben primer enačbe (7), kjer vzamemo $n = 1$. Privzemimo sedaj, da enakost že velja za $n$ in za dano funkcijo $f : \mathcal{R}^{n+1} \to \mathcal{R}$ fiksirajmo $x_{n+1}$ in $\varepsilon_{n+1}$. Tedaj je $f$ funkcija spremenljivk $x_1, \ldots, x_n$, za katero velja privzetek

$$\begin{aligned} &f(x_1+\varepsilon_1, \ldots, x_n+\varepsilon_n, x_{n+1}+\varepsilon_{n+1}) = \\ &\qquad f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}+\varepsilon_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}+\varepsilon_{n+1})\varepsilon_i. \end{aligned} \tag{8}$$

Ko $f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}+\varepsilon_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) + f_{x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\varepsilon_{n+1}$ in $f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}+\varepsilon_{n+1}) = f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) + f_{x_i x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\varepsilon_{n+1}$ vstavimo v enačbo (8), upoštevamo, da je par $(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_i)$ vzajemen za krajšanje, in dobimo

$$\begin{aligned} &f(x_1+\varepsilon_1, \ldots, x_n+\varepsilon_n, x_{n+1}+\varepsilon_{n+1}) = \\ &\qquad f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n+1} f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\varepsilon_i. \end{aligned}$$

□

Spoznajmo še razširjeno različico načela mikrokrajšanja v $\mathcal{R}^n$.

**Trditev 4.7.** *Naj bo* $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{R}^n$ *in naj za vsako mikrosmer* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \in \Delta_n$ *velja* $\sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i = 0$. *Tedaj za vsak* $i = 1, 2, \ldots, n$ *velja* $a_i = 0$.

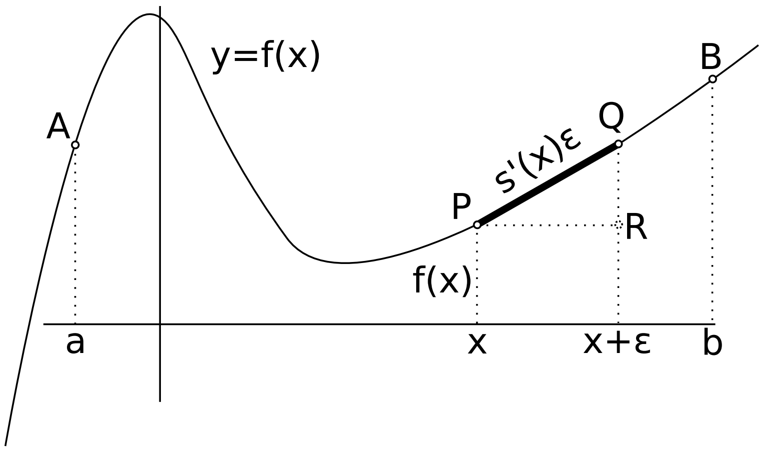
*Dokaz.* Dokazujemo z indukcijo na $n$. Za $n = 1$ že poznamo načelo mikrokrajšanja. Pri $n = 2$ vzamemo par $(\varepsilon, -\varepsilon)$, ki je očitno vzajemen za krajšanje. Tedaj velja $0 = a_1\varepsilon + a_2(-\varepsilon) = (a_1 - a_2)\varepsilon$, od koder po mikrokrajšanju dobimo $a_1 = a_2$. Ko vzamemo par $(\varepsilon, \varepsilon)$, dobimo $2a_1\varepsilon = 0$ oziroma po mikrokrajšanju $2a_1 = 0$. Torej velja $a_2 = a_1 = 0$. Privzemimo, da za $n \geq 2$ trditev že velja. Naj za vsako mikrosmer $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n+1}) \in \Delta_{n+1}$ velja $\sum_{i=1}^{n+1} a_i\varepsilon_i = 0$. Če vzamemo $\varepsilon_{n+1} = -\varepsilon_n$, imamo $\sum_{i=1}^{n-1} a_i\varepsilon_i + (a_n - a_{n+1})\varepsilon_n = 0$, kjer uporabimo indukcijsko predpostavko, in dobimo $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a_n - a_{n+1} = 0$ oziroma $a_n = a_{n+1}$. Na način kot v primeru za $n = 2$ pokažemo še $a_n = a_{n+1} = 0$. $\square$

## 5. Uporaba v geometriji

V tem poglavju si bomo ogledali tipično uporabo integrala in sicer za določanje dolžine loka, ploščine lika, prostornine in površine vrtenine.

Formule bomo izpeljali po standardnem postopku, kjer bomo privzeli obstoj gladke funkcije, kateri bomo z uporabo geometrije določili odvod. Po aksiomu integracije bo tedaj obstajala taka gladka funkcija, katero v praktičnih zgledih določimo preko načela konstantne preslikave. Pri izpeljavi se bomo tudi sklicevali na aksiom mikroafinosti in načelo mikrokrajšanja.

