UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Miha Emerik Habič

Adjungirani funktorji

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Andrej Bauer

Ljubljana, 2010

Kazalo

1. Uvod 4
2. Osnove teorije kategorij 4
2.1. Osnovni pojmi 4
2.2. Univerzalne puščice 7
2.3. Limite 9
3. Adjungirani funktorji 11
3.1. Prvi primer in definicija 11
3.2. Alternativne definicije 13
3.3. Primeri adjunkcij 16
4. Lastnosti in eksistenca adjungiranih funktorjev 19
4.1. Izrek o zveznosti 19
4.2. Freydov izrek o adjungiranih funktorjih 21
4.3. Posebni izrek o adjungiranih funktorjih 25
Literatura 31

Povzetek

Adjungirani funktorji niso tako poznani kot bi si morda zaslužili. Srečamo jih na najrazličnejših mestih: kot skupno točko kategoričnih limit (ki že same nosijo veliko težo kot produkti, disjunktne unije, množice rešitev enačb, zlepki topoloških prostorov ipd.), v konstrukcijah prostih algebraičnih struktur, kot kompaktifikacije itd. V nalogi bomo predstavili pojem adjungiranih funktorjev, si ogledali njihove najpomembnejše lastnosti in jih z njimi karakterizirali. Ogledali si bomo primere adjungiranih funktorjev na različnih področjih. Predstavili bomo odnos adjungiranih funktorjev do kategoričnih limit. Izpeljali bomo Freydov in posebni izrek o adjungiranih funktorjih kot klasična eksistenčna izreka za adjungirane funktorje.

Abstract

Adjoint functors are not as well known as they deserve to be. They can be found in the most diverse places: as a common point for categorical limits (which by themselves carry a lot of weight as products, disjoint unions, sets of solutions to equations, adjunction spaces,...), in constructions of free algebraic structures, as compactifications etc. In this thesis, we present the notion of adjoint functors, examine their most important properties and characterize them. We present various examples of adjoint functors in different areas. We investigate the relationship of adjoint functors and categorical limits. We also formulate the Freyd and special adjoint functor theorems as classical existence theorems for adjoint functors.

Math. Subj. Class. (2010): 18A40
Ključne besede: adjungirani funktorji, adjunkcija, izrek o zveznosti, Freydov izrek o adjungiranih funktorjih, posebni izrek o adjungiranih funktorjih
Keywords: adjoint functors, adjunction, RAPL, adjoint functor theorem, special adjoint functor theorem

1. Uvod

Write an essay on the usefulness, or the uselessness, of the Adjoint Functor Theorems.

–Peter Johnstone, University of Cambridge

Teorija kategorij je skozi svoj razvoj v zadnjih šestdesetih letih prinesla v matematiko povsem nov pogled na vse vrste različnih problemov v povsem ločenih vejah matematike. Zaradi teh bolj ali manj očitnih posplošitev in poenotenj se naravno pojavi želja po večji abstrakciji z namenom, da bi jih našli še več. V tem duhu so se osnovnim pojmom kategorije, funktorja in naravne transformacije iz začetnega dela MacLanea in Eilenberga pridružili še drugi, ki posplošujejo in povezujejo na videz konceptualno povsem nesorodne ideje, objekte in konstrukcije. Pojem adjungiranih funktorjev je vpeljal Daniel Kan leta 1958 za računske namene v homološki algebri. Ideja se je potem razširila skozi dela Grothendiecka, Freyda in drugih ter sedaj zaseda temeljno mesto v teoriji kategorij in drugod.

V prvem delu te naloge se bomo posvetili definiciji adjungiranih funktorjev, izpeljavi raznih podatkov, ki že sami po sebi določajo adjunkcijo, in primerom adjungiranih funktorjih, ki jih srečamo v "vsakdanjem življenju". Drugi del je posvečen preučevanju interakcije med adjungiranimi funktorji in kategoričnimi limitami. V povezavi s tem bomo predstavili tudi klasična eksistenčna izreka, ki pod nekimi zahtevami na kategorijo in funktor, zagotavljata obstoj temu adjungiranega funktorja.

2. Osnove teorije kategorij

2.1. Osnovni pojmi.

Ponovimo najprej nekaj začetnih pojmov iz teorije kategorij.

Definicija 2.1. Kategorija C *je podana z razredom* $\mathrm{Obj}(C)$ objektov *in razredom* $\mathrm{Arr}(C)$ puščic *ali* morfizmov. *Za vsak par objektov* $a, b \in \mathrm{Obj}(C)$ *je dan razred* $C(a,b) \subseteq \mathrm{Arr}(C)$ puščic iz a v b. *Za puščico* $f \in C(a,b)$ *sta objekt* a domena *in objekt* b kodomena.

Za vsak par puščic $f \in C(a,b)$ *in* $g \in C(b,c)$ *obstaja puščica* $g \circ f = gf \in C(a,c)$, kompozitum g *in* f, *kjer velja:*

asociativnost: *za vsako puščico* $h \in C(c,d)$ *velja* $(hg)f = h(gf)$

identiteta: *za vsak objekt* $a \in \mathrm{Obj}\,(C)$ *obstaja* identiteta $\mathrm{id}_a = 1_a \in C(a,a)$, *za katero velja* $f1_a = f$ *in* $1_a g = g$ *za vsaki puščici* $f \in C(a,b)$ *in* $g \in C(b,a)$.

V prihodnje bomo namesto $a \in \mathrm{Obj}(C)$ pisali kar $a \in C$. Razredom $C(a,b)$ pravimo *hom-razredi*, puščice $f \in C(a,b)$ pa bomo pisali $f : a \to b$. Puščica $f \in C(a,b)$ je *obrnljiva* ali *izomorfizem*, če obstaja taka puščica $f' \in C(b,a)$, da velja $ff' = 1_b$ in $f'f = 1_a$. V tem primeru je po klasičnem premisleku puščica f' enolično določena in pišemo $f' = f^{-1}$. Če obstaja obrnljiva puščica $f : c \to c'$, sta objekta c in c' *izomorfna.*

Za kategorijo C sta se uveljavila izraza *majhna kategorija*, če sta $\mathrm{Obj}(C)$ in $\mathrm{Arr}(C)$ množici, in *lokalno majhna kategorija*, če je za vsak par $a, b \in C$ hom-razred $C(a,b)$ množica.

Kot primere kategorij navedimo nekaj standardnih kategorij: kategorija **Set**, katere objekti so množice, puščice pa preslikave; kategorija **Grp**, katere objekti so grupe, puščice pa homomorfizmi grup; kategorija **Top**, katere objekti so topološki prostori, puščice pa zvezne preslikave itd.

Pogost primer je tudi ta: naj bo $(S, \leq)$ delno urejena množica. Množico S lahko obravnavamo kot kategorijo, pri čemer vzamemo za objekte kar elemente S, med objektoma a in b pa obstaja puščica natanko takrat, ko je $a \leq b$. Zaradi refleksivnosti obstajajo vse identitetne puščice, zaradi tranzitivnosti pa ustrezni kompozitumi. To je torej res kategorija. Ker med danima objektoma obstaja kvečjemu ena puščica, vsi diagrami v taki kategoriji komutirajo.

Pomemben je tudi pojem *nasprotne kategorije*. Nasprotna kategorija C^{op} kategorije C ima iste objekte kot kategorija C (torej imamo $\mathrm{Obj}(C^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Obj}(C)$), puščice pa so natanko "obrnjene" puščice iz kategorije C. S tem hočemo reči, da imamo bijektivno korespondenco med množicama $\mathrm{Arr}(C)$ in $\mathrm{Arr}(C^{\mathrm{op}})$ oblike $f \in C(c,d) \leftrightarrow f^{\mathrm{op}} \in C^{\mathrm{op}}(d,c)$. Komponiranje je definirano na očiten način s $f^{\mathrm{op}}g^{\mathrm{op}} = (gf)^{\mathrm{op}}$. Z nasprotnimi kategorijami interpretiramo *princip dualnosti*. Ta pravi, da je dana izjava resnična v kategoriji C če in samo če je ustrezna dualna izjava resnična v nasprotni kategoriji C^{op}. Pri tem dualno izjavo iz originalne izjave dobimo tako, da zamenjamo domeno in kodomeno vseh puščic, ki nastopajo v izjavi, in obrnemo vrstni red vseh kompozitumov. V dualni izjavi so torej vse puščice obrnjene. Dualnost lahko apliciramo na trditve, definicije, konstrukcije ipd. Posledica tega je, da z dokazom vsake trditve pridobimo dokaz dualne trditve takorekoč "zastonj".

Definirali smo kategorije, toda v matematiki nikoli nismo zadovoljni le z nekim objektom. Samoumevno je, da ga spremlja tudi pojem preslikave, ki ohranja opazovano strukturo.

Definicija 2.2. *Naj bosta C in D kategoriji.* Funktor $F : C \to D$ *je sestavljen iz objektne funkcije, ki vsakemu objektu $c \in C$ priredi objekt $Fc \in C$, in puščične funkcije, ki vsaki puščici $f : c \to c'$ v kategoriji C priredi tako puščico $Ff : Fc \to Fc'$ v kategoriji D, da velja $F(1_c) = 1_{Fc}$ in $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$, kadar je kompozitum $g \circ f$ definiran.*

Klasični primer funktorja je funktor potenčne množice $P : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, ki vsaki množici X priredi njeno potenčno množico PX, vsaki preslikavi $f : X \to Y$ pa preslikavo $Pf : PX \to PY$, ki množico $A \subseteq X$ preslika v množico $f(A) \subseteq Y$.

Naša definicija zaenkrat omogoča le funktorje ene spremenljivke. Ker bomo v nadaljevanju potrebovali funktorje več spremenljivk, moramo uvesti konstrukcijo, ki bo služila kot domena takim funktorjem. Za kategoriji C in D, ima *produktna kategorija* $C \times D$ za objekte pare (c,d) objektov iz C in D, za puščice iz (c,d) v (c',d') pa pare (f,g) puščic $f \in C(c,c')$ in $g \in D(d,d')$. Funktorjem, katerih domena je eksplicitno izražena kot produktna kategorija, včasih pravimo *bifunktorji*.

Oglejmo si še zelo pomemben primer t.i. hom-funktorjev. Naj bo C (lokalno majhna) kategorija in $c \in C$. Imamo dva tipa hom-funktorjev ene spremenljivke. Prvi je $C(c,-) : C \to \mathbf{Set}$, ki objekt $c' \in C$ slika v množico $C(c,c')$, puščico $f : d \to d'$ pa v preslikavo $C(c,f)$, "komponiranje z leve s f", ki deluje kot $g \mapsto fg$. Drugi tip pa je $C(-,c) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, ki objekt $c' \in C^{\mathrm{op}}$ slika v množico $C(c',c)$, puščico $f^{\mathrm{op}} : d' \to d$ pa v preslikavo $C(f^{\mathrm{op}},c)$, "komponiranje z desne s f", ki deluje kot $g \mapsto gf$. Ta funktorja lahko združimo v bifunktor $C(-,-) : C^{\mathrm{op}} \times C \to \mathbf{Set}$, ki objekt (c,c') slika v množico $C(c,c')$, puščico $(f^{\mathrm{op}},g) : (d,e) \to (d',e')$ pa v preslikavo $C(f^{\mathrm{op}},g) : C(d,e) \to C(d',e')$, ki deluje kot $h \mapsto ghf$.

Funktorje seveda lahko komponiramo na očiten način.

Glavni cilj prvih začetkov teorije kategorij je bil najti smiseln pojem, ki bi izražal prehajanje med nekakšnimi "prirejanji" objektov nekim drugim objektom (v smislu homologije). Taka prirejanja smo formalizirali kot funktorje, prehode pa si bomo zdaj ogledali.

Definicija 2.3. *Naj bosta F in $G : C \to D$ funktorja.* Naravna transformacija $\tau : F \xrightarrow{\bullet} G$ *je preslikava, ki vsakemu objektu $c \in C$ priredi puščico $\tau_c : Fc \to Gc$ v D, tako da za vsako puščico $f : c \to c'$ v C komutira diagram*

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"] & Fc \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "Ff"'] & Gc \arrow[d, "Gf"] \\ c' & Fc' \arrow[r, "\tau_{c'}"] & Gc' \end{tikzcd}$$

Puščicam τ_c pravimo *komponente* naravne transformacije τ. Včasih bomo v tej situaciji rekli tudi, da je puščica $\tau_c : Fc \to Gc$ *naravna* v c. Če so vse komponente naravne transformacije $\tau : F \xrightarrow{\bullet} G$ obrnljive, ji pravimo *naravni izomorfizem* in označimo $F \cong G$.

Pomembnost naravnih transformacij povzame Saunders MacLane v svoji izjavi: "Kategorije smo izumili, da bi študirali funktorje, funktorje pa smo izumili, da bi študirali naravne transformacije."

Kot primer naravne transformacije si oglejmo odnos med potenčnimi množicami in karakterističnimi funkcijami. Natančneje, imejmo funktorja $P, 2^{-} : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$, kjer je P funktor, ki množici priredi njeno potenčno množico, puščici $f^{\mathrm{op}} : X \to Y$ pa preslikavo, ki množico $A \subseteq X$ preslika v množico $f^{-1}[A]$, z 2^{-} pa smo označili hom-funktor $\mathbf{Set}(-, 2)$. Definirajmo transformacijo $\tau : P \xrightarrow{\bullet} 2^{-}$. Komponenta τ_X naj množico $A \subseteq X$ preslika v karakteristično funkcijo χ_A. Sedaj lahko narišemo diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}"'] & PX \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "Pf^{\mathrm{op}}"'] & 2^X \arrow[d, "2^{f^{\mathrm{op}}}"] \\ Y & PY \arrow[r, "\tau_Y"'] & 2^Y \end{tikzcd}$$

Vzemimo $A \subseteq X$ in preverimo komutativnost diagrama. Poračunamo kompozituma $2^{f^{\mathrm{op}}}(\tau_X(A)) = \chi_A \circ f$ in $\tau_Y(Pf^{\mathrm{op}}(A)) = \chi_{f^{-1}[A]}$. Kratek premislek pokaže, da sta ti dve funkciji res enaki, torej je τ res naravna transformacija. Izkaže se, da je τ v resnici naravni izomorfizem; to je *pravi* razlog, da smemo (in nam uspe) pri delu v matematiki prosto menjavati objekta PX in 2^X.

