UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Matic Skočir

Dinamične mere tveganja

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Damjan Škulj

Ljubljana, 2014

Kazalo

Dinamične mere tveganja

POVZETEK

Delo diplomskega seminarja obravnava statične in dinamične mere tveganja. Na začetku so definirane statične mere tveganja skupaj z glavnimi lastnostmi. Nekoliko več pozornosti je posvečene konveksnim in koherentnim meram tveganja. Statične mere lahko predstavimo preko množice sprejemljivih pozicij, prav tako jih lahko izražamo s pomočjo robustne reprezentacije. Za nazornost je vključen primer izračunave tvegane vrednosti za zvezno porazdeljeno slučajno spremenljivko. V nadaljevanju so definirane dinamične mere tveganja skupaj z lastnostmi. Navedena je tudi robustna reprezentacija dinamičnih mer tveganja. Na koncu je napisano še nekaj o pomembni lastnosti dinamičnih mer - časovni konsistentnosti.

Dynamic risk measures

ABSTRACT

In my diploma thesis I described static and dynamic risk measures. At the begining I defined static risk measures along with their main properties. I focused a little bit more on coherent and convex risk measures. Static risk measures can be presented via acceptance sets, also can they be presented by robust representation. For the sake of clearness I added an example for computing value at risk (VaR) of continuous random variable. In the next chapter dynamic risk measures are introduced along with corresponding properties. Dynamic risk measures can be presented via robust representation or acceptance sets. In the end I described one important dynamic risk measures property- time consistency.

Math. Subj. Class. (2010): 91B30.

Ključne besede: mere tveganja, statične mere, dinamične mere, množice sprejemljivih pozicij, koherentnost, konveksnost, časovna konsistentnost.

Keywords: risk measures, static measures, dynamic measures, acceptable sets, coherence, convexity, time consistency.

1. Uvod

Mere tveganja so kvanitativna orodja za določanje minimalnih kapitalskih rezerv. V financah so nujno potrebna za ohranjanje finančne stabilnosti finančnih institucij. Posebej pomembne so konveksne in koherentne mere tveganja, saj pri uporabi teh mer tveganje z diverzifikacijo pada.

Statične mere tveganja so funkcije, ki nam za tvegan finančni istrument izračunajo količino denarja, ki ga moramo imeti v rezervi danes, da pokrijemo skoraj vse možne scenarije razvoja cene instrumenta v določenem trenutku v prihodnosti.

Najbolj znana statična mera tveganja je tvegana vrednost (VaR). Izračuna nam mejo, pod katero se nahaja (1-p) kvantil porazdelitvene gostote izplačila tveganega finančnega instrumenta.

Pomembnejše nadaljevanje statičnih mer tveganja so dinamične mere tveganja. Te slikajo iz prostora $(\Omega, \mathcal{F}_T, p)$ v prostor $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Slučajne spremenljivke, ki predstavljajo možna izplačila (v končnem času T) tveganega finančnega instrumenta, slikajo v slučajne spremenljivke, ki so ($\mathcal{F}_t$ merljive). V času t bomo vedeli, kakšno je izplačilo. Torej lahko za vsak trenutek v prihodnosti do končnega časa T izračunamo tveganje.

Pri formulaciji dinamičnih mer tveganja si pomagamo s pomočjo množice sprejemljivih pozicij in robustno reprezentacijo. Dve dejanski dinamični meri tveganja, ki sta predstavljeni v delu, sta dinamični VaR in dinamični AVaR (povprečna tvegana vrednost).

Pomembna lastnost dinamičnih mer je časovna konsistentnost, ki odraža sprejemanje in zavračanje določenih pozicij do nekega časa v prihodnosti. Če v nekem trenutku v prihodnosti zavrnemo neko pozicijo, mora to veljati tudi za vse prejšnje čase.

V začetnem poglavju so predstavljene statične mere tveganja, ki jim sledi razdelek o meri tveganja VaR. Četrti razdelek govori o dinamičnih merah tveganja, peto poglavje pa predstavlja nihovo robustno reprezentacijo. V zadnjem poglavju je na kratko opisana časovna konsistentnost.