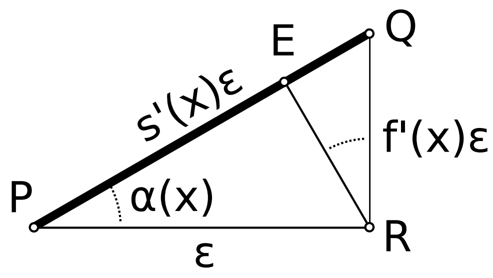
5.1. **Dolžina loka.** Naj funkcija $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ določa krivuljo in naj točki $A$ in $B$ na krivulji z abcisama $a$ in $b$ določata lok, ki mu želimo izmeriti dolžino.




Slika 3. Lok $PQ$

Naj bo $s(x)$ dolžina loka od točke $A$ do poljubne točke $P$ z abciso $x$. Očitno je $s(a) = 0$ in $s(b)$ iskana vrednost. Sedaj vzemimo sosednjo točko $Q$ z abciso $x + \varepsilon$, kjer je $\varepsilon \in \Delta$ poljubna mikrokoličina. Lok $PQ$ je po aksiomu mikroafinosti raven in dolžine $s(x + \varepsilon) - s(x)$, kar je po temeljni enačbi odvoda enako $s'(x)\varepsilon$.

Na sliki 4 si poglejmo pravokotni trikotnik $PQR$, saj želimo izraziti dolžino stranice $PQ$ s preostalimi stranicami. Če uporabimo Pitagorov izrek, dobimo $s'(x)^2\varepsilon^2 = \varepsilon^2 + f'(x)^2\varepsilon^2$ oziroma $0 = 0$, zato moramo pristopiti drugače. Naj bo $\alpha(x)$ velikost




SLIKA 4. Trikotnik $PQR$

kota $QPR$, načrtamo višino iz stranice $PQ$ na točko $R$ ter označimo nožišče z $E$. Tedaj lahko dolžino daljice $ER$ zapišemo na dva načina in dobimo enakost

$$f'(x)\varepsilon\cos(\alpha(x)) = \varepsilon\sin(\alpha(x)).$$

Iz slike 4 je razvidno, da velja tudi

$$s'(x)\varepsilon\cos(\alpha(x)) = \varepsilon.$$

Obe enakosti mikrokrajšamo in dobimo

$$\begin{aligned} f'(x)\cos(\alpha(x)) &= \sin(\alpha(x)) \\ s'(x)\cos(\alpha(x)) &= 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Kvadrirajmo zadnjo enačbo in pišimo

$$\begin{aligned} s'(x)^2\cos(\alpha(x))^2 = 1 = \sin(\alpha(x))^2 + \cos(\alpha(x))^2 = \\ \overset{(9)}{=} f'(x)^2\cos(\alpha(x))^2 + \cos(\alpha(x))^2 = (1 + f'(x)^2)\cos(\alpha(x))^2. \end{aligned}$$

Ker je $\cos(\alpha(x))^2 = (1 + f'(x)^2)^{-1} \neq 0$, krajšamo in korenimo, tedaj velja

$$s'(x) = (1 + f'(x)^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Za zgled določimo obseg kroga oziroma dolžino krožnice, ki je podana kot $x(\varphi) = r\cos(\varphi)$ in $y(\varphi) = r\sin(\varphi)$, kjer je $r$ polmer in $\varphi$ velikost kota, ki pripada intervalu $[0, 2\pi]$, kjer je $\pi$ velikost iztegnjenega kota. Ker je krožnica podana parametrično, definirajmo funkcijo dolžine $d$ kot $d(\varphi) = s(x(\varphi))$ in zvezo $y(\varphi) = f(x(\varphi))$. Ko ju odvajamo, dobimo $d'(\varphi) = s'(x(\varphi))x'(\varphi)$ in $y'(\varphi) = f'(x(\varphi))x'(\varphi)$ ter pišimo

$$\begin{aligned} d'(\varphi)^2 &= s'(x(\varphi))^2x'(\varphi)^2 \overset{(10)}{=} (1 + f'(x(\varphi))^2)x'(\varphi)^2 = \\ &= x'(\varphi)^2 + f'(x(\varphi))^2x'(\varphi)^2 = x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2, \end{aligned}$$