Imejmo funktorje $F, G, H : C \to D$ in naravni transformaciji $\sigma : F \xrightarrow{\bullet} G$ ter $\tau : G \xrightarrow{\bullet} H$. Ali lahko najdemo naravno transformacijo med F in H? Definirajmo (vertikalni) kompozitum naravnih transformacij, $\tau \cdot \sigma : F \xrightarrow{\bullet} H$, po komponentah s $(\tau \cdot \sigma)_c = \tau_c \circ \sigma_c$. Da preverimo naravnost tako definirane transformacije si oglejmo diagram

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "\sigma_c"] \arrow[dd, bend right, "(\tau\cdot\sigma)_c"'] & Fc' \arrow[d, "\sigma_{c'}"'] \arrow[dd, bend left, "(\tau\cdot\sigma)_{c'}"] \\ Gc \arrow[r, "Gf"] \arrow[d, "\tau_c"] & Gc' \arrow[d, "\tau_{c'}"'] \\ Hc \arrow[r, "Hf"] & Hc' \end{tikzcd}$$

Ker sta τ in σ naravni, komutirata oba manjša kvadrata. Sklepamo, da potem komutira tudi veliki pravokotnik, torej je $\tau \cdot \sigma$ res naravna transformacija.

Zdi se nekoliko neugodno dokazovati naravnost neke transformacije funktorjev več spremenljivk. Ker pa se pri obravnavi adjungiranih funktorjev množično pojavljajo naravne transformacije bifunktorjev, si bomo delo nekoliko olajšali z uporabo naslednje trditve.

Trditev 2.4. *Naj bosta F in $G : B \times C \to D$ bifunktorja in τ preslikava, ki objektu $(b, c) \in B \times C$ priredi puščico $\tau_{b,c} : F(b, c) \to G(b, c)$. τ je naravna transformacija $F \xrightarrow{\bullet} G$ če in samo če je za vsak c puščica $\tau_{b,c}$ naravna v b in je za vsak b puščica $\tau_{b,c}$ naravna v c.*

Dokaz. Naj bo $\tau : F \xrightarrow{\bullet} G$ naravna transformacija. Torej komutira diagram

$$
\begin{tikzcd}
(b,c) \arrow[d, "{(f,g)}"] & F(b,c) \arrow[r, "\tau_{b,c}"] \arrow[d, "{F(f,g)}"] & G(b,c) \arrow[d, "{G(f,g)}"] \\
(b',c') & F(b',c') \arrow[r, "\tau_{b',c'}"] & G(b',c')
\end{tikzcd}
$$

Naravnost željenih puščic sledi takoj, če v diagramu postavimo $c' = c$ in $g = 1_c$ ali pa $b' = b$ in $f = 1_b$.

Naj bo sedaj puščica $\tau_{b,c}$ naravna v vsakem argumentu posebej. Oglejmo si diagram

$$
\begin{tikzcd}
F(b,c) \arrow[r, "{F(f,1_c)}"] \arrow[rr, bend left, "{F(f,g)}"] \arrow[d, "\tau_{b,c}"'] & F(b',c) \arrow[r, "{F(1_{b'},g)}"] \arrow[d, "\tau_{b',c}"] & F(b',c') \arrow[d, "\tau_{b',c'}"] \\
G(b,c) \arrow[r, "{G(f,1_c)}"] \arrow[rr, bend right, "{G(f,g)}"'] & G(b',c) \arrow[r, "{G(1_{b'},g)}"] & G(b',c')
\end{tikzcd}
$$

Levi in desni kvadrat komutirata po predpostavki, pokazati pa moramo, da komutira zunanji pravokotnik. S kratkim računom

$$
\begin{aligned}
\tau_{b',c'}F(f,g) &= \tau_{b',c'}F(1_{b'},g)F(f,1_c) = G(1_{b'},g)\tau_{b',c}F(f,1_c) \\
&= G(1_{b'},g)G(f,1_c)\tau_{b,c} = G(f,g)\tau_{b,c}
\end{aligned}
$$

vidimo, da je to res in dokaz je končan. □

2.2. **Univerzalne puščice.** V matematiki pogosto naletimo na objekte, ki so na nek način najboljši možni oz. kanonični. Kaj točno s tem mislimo je sicer odvisno od primera, teorija kategorij pa nam omogoča abstrahiranje teh podrobnosti in vpogled v osnovno strukturo takih objektov ter razumevanje, kaj jih dela tako posebne.

Definicija 2.5. *Naj bo $F : B \to C$ funktor in $c \in C$.* Univerzalna puščica *iz c v F je taka puščica $u : c \to Fr$ v C, da za vsako puščico $f : c \to Fb$ v C, obstaja natanko ena puščica $g : r \to b$ v B, za katero velja $Fg \circ u = f$. To dejstvo lahko predstavimo s komutativnim diagramom*

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & Fr \arrow[d, dashed, "Fg"] & r \arrow[d, dashed, "g"] \\
& Fb & b
\end{tikzcd}
$$

Dualnemu pojmu pravimo univerzalna puščica iz F v c.

V definiciji univerzalne puščice lahko slutimo, da obstaja močna povezava med hom-razredoma $B(r,b)$ in $C(c,Fb)$. Morda bi si upali trditi, da med njima obstaja bijekcija. Dejansko velja še močnejša lastnost, ki jo zdaj navedemo.

Trditev 2.6. *Naj bo $F : B \to C$ funktor. Puščica $u : c \to Fr$ je univerzalna iz c v F natanko tedaj, ko je preslikava, ki puščico $g : r \to b$ preslika v puščico $Fg \circ u : c \to Fb$, bijekcija med $B(r,b)$ in $C(c,Fb)$, naravna v b. S tem je definiran naravni izomorfizem $B(r,-) \cong C(c,F-)$.*

Pri danih r in c vsak tak naravni izomorfizem s tem predpisom določa neka puščica $u : c \to Fr$, ki je univerzalna iz c v F.

Dokaz. Naj bo $u : c \to Fr$ univerzalna puščica iz c v F. Preslikavo iz trditve označimo s $\varphi : B(r,b) \to C(c,Fb)$, torej $\varphi(g) = Fg \circ u$. Poiskali bomo njen inverz in tako pokazali, da je bijektivna. Definiramo $\psi : C(c,Fb) \to B(r,b)$; $\psi(f)$ naj bo puščica, ki jo po univerzalnosti dobimo iz f, torej edina, za katero velja $f = F(\psi(f)) \circ u$.

$$\psi(\varphi(g)) = \psi(Fg \circ u) = g.$$

Ustavimo se za trenutek pri zadnjem enačaju. Razmislek tega tipa se zelo pogosto pojavlja v dokazih v teoriji kategorij, zato ga na tem mestu pojasnimo. ψ bo svoj argument preslikal v tako puščico f, da bo veljalo $Fg \circ u = Ff \circ u$. Obstaja natanko en tak f, saj je $Fg \circ u \in C(c,Fb)$ in lahko uporabimo univerzalnost puščice u. Vendar g zadošča temu pogoju. Zaradi enoličnosti je torej $f = g$ in zgornja enakost sledi.

$$\varphi(\psi(f)) = F(\psi(f)) \circ u = f$$

Tu zadnja enakost sledi iz definicije ψ. Preslikavi φ in ψ sta torej inverzni bijekciji. Preverimo še naravnost φ v b. Naj bo $\beta : b \to b'$ puščica v B. Imamo diagram

$$\begin{tikzcd}
B(r,b) \arrow[r, "\varphi_b"] \arrow[d, "B(r,\beta)"'] & C(c,Fb) \arrow[d, "C(c,F\beta)"] \\
B(r,b') \arrow[r, "\varphi_{b'}"'] & C(c,Fb')
\end{tikzcd}$$

Vzamemo $g \in B(r,b)$. Če gremo z njim desno in navzdol po diagramu dobimo $F\beta \circ Fg \circ u$, če pa gremo navzdol in desno pa dobimo $F(\beta g) \circ u$. Diagram res komutira in φ je naravna v b.

Naj bo sedaj φ bijekcija, naravna v b, in $f \in C(c,Fb)$. Za dokaz univerzalnosti puščice u moramo najti ustrezno puščico $g \in B(r,b)$ in pokazati, da je enolična. Vzemimo za g kar $\varphi^{-1}(f)$. Pri tej izbiri trikotni diagram iz definicije 2.5 res komutira, saj $Fg \circ u = \varphi(g) = f$. Če bi obstajala še kakšna puščica h za katero bi to veljalo, bi to pomenilo $f = \varphi(g) = \varphi(h)$. Zaradi bijektivnosti φ je torej g enoličen. Tako smo pokazali, da je u univerzalna puščica iz c v F.

Dokažimo še drugi del trditve. Po predpostavki imamo za vsak $b \in B$ bijekcijo $\varphi_b : B(r,b) \to C(c,Fb)$. Izberimo $b = r$ in $g : r \to b'$. Označimo $u = \varphi_r(1_r)$. Ker je φ_r naravna, komutira diagram

$$\begin{tikzcd}
B(r,r) \arrow[r, "\varphi_r"] \arrow[d, "D(r,g)"'] & C(c,Fr) \arrow[d, "C(c,Fg)"] \\
B(r,b') \arrow[r, "\varphi_{b'}"] & C(c,Fb')
\end{tikzcd}$$

Če po tem diagramu lovimo 1_r, dobimo $\varphi_{b'}(g) = Fg \circ u$. Ker je $\varphi_{b'}$ bijekcija, to pomeni, da se da vsak $f : c \to Fb'$ zapisati kot $f = Fg \circ u$ za natanko en g. To pa pomeni, da je u univerzalna puščica iz c v F. $\square$

Kot smo že rekli, najdemo primere univerzalnih puščic na mnogih mestih. Kljub temu bomo s primeri počakali do definicije adjungiranih funktorjev, saj sta pojma zelo povezana.

2.3. **Limite.** Pogosto si želimo iz danih objektov in puščic neke kategorije ustvariti nek nov objekt. Seveda ne kakršnegakoli, ampak takega, ki se na nek način najbolje prilega danim objektom. V resnici želimo poiskati ustrezno univerzalno konstrukcijo. Ta naloga pa nas pripelje do pomembnega pojma kategoričnih limit.

Definicija 2.7. *Naj bosta J in C kategoriji.* Diagram oblike J v C *je funktor $T : J \to C$.*

Lahko si predstavljamo, da diagram T ustvari sliko kategorije J v kategoriji C. Očitno je torej narava objektov in puščic v J nepomembna. Vse kar je pomembno je njihova medsebojna povezanost oziroma njihova oblika. Pogosto bomo na intuitivnem nivoju o diagramu res razmišljali kot o diagramu, torej usmerjenem grafu. V večini primerov je kategorija J majhna in celo končna; v teh primerih pravimo ustreznim diagramom majhni ali končni.

Definicija 2.8. *Naj bo T diagram oblike J v C.* Stožec *nad T je tak par (s, φ) objekta $s \in C$ in družine puščic $\varphi_i : s \to Fi$, $i \in J$, da za vsak par objektov $i, j \in J$ in vsako puščico $u \in J(i,j)$ velja $\varphi_j = Tu \circ \varphi_i$.* Limita *diagrama T je stožec (l, ψ) nad T, za katerega velja, da za vsak stožec (s, φ) nad T obstaja natanko ena puščica $\theta : s \to l$, tako da za vsak $i \in J$ velja $\varphi_i = \psi_i \theta$. Situacijo lahko predstavimo s komutativnim diagramom*

$$\begin{tikzcd}
 & s \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi_j"] & \\
 & l \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_j"] & \\
Ti \arrow[rr, "Tu"] & & Tj
\end{tikzcd}$$

Stožec (l, ψ) iz definicije označimo $(l, \psi) = \operatorname{Lim} T$ in mu pravimo limitni stožec. Dualni konstrukciji pravimo kolimita. (Ko)limita je majhna/končna, če je njen diagram majhen/končen. Kategorija je *(ko)polna*, če obstajajo vse majhne (ko)limite.

Velja opozoriti, da enakost oblike $(l, \psi) = \operatorname{Lim} T$ ni tako absolutna kot se morda zdi. Oznaka $\operatorname{Lim} T$ namreč ne označuje nekega določenega stožca, ampak le izraža lastnost, da je nek stožec limitni. Takih je seveda lahko več, so pa vsi, kot bomo videli, med sabo izomorfni.

Definicija limite je dovolj splošna, da z enim konceptom združimo mnogo, od najpreprostejših do kompleksnih konstrukcij. Limite digramov določenih oblik so še posebej pomembne, ne nazadnje zato ker motivirajo definicijo limit. Oglejmo si nekaj primerov takih limit v znanih kategorijah.

Najpreprostejši diagram je očitno prazni diagram. Naj bo J prazna in C neka kategorija. Diagram oblike J v C je prazni funktor. Stožec nad tem diagramom je kar nek objekt $c \in C$, limita tega diagrama pa je tak objekt $k \in C$, da za vsak objekt $c \in C$ obstaja natanko ena puščica $\theta : c \to k$. Takemu objektu k pravimo *končni* *objekt* kategorije C. V kategoriji **Set** so končni objekti množice z enim elementom, v kategoriji **Grp** je končni objekt trivialna grupa. Kolimita tega diagrama pa je tak objekt $z \in C$, da za vsak objekt $c \in C$ obstaja natanko ena puščica $\theta : z \to c$. Takemu objektu z pravimo *začetni objekt* kategorije C. V kategoriji **Set** je začetni objekt prazna množica.