2. Statične mere tveganja

V tem razdelku bomo opredelili pojem statične mere tveganja. Ta je pomembna za določanje količine kapitala, ki naj bo v rezervi.

Mere tveganja so kvantitativna orodja za določanje minimalnih kapitalskih rezerv. V financah so nujno potrebna za ohranjanje finančne stabilnosti finančnih institucij. Privzemimo, da imamo neko funkcijo R, ki je definirana na prostoru slučajnih spremenljivk $\mathcal{X}$, slika pa v zaprtje množice realnih števil ($\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$). Opomba: predpostavljamo da je $\mathcal{X}$ taka množica realnih slučajnih spremenljivk, da je:

$$\forall X \in \mathcal{X}, \forall m \in \mathbb{R}, X + m \in \mathcal{X}. \tag{1}$$

Imamo finančni instrument, ki je tvegan. Nahajamo se v $t = 0$, zanima pa nas tveganje za nek točno določen trenutek t v prihodnosti. V času $t = 0$ imamo verjetnostno porazdelitev razvoja cene tega instrumenta za čas t. Danes še ne vemo, v katerem izmed možnih stanj porazdelitve bo cena finančnega instrumenta. Množico vseh možnih izplačil finančnega instrumenta v času t zajamemo s slučajno spremenljivko X. Ta je lahko porazdeljena zvezno ali diskretno. Torej potrebujemo funkcijo, ki nam vsa ta možna izplačila preslika v neko realno vrednost (to bo količina rezerv, ki jih moramo imeti za ta instrument).

Definicija 2.1. Zgoraj omenjena funkcija R se imenuje statična mera tveganja, če veljata naslednji dve zahtevi:

- P_1. Monotonost: $\forall X, Y \in \mathcal{X}, X \leq Y \Rightarrow R(X) \geq R(Y)$
- P_2. Translacijska invarianca: $\forall m \in \mathbb{R}, R(X + m) = R(X) - m$

Monotonost je v matematiki značilnost, da funkcija (lahko tudi zaporedje ali aritmetična operacija) povsod narašča ali pa povsod pada. Monotonost je lastnost statičnih mer tveganja, ki nam pove, da za finančni instrument$X$, ki daje manjša od izplačila od instrumenta Y, sledi, da je tveganje, ki je povezano z X, večje od tveganja povezanega z vrednostjo Y. Torej moramo imeti za "manj vreden"finančni instrument v rezervi več denarja. Invarianta je v matematiki lastnost nekaterih matematičnih objektov, ki ostane nespremenjena, kadar izvedemo določene transformacije na tem objektu.

Translacijska invarianca pa nam pove, da dodaten denar zmanjšuje tveganje. V posebnem velja: $R(X + R(X)) = 0$. $R(X)$ je konstanta, za katero velja translacijska invarianca.

Definicija 2.2. Za mero tveganja velja, da je koherentna, če veljajo monotonost, translacijska invarianca, subaditivnost in pozitivna homogenost.

- C_1. Subaditivnost : $\forall X, Y \in \mathcal{X}, R(X + Y) \leq R(X) + R(Y)$
- C_2. Pozitivna homogenost: $\forall k > 0$ in $X \in \mathcal{X}, R(kX) = kR(X)$

Subaditivnost nakazuje, da se tveganje z diverzifikacijo (razpršenostjo naložb) zmanjšuje, pozitivna homogenost pa, da je tveganje premosorazmerno velikosti portfelja.

3. Tvegana vrednost

V tretjem poglavju bomo opisali mero tveganja VaR. Njena slovenska ustreznica je *tvegana vrednost*. Je ena izmed prvih mer tveganja, uvedenih v uporabo, in predstavlja temelj za razvoj vseh ostalih.

Tvegana vrednost oziroma value at risk (VaR) je najpogosteje uporabljena tržna mera tveganja s strani finančnih institucij. Leta 1995 jo je vodilnih 10 bank OECD-ja priporočilo in označilo kot standardno mero tveganja.