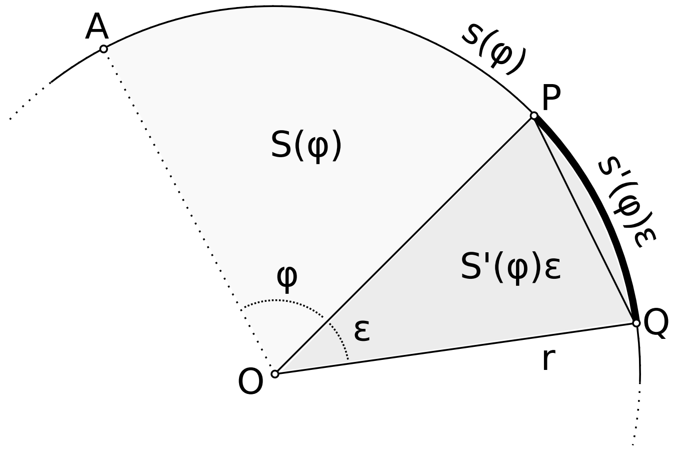
kar po korenjenju postane

$$d'(\varphi) = (x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{11}$$

Ko v enačbo (11) vstavimo podatka $x'(\varphi) = -r\sin(\varphi)$ in $y'(\varphi) = r\cos(\varphi)$, dobimo $d'(\varphi) = r$, ki je definirana na intervalu $[0, 2\pi]$. Po aksiomu integracije obstaja enolična funkcija $g : [0, 2\pi] \to \mathcal{R}$, da velja $g' = d'$ in $g(0) = 0$. Torej je $g'(\varphi) = d'(\varphi) = r = r(\varphi)' = (r\varphi)'$. Po načelu konstantne preslikave sledi $g(\varphi) = d(\varphi) = r\varphi$, saj je $g(0) = 0$ in $d(0) = 0$. Če za $\varphi$ vzamemo $2\pi$, dobimo za dolžino krožnice $2\pi r$.

5.2. **Ploščina območja.** Nadaljujmo z zgledom, kjer izračunamo ploščino kroga v ravnini s polmerom $r$ brez uporabe integrala. Naloge se lotimo z uporabo Keplerjeve metode, kjer krog razdelimo na poljubno mnogo enakokrakih trikotnikov z vrhom v središču kroga.

Klasično se naloga nadaljuje tako, da z $N$ označimo število trikotnikov in z $\alpha$ velikost polovičnega kota v vrhu vsakega trikotnika. Zlahka se prepričamo, da je $\alpha = \frac{2\pi}{2N}$. Naj bo $P$ ploščina vsakega trikotnika, ki znaša $\sin(\alpha)\cos(\alpha)r^2$. Nato povečujemo število trikotnikov in ko pošljemo $N$ proti neskončno dobimo ploščino $\pi\sin(\frac{\pi}{N})/(\pi/N)\cos(\frac{2\pi}{2N})r^2$, kjer upoštevamo netrivialno enakost $\lim_{x\to 0}\sin(x)/x = 1$. Ker še ne vemo, če trikotniki pokrijejo celoten krog, moramo oceniti ostanek, ki znaša $N\sin(\alpha)\cos(\alpha)r^2(1-\frac{1}{\cos(\alpha)}) \overset{N\to\infty}{\to} 0$. Ker naša načela ne poznajo pojma neskončno, moramo začeti drugače.




Slika 5. Sprememba ploščine

Naj bo $S(\varphi)$ ploščina območja od središča $O$ do krožnice med kotoma 0 in $\varphi$, kjer pripada kót 0 poljubno izbrani točki $A$ in kjer je $\varphi \in [0, 2\pi]$. Očitno velja $S(0) = 0$, saj se takrat kota ujemata. Denimo, da že poznamo $S(\varphi)$ za nek kót $\varphi$, ki mu pripada lok $AP$ dolžine $s(\varphi)$. Naj bo $Q$ točka na krožnici, ki pripada kotu $\varphi+\varepsilon$, kjer je $\varepsilon \in \Delta$. Ob premiku iz točke $P$ v točko $Q$ se ploščina območja spremeni za

$$S(\varphi+\varepsilon) - S(\varphi) = S'(\varphi)\varepsilon. \tag{12}$$

Tudi tokrat je lok $PQ$ raven in dolžine $s'(\varphi)\varepsilon$. Torej je ploščina spremenjenega območja enaka ploščini trikotnika $OPQ$, ki znaša

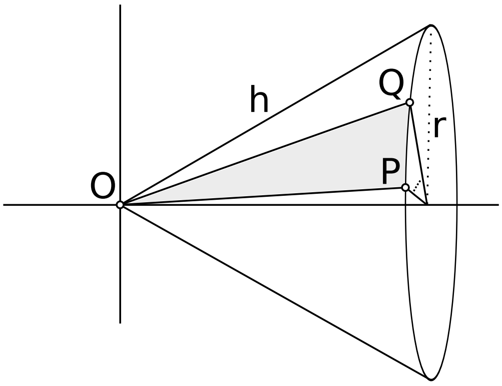
$$\frac{1}{2}\cos(\frac{\varepsilon}{2})rs'(\varphi)\varepsilon. \tag{13}$$

Po upoštevanju $\cos(\varepsilon/2) = 1$ dobimo iz enačb (12) in (13) po mikrokrajšanju zvezo

$$S'(\varphi) = \frac{1}{2}rs'(\varphi).$$

Iz prejšne naloge vemo, da za obseg kroga velja $d'(\varphi) = r$ oziroma $s'(\varphi) = r$, od koder tudi povzamemo sklep in dobimo $S(\varphi) = \frac{1}{2}r^2\varphi$. Če vzamemo $\varphi = 2\pi$, dobimo ploščino celotnega kroga $\pi r^2$.