Naj bo kategorija J dana z $\mathrm{Obj}(J) = \{a, b\}$ in $\mathrm{Arr}(J) = \{1_a, 1_b\}$ in naj bo C neka kategorija. Stožec nad diagramom T oblike J v C je objekt $c \in C$ s po eno puščico v Ta in Tb. Limita diagrama T bo potem tak stožec (p, π_1, π_2), da bo za vsak stožec (q, f_1, f_2) obstajala natanko ena puščica $\theta : q \to p$, ki naredi naslednji diagram komutativen

$$\begin{tikzcd}
Ta & p \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & Tb \\
& q \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dashed, "\theta"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Limiti pravimo *produkt* objektov Ta in Tb, puščicam π_1 in π_2 pa *projekcije*. Terminologija je upravičena; če namreč za C vzamemo kategorijo **Set**, so produkti ravno kartezični produkti množic, projekcije pa ravno projekcije na faktorje. Podobno velja v **Top** in **Grp**. Kolimiti tega diagrama pravimo *koprodukt* objektov Ta in Tb. V kategorijah **Set** in **Top** so koprodukti disjunktne unije, v **Grp** pa so to prosti produkti.

Naj bo kategorija J dana z $\mathrm{Obj}(J) = \{a, b\}$ in naj bosta $f, g \in J(b, a)$ edini neidentitetni puščici v J. Naj bo C neka kategorija. Stožec nad diagramom T oblike J v C je $(c, \psi_1 : c \to Tb, \psi_2 : c \to Ta)$, kjer velja $Tf \circ \psi_1 = Tg \circ \psi_1 = \psi_2$. Zaradi teh enakosti nam puščice ψ_2 ni treba navajati, saj jo lahko vedno rekonstruiramo iz ψ_1. Limita diagrama je potem tak stožec $(d, \psi : d \to Tb)$, da za vsak drug stožec (c, φ) obstaja natanko ena puščica $\theta : c \to d$, ki naredi naslednji diagram komutativen

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\psi"] & Tb \arrow[r, shift left, "Tf"] \arrow[r, shift right, "Tg"'] & Ta \\
c \arrow[u, dashed, "\theta"] \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

Limiti pravimo *zožek* puščic Tf in Tg. V kategorijah **Set** in **Top** zožki ustrezajo incidenčnim množicam preslikav.

Limite predstavljajo posebne konstrukcije na danih objektih in puščicah, zato upamo, da je definicija dovolj močna, da zagotovi enoličnost limitnega stožca.

Trditev 2.9. *Naj bo T diagram oblike J v C. Naj bosta (c, ψ) in (c', ψ') limitna stožca nad T. Potem obstaja izomorfizem $f : c \to c'$, da velja $\psi = \psi' \circ f$.*

Dokaz. Imamo situacijo

$$\begin{tikzcd}
& c \arrow[d, dashed, shift right, "f"'] \arrow[ddl, bend right, "\psi_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi_j"] & \\
& c' \arrow[u, dashed, shift right, "f'"'] \arrow[dl, "\psi'_i"] \arrow[dr, "\psi'_j"'] & \\
Ti \arrow[rr, "Tu"'] & & Tj
\end{tikzcd}$$

kjer sta f in f' puščici, ki obstajata, ker sta stožca limitna. Pokažimo, da je f obrnljiva z inverzom f'. Opazujmo diagram

$$\begin{tikzcd} & c' \arrow[d, dashed, "ff' \mid 1_{c'}"] \arrow[ddl, bend right, "\psi'_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi'_j"] & \\ & c' \arrow[dl, "\psi'_i"] \arrow[dr, "\psi'_j"'] & \\ Ti \arrow[rr, "Tu"'] & & Tj \end{tikzcd}$$

Obstaja natanko ena puščica $g : c' \to c'$, da velja $\psi'_i = \psi'_i \circ g$. Puščica $1_{c'}$ ustreza tem zahtevam, kakor tudi ff', saj je $\psi'_i ff' = \psi_i f' = \psi'_i$. Torej velja $ff' = 1_{c'}$. S podobnim sklepom dobimo enakost $f'f = 1_c$. Sklepamo, da je f zahtevani izomorfizem. $\square$

3. Adjungirani funktorji

3.1. **Prvi primer in definicija.** Naj bo **Vct** kategorija realnih vektorskih prostorov in linearnih preslikav. Naj bo $U : \mathbf{Vct} \to \mathbf{Set}$ pozabljivi funktor, ki vektorski prostor V slika v množico vektorjev in linearne preslikave v ustrezne preslikave med množicami. Naj bo $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Vct}$ prosti funktor, ki množico M slika v vektorski prostor z bazo M, preslikave pa razširja na očiten način. Vsako preslikavo množic $g : M \to U(V)$ moremo enolično razširiti v linearno preslikavo $f : F(M) \to V$, eksplicitno s predpisom $f(\sum \lambda_i m_i) = \sum \lambda_i g(m_i)$. Korespondenca $g \mapsto f$ ima inverz $f \mapsto f|_M$, torej imamo bijekcijo $\varphi_{M,V} : \mathbf{Vct}(F(M), V) \to \mathbf{Set}(M, U(V))$. To pa je komponenta naravnega izomorfizma bifunktorjev $\varphi : \mathbf{Vct}(F-,-) \xrightarrow{\bullet} \mathbf{Set}(-, U-)$. Zaradi trditve 2.4 lahko naravnost preverimo v vsakem argumentu posebej. Oglejmo si diagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, "h^{\mathrm{op}}"'] & \mathbf{Vct}(F(M), V) \arrow[r, "\varphi_{M,V}"] \arrow[d, "\mathbf{Vct}(F(h^{\mathrm{op}}), V)"'] & \mathbf{Set}(M, U(V)) \arrow[d, "\mathbf{Set}(h^{\mathrm{op}}, U(V))"] \\ M' & \mathbf{Vct}(F(M'), V) \arrow[r, "\varphi_{M',V}"] & \mathbf{Set}(M', U(V)) \end{tikzcd}$$

Izberimo $f \in \mathbf{Vct}(F(M), V)$ in ga lovimo po diagramu. Če gremo po eni poti dobimo $f|_M h = fh$, po drugi pa dobimo $(f \circ Fh)|_{M'} = f \circ (Fh)|_{M'} = fh$. Diagram komutira in $\varphi_{M,V}$ je naravna v M. Podobno dokažemo, da je naravna tudi v V.

Imamo torej naravni izomorfizem $\mathbf{Vct}(F-,-) \cong \mathbf{Set}(-, U-)$. Taki izomorfizmi hom-bifunktorjev se pojavljajo na mnogih mestih v matematiki, kar nas motivira, da ta odnos kategorično definiramo, da bomo lahko vse te pojavitve obravnavali enotno.

Definicija 3.1. *Naj bosta C in D kategoriji.* Adjunkcija $(F, G, \varphi) : C \rightharpoonup D$ *je podana s funktorjema $F : C \to D$ in $G : D \to C$ ter naravnim izomorfizmom $\varphi : D(F-,-) \xrightarrow{\bullet} C(-, G-)$. Če taka adjunkcija obstaja, pravimo, da je F* levo adjungiran *k (oz. je levi adjungiranec za) G, kar označimo $F \dashv G$, G pa* desno adjungiran *k (oz. je desni adjungiranec za) F.*

V definiciji sicer omenjamo domeno in kodomeno adjungiranih funktorjev, kar je s formalnega stališča seveda potrebno. Dejstvo pa je, da je obstoj adjunkcije predvsem lastnost funktorjev in ne kategorij. Zato v študiju adjungiranih funktorjev posvečamo minimalno pozornost domeni in kodomeni teh funktorjev in nam pojem adjunkcija pogosto označuje le omenjeni naravni izomorfizem.

Za računanje z adjunkcijami je smiselno zapisati enačbe, ki sledijo iz naravnosti adjunkcije. V ta namen narišimo komutativna diagrama, ki predstavljata naravnost adjunkcije v posameznih indeksih.

$$\begin{tikzcd} D(Fc,d) \arrow[r, "\varphi_{c,d}"] \arrow[d, "D(Fc,k)"'] & C(c,Gd) \arrow[d, "C(c,Gk)"] \\ D(Fc,d') \arrow[r, "\varphi_{c,d'}"] & C(c,Gd') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} D(Fc,d) \arrow[r, "\varphi_{c,d}"] \arrow[d, "D(Fh^{\mathrm{op}},d)"'] & C(c,Gd) \arrow[d, "C(h^{\mathrm{op}},Gd)"] \\ D(Fc',d) \arrow[r, "\varphi_{c',d}"] & C(c',Gd) \end{tikzcd}$$

Naravnost lahko potem predstavimo z enačbami

$$\varphi_{c,d'}(k \circ f) = Gk \circ \varphi_{c,d}(f), \quad \varphi_{c',d}(f \circ Fh) = \varphi_{c,d}(f) \circ h$$

$$\varphi^{-1}_{c',d}(g \circ h) = \varphi^{-1}_{c,d}(g) \circ Fh, \quad \varphi^{-1}_{c,d'}(Gk \circ g) = k \circ \varphi^{-1}_{c,d}(g).$$

Iz adjunkcije lahko pridobimo par posebej pomembnih naravnih transformacij. Oglejmo si komponento adjunkcije $\varphi_{c,Fc} : D(Fc, Fc) \to C(c, GFc)$. Hom-množica na levi vsebuje puščico 1_{Fc}. Označimo $\eta_c = \varphi_{c,Fc}(1_{Fc}) : c \to GFc$. Po trditvi 2.6 je η_c univerzalna puščica iz c v G. Tako univerzalno puščico lahko iz adjunkcije dobimo za vsak c. Oglejmo si diagram

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "f"'] & GFc \arrow[d, "GFf"] \\ c' \arrow[r, "\eta_{c'}"] & GFc' \end{tikzcd}$$

Zaradi naravnosti adjunkcije velja

$$\begin{aligned} GFf \circ \eta_c &= GFf \circ \varphi_{c,Fc}(1_{Fc}) = \varphi_{c,Fc'}(Ff \circ 1_{Fc}) \\ &= \varphi_{c,Fc'}(1_{Fc'} \circ Ff) = \varphi_{c',Fc'}(1_{Fc'}) \circ f \\ &= \eta_{c'} \circ f \end{aligned}$$

Ta diagram res komutira. Imamo torej naravno transformacijo $\eta : 1_C \xrightarrow{\bullet} GF$, kjer je 1_C identični funktor na C. Adjunkcijo φ lahko izrazimo s pomočjo transformacije η. Za $f : Fc \to d$ poračunamo $\varphi_{c,d}(f) = \varphi_{c,d}(f \circ 1_{Fc}) = Gf \circ \varphi_{c,Fc}(1_{Fc}) = Gf \circ \eta_c$; isti rezultat smo dobili pri dokazu trditve 2.6. Naravni transformaciji η pravimo *enota* adjunkcije.

Dualno lahko dobimo univerzalno puščico iz F. V ta namen opazujemo komponento adjunkcije $\varphi_{Gd,d} : D(FGd, d) \to C(Gd, Gd)$. Sedaj hom-množica na desni vsebuje 1_{Gd}. Označimo $\varepsilon_d = \varphi^{-1}_{Gd,d}(1_{Gd})$. Po istem premisleku kot prej so ε_d univerzalne iz F v d in hkrati komponente naravne transformacije $\varepsilon : FG \xrightarrow{\bullet} 1_D$. S transformacijo ε lahko izrazimo inverz adjunkcije φ^{-1}. Za $g : c \to Gd$ namreč velja $\varphi^{-1}_{c,d}(g) = \varphi^{-1}_{c,d}(1_{Gd} \circ g) = \varphi^{-1}_{Gd,d}(1_{Gd}) \circ Fg = \varepsilon_d \circ Fg$. Naravni transformaciji ε pravimo *koenota* adjunkcije.

Izražavo adjunkcije s (ko)enoto in ustreznim funktorjem lahko uporabimo za izpeljavo zelo uporabnih identitet za kompozitume določenih naravnih transformacij. Velja namreč $1_{Fc} = \varphi^{-1}_{c,Fc}(\varphi_{c,Fc}(1_{Fc})) = \varphi^{-1}_{c,Fc}(\eta_c) = \varphi^{-1}_{c,Fc}(1_{GFc} \circ \eta_c) = \varepsilon_{Fc} F(\eta_c)$. Enakost komponent lahko dvignemo do enakosti naravnih transformacij $1_F = \varepsilon F \cdot F\eta$, kjer je $1_F : F \xrightarrow{\bullet} F$ identična naravna transformacija s komponentami $(1_F)_c = 1_c$, $\varepsilon F : FGF \xrightarrow{\bullet} F$ je naravna transformacija s komponentami $(\varepsilon F)_c = \varepsilon_{Fc}$ in je

$F\eta : F \xrightarrow{\bullet} FGF$ naravna transformacija s komponentami $(F\eta)_c = F(\eta_c)$. Podobno lahko dobimo enakost $1_G = G\varepsilon \cdot \eta G$. Tema dvema enakostima pravimo *trikotniški identiteti.*

3.2. **Alternativne definicije.** Naša definicija adjungiranih funktorjev se morda sprva zdi zastrašujoča. Vsaj za začetek bi si želeli nek konkretnejši opis adjungiranosti. Če se ozremo nazaj, vidimo, da smo iz obstoja adjunkcije pridelali obstoj nekih univerzalnih puščic, celo univerzalnih puščic, ki so komponente naravnih transformacij. Pokazali smo tudi, da te naravne transformacije zadoščajo trikotniškima identitetama. Videli bomo, da je adjunkcija že popolnoma določena z različnimi nabori teh podatkov.