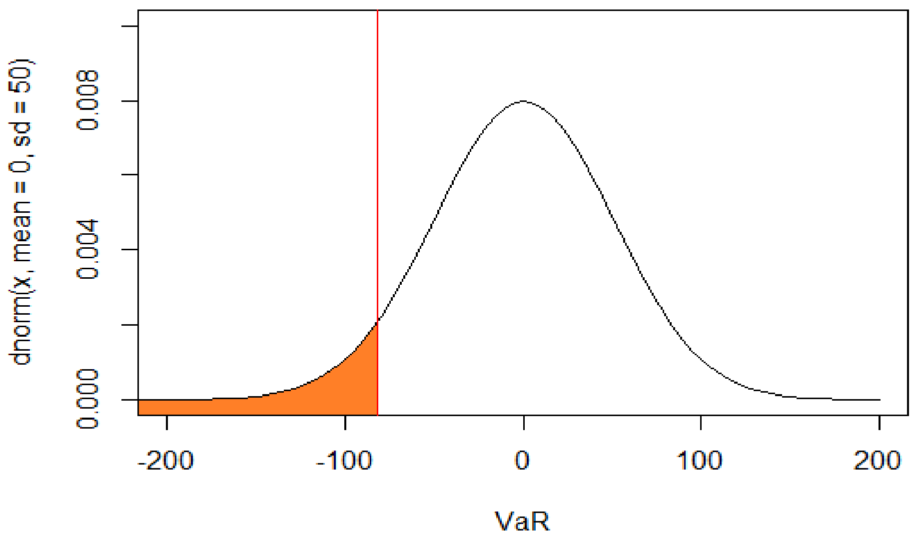
V celotni diplomski nalogi predpostavljamo, da je X slučajna spremenljivka, ki predstavlja možna izplačila finančnega instrumenta. V literaturi se pogosto pojavlja tudi obratna formulacija, kjer X predstavlja možne izgube.

Definicija 3.1. *Tvegana vrednost* (value at risk), povezana s slučajno spremenljivko X, ki ima zalogo vrednosti v realnih številih, pri stopnji $p \in [0, 1]$, je definirana kot najmanjšii zgornji p-kvantil slučajne spremenljivke X, tako da:

$$\mathrm{VaR}^p(X) = \sup\{\eta \in \mathbb{R} : P(X \geq -\eta) \geq p\}. \tag{2}$$

Tvegana vrednost je definirana kot najmanši zgornji p-kvantil X (največjii spodnji (1-p)-kvantil X) . Če X predstavlja izplačila, potem -X predstavlja izgube. $F_{-X}(x)$ je kumulativna porazdelitvena funkcija $-X$. Supremum je dosežen, ker je funkcija $F_{-X}(x)$ zvezna z leve in nepadajoča. Če je $F_{-X}(x)$ zvezna in naraščajoča je $\eta = VaR^p(X)$ edina rešitev enačbe $F_{-X}(\eta)) = p$.

Primer 3.2. Denimo, da želimo izračunati $VaR^{95\%}(X)$, kjer je $X \sim N(0, 50)$.



Slika 1: Tvegana vrednost

Na sliki leži desno od rdeče črte 95% ploščine gostote te porazdelitve. To pomeni, da se s 95% verjetnostjo nahajamo desno od te črte. Rdeča črta se nahaja pri vrednosti -82.24268.

S 95% verjetnostjo lahko trdimo, da bo izguba manjša od 82.24268 evrov (torej bo dobiček večji od -82.24268 s 95%). Dodati moramo (oz. imeti v rezervi) 82.24268 denarnih enot, da pridemo do vrednosti, ki je sprejemljiva za tveganje ($\mathrm{VaR}^{95\%}$). Tveganje je lahko tudi negativno. Predpostavimo primer, v katerem imamo tvegan finančni istrument Y. Predpostavimo, da $\mathrm{VaR}^{99\%}(Y) = -100$. To pomeni, da lahko odvzamemo 100 denarnih enot, da pridemo do vrednosti prilagojene za tveganje. Pri tem finančnem instrumentu torej velja, da lahko z 99% verjetnostjo trdimo, da bo dobiček večji od 100 denarnih enot.