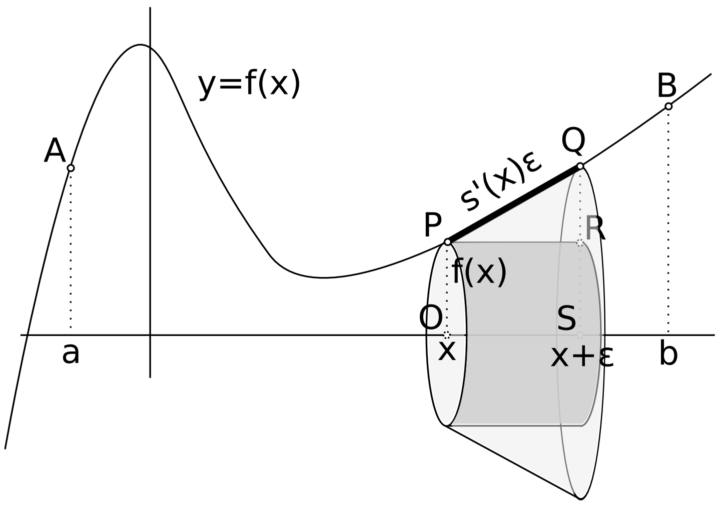
Enako idejo uporabimo tudi za določitev površine plašča stožca s polmerom osnovne ploskve $r$ in dolžino naklona $h$, kjer imajo trikotniki ploščino $\frac{1}{2}\cos(\frac{\varepsilon}{2})hs'(\varphi)\varepsilon$. Tedaj dobimo $S(\varphi) = \frac{1}{2}hr\varphi$.




SLIKA 6. Sprememba površine na plašču stožca

Če imamo sedaj poljubno funkcijo $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, ki določa krivuljo, nam fundamentalni izrek analize zagotovi, da je integral funkcije $f$ enak ploščini območja pod krivuljo do $x$-osi.

5.3. **Prostornina vrtenine.** Vrtenina je telo, ki ga dobimo z vrtenjem krivulje okoli $x$-osi. Če prerežemo vrtenino z ravnino pravokotno na $x$-os, dobimo krog.




SLIKA 7. Vrtenina

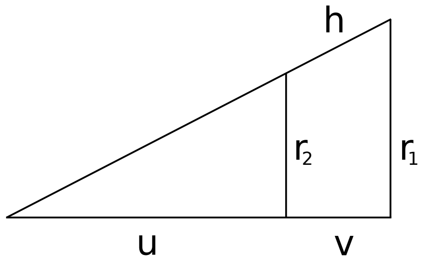
Naj funkcija $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ določa krivuljo. Naj točki $A$ in $B$ na krivulji z abcisama $a$ in $b$ določata ravnini pravokotni na $x$-os, med katerimi je kos vrtenine, ki mu želimo določiti prostornino. Naj bo $V(x)$ prostornina vrtenine od točke $A$ do poljubne točke $P$ z abciso $x$. Če vzamemo sosednjo točko $Q$ z abciso $x + \varepsilon$, kjer je $\varepsilon \in \Delta$, je sprememba prostornine enaka $V'(x)\varepsilon$ in enaka vsoti prostornin zavrtenega trikotnika $PQR$ in zavrtenega pravokotnika $OPRS$.
Ker je ploščina trikotnika $PQR$ enaka $\frac{1}{2}\varepsilon f'(x)\varepsilon = 0$, je prostornina poljubnega telesa, ki ga dobimo z vrtenjem tega trikotnika, enaka 0. Torej nam ostane le še valj s polmerom $f(x)$ in višino $\varepsilon$. Po mikrokrajšanju dobimo

$$V'(x) = \pi f(x)^2.$$

Ker je $V(a) = 0$, lahko prostornino vrtenine zapišemo z nedoločenim integralom

$$V(x) = \pi \int_a^x f(t)^2 \, \mathrm{d}t.$$

5.4. **Površina vrtenine.** V izpeljavi bomo potrebovali površino prisekanega stožca.




Slika 8. Podobna trikotnika

Iz podobnih trikotnikov na sliki 8 dobimo enakost $(u+v)r_2 = ur_1$. Tedaj za površino prisekanega stožca velja $S = S(u+v) - S(u) = \pi(r_1\sqrt{(u+v)^2 + r_1^2} - r_2\sqrt{u^2 + r_2^2}) = \pi\sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2}(r_1 + r_2) = \pi h(r_1 + r_2)$, kjer je $h$ dolžina naklona.