Izrek 3.2 (ekvivalentne definicije adjunkcije). *Adjunkcija $(F, G, \varphi) : C \rightharpoonup D$ je določena z vsakim od naslednjih naborov podatkov:*

(1) *Dana sta funktorja $F : C \to D$ in $G : D \to C$ ter naravna transformacija $\eta : 1_C \xrightarrow{\bullet} GF$, za katero je vsaka komponenta η_c univerzalna puščica iz c v G.*
(2) *Dan je funktor $G : D \to C$ in za vsak $c \in C$ objekt $F_*c \in D$ ter univerzalna puščica $\eta_c : c \to GF_*c$ iz c v G.*
(3) *Dana sta funktorja $F : C \to D$ in $G : D \to C$ ter naravna transformacija $\varepsilon : FG \xrightarrow{\bullet} 1_D$, za katero je vsaka komponenta ε_d univerzalna puščica iz F v d.*
(4) *Dan je funktor $F : C \to D$ in za vsak $d \in D$ objekt $G_*d \in C$ ter univerzalna puščica $\varepsilon_d : FG_*d \to d$ iz F v d.*
(5) *Dana sta funktorja $F : C \to D$ in $G : D \to C$ ter naravni transformaciji $\eta : 1_C \xrightarrow{\bullet} GF$ in $\varepsilon : FG \xrightarrow{\bullet} 1_D$, ki zadoščata trikotniškima identitetama $1_F = \varepsilon F \cdot F\eta$ in $1_G = G\varepsilon \cdot \eta G$.*

Z izpeljavami v prejšnjem razdelku smo že pokazali, da obstoj adjunkcije (F, G, φ) implicira vsakega od elementov seznama. Izrek torej trdi, da bi lahko kateregakoli izmed njih vzeli za alternativno definicijo adjunkcije. Predvsem točka (2) (in dualno (4)) sta vabljivi zaradi svoje tehnične nezahtevnosti. Na koncu se odločimo za našo definicijo predvsem zaradi njene simetrije. Ostale definicije se nagibajo k enemu od para adjungiranih funktorjev, z izjemo točke (5), ki se jo občasno res uporablja kot definicijo adjunkcije. Definicija iz točke (5) je zanimiva tudi zato, ker se z njo lahko izognemo delu s konkretnimi objekti kategorij C in D, kar nam olajša računanje.

Dokaz. Iz podatkov v vsaki točki seznama bomo konstruirali želeno adjunkcijo.

(1) Da je η_c univerzalna pomeni, da za vsako puščico $f : c \to Gd$ obstaja natanko ena puščica $g : Fc \to d$ kot v komutativnem diagramu

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "f"'] & GFc \arrow[d, dashed, "Gg"] & Fc \arrow[d, dashed, "g"] \\ & Gd & d \end{tikzcd}$$

Definirajmo $\varphi_{c,d} : D(Fc, d) \to C(c, Gd)$ s predpisom $\varphi_{c,d}(g) = Gg \circ \eta_c$. Po trditvi 2.6 je $\varphi_{c,d}$ bijekcija in naravna v d. Dokazati moramo še, da je naravna tudi v c. Narišimo diagram

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f^{\mathrm{op}}"'] & D(Fc,d) \arrow[r, "\varphi_{c,d}"] \arrow[d, "D(F(f^{\mathrm{op}}),d)"'] & C(c,Gd) \arrow[d, "C(f^{\mathrm{op}},Gd)"] \\
c' & D(Fc',d) \arrow[r, "\varphi_{c',d}"] & C(c',Gd)
\end{tikzcd}$$

Izberimo $g \in D(Fc,d)$ in ga lovimo po diagramu. Da bo $\varphi_{c,d}$ naravna v c mora veljati $Gg \circ GFf \circ \eta_{c'} = Gg \circ \eta_c \circ f$. Toda $GFf \circ \eta_{c'} = \eta_c \circ f$, saj je η naravna transformacija med 1_C in GF. Torej je φ naravni izomorfizem oziroma želena adjunkcija.

(2) Podatki te točke namigujejo, da bi poskusili konstruirati funktor F. Na objektih definiramo F na očiten način, s $Fc = F_*c$. Idejo za definicijo F na puščicah dobimo iz diagrama, ki izraža univerzalnost puščic η_c:

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "f"'] & GF_*c \arrow[d, dashed, "Gg"] & F_*c \arrow[d, dashed, "g"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}"] & GF_*c' & F_*c'
\end{tikzcd}$$

Na puščicah bomo funktor F definirali s $Ff = g$. Seveda moramo še preveriti, da smo s tem res definirali funktor, torej da tako definiran F ohranja identitete in kompozitume (če se bo izkazalo, da je F res funktor, smo mimogrede pokazali, da je η naravna transformacija med 1_C in GF). Za ohranjanje identitete opazujemo diagram

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "1_c"'] & GFc \\
c \arrow[r, "\eta_c"'] & GFc
\end{tikzcd}$$

Univerzalnost komponente η_c nam zagotavlja obstoj natanko ene puščice $\varphi : Fc \to Fc$, s katero lahko dopolnimo ta komutativni diagram. Toda 1_{Fc} ustreza temu pogoju. Velja torej $F(1_c) = 1_{Fc}$. Za dokaz ohranjanja kompozitumov nam pride prav diagram

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "f"] \arrow[dd, dashed, bend right=60, "f'\circ f"'] & GFc \arrow[d, dashed, "Gg"'] \arrow[dd, dashed, bend left=60, "Gk"] \\
c' \arrow[r, "\eta_{c'}"] \arrow[d, "f'"] & GFc' \arrow[d, dashed, "Gh"'] \\
c'' \arrow[r, "\eta_{c''}"] & GFc''
\end{tikzcd}$$

Tu so g, h in k enolične puščice, katerih obstoj sledi iz univerzalnosti ustreznih puščic. Pokazati želimo, da je $k = hg$. Ker pa za G že vemo, da je funktor, je tako definiran k ustrezna, in zaradi enoličnosti tudi edina, možnost. Konstruirali smo funktor $F : C \to D$ in hkrati naravno transformacijo $\eta : 1_C \xrightarrow{\bullet} GF$. Želeno adjunkcijo lahko sedaj dobimo po točki (1).

(3) Dokaz je dualen k točki (1).

(4) Dokaz je dualen k točki (2).

(5) Iz transformacij η in ε bomo konstruirali puščici $\varphi_{c,d} : D(Fc, d) \to C(c, Gd)$ in $\psi_{c,d} : C(c, Gd) \to D(Fc, d)$. S pogledom na prejšnjo izpeljavo si upamo poskusiti z definicijo $\varphi_{c,d}(f) = Gf \circ \eta_c$ in $\psi_{c,d}(g) = \varepsilon_d \circ Fg$. Na tem mestu bi bilo treba preveriti naravnost tako definiranih φ in ψ v obeh indeksih. Ker pa smo tak račun do zdaj že večkrat naredili, ga bomo na tem mestu izpustili. Preverimo raje, da so komponente φ in ψ obrnljive. Izračunajmo torej

$$\varphi_{c,d}(\psi_{c,d}(g)) = \varphi_{c,d}(\varepsilon_d \circ Fg) = G(\varepsilon_d \circ Fg) \circ \eta_c = G\varepsilon_d \circ GFg \circ \eta_c$$

Zaradni naravnosti η velja $GFg \circ \eta_c = \eta_{Gd} \circ g$. Torej lahko nadaljujemo z

$$G\varepsilon_d \circ GFg \circ \eta_c = G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} \circ g = (1_G)_d \circ g$$

kjer zadnja enakost sledi po eni od trikotniških identitet. Velja pa tudi $(1_G)_d \circ g = g$, saj so komponente transformacije 1_G identitetne puščice. Podobno dobimo

$$\begin{aligned}\psi_{c,d}(\varphi_{c,d}(f)) &= \psi_{c,d}(Gf \circ \eta_c) = \varepsilon_d \circ FGf \circ F\eta_c \\ &= f \circ \varepsilon_{Fc} \circ F\eta_c = f \circ (1_F)_c = f\end{aligned}$$

φ je torej naravni izomorfizem oz. želena adjunkcija.

□

Smiselno se je vprašati, koliko svobode imamo pri izbiri adjungiranca k danemu funktorju.

Trditev 3.3. *Naj bo $G : D \to C$ funktor in naj mu bosta funktorja F in F' levo adjungirana. Potem sta F in F' naravno izomorfna.*

Dokaz. Označimo z η in η' enoti ustreznih adjunkcij. Ker so komponente enot univerzalne, obstajata za vsak objekt $c \in C$ natanko določeni puščici ψ_c in ψ'_c, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\eta'_c"'] & GFc \arrow[d, dashed, shift left, "G\psi_c"] & Fc \arrow[d, dashed, shift left, "\psi_c"] \\ & GF'c \arrow[u, dashed, shift left, "G\psi'_c"] & F'c \arrow[u, dashed, shift left, "\psi'_c"] \end{tikzcd}$$

Iz univerzalnosti η_c sledi tudi, da obstaja natanko ena puščica $Fc \to Fc$, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\eta_c"'] & GFc \arrow[d, dashed, "1_{GFc}"] & Fc \arrow[d, dashed, "1_{Fc}"] \\ & GFc & Fc \end{tikzcd}$$

Iz tega sklepamo, da je $\psi'_c \circ \psi_c = 1_{Fc}$. S podobnim sklepom dobimo tudi enakost $\psi_c \circ \psi'_c = 1_{F'c}$. Puščice ψ_c so torej obrnljive. Pokazati moremo še, da so komponente naravne transformacije $F \xrightarrow{\bullet} F'$. Izberimo puščico $f : c \to \bar{c}$ in si oglejmo diagram

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "G(F'f \circ \psi_c) \circ \eta_c"'] & GFc \arrow[d, dashed, "G\varphi"] & Fc \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & GF'\bar{c} & F'\bar{c} \end{tikzcd}$$

Z računom

$$G(F'f \circ \psi_c) \circ \eta_c = GF'f \circ \eta'_c = \eta'_{\bar{c}} \circ f = G\psi_{\bar{c}} \circ \eta_{\bar{c}} \circ f = G(\psi_{\bar{c}} \circ Ff) \circ \eta_c$$

pokažemo, da sta tako $F'f \circ \psi_c$ kot $\psi_{\bar{c}} \circ Ff$ ustrezna izbira za φ. To pa pomeni, da sta ti puščici enaki in je torej ψ naravna transformacija oziroma naravni izomorfizem. $\square$

3.3. **Primeri adjunkcij.** V tem razdelku si bomo ogledali nekaj primerov adjunkcij. Vseprisotnost adjunkcij pride do izraza predvsem po interpretaciji teh primerov v različnih kategorijah.

(1) Dostikrat se zgodi, da znamo iz primerka neke splošnejše matematične strukture ustvariti, na natančno določen način, primerek posebnejše strukture, ki ji pogosto pravimo *prosta*. V našem prvem primeru adjunkcije smo videli, da je vsaj za primer prostega vektorskega prostora nad množico prosti funktor F levo adjungiran k pozabljivemu funktorju U. Ta situacija je dovolj pogosta in pomembna, da se odločimo proste funktorje (in z njimi proste objekte) kar definirati kot leve adjungirance ustreznim pozabljivim funktorjem. Oglejmo si kak zgled te situacije:

Naj bo $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ funktor, ki množici priredi diskretni topološki prostor nad njo, in $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ pozabljivi funktor. Trdimo, da je F levo adjungiran k U. Uporabili bomo eno naših alternativnih definicij, natančneje točko (1) iz izreka 3.2. Definirajmo naravno transformacijo $\eta : 1_{\mathbf{Set}} \xrightarrow{\bullet} UF$ po komponentah kot $\eta_X = 1_X$. Komponente so očitno univerzalne puščice, torej je η enota adjunkcije $F \dashv U$. Diskretni prostori so torej, na nek način, kanonični prostori nad dano množico. V tem primeru se zgodi še nekaj zanimivega: najdemo lahko še eno adjunkcijo v istem "zaporedju". Naj bo $G : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ funktor, ki množici priredi trivialni topološki prostor nad njo. Naj bo $\tilde{\eta} : 1_{\mathbf{Top}} \xrightarrow{\bullet} GU$ naravna transformacija, s komponentami $\tilde{\eta}_X = 1_X$. Vidimo, da je tudi $\tilde{\eta}$ enota adjunkcije, tokrat $U \dashv G$. Dobili smo zaporedje adjunkcij $F \dashv U \dashv G$, kar je precej poseben pojav.

Nekoliko bolj zapleten primer najdemo v [1]. Označimo z $\mathbf{Rng}$ kategorijo kolobarjev in z $\mathbf{Rng}_*$ kategorijo označenih kolobarjev (objekti so pari (K, x), kjer je $K \in \mathbf{Rng}$ in $x \in K$, puščice pa so homomorfizmi kolobarjev, ki ohranjajo izbrane točke). Naj bo $U : \mathbf{Rng}_* \to \mathbf{Rng}$ pozabljivi funktor. Kaj bi lahko bil levi adjungiranec k U? Kandidata iščemo med funktorji $F : \mathbf{Rng} \to \mathbf{Rng}_*$. Največja težava se zdi smiselno izbrati nek element iz vsakega kolobarja. Ker naši kolobarji nimajo nujno enice, nam ne preostane nič drugega, kot da iz vsakega kolobarja izberemo 0. Upamo torej, da bo funktor $F : K \mapsto (K, 0)$ ustrezal zahtevam za levega adjungiranca. Ustavimo se pri zahtevi po univerzalnosti komponent enote. Poiskati moramo ustrezno puščico g, da bo komutiral diagram

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "\eta_K"] \arrow[dr, "f"'] & K \arrow[d, dashed, "Ug"] & (K,0) \arrow[d, dashed, "g"] \\
& L & (L,l)
\end{tikzcd}
$$

Težavo vidimo na desni strani. Če l ni enak 0, taka puščica g ne obstaja, neglede na to, kaj so puščice η_K. Ker pa je $l \in L$ poljuben, η_K gotovo ne morejo biti univerzalne. Preprosta rešitev $F : K \mapsto (K, 0)$ ni pravilna.

Po razmisleku dobimo idejo za F, namreč $F : K \mapsto (K[x], x)$. Sedaj za komponente enote vzamemo inkluzije $K \to K[x]$. Preverimo še, da smo res rešili problem univerzalnosti. Diagram sedaj izgleda takole

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i_K"] \arrow[dr, "f"'] & K[x] \arrow[d, dashed, "Ug"] & (K[x], x) \arrow[d, dashed, "g"] \\
& L & (L, l)
\end{tikzcd}
$$

Zahtevam ustreza natanko en g, namreč $g : p(x) \mapsto f(p)(l/x)$ (koeficiente polinoma preslikamo s f in novi polinom evaluiramo v l). Našli smo adjunkcijo $F \dashv U$ z enoto $\eta_K : K \to K[x]$. Opazimo lahko, da nam ta adjunkcija, še posebej kompozitum $UF = (-)[x]$, da novo karakterizacijo kolobarja polinomov, pri kateri se nam ni treba ukvarjati z vpeljavo novih operacij na zaporedja elementov kolobarja K.