Naj funkcija $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ določa krivuljo. Naj točki $A$ in $B$ na krivulji z abcisama $a$ in $b$ določata kos vrtenine, kateri želimo izmeriti površino. Naj bo $S(x)$ površina, ki jo opiše graf funkcije $f$ od točke $A$ do poljubne točke $P$ z abciso $x$, ko ga zvrtimo okrog $x$-osi. Naj bo $Q$ sosednja točka na krivulji z abciso $x + \varepsilon$, kjer je $\varepsilon \in \Delta$. Tedaj je sprememba površine po eni strani enaka $S'(x)\varepsilon$ in po drugi površini prisekanega stožca, ki znaša

$$\pi(f(x+\varepsilon) + f(x))s'(x)\varepsilon = \pi(2f(x) + f'(x)\varepsilon)s'(x)\varepsilon = 2\pi f(x)s'(x)\varepsilon.$$

Po mikrokrajšanju zamenjamo $s'(x)$ s formulo (10) in dobimo

$$S(x) = 2\pi \int_a^x f(x)(1 + f'(x)^2)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

## 6. Uporaba v fiziki

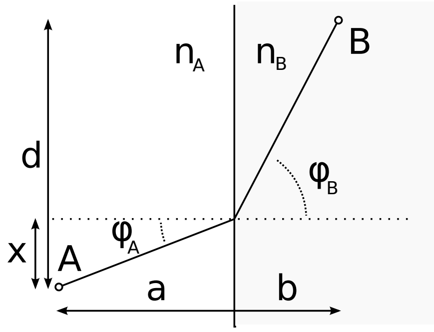
V naslednjih razdelkih bomo pogledali, kako lahko s pomočjo infinitezimalne analize izpeljemo lomni zakon, enačbo verižnice ter znani parcialni diferencialni enačbi.

6.1. **Lomni zakon.** Iz Fermatovega načela, ki pravi, da svetloba potuje od ene do druge točke po poti, za katero porabi najmanj časa, bomo izpeljali lomni zakon, ki povezuje vstopni in izstopni kót svetlobnega žarka ob prehodu čez mejo med homogenima snovema z različnima lomnima količnikoma.

Brez škode za splošnost privzemimo, da je meja vzporedna z $y$-osjo. Naj svetlobni žarek začne svojo pot v poljubni točki $A$, ki je za $a$ oddaljena levo od meje, in jo konča v poljubni točki $B$, ki je za $b$ oddaljena desno od meje in naj bo njuna razdalja v smeri $y$-osi enaka $d$. Naj bosta $\varphi_A$ in $\varphi_B$ vstopni in izstopni kót glede na normalo meje in naj $x \in [0, d]$ označuje točko preloma – prehoda meje.

Tedaj je razdalja od točke $A$ do točke preloma po Pitagorovem izreku enaka $s_A = \sqrt{a^2 + x^2}$ in od točke $B$ enaka $s_B = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$.
Z upoštevanjem enačb $v = c/n$ in $v = s/t$ dobimo čas potovanja

$$t(x) = \frac{1}{c}(n_A s_A + n_B s_B) = \frac{1}{c}(n_A\sqrt{a^2 + x^2} + n_B\sqrt{b^2 + (d-x)^2}), \tag{14}$$




SLIKA 9. Lom svetlobnega žarka

kjer sta $n_A$ in $n_B$ lomna količnika in $c$ hitrost svetlobe.

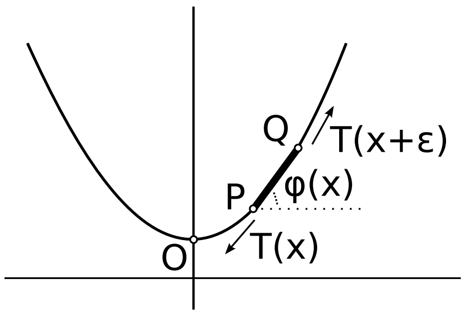
Sedaj iščemo točko $x_0 \in [0, d]$, v kateri doseže funkcija $t$ lokalni minimum. Funkcija $t$ doseže lokalni minimum v točki $x_0$, če obstaja kakšna okolica točke $x_0$, kjer za vsak $x$ iz te okolice velja $t(x_0) \leq t(x)$, vendar vemo, da vedno obstaja okolica, kjer je funkcija $t$ linearna. Torej mora biti funkcija $t$ konstanta na neki okolici, kar pomeni, da mora biti točka $x_0$ stacionarna točka. Po izreku 3.17 zadošča odvajati enačbo (14) in poiskati ničle.

$$t'(x) = \frac{1}{c}\left(n_A \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} + n_B \frac{-(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}\right) =$$
$$= \frac{1}{c}(n_A \sin(\varphi_A) - n_B \sin(\varphi_B)) = 0$$

Ko zadnji izraz preuredimo, dobimo lomni zakon

$$n_A \sin(\varphi_A) = n_B \sin(\varphi_B).$$

6.2. **Verižnica.** Poiskali bomo funkcijo, katere graf se ujema z neraztezljivo homogeno vrvjo, ki je obešena na točki $A$ in $B$ ter ima maso $w$ na enoto dolžine.