(2) Označimo z $\mathbf{1}$ kategorijo z enim objektom in brez neidentitetnih puščic. Naj bo $F : C \to \mathbf{1}$ funktor. Ali ima levega adjungiranca? Denimo, da obstaja funktor $E \dashv F$. Univerzalnost komponent enote te adjunkcije nam da diagram

$$
\begin{tikzcd}
* \arrow[r, "\eta_* = 1_*"] \arrow[dr, "f = 1_*"'] & FE* = * \arrow[d, dashed, "1_*"] & E* \arrow[d, dashed] \\
& Fc = * & c
\end{tikzcd}
$$

Ker trikotnik vedno komutira, ta diagram pravi, da obstaja ena sama puščica med $E*$ in c in to za vsak c. To pa pomeni, da je $E*$ začetni objekt kategorije C. Funktor F ima levega adjungiranca natanko tedaj (točka (2) izreka 3.2), ko ima kategorija C začetni objekt. Univerzalnost komponent koenote te adjunkcije nam da diagram

$$
\begin{tikzcd}
Fc = * & EFc = E* \arrow[r, "\varepsilon_c"] & c \\
* \arrow[u, dashed, "1_*"] & E* \arrow[u, dashed, "1_{E*}"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

Vidimo, da so puščice iz začetnega objekta zbrane kot komponente koenote adjunkcije. Dualno bi lahko pokazali, da ima funktor F desnega adjungiranca natanko tedaj, ko ima kategorija C končni objekt, puščice v njega pa so zbrane v enoti adjunkcije.

Označimo z $\Delta : C \to C \times C$ diagonalni funktor, definiran s predpisom $\Delta c = (c, c)$. Poskusimo najti levega in desnega adjungiranca. Denimo, da obstaja funktor $G : C \times C \to C$, ki je desno adjungiran k Δ. Poskusimo z diagramom za univerzalnost koenote

$$
\begin{tikzcd}
G(c, c') & \Delta G(c, c') \arrow[r, "\varepsilon_{(c,c')}"] & (c, c') \\
c'' \arrow[u, dashed, "h"] & \Delta c'' \arrow[u, dashed, "\Delta h"] \arrow[ur, "(f,g)"'] &
\end{tikzcd}
$$

Lahko ga nekoliko preoblikujemo v

$$\begin{tikzcd}
& c'' \arrow[ld, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[rd, "g"] & \\
c & G(c,c') \arrow[l, "\varepsilon_1"] \arrow[r, "\varepsilon_2"'] & c'
\end{tikzcd}$$

To pa je točno diagram za produkt. Sklepamo, da je edina možnost za desnega adjungiranca funktor $G : (c,c') \mapsto c \times c'$. Torej ima diagonalni funktor desnega adjungiranca natanko tedaj (točka (4) izreka 3.2), ko ima kategorija C produkte. Če bi iskali levega adjungiranca, bi veljali isti sklepi na dualnih diagramih. Diagonalni funktor ima levega adjungiranca natanko tedaj, ko ima kategorija C koprodukte.

Te primere lahko združimo v en okvir. Naj bosta C in J kategoriji. Objekti *funktorske kategorije* C^J so funktorji $T : J \to C$, puščice pa so naravne transformacije. Diagonalni funktor $\Delta : C \to C^J$ objektu c priredi konstantni funktor z vrednostmi c in 1_c, puščici $f : c \to c'$ pa priredi naravno transformacijo s komponentami f. Kaj je desni adjungiranec k Δ? Diagram za koenoto je oblike

$$\begin{tikzcd}
FT & \Delta FT \arrow[r, "\varepsilon_T"] & T \\
c \arrow[u, dashed] & \Delta c \arrow[u, dashed] \arrow[ru, "\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

kjer je $T \in C^J$. Morda nam ta diagram na prvi pogled ne pove prav dosti; zato si narišimo situaciji pri puščicah τ in ε_T.

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "1_c"] \arrow[d, "\tau_i"'] & c \arrow[d, "\tau_j"] & FT \arrow[r, "1_{FT}"] \arrow[d, "(\varepsilon_T)_i"'] & FT \arrow[d, "(\varepsilon_T)_j"] \\
Ti \arrow[r] & Tj & Ti \arrow[r] & Tj
\end{tikzcd}$$

Naravni transformaciji nam dejansko podajata stožca nad diagramom T. Puščica, ki mora obstajati zaradi univerzalnosti koenote, pa je natanko puščica iz definicije limite. Edini kandidat za F je torej funktor $\operatorname{Lim} -$. Velja torej, da ima diagonalni funktor desnega adjungiranca natanko tedaj, ko v kategoriji C obstajajo vse limite oblike J. Koenota je v tem primeru limitni stožec diagrama. Dualno bi videli, da ima diagonalni funktor levega adjungiranca natanko tedaj, ko je kategorija C kopolna.

(3) Oglejmo si zanimivo situacijo v kategoriji **Set**. Natančneje, imejmo funktorja $- \times A$ in $-^A = \mathbf{Set}(A, -)$, ki objekte in puščice slikata na očiten način. Pokažimo, da je $- \times A$ levo adjungiran k $-^A$. Diagram za koenoto je potem

$$\begin{tikzcd}
M^A & M^A \times A \arrow[r, "\varepsilon_M"] & M \\
N \arrow[u, dashed, "\psi"] & N \times A \arrow[u, dashed, "(\psi, 1_A)"] \arrow[ru, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Za komponente koenote proglasimo ustrezne evaluacije, $\varepsilon_M(g,a) = g(a)$. Preostane nam samo še določiti ustrezno puščico ψ. Poskusimo lahko s predpisom $\psi : n \mapsto (a \mapsto f(n,a))$. Lahko se prepričamo, da za tak ψ diagram res komutira, in še več, da je tak ψ edini ustrezen. Dobili smo torej adjunkcijo. Če to prepišemo v obliko iz definicije adjunkcije, vidimo, da imamo naravni izomorfizem množic $\mathbf{Set}(M \times A, N) \cong \mathbf{Set}(M, N^A)$. Prehod po tem izomorfizmu v desno zaseda pomembno mesto v teoretičnem računalništvu, kjer se imenuje *currying*. Tako situacijo, zaradi njene očitne pomembnosti, zajamemo v teoriji kategorij v pojem *kartezično zaprte kategorije*. Kategorija je kartezično zaprta, če ima končni objekt, vse končne produkte in ima za vsak objekt c funktor $- \times c$ desnega adjungiranca (videli smo že, da bi tudi prvi dve zahtevi lahko interpretirali kot zahtevi po obstoju določenih desnih adjungirancev).

Sedaj, ko poznamo obstoj te adjunkcije, se odpravimo iskat kakšno njej podobno. Za primerno tarčo izberemo funktor $A^- = \mathbf{Set}(-, A) : \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$. Pri iskanju se opremo na prejšnji dokaz in na osnovno definicijo adjunkcije, za katero bomo sedaj videli, da ni le akademsko zanimiva. Omogoča nam namreč hiter in eleganten račun:

$$\begin{aligned} \mathbf{Set}(M, A^N) &\cong \mathbf{Set}(M \times N, A) \cong \mathbf{Set}(N \times M, A) \\ &\cong \mathbf{Set}(N, A^M) \cong \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}(A^M, N) \end{aligned}$$

Vidimo, da je funktor A^- "sebi adjungiran", natančneje, da je njegov levi (in tudi desni) adjungiranec očitni funktor $(A^-)^{\mathrm{op}} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$.

(4) Naj bosta P in Q delno urejeni množici. *Galoisova povezava* med P in Q je par takih monotonih preslikav $F : P \to Q$ in $G : Q \to P$, da za vsaka $p \in P$ in $q \in Q$ velja $F(p) \leq q \Leftrightarrow p \leq G(q)$. Galoisove povezave najdemo povsod, kjer se pojavljajo delno urejene množice. Osnovni primer (po katerem je pojem tudi dobil ime) najdemo v teoriji obsegov: osnovni izrek Galoisove teorije pravi, da obstaja Galoisova povezava med množico vmesnih obsegov končne Galoisove razširitve in množico podgrup njene Galoisove grupe (eno izmed njiju je pri tem treba urediti dualno glede na inkluzijo).

Ker se bolj ali manj enostavni primeri Galoisovih povezav pojavljajo vsepovsod, lahko poskusimo ta pojem prenesti v kategorični okvir. Videli smo že, kako lahko delno urejene množice interpretiramo kot kategorije. Funktorji med takimi kategorijami potem natanko ustrezajo monotonim preslikavam. Na tem mestu pa vidimo, da Galoisova povezava med dvema delno urejenima množicama ni nič drugega kot par adjungiranih funktorjev med ustreznima kategorijama. Tukaj (morda prvič v tej nalogi) vidimo moč in smisel za "kategorifikacijo" pojmov klasične matematike. Teorijo adjungiranih funktorjev, ki smo jo in jo še bomo razvili, lahko zdaj neposredno prenesemo na celo vrsto različnih in na prvi pogled nepovezanih primerov. Pomembni (in ne povsem trivialni) izreki teorije urejenosti pravijo, da ustrezna preslikava v Galoisovi povezavi ohranja supremume (infimume), ki morda obstajajo; da je preslikava med polnima mrežama, ki ohranja vse supremume, del Galoisove povezave; da ena preslikava iz Galoisove povezave natanko določa drugo.... Vsa ta dejstva lahko pokažemo, na morda enostavnejši način, v teoriji kategorij.

4. Lastnosti in eksistenca adjungiranih funktorjev

4.1. **Izrek o zveznosti.** Videli smo, da lahko s kategoričnimi limitami opišemo mnogo vsakdanjih matematičnih objektov. Slabo se nam zdi, če neka kategorija nima limit, ki bi si jih želeli in smo jih navajeni (pomislimo na odsotnost produktov v kategoriji obsegov). Zato se je naravno vprašati, kakšna je interakcija med funktorji in limitami v dani kategoriji. Verjetno bodo poseben pomen dobili funktorji, ki spoštujejo in ohranjajo to strukturo.

Definicija 4.1. *Funktor $F : C \to D$* ohranja limite oblike *J, če za vsak diagram T oblike J v C, za katerega je $(l, \varphi) = \operatorname{Lim} T$, velja $(Fl, F\varphi) = \operatorname{Lim} FT$. Funktor F je* zvezen*, če ohranja vse majhne limite.*

Definiciji funktorjev, ki ohranjajo kolimite, in kozveznih funktorjev sta dualni.

Razne lastnosti matematičnih konstrukcij so preproste posledice dejstva, da ustrezni funktorji ohranjajo limite. Kot že vemo, adjungirani funktorji predstavljajo pomemben del teh konstrukcij. Zato nas zanima, kako se odrežejo v tem pogledu.

Izrek 4.2 (Izrek o zveznosti)**.** *Naj ima funktor $G : D \to C$ levega adjungiranca. Potem G ohranja vse limite.*

Dokaz. Naj bo T diagram oblike J v D in $(l, \psi) = \operatorname{Lim} T$. Naj bo $F \dashv G$ in naj bo $\varphi : D(F-, -) \xrightarrow{\bullet} C(-, G-)$ adjunkcija. Osnovno idejo dokaza prikazuje naslednji diagram

$$\begin{tikzcd}
& Fs \arrow[d, dashed, "\theta"] \arrow[ddl, bend right, "\varphi^{-1}(\tau_i)"'] \arrow[ddr, bend left, "\varphi^{-1}(\tau_j)"] & & & s \arrow[d, "\varphi(\theta)"] \arrow[ddl, bend right, "\tau_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\tau_j"] & \\
& l \arrow[dl, "\psi_i"'] \arrow[dr, "\psi_j"] & & & Gl \arrow[dl, "G\psi_i"'] \arrow[dr, "G\psi_j"] & \\
Ti \arrow[rr, "Tu"] & & Tj & GTi \arrow[rr, "GTu"] & & GTj
\end{tikzcd}$$

Stožec (l, ψ) lahko z G preslikamo v stožec $(Gl, G\psi)$ nad GT. Pokazati želimo, da je to limitni stožec. Izberimo nek stožec (s, τ) nad GT. Radi bi dobili ustrezen stožec v D. Komponenta adjunkcije φ^{-1} nam iz puščic v stožcu v C da puščice stožca $(Fs, \varphi^{-1}(\tau))$ v D (dovolili si bomo izpuščati indeksa pri φ, saj sta razvidna iz situacije). Ker je adjunkcija naravna, komutira diagram

$$\begin{tikzcd}
D(Fs, Ti) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "D(Fs,Tu)"'] & C(s, GTi) \arrow[d, "C(s,GTu)"] \\
D(Fs, Tj) \arrow[r, "\varphi"] & C(s, GTj)
\end{tikzcd}$$

To pa pomeni, da velja enakost $\varphi(Tu \circ \varphi^{-1}(\tau_i)) = GTu \circ \varphi(\varphi^{-1}(\tau_i)) = \tau_j$ oziroma $Tu \circ \varphi^{-1}(\tau_i) = \varphi^{-1}(\tau_j)$. Torej trikotniki v novem stožcu res komutirajo. Ker je (l, ψ) limita diagrama T, obstaja natanko ena puščica $\theta : Fs \to l$, da velja enakost $\psi_i \circ \theta = \varphi^{-1}(\tau_i)$. Uporabimo adjunkcijo, dobimo $\varphi(\theta) : s \to Gl$ in s podobnim sklepom kot prej ugotovimo, da velja $G\psi_i \circ \varphi(\theta) = \tau_i$. Denimo, da obstaja še puščica $\lambda : s \to Gl$ z isto lastnostjo. Potem nam naravnost adjunkcije pove, da ima $\varphi^{-1}(\lambda)$ iste lastnosti kot θ. Ker pa je θ edina puščica s temi lastnostmi, mora veljati $\lambda = \varphi(\theta)$. Torej je $(Gl, G\psi)$ limita diagrama GT. $\square$

Dualno lahko dokažemo, da funktor, ki ima desnega adjungiranca, ohranja vse kolimite. Izrek o zveznosti je močno orodje, s katerim lahko pokažemo, da dani funktor nima levega adjungiranca (poiščemo limito, ki je ne ohranja), ali pa da dani funktor ohranja limite (poiščemo adjungiranca). Od primera je odvisno katera naloga je uporabna in katera je lažja. V tem izreku je razlog *zakaj* je prav definirati produkte grup, kolobarjev, topoloških prostorov in podobnih stvari na kartezičnih produktih ustreznih množic. Vsi pripadajoči pozabljivi funktorji imajo leve adjungirance, namreč ustrezne proste funktorje.

Kot zabaven negativen zgled uporabe izreka si oglejmo naslednji primer. Za večino algebrajskih struktur znamo navesti konstrukcijo, ki iz dane množice napravi prosto strukturo, torej najbolj splošno nad to množico. Poznamo proste grupe, proste kolobarje, proste algebre..., nikjer pa ne srečamo konstrukcije prostega obsega. Ker ne verjamemo, da so matematiki spregledali ta primer, sumimo, da morda prosti obsegi ne obstajajo. To domnevo formaliziramo kot trditev, da pozabljivi funktor iz kategorije obsegov v kategorijo množic nima levega adjungiranca. Dokažimo to trditev.

Dokaz. Označimo z $U : \mathbf{Fld} \to \mathbf{Set}$ pozabljivi funktor. Če želimo uporabiti izrek o zveznosti, moramo najti neko limito, ki je U ne bo ohranjal. Izračunajmo produkt $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ v kategoriji **Fld**. Stožec te limite je $\mathbb{Z}_2 \longleftarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$. Iz teorije obsegov vemo, da so homomorfizmi obsegov injektivni, torej ima produkt $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ največ 2 elementa. Sklepamo, da je $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$. Zdaj lahko uporabimo izrek o zveznosti in dobimo $U(\mathbb{Z}_2) = U(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) = U(\mathbb{Z}_2) \times U(\mathbb{Z}_2)$. Ker pa ima $U(\mathbb{Z}_2)$ 2 elementa, $U(\mathbb{Z}_2) \times U(\mathbb{Z}_2)$ pa 4, je ta enakost protislovna. Dokazali smo, da U nima levega adjungiranca, oziroma da prosti obsegi ne obstajajo. $\square$

Na koncu moramo priznati, da smo nekoliko goljufali ob izjavi, da prosti obsegi ne obstajajo. Dokazali smo, da nek funktor nima adjungiranca, torej da prosti obsegi ne obstajajo, kot jih razume teorija kategorij. Ni pa povsem jasno, kaj naj beseda "prosti" pomeni zunaj teorije kategorij. Opozorimo tudi na to, da je izbira kodomene pozabljivega funktorja pomembna. Če bi, na primer, iskali proste obsege nad celostnimi polji, bi jih tudi našli, saj so to natanko obsegi ulomkov.

4.2. **Freydov izrek o adjungiranih funktorjih.** Ko smo si ogledovali primere adjunkcij, smo za njihove konstrukcije uporabili svojo intuicijo v posamezni kategoriji. Ker nas to pripelje samo do neke točke, moramo najti nek splošnejši opis obstoja adjunkcij. Izrek 4.2 nam da potreben pogoj za obstoj levega adjungiranca, zdaj pa bi radi to situacijo posplošili in pridelali še kakšen zadosten pogoj. Tega nam v veliki splošnosti daje Freydov izrek o adjungiranih funktorjih, ki se mu bomo posvetili v tem razdelku. Razumljivo je, da tak izrek ni povsem trivialen, zato si moramo predhodno pripraviti še nekaj teorije.

Izkaže se, da obstoj limit različnih oblik ni povsem neodvisen. Naslednja, precej presenetljiva trditev, nam na podlagi obstoja nekaj posebnih limit zagotavlja obstoj vseh limit dane oblike.

Trditev 4.3. *Naj bosta C in J kategoriji. Naj v C obstajajo zožki vseh parov puščic in limite oblike* $\mathrm{Obj}(J)$ *in* $\{k; \exists j \in J \exists u \in J(j,k)\}$*, kjer drugi razred po potrebi razumemo kot multirazred. Potem v C obstajajo vse limite oblike J.*

V trditvi intepretiramo razrede kot *diskretne kategorije*, t.j. kategorije brez neidentitetnih puščic. Limite diagramov take oblike so očitna posplošitev že videnih (binarnih) produktov, zato tudi tem pravimo produkti in jih označimo $\prod_i Ti$, kjer je T diagram in indeks i preteče objekte dane diskretne kategorije.

Dokaz. Naj bo T diagram oblike J v C. Opazujemo diagram

$$\begin{tikzcd}
Tk & & Ti \\
\prod_{u:j\to k} Tk \arrow[u, "q_u"] \arrow[d, "q_u"'] & \prod_i Ti \arrow[ul, "p_k"'] \arrow[ur, "p_i"] \arrow[l, shift left, "f"'] \arrow[l, shift right, "g"] \arrow[d, "p_j"] & c \arrow[u, "\mu_i=p_i\circ e"'] \arrow[l, dashed, "e"'] \\
Tk & Tj \arrow[l, "Tu"]
\end{tikzcd}$$

kjer smo z p_i in q_u označili ustrezne projekcije produkta. Iskanje limite diagrama T začnemo s konstrukcijo stožca nad T. Ker je $\prod_u Tk$ produkt, obstajata natanko ena puščica f, da komutira zgornji trikotnik, in natanko ena puščica g, da komutira spodnji kvadrat zgornjega diagrama, oboje za poljuben u. Po predpostavki obstaja zožek $e : c \to \prod_i Ti$ puščic f in g. Definirajmo puščice $\mu_i = p_i \circ e : c \to Ti$. To je naš kandidat za limitni stožec. Pokažimo najprej, da je to res stožec. Izberimo si puščico $u \in J(j,k)$. Ker trikotnik in kvadrat v zgornjem diagramu komutirata in je e zožek za f in g, velja

$$Tu \circ \mu_j = Tu \circ p_j \circ e = q_u \circ g \circ e = q_u \circ f \circ e = p_k \circ e = \mu_k$$

in (c,μ) je res stožec nad T. Izberimo zdaj nek stožec (c',τ) nad T. Obstoj puščic $\tau_i : c' \to Ti$ pomeni, da obstaja natanko ena puščica $h : c' \to \prod_i Ti$, za katero velja $\tau_i = p_i \circ h$. Za vsako puščico $u \in J(j,k)$ imamo puščico $\tau_k : c' \to k$. Ker je $\prod_u Tk$ produkt, obstaja natanko ena puščica $\Phi : c' \to \prod_u Tk$, da velja $q_u \circ \Phi = \tau_k$. Toda $\tau_k = p_k \circ h = q_u \circ f \circ h$ in tudi $\tau_k = Tu \circ \tau_j = Tu \circ p_j \circ h = q_u \circ g \circ h$. Torej velja $\Phi = fh = gh$. Ker to velja in ker je e zožek, obstaja natanko ena puščica $\varphi : c' \to c$, da je $e \circ \varphi = h$. Trdimo, da ta φ ustreza puščici med vrhoma stožcev. Res, saj velja $\mu_i \circ \varphi = p_i \circ e \circ \varphi = p_i \circ h = \tau_i$. Pokazati moramo še enoličnost te puščice. Naj bo torej $\psi : c' \to c$ puščica z lastnostjo $\tau_i = \mu_i \circ \psi$ za vsak objekt i. To seveda pomeni, da je $p_i \circ h = p_i \circ e \circ \psi$, od kjer z istim sklepom kot prej dobimo enakost $h = e \circ \psi$. Ker pa je bil φ edini s to lastnostjo, je $\psi = \varphi$. Stožec (c,μ) je torej limitni stožec. □

Takoj lahko zapišemo pomembno posledico.

Posledica 4.4. *Kategorija C je polna natanko tedaj, ko v njej obstaja zožek poljubnega para puščic in vsi majhni produkti.*

Dokažimo sedaj poseben primer Freydovega izreka. S tem si bomo kasneje pomagali pri dokazu polnega izreka.

Izrek 4.5. *Naj bo C polna lokalno majhna kategorija. V C obstaja začetni objekt natanko tedaj, ko zadošča pogoju o množici rešitev: obstaja majhna množica I in za vsak $i \in I$ objekt $k_i \in C$, tako da za vsak objekt $c \in C$ obstaja puščica $k_i \to c$.*

Morda je treba opomniti, da polnost kategorije ne zagotavlja obstoja začetnega objekta. Ta je namreč *ko*limita.

V dokazu bomo tvorili zožek družine puščic. Kot prej pri produktih je posplošitev iz predstavljenega primera zožka dveh puščic očitna.

Dokaz. Naj ima C začetni objekt z. Za I lahko izberemo neko množico z enim elementom $\{*\}$ in postavimo $k_* = z$. S tem smo zadostili pogoju o množici rešitev.

Privzemimo sedaj, da C zadošča pogoju o množici rešitev. Ker je C polna, obstaja produkt $\prod_i k_i$. Za vsak objekt $c \in C$ obstaja kaka puščica $\prod_i k_i \to c$; vzamemo lahko kompozitum $\prod_i k_i \to k_i \to c$, kjer je prva puščica ustrezna projekcija. Po predpostavki je hom-množica $C(\prod_i k_i, \prod_i k_i)$ majhna in, ker je C polna, lahko tvorimo zožek $e : z \to \prod_i k_i$ vseh puščic te hom-množice. Spet za vsak $c \in C$ obstaja kaka puščica $z \to c$; vzamemo enostavno $z \to \prod_i k_i \to c$. Premislimo, da je z iskani začetni objekt kategorije C. Recimo, da za nek $c \in C$ obstajata dve puščici $f, g : z \to c$. Označimo z $e' : y \to z$ njun zožek. Vemo, da obstaja neka puščica $s : \prod_i k_i \to y$. Situacijo predstavimo z diagramom

$$
\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "e'"] & z \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] \arrow[d, "e"] & c \\
& \prod_i k_i \arrow[ul, "s"] &
\end{tikzcd}
$$

Puščici ee_1s in $1_{\prod_i k_i}$ sta elementa množice $C(\prod_i k_i, \prod_i k_i)$. Ker pa je e zožek vseh takih puščic, velja $ee'se = 1_{\prod_i k_i}e = e = e1_z$. Z ogledom diagrama za zožek e

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "e"] & \prod_i k_i \arrow[r, shift left, "ee's"] \arrow[r, shift right, "1_{\prod_i k_i}"'] & \prod_i k_i \\
z \arrow[u, dashed, "e'se \,|\, 1_z"] \arrow[ur, "e"'] & &
\end{tikzcd}
$$

ugotovimo, da je $1_z = e'se$. Puščica e' ima torej desni inverz. Potem pa iz enakost $fe' = ge'$ sledi enakost $f = g$. Sklepamo lahko, da je z začetni objekt. $\square$

Definicija 4.6. *Naj bo $c \in C$ in $F : B \to C$ funktor. Kategorija $(c \downarrow F)$ ima za objekte pare (f, b), kjer je $b \in B$ in $f \in C(c, Fb)$, puščice $g : (f, b) \to (f', b')$ pa so tiste puščice $g \in B(b, b')$, za katere velja $f' = Fg \circ f$. Kategorijo $(c \downarrow F)$ imenujemo* kategorija objektov F-pod c.

Kategorije tipa $(c \downarrow F)$ oziroma splošnejše *vejične kategorije* so zelo uporabno orodje, saj lahko v njih zakodiramo razne zahteve po komutativnosti, na katere nam potem ni več treba misliti.

Definicija 4.7. *Funktor $F : C \to D$* ustvarja limite oblike J, *če za vsak diagram T oblike J v C velja, da za vsak limitni stožec (d, ψ) nad FT obstaja natanko en stožec (c, φ) nad T, da je $d = Fc$ in $\psi = F\varphi$, in je ta stožec limitni.*

Trditev 4.8. *Naj bo T diagram oblike J v C. Naj funktor $F : C \to D$ ustvarja limite za diagram T in naj v D obstaja limita diagrama FT. Potem F ohranja limito diagrama T.*

Dokaz. Naj bosta (c, φ) in (d, ψ) limiti diagramov T in FT. Po predpostavki F ustvarja limite za diagram T, torej obstaja natanko en stožec (c', τ) nad T, za katerega velja $(Fc', F\tau) = (d, \psi)$, in je limitni. Ker so limite do izomorfizma enolične, obstaja obrnljiva puščica $f : c' \to c$, tako da velja $\tau_i = \varphi_i f$. Sedaj moramo preveriti, da je $(Fc, F\varphi)$ limitni stožec nad FT. Naj bo torej (d', σ) nek stožec nad FT.