SLIKA 10. Verižnica

Naj bo $T(x)$ napetost vrvi v točki $P = (x, f(x))$. Ker vleče napetost točko z obeh strani vrvi in želimo ravnovesje, morata biti napetosti na vsaki strani točke enako veliki. Naj bo $\varphi(x)$ kót med tangento na $f$ v točki $x$ in $x$-osjo. Vrv postavimo tako, da velja $\varphi(0) = 0$, kar pomeni, da je najnižja točka $O$ nad izhodiščem oziroma da je graf simetričen glede na $y$-os. Naj bo $s(x)$ dolžina vrvi oziroma dolžina loka od točke $O$ do točke $P$.

Vzemimo mikrosegment vrvi od točke P do točke Q z abciso $x + \varepsilon$, kjer je $\varepsilon \in \Delta$. Tedaj delujejo na ta mikrosegment, dolžine $s(x+\varepsilon) - s(x) = s'(x)\varepsilon$, tri sile:

(1) napetost velikosti $T(x)$ v smeri $\varphi(x) + \pi$,
(2) napetost velikosti $T(x+\varepsilon)$ v smeri $\varphi(x+\varepsilon)$ in
(3) sila teže velikosti $ws'(x)\varepsilon$ v smeri $-\pi/2$.

Ker mikrosegment miruje in nima pospeška, velja za vodoravno komponento sile

$$\begin{aligned} 0 &= T(x+\varepsilon)\cos(\varphi(x+\varepsilon)) + T(x)\cos(\varphi(x)+\pi) = \\ &= (T(x) + T'(x)\varepsilon)\cos(\varphi(x) + \varphi'(x)\varepsilon) - T(x)\cos(\varphi(x)) = \\ &= (T'(x)\cos(\varphi(x)) - T(x)\sin(\varphi(x))\varphi'(x))\varepsilon = \\ &= (T(x)\cos(\varphi(x)))'\varepsilon. \end{aligned}$$

Po mikrokrajšanju in načelu konstantne preslikave obstaja $T_0 \in \mathcal{R}$, da je

$$T(x)\cos(\varphi(x)) = T_0. \tag{15}$$

Prav tako za navpično komponento velja

$$\begin{aligned} 0 &= T(x+\varepsilon)\sin(\varphi(\varphi(x+\varepsilon) + T(x)\sin(\varphi(x)+\pi) + ws'(x)\varepsilon\sin(-\pi/2) = \\ &= (T(x) + T'(x)\varepsilon)\sin(\varphi(x) + \varphi'(x)\varepsilon) - T(x)\sin(\varphi(x)) - ws'(x)\varepsilon = \\ &= (T'(x)\sin(\varphi(x)) + T(x)\cos(\varphi(x))\varphi'(x) - ws'(x))\varepsilon = \\ &= ((T(x)\sin(\varphi(x)))' - ws'(x))\varepsilon. \end{aligned}$$

Po enakem sklepu kot zgoraj in ob upoštevanju $\varphi(0) = 0$ dobimo

$$T(x)\sin(\varphi(x)) = ws(x). \tag{16}$$

Ko enakost $ws(x) \overset{(16)}{=} T(x)\sin(\varphi(x)) \overset{(9)}{=} T(x)f'(x)\cos(\varphi(x)) \overset{(15)}{=} T_0 f'(x)$ odvajamo in ko upoštevamo (10), dobimo diferencialno enačbo

$$(1 + f'(x)^2)^{\frac{1}{2}} = af''(x), \tag{17}$$

kjer je $a = T_0/w$.

V infinitezimalni analizi se simbolno reševanje diferencialnih enačb ne razlikuje od reševanja v klasični analizi, saj nimamo opravka niti z infinitezimali niti z limitami. Naj funkcija $u : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ reši diferencialno enačbo (17) in odvajajmo funkcijo $h(x) = u'(x) + (1 + u'(x)^2)^{\frac{1}{2}}$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= u''(1 + u'(1 + u'(x)^2)^{-\frac{1}{2}}) \overset{(17)}{=} (1 + u'(x)^2)^{\frac{1}{2}}/a(1 + u'(1 + u'(x)^2)^{-\frac{1}{2}}) = \\ &= ((1 + u'(x)^2)^{\frac{1}{2}} + u')/a = h(x)/a \end{aligned}$$