Opazujemo diagram

$$\begin{tikzcd}
 & d' \arrow[d, dashed, "\rho"] \arrow[dddl, bend right, "\sigma_i"'] \arrow[dddr, bend left, "\sigma_j"] & \\
 & d \arrow[d, "Ff"] \arrow[ddl, bend right, "\psi_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\psi_j"] & \\
 & Fc \arrow[dl, "F\varphi_i"'] \arrow[dr, "F\varphi_j"] & \\
FTi \arrow[rr, "FTu"'] & & FTj
\end{tikzcd}$$

kjer je ρ enolična puščica, ker je (d, ψ) limitni stožec. Naj bo $g : d' \to Fc$ neka puščica, za katero velja $F\varphi_i \circ g = \sigma_i$. Pokazati moramo, da obstaja natanko ena taka. Za puščico $Ff^{-1}g$ velja $\psi_i \circ Ff^{-1} \circ g = F(\tau_i f^{-1}) \circ g = F\varphi_i \circ g = \sigma_i$. To pomeni, da je $Ff^{-1} \circ g = \rho$, oziroma $g = Ff \circ \rho$. Torej je $(Fc, F\varphi)$ limitni stožec in F ohranja limite za diagram T. □

Lema 4.9. *Naj bo $F : C \to D$ funktor. Označimo s $P : (d \downarrow F) \to C$ projekcijo kategorije objektov F-pod d, ki jo na objektih definiramo s $P(f, c) = c$, na puščicah pa s $P(g) = g$. Naj F ohranja limite oblike J. Potem za vsak $d \in D$ projekcija P ustvarja limite oblike J.*

Dokaz. Naj bo T tak diagram oblike J v $(d \downarrow F)$, da v C obstaja limita (c, φ) diagrama PT. Za vsak $i \in J$ označimo $Ti = (f_i, c_i)$. Ker F ohranja limite oblike J, je $(Fc, F\varphi)$ limita diagrama FPT. Za $u \in J(i, j)$ je Tu puščica v $(d \downarrow F)$, torej velja $f_j = FTu \circ f_i$. Iz tega sklepamo, da je (d, f) stožec nad FPT. Ker je $(Fc, F\varphi)$ limita diagrama FPT, obstaja natanko ena puščica $\psi : d \to Fc$, da velja $f_i = F\varphi_i \circ \psi$. To pa pomeni, da je $((\psi, c), \varphi)$ stožec nad diagramom T, in to edini, ki se s P slika v stožec (c, φ). Pokazati moramo še, da je stožec $((\psi, c), \varphi)$ limitni. Naj bo zato $((g, c'), \tau)$ nek stožec nad T. Iščemo enolično puščico $\theta : (g, c') \to (\psi, c)$, za katero bo veljalo $\tau_i = \varphi_i \circ \theta$. Nekoliko drugače, iščemo puščico $\theta : c' \to c$, ki zadošča $\tau_i = \varphi_i \circ \theta$ in $\psi = F\theta \circ g$. S P lahko iz stožca $((g, c'), \tau)$ dobimo stožec nad PT. Ker je $(c, \varphi) = \operatorname{Lim} PT$, obstaja natanko ena puščica $\theta : c' \to c$, da velja $\tau_i = \varphi_i \circ \theta$. To situacijo s F preslikamo naprej. Kratek račun pokaže, da je $F\varphi_i \circ F\theta \circ g = F\tau_i \circ g = f_i$. Ker pa je bil ψ edini s to lastnostjo, mora veljati $F\theta \circ g = \psi$. Res je θ iskana puščica in $((\psi, c), \varphi)$ je limita diagrama T. □

Pomembno posledico te leme dobimo, če je kategorija C polna in funktor F zvezen.

Posledica 4.10. *Naj bo C polna kategorija in naj bo $F : C \to D$ zvezen funktor. Potem je za vsak $d \in D$ kategorija $(d \downarrow F)$ polna.*

Zdaj smo pripravljeni, da končno formuliramo in dokažemo Freydov izrek v vsej polnosti.

Izrek 4.11 (Freydov izrek o adjungiranih funktorjih)**.** *Naj bo D polna lokalno majhna kategorija. Funktor $G : D \to C$ ima levega adjungiranca natanko tedaj, ko je zvezen in zadošča pogoju o množici rešitev: za vsak objekt $c \in C$ obstaja množica I in za vsak $i \in I$ puščica $f_i : c \to Gd_i$, tako da lahko vsako puščico $h : c \to Gd$ zapišemo kot kompozitum $h = Gt \circ f_i$ za nek i in neko puščico $t : d_i \to d$.*

Preden izrek dokažemo, premislimo, da je izrek 4.5 res poseben primer. Videli smo že, da ima kategorija D začetni objekt natanko tedaj, ko ima funktor $G : D \to \mathbf{1}$

levega adjungiranca. Ta funktor je očitno zvezen, torej ima D začetni objekt natanko tedaj, ko G zadošča pogoju o množici rešitev iz Freydovega izreka. Kaj pa ta pravi v tem posebnem primeru? Puščice f_i, h in Gt bodo vse identiteta v kategoriji $\mathbf{1}$, s tem pa bo pogoj o razcepu puščice h izpolnjen. Pogoj o množici rešitev se torej poenostavi v zahtevo, da obstaja množica objektov d_i in za vsakega od teh puščica $d_i \to d$. To pa je točno pogoj o množici rešitev iz izreka 4.5.

Dokaz. Naj obstaja ustrezen funktor F, da velja $F \dashv G$. Izrek 4.2 zagotavlja, da G ohranja vse limite, ki obstajajo v C; posebej to pomeni, da je G zvezen. Za pogoj o množici rešitev postavimo za I pri vsakem objektu $c \in C$ množico z enim elementom, $I = \{*\}$, za puščico f_* pa vzamemo η_c, komponento enote adjunkcije pri c. Ker je η_c univerzalna, je pogoj o množici rešitev izpolnjen.

Privzemimo zdaj, da je G zvezen in da zadošča pogoju o množici rešitev. Adjungiranca bomo konstruirali "po točkah", z uporabo točke (2) izreka 3.2. Poiskati moramo objekte F_*d in univerzalne puščice $\eta_c : c \to GF_*c$ iz c v G. Par (η_c, F_*c) je očitno začetni objekt v kategoriji $(c \downarrow G)$. Obstoj tega začetnega objekta bomo dobili iz izreka 4.5, če seveda kategorija $(c \downarrow G)$ ustreza njegovim predpostavkam. Ker je D polna, lahko iz posledice 4.10 sklepamo, da je polna tudi $(c \downarrow G)$. Ker hom-razredi $(c \downarrow G)((f,d),(g,d'))$ ustrezajo hom-razredom $D(d,d')$ in ker je D lokalno majhna, je tudi $(c \downarrow G)$ lokalno majhna. Očitno je tudi, da pogoj o množici rešitev v D natanko ustreza pogoju o množici rešitev iz 4.5 v $(c \downarrow G)$. Kategorija $(c \downarrow G)$ torej ima začetni objekt, kar pomeni da funktor G ima levega adjungiranca. $\square$

Oglejmo si primer uporabe tega izreka. Naj bo $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ pozabljivi funktor. S Freydovim izrekom bi radi našli njegovega levega adjungiranca. Rutinski razmislek nam pokaže, da je kategorija $\mathbf{Grp}$ polna in lokalno majhna in da je funktor U zvezen. Osredotočimo se na pogoj o množici rešitev. Fiksirajmo množico X, grupo G in preslikavo $f : X \to UG$. Označimo s $S = \langle f(x); x \in X \rangle$ podgrupo, generirano s sliko preslikave f. Vsak element iz S lahko zapišemo kot $s = (f(x_1))^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot (f(x_n))^{\pm 1}$, za nek izbor elementov $x_1, \ldots, x_n \in X$. Iz tega pa lahko sklepamo, da je kardinalnost grupe S navzgor omejena z $\max\{\aleph_0, |X|\}$. Neizomorfne grupe kardinalnosti manjše od nekega fiksnega kardinalnega števila pa tvorijo množico; označimo jo s $\mathcal{S}$. Potem pa je množica $\{g : X \to US; S \in \mathcal{S}\}$ množica rešitev za G pri X. Torej obstaja funktor F, ki je levo adjungiran pozabljivemu funktorju. To je seveda klasični funktor, ki množicam prireja proste grupe. Opazimo, da smo se pri tem opisu prostih grup izognili njihovi eksplicitni konstrukciji in težavam, ki jih imamo pri vpeljevanju grupne strukture. Ta argument bi lahko posplošili na obstoj prostih algeber poljubne varietete, kot v [2].

4.3. **Posebni izrek o adjungiranih funktorjih.** Pogoj o množici rešitev iz izreka 4.11 nam ni preveč všeč. Lahko si mislimo, da ga v splošnih kategorijah ni enostavno preveriti. Zato si želimo drugačno formulacijo izreka; tako, ki jo bo (v najpogostejših kategorijah) lažje uporabiti. Pri iskanju take formulacije se bomo oprli na dejstvo, da v kategorijah, ki jih srečujemo, pogosto poznamo neko "notranjo strukturo" objektov in puščic, ki v splošnih kategorijah ni dosegljiva, ali pa sploh ne obstaja.

Definicija 4.12. *Naj bo C kategorija. Puščica $f \in C(c,c')$ je* mono*, če za vsaki puščici $g \in C(a,c)$ in $h \in C(b,c)$, za kateri velja $fg = fh$, velja $g = h$.*

Naj bosta $f : a \to c$ in $g : b \to c$ mono. Pišimo $f \le g$, če obstaja puščica f', da velja $f = gf'$. Pišimo $f \equiv g$, če velja $f \le g$ in $g \le f$. Očitno je $\equiv$ ekvivalenčna relacija nad mono puščicami s kodomeno c.

Definicija 4.13. *Ekvivalenčnim razredom relacije* $\equiv$ *pravimo* podobjekti *objekta* c.

Pogosto rečemo podobjekt kar nekemu predstavniku ekvivalenčnega razreda ali pa domeni nekega predstavnika. Lahko se prepričamo, da relacija $\leq$ delno ureja razred podobjektov objekta c. Če mono puščice razumemo kot posplošitev injektivnih preslikav, potem relacija $\leq$ ustreza inkluziji. Iz izkušenj vemo, da navadna unija podobjektov (na primer podgrup) ponavadi ni podobjekt, presek pa je. Ali lahko torej kategorično tvorimo nekakšen presek podobjektov v splošni kategoriji?

Naj bo J kategorija z objekti i, j, k in neidentitetnimi puščicami $u : i \to j$ in $v : k \to j$. Naj bo T diagram oblike J v C. Limiti diagrama T pravimo *povlek*. Stožec nad diagramom T je komutirajoči kvadrat

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"] & Tk \arrow[d, "Tv"] \\ Ti \arrow[r, "Tu"] & Tj \end{tikzcd}$$

Limitnemu stožcu (p, f, g) pravimo tudi povlek puščic Tu in Tv.

Trditev 4.14. *Naj bo* (p, f', g') *povlek puščic* f *in* g.

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

Če je puščica f *mono, je tudi puščica* f' *mono.*

Povlek mono puščice je torej mono puščica.

Dokaz. Naj bosta $h, k : q \to p$ puščici, za kateri velja $f'h = f'k$. Potem seveda velja tudi $gf'h = gf'k$ oziroma $fg'h = fg'k$. Ker pa je f mono, velja $g'h = g'k$. Oglejmo si diagram

$$\begin{tikzcd} q \arrow[drr, bend left, "f'h=f'k"] \arrow[ddr, bend right, "g'h=g'k"'] & & \\ & p \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

Zunanji diagram očitno komutira. Ker pa je (p, f', g') povlek, obstaja natanko ena puščica $\theta : q \to p$, da velja $f'\theta = f'h = f'k$ in $g'\theta = g'h = g'k$. Ker tem zahtevam hkrati ustrezata h in k, velja $k = h$. □

Denimo, da ima C povleke in naj bosta $u : a \to c$ in $v : b \to c$ podobjekta objekta c. Trditev pravi, da nam povlek teh dveh puščic da nek podobjekt $w : p \to c$, za katerega velja $w \leq u$ in $w \leq v$. Temu podobjektu pravimo *presek* podobjektov u in v. Lahko se prepričamo, da je presek podobjektov največja spodnja meja glede na urejenost $\leq$. Naj bo f podobjekt objekta c in naj velja $f \leq u$ in $f \leq v$, oziroma $f = u\varphi$ in $f = v\psi$ za neki puščici φ in ψ. Ker je p povlek, obstaja natanko ena puščica θ, da komutira diagram

$$\begin{tikzcd}
q \arrow[dr, dashed, "\theta"] \arrow[drr, bend left, "\psi"] \arrow[ddr, bend right, "\varphi"'] & & \\
& p \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d, "v"] \\
& a \arrow[r, "u"'] & c
\end{tikzcd}$$

Torej velja $f = w\theta$ ali drugače $f \leq w$. Analogno, če povlek obstaja, lahko tvorimo presek poljubne množice podobjektov objekta c.

Lema 4.15.

(1) *Naj bosta $f, g : c \to c'$ puščici in naj bo $e : b \to c$ njun zožek. Potem je e mono. Če je $f \neq g$, potem e ni obrnljiva.*

(2) *Naj bo $f : b \to c$ podobjekt objekta c in naj bo $g : a \to b$ mono, a neobrnljiva. Potem je $fg \leq f$ in $f \not\leq fg$.*

Dokaz.

(1) Naj bosta $h, h' : a \to b$ puščici, za kateri velja $eh = eh'$. Ker je e zožek, velja $fe = ge$ oziroma $feh = geh$. Torej obstaja natanko ena puščica $\varphi : a \to b$, da velja $eh = e\varphi$. To pa pomeni, da je $h = h'$, in e je mono. Če je e obrnljiva, pa velja $f = e^{-1}ef = e^{-1}eg = g$.

(2) Relacija $fg \leq f$ je očitna. Denimo, da velja tudi $f \leq fg$. To pomeni, da obstaja taka puščica h, da velja $f = fgh$. Ker je f mono, velja $gh = 1_b$. Če to enačbo na desni komponiramo z g, dobimo $ghg = g$, oziroma, ker je g mono, $hg = 1_a$. To pa pomeni, da je h inverz za g. Torej tak h ne obstaja in $f \not\leq fg$.

□

Definicija 4.16. *Množica objektov Q kategorije C je* kogenerirajoča množica*, če za vsak par vzporednih puščic $h \neq h' : c \to c'$ obstaja objekt $q \in Q$ in puščica $g : c' \to q$, tako da velja $gh \neq gh'$. Objekt $q \in C$ je* kogenerator*, če je $\{q\}$ kogenerirajoča množica.*

Ogledali si bomo reformulacijo izrekov 4.5 in 4.11, kjer se bomo izognili pogoju o množici rešitev tako, da bomo predpostavili obstoj ustrezne kogenerirajoče množice.