Ker smo predpostavili $\varphi(0) = 0$, sledi iz enakosti (9) in po lastnosti (3), da je $u'(0) = 0$, zato po trditvi 3.15 velja $h(x) = \exp(x/a)$. Ko upoštevamo $\exp(-x/a) = 1/\exp(x/a) = -u' + (1 + u'(x)^2)^{\frac{1}{2}}$, lahko izrazimo

$$u'(x) = \frac{1}{2}(\exp(x/a) - \exp(-x/a)),$$

kar integriramo in dobimo

$$u(x) = \frac{1}{2}a(\exp(x/a) + \exp(-x/a)) + c,$$

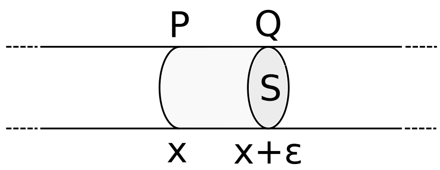
kjer je točka $c \in \mathcal{R}$ poljubna. Opazimo, da nikjer nismo upoštevali nosilnih točk, zato je rešitev definirana na $\mathcal{R}$.

6.3. **Toplotna enačba.** Izpeljali bomo toplotno enačbo, ki opisuje pretok toplotne energije in z njo povezano spremembo temperature v idealni, dolgi palici, s predpostavko, da toplotna energija niti ne vstopi niti ne zapusti palice in da se toplotna energija niti ne ustvari niti ne uniči (na primer s kemičnimi reakcijami) v notranjosti palice, za eno prostorsko razsežnost.

Pri izpeljavi privzemimo veljavnost sledečih dveh fizikalnih zakonov:

(1) Količina toplote, ki je potrebna za povišanje temperature telesa za $\delta T$ stopinj je $cm\delta T$, kjer je $m$ masa telesa in $c$ pozitivna konstanta, ki je odvisna od snovi v telesu in ki se imenuje specifična toplota telesa.
(2) Toplotni tok je premosorazmeren s površino in temperaturnim gradientom na površini. Konstanta sorazmernosti $\kappa$ se imenuje toplotna prevodnost. (Fourierov zakon ali zakon o prevajanju toplote)

Naj bo $T(x,t)$ temperatura v točki $P$ z abciso $x$ v času $t$. Vzemimo mikrosegment palice od točke $P$ do točke $Q$ z abciso $x+\varepsilon$, kjer je $\varepsilon \in \Delta$, s konstantnim prečnim prerezom $S$, gostoto $\rho$ in maso $\rho S \varepsilon$.




Slika 11. Mikrosegment palice

Ker v zakonih predznaki niso predpisani, se pretvarjamo, da se temperatura zvišuje od točke $P$ proti točki $Q$, kjer je temperaturni gradient enak $T_x(x+\varepsilon,t)$ in kjer je toplotni tok skozi $S$ enak $\kappa S T_x(x+\varepsilon,t)$. Podobno dobimo toplotni tok v točki $P$ skozi $S$, ki znaša $\kappa S T_x(x,t)$. Ker toplotni tok teče od toplejšega dela k hladnejšemu, toplota vstopi v mikrosegmet pri točki $Q$ in ga zapusti pri točki $P$. Torej je v poljubnem časovnem obdobju $\zeta \in \Delta$ količina toplote, ki vstopi v mikrosegment, enaka razliki med količino, ki vstopi v točki $Q$, in količino, ki zapusti v točki $P$, kar znaša

$$\kappa S T_x(x+\varepsilon,t)\zeta - \kappa S T_x(x,t)\zeta = \kappa S T_{xx}(x,t)\varepsilon\zeta.$$

V istem časovnem obdobju se temperatura mikrosegmenta spremeni za

$$T_{\frac{1}{2}}(t+\zeta) - T_{\frac{1}{2}}(t) = (T_t(x,t) + T_{xt}(x,t)\varepsilon)\zeta,$$

kjer je $T_{\frac{1}{2}}(t) = \frac{1}{2}(T(x+\varepsilon,t) + T(x,t))$ povprečna temperatura mikrosegmenta. Po prvem fizikalnem zakonu je potrebna količina toplote za povišanje temperature za $(T_t(x,t) + T_{xt}(x,t)\varepsilon)\zeta$ enaka $c\rho S\varepsilon T_t(x,t)\zeta$. Ker smo predpostavili ohranjanje energije, mora biti to enako količini toplote, ki vstopi v mikrosegment v času $\zeta$. Ko enačbo

$$c\rho S\varepsilon T_t(x,t)\zeta = \kappa S T_{xx}(x,t)\varepsilon\zeta$$

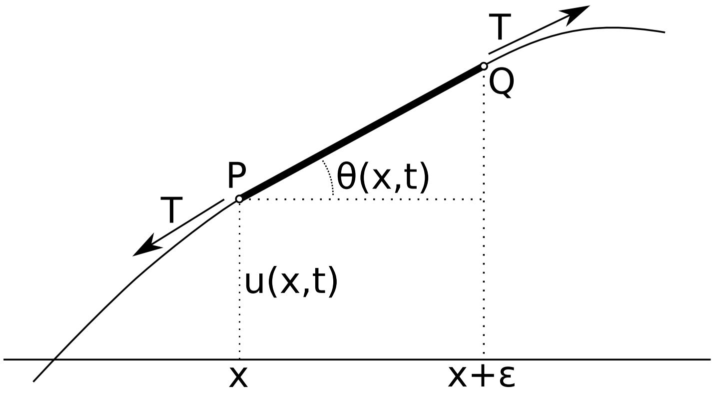
dvakrat mikrokrajšamo, dobimo toplotno enačbo

$$T_t(x,t) = \alpha T_{xx}(x,t),$$

kjer je $\alpha = \frac{\kappa}{c\rho}$ toplotna difuzivnost.

6.4. **Valovna enačba.** S pomočjo Newtonovega zakona bomo izpeljali valovno enačbo za transferzalno valovanje napete strune z majhno amplitudo. Pri tem bomo predpostavili, da sta napetost velikosti $T$ in gostota $\rho$ konstantni na celotni dolžini strune ter neodvisni od časa.

Naj bo $u(x,t)$ navpični odmik strune od $x$-osi, ki predstavlja ravnovesno lego, in naj bo $\theta(x,t)$ kót med struno in $x$-osjo v točki $P$ z abciso $x$ ob času $t$. Vzemimo mikrosegment strune od točke $P$ do točke $Q$ z abciso $x+\varepsilon$ za $\varepsilon \in \Delta$. Po (10) je dolžina mikrosegmenta enaka $(1+u_x(x,t)^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon$. Sili, ki delujeta na mikrosegment v




Slika 12. Mikrosegment strune

času $t$, sta napetost, ki v točki $P$ vleče na levo in prijemlje pod kotom $\theta(x,t)$, in napetost, ki v točki $Q$ vleče na desno pod kotom $\theta(x+\varepsilon,t)$. Njihova projekcija v smeri $y$-osi je

$$F_y = T\sin(\theta(x+\varepsilon,t)) - T\sin(\theta(x,t)) = T\cos(\theta(x,t))\theta_x(x,t)\varepsilon.$$

Po drugem Newtonovem zakonu enačimo silo $F_y$ s produktom pospeška $u_{tt}(x,t)$ in mase $\rho(1+u_x(x,t)^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon$

$$\rho(1+u_x(x,t)^2)^{\frac{1}{2}}u_{tt}(x,t)\varepsilon = T\cos(\theta(x,t))\theta_x(x,t)\varepsilon.$$

Ker je $\varepsilon$ poljuben, ga mikrokrajšamo, kar nam da

$$\rho(1+u_x(x,t)^2)^{\frac{1}{2}}u_{tt}(x,t) = T\cos(\theta(x,t))\theta_x(x,t). \tag{18}$$

Spomnimo se enakosti, ki povezuje sinus in kosinus

$$\sin(\theta(x,t)) = u_x(x,t)\cos(\theta(x,t)). \tag{19}$$

Ko jo odvajamo po $x$, dobimo

$$\cos(\theta(x,t))\theta_x(x,t) = u_{xx}(x,t)\cos(\theta(x,t)) - u_x(x,t)\sin(\theta(x,t))\theta_x(x,t),$$

kamor vstavimo (19). Po krajšanju s $\cos(\theta(x,t))$ in po preureditvi členov dobimo

$$\theta_x(x,t)(1+u_x(x,t)^2) = u_{xx}(x,t). \tag{20}$$

Ko v enačbi (18) upoštevamo (20) in $\cos(\theta(x,t)) = 1/(1+u_x(x,t)^2)^{\frac{1}{2}}$, dobimo

$$(1+u_x(x,t)^2)^2 u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t),$$

kjer je $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$. Ker je amplituda valovanja majhna, lahko predpostavimo, da je $u_x(x,t)^2 = 0$. V tem primeru zadnja enačba postane znamenita valovna enačba

$$u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t).$$

## Literatura


[1] J.L. Bell, *A Primer of Infinitesimal Analysis*, Cambridge University Press, New York 1998.

[2] J. Moschovakis, Intuitionistic Logic, v: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, dostopno na `http://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/`, september 2010.

[3] A. Kock, *Synthetic Differential Geometry*, Cambridge University Press, London 2006.

[4] J. Strnad, Lom in odboj, v: *Fizika. Del 2*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1978, 469–471.

[5] R. Kladnik, Prevajanje toplote, v: *Osnove fizike : za tehnike. Del 1*, Državna založba Slovenije, Ljubljana 1969, 222–224.

[6] V.S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Mir, Moskva 1984.