Izrek 4.17. *Naj bo C polna lokalno majhna kategorija s kogenerirajočo množico Q. Naj za vsak objekt $c \in C$ obstaja presek vseh njegovih podobjektov. Potem ima C začetni objekt.*

Dokaz. V dokazu bomo po korakih zgradili diagram

$$\begin{tikzcd}
q & c \arrow[l, "h"'] \arrow[dl, "j"] & c' \arrow[l] \arrow[dl, "j'"] \\
\prod_{h \in H} q \arrow[u, "p_h"] \arrow[d, "p_h"'] & \prod_{q \in Q} q \arrow[l, "k"] \arrow[dl, "\tilde{p}_q"] & r \arrow[l, "u"] \arrow[u] \\
q & &
\end{tikzcd}$$

Naj bo $u : r \to \prod_{q\in Q} q$ presek vseh podobjektov tega produkta. Naj bo $c \in C$ in naj obstajata dve različni puščici $r \to c$. Po lemi 4.15 bo njun zožek neobrnljiva mono puščica $e : d \to r$, oziroma bo ue podobjekt produkta, strogo manjši u. Ker pa je u presek vseh podobjektov, je tudi najmanjši podobjekt, kar vodi v protislovje. Torej za vsak objekt c obstaja kvečjemu ena puščica $r \to c$. Da pokažemo, da je r začetni objekt, moramo poiskati neko puščico $r \to c$ za vsak objekt c. Naj bo $H = \bigcup_{q\in Q} C(c, q)$. Obstaja natanko ena puščica $j : c \to \prod_{h\in H} q$, tako da velja $p_h \circ j = h$ za vsak $h \in H$, kjer je p_h ustrezna projekcija produkta. Naj bosta $f, g : b \to c$ različni puščici, za kateri velja $jf = jg$. Ker je Q kogenerirajoča množica, obstaja puščica $h \in H$, da velja $hf \neq hg$ oziroma $p_h jf \neq p_h jg$, kar je protislovje. Tak par puščic potem ne obstaja oziroma $f = g$, kar pomeni, da je j mono. Označimo s $k : \prod_{q\in Q} q \to \prod_{h\in H} q$ edino puščico, za katero velja $\tilde{p}_q = p_h \circ k$. Naj bo c' povlek puščic j in k, kot v diagramu

$$\begin{tikzcd} c' \arrow[r, "j'"] \arrow[d] & \prod_{q\in Q} q \arrow[d, "k"] \\ c \arrow[r, "j"] & \prod_{h\in H} q \end{tikzcd}$$

Ker je j mono, je tudi j' mono in podobjekt $\prod_{q\in Q} q$. Ker je u presek vseh podobjektov, obstaja puščica $r \to c'$. Kompozitum $r \to c' \to c$ je iskana puščica. $\square$

Ta izrek zelo spominja na izrek 4.5 in ga bomo tudi na podoben način kot takrat uporabili pri dokazu posebnega izreka o adjungiranih funktorjih. Spet bomo prešli v kategorijo objektov pod nekim objektom. Da pa bomo lahko naredili kakšen sklep v povezavi z izrekom 4.17, moramo najprej ugotoviti, kaj so podobjekti v tej kategoriji.

Lema 4.18. *Naj v C obstajajo povleki parov puščic in naj funktor $F : C \to D$ ohranja povleke parov. Puščica $h : (f, c) \to (f', c')$ v kategoriji $(d \downarrow F)$ je mono natanko tedaj, ko je puščica $h : c \to c'$ v C mono.*

Dokaz. Če je $h : c \to c'$ mono, je očitno $h : (f, c) \to (f', c')$ tudi mono, saj komponiranje v $(d \downarrow F)$ ustreza komponiranju v C. Za obratno smer najprej opazimo, da je puščica $u : x \to y$ kategorije X mono natanko tedaj, ko je povlek para u, u enak $(x, 1_x, 1_x)$. Lema 4.9 pravi, da projekcija $P : (d \downarrow F) \to C$ ustvarja limite, torej tudi povleke, C pa ima povleke parov. Po trditvi 4.8 projekcija ohranja povleke, posebej povlek $((f, c), 1_c, 1_c)$, in torej slika mono puščice v mono puščice. $\square$

Izrek 4.19 (Posebni izrek o adjungiranih funktorjih)**.** *Naj bo D polna lokalno majhna kategorija s kogenerirajočo množico Q. Naj za vsak objekt $d \in D$ obstaja presek vsakega razreda njegovih podobjektov. Naj bo C lokalno majhna kategorija. Potem ima funktor $G : D \to C$ levega adjungiranca natanko tedaj, ko je G zvezen in ohranja povleke razredov mono puščic.*

Dokaz. Naj obstaja ustrezen funktor F, da bo veljalo $F \dashv G$. Potem, po izreku 4.2, G ohranja vse limite, posebej vse povleke.

Naj bo sedaj G zvezen funktor, ki ohranja povleke družin mono puščic. Kot v dokazu izreka 4.11 bomo adjungiranca konstruirali tako, da bomo za vsak $c \in C$ poiskali začetni objekt v kategoriji $(c \downarrow G)$. Pri tem bomo uporabili izrek 4.17. Kategorija $(c \downarrow G)$ je lokalno majhna (enak premislek kot pri dokazu 4.11), po posledici 4.10 pa tudi polna. Naj bo $H = \bigcup_{q\in Q} C(c, Gq)$. Ker je Q množica in je C lokalno majhna je H množica. Naj bosta $g \neq g' : (f, d) \to (f', d')$ puščici. Ker je Q

kogenerirajoča, obstajata $q \in Q$ in puščica $h : d' \to q$, da velja $hg \neq hg'$. Ta h pa je tudi puščica v $(c \downarrow G)$, če ga vidimo kot $h : (f', d') \to (Gh \circ f', q)$, kjer je kodomena iz H. Torej je H kogenerirajoča množica v $(c \downarrow G)$. Konstruirati moramo še preseke podobjektov. Naj bo torej $\{h_i : (f_i, d_i) \to (f, d)\}$ razred vseh podobjektov objekta (f, d). Po lemi 4.18 so puščice $h_i : d_i \to d$ mono v D. Po predpostavki obstaja njihov presek $h : p \to d$ z družino puščic $s_i : p \to d_i$, da velja $h = h_i \circ s_i$. Ker G ohranja povleke razredov mono puščic, je $Gh : Gp \to Gd$ povlek puščic Gh_i v C. Velja $Gh = Gh_i \circ Gs_i$.

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[d, "f_i"] \arrow[dr, "f"] & \\ Gp \arrow[r, "Gs_i"] & Gd_i \arrow[r, "Gh_i"] & Gd \end{tikzcd}$$

Ker velja $f = Gh_i \circ f_i$, obstaja natanko ena puščica $\varphi : c \to Gp$, da velja $f_i = Gs_i \circ \varphi$. To pa pomeni, da je $h : (\varphi, p) \to (f, d)$ res puščica v kategoriji $(c \downarrow G)$. Po lemi 4.9 projekcija ustvarja povleke, torej je ta h povlek danega razreda puščic h_i, saj je to edini stožec, ki se ustrezno projicira. Ta povlek pa je iskani presek podobjektov. Kategorija $(c \downarrow G)$ ustreza pogojem izreka 4.17 in ima začetni objekt. S tem pa lahko konstruiramo levega adjungiranca funktorja G. $\square$

Morda nas še vedno nekoliko motijo zahteve glede obstoja in ohranjanja povlekov mono puščic. Pogosto se izkaže, da je ta zahteva nepotrebna. V veliko kategorijah ima namreč vsak objekt kvečjemu množico podobjektov in se zato zahteva po obstoju povlekov skrije v polnost kategorije, zahteva po ohranjanju povlekov pa v zveznost funktorja. Kategorijam, kjer ima vsak objekt množico podobjektov, pravimo *dobro potencirane*. Večina tipičnih kategorij je dobro potenciranih (**Set, Top, Grp,** ...). V primeru dobro potencirane kategorije lahko torej posebni izrek o adjungiranih funktorjih formuliramo nekoliko krajše, v njegovi klasični obliki.

Posledica 4.20. *Naj bo D polna dobro potencirana lokalno majhna kategorija s kogenerirajočo množico Q. Naj bo C lokalno majhna kategorija. Potem ima funktor $G : D \to C$ levega adjungiranca natanko tedaj, ko je G zvezen.*

Posebni izrek o adjungiranih funktorjih smo dokazali neodvisno od Freydovega izreka, z zelo podobno strategijo. Vseeno pa je ime upravičeno; posebni izrek lahko namreč v primeru dobro potencirane kategorije dokažemo s pomočjo Freydovega izreka. Čeprav je dokaz s tem prijemom morda manj intuitiven, ga bomo na kratko orisali.

Dokaz. S predpostavkami izreka 4.20 bi radi za vsak $c \in C$ konstruirali množico rešitev za G. Potem bomo uporabili izrek 4.11 in dobili levega adjungiranca. Označimo množico $H = \bigcup_{q \in Q} C(c, Gq)$. Naj bo M množica predstavnikov podobjektov produkta $\prod_{h \in H} q$. Dokazali bomo, da je množica $S = \{c \to Gr; \exists m : r \to \prod_{h \in H} q \in M\}$ množica rešitev za G. Fiksirajmo torej $f : c \to Gd$ in poiščimo faktorizacijo. Označimo množico $K = \bigcup_{q \in Q} D(d, q)$. Projekcije produkta $\prod_{h \in H} q$ bomo pisali p_h, projekcije produkta $\prod_{k \in K} q$ pa $\tilde{p}_k$. Na isti način kot pri dokazu 4.17 lahko dobimo puščico $\sigma : d \to \prod_{k \in K} q$, za katero velja $k = \tilde{p}_k \circ \sigma$ in ki je mono. Obstaja tudi puščica $\tau : \prod_{h \in H} q \to \prod_{k \in K} q$, za katero velja $p_{Gk \circ f} = \tilde{p}_k \circ \tau$. Naj bo $(r, \varphi : r \to \prod_{h \in H} q, t : r \to d)$ povlek puščic τ in σ. Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $\varphi \in M$; če ni, vzamemo ustrezen izomorfen povlek. Ker je G

zvezen, je

$$\begin{array}{ccc} Gr & \xrightarrow{Gt} & Gd \\ {\scriptstyle G\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G\sigma} \\ \prod_{h\in H} Gq & \xrightarrow{G\tau} & \prod_{k\in K} Gq \end{array}$$

povlek puščic $G\tau$ in $G\sigma$. Izkaže se, da obstaja taka puščica $g : c \to \prod_{h\in H} Gq$, da velja $G\sigma \circ f = G\tau \circ g$. Potem pa obstaja puščica $\theta : c \to Gr \in S$, za katero velja $f = Gt \circ \theta$, kar je želena faktorizacija. □

Zanimiv primer uporabe posebnega izreka o adjungiranih funktorjih je tale: označimo s **CHaus** kategorijo kompaktnih Hausdorffovih prostorov z zveznimi preslikavami. Naj bo G : **CHaus** $\to$ **Top** inkluzijski funktor (včasih namesto **Top** vzamemo podkategorijo prostorov Tihonova). Pokazati želimo obstoj levega adjunginranca temu funktorji in to z uporabo posledice 4.20. Kategorija **CHaus** je lokalno majhna in dobro potencirana, saj je taka že njena nadkategorija **Top**. Da pokažemo še njeno polnost moramo poiskati produkte in zožke. Produkti obstajajo v **Top** ter so Hausdorffovi in kompaktni (izrek Tihonova), torej obstajajo tudi v **CHaus**. Zožek puščic ustreza njuni incidenčni množici, ki je Hausdorffova in zaprta oz. kompaktna, torej spet objekt v **CHaus**, ki je torej polna. Po Urisonovi lemi je zaprt enotski interval I kogenerator. Funktor G je očitno zvezen. Posledica 4.20 nam pove, da ima funktor G levega adjungiranca β : **Top** $\to$ **CHaus**. Temu funktorju oz. ustrezni konstrukciji pravimo Stone-Čechova kompaktifikacija.

Ta rezultat o eksistenci lahko primerjamo z eksplicitno konstrukcijo kompaktifikacije. Imejmo za topološki prostor X preslikavo $h : X \to I^{C(X,I)}$, kjer na kodomeno vpeljemo produktno topologijo. Preslikavo h definiramo s $h(x) = (f(x))_{f\in C(X,I)}$. Zaprtje slike te preslikave je kompakten Hausdorffov prostor. Trudoma lahko pokažemo, da je preslikava h univerzalna in da tako pridobljeni prostor ustreza Stone-Čechovi kompaktifikaciji βX, pridobljeni z posebnim izrekom o adjungiranih funktorjih. Na koncu pa se moramo sami odločiti, katera konstrukcija je "boljša" in ali je vredno poznati kompaktifikacijo po točkah.

V posebnem izreku o adjungiranih funktorjih smo se izognili pogoju o množici rešitev in namesto njega uvedli pogoje o podobjektih in kogenerirajoči množici. Naš namen je bil predpostavke izreka spraviti v obliko, kjer bi lahko uporabili naše znanje iz klasične, nekategorične matematike. To vsekakor velja za pogoje o podobjektih, še posebej za to ker je dosti kategorij dobro potenciranih. Se pa zato včasih zalomi pri kogenerirajoči množici. Predvsem kategorije algebraičnih struktur pogosto nimajo kogenerirajočih množic. Vzemimo za primer kategorijo **Grp**. Denimo, da obstaja kogenerirajoča množica $Q = \{H_i; i \in I\}$. Naj bo G enostavna grupa. Identiteta in konstantni homomorfizem sta endomorfizma grupe G. Torej obstajata nek $i \in I$ in nek homomorfizem $f : G \to H_i$, da je $f \neq 1$. Ker je G enostavna, mora biti f injektiven oziroma mono puščica. To pomeni, da je vsaka enostavna grupa podobjekt nekega objekta iz kogenerirajoče množice. Ker je **Grp** dobro potencirana, bi to pomenilo, da je razred enostavnih grup množica. To nas vodi v protislovje, ker obstajajo enostavne grupe poljubno visoke kardinalnosti (projektivna specialna linearna grupa reda 2 nad neskončnim obsegom je enostavna in ima isto kardinalnost kot obseg). Kategorija **Grp** torej nima kogenerirajoče množice. Za opis relativno splošnih rezultatov glede obstoja kogenerirajočih množic glej [3].

Literatura

[1] S. Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press 2006.
[2] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag 1998.
[3] W. Tholen, *Injective Objects and Cogenerating Sets*, J. Algebra **73** (1981) 139-155.