Tvegana vrednost je bila ena izmed prvih vpeljanih mer tveganja in je pomembno prispevala k znižanju kapitalskih rezerv. Kljub temu pa ima nekaj pomanjkljivosti, zaradi katerih ni v vsesplošni uporabi finančnih institucij. *Tvegana vrednost* ni koherentna in konveksna mera tveganja, zato diverzifikacija ob uporabi le-te tveganja ne zmanjšuje nujno.

Primer 3.3. Primer, ko diverzifikacija ob uporabi *tvegane vrednosti* ne zmanjšuje tveganja.

Predpostavimo, da imamo dva tvegana finančna instrumenta X in Y z identičnima porazdelitvama dobičkov, pri čemer je $P(X = 1) = 1 - q$, $P(X = -2) = q$. Predpostavimo $p = 0.97, q = 0.02$.

$$X \sim Y \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{VaR}^{97\%}(X) = \mathrm{VaR}^{97\%}(Y) = -1$$

Pri investiciji vsega denarja v finančni instrument X oziroma Y dobimo pri izračunavanju tveganja s *tvegano vrednostjo* negativno vrednost. Finančna instrumenta X in Y sta vsak zase netvegana glede na $\mathrm{VaR}^{97\%}$.

Sedaj pa sestavimo portfelj obeh delnic, kjer ima vsaka polovičen delež. Najprej moramo izračunati verjetnostno porazdelitev portfelja $(X + Y)/2$.

$$(X + Y)/2 \sim \begin{pmatrix} -2 & -0.5 & 1 \\ 0.0004 & 0.0392 & 0.9604 \end{pmatrix}$$

Zanima nas $\mathrm{VaR}^{97\%}(X + Y)/2$.

$$\sup\{\eta, P(X \geq -\eta) \geq 0.97\} = 0.5$$

V tem primeru je $\mathrm{VaR}^{97\%} = +0.5$.

Pri izračunavanjau tveganja s *tvegano vrednostjo* iz primera vidimo, da diverzifikacija ne zmanšuje vedno tveganja, saj ima diverzificiran portfelj višje tveganje kot naložba v le-eno od teh delnic.
Mere tveganja, za katere to velja, so konveksne in koherentne mere tveganja. Ker za *tvegano vrednost* to ne velja vedno, to ni koherentna in konveksna mera tveganja.

Definicija 3.4. Za mero tveganja R pravimo, da je *konveksna mera tveganja*, če zadošča naslednji neenačbi:

- K_1. $R(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda R(X) + (1-\lambda)R(Y)$

za $0 \leq \lambda \leq 1$.

Predpostavljamo, da imamo dva tvegana finančna instrumenta X in Y. Obstaja neskončno mnogo različnih portfeljev teh dveh instrumentov - določeni so z deležem posamezne naložbe v portfelju. Delež naložbe X v portfelju označimo z λ, ki zajema vrednosti med 0 in 1. Vrednost portfelja bo torej enaka $\lambda X + (1-\lambda Y)$. Iz neenačbe vidimo, da mora biti tveganje portfelja manjše od vsote tveganj posameznih naložb za vsak $\lambda \in [0,1]$.

Trditev 3.5. *Koherentne mere tveganja so konveksne, obratna implikacija pa ne velja.*

Dokaz 3.6. *Predpostavljamo, da imamo dva tvegana finančna instrumenta X in Y, koherentno mero tveganja R in λ , $0 \leq \lambda \leq 1$.*
Sledi: $R(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq R(\lambda X) + R((1-\lambda)Y) = \lambda R(X) + (1-\lambda)R(Y)$

Neenačaj je posledica subaditivnosti, enačaj pa je posledica pozitivne homogenosti koherentne mere R.
Da obratna implikacija ne velja, moramo najti mero tveganja, ki je konveksna, ni pa koherentna. Primer takšne mere je entropična mera tveganja (entropic risk measure).

Definicija 3.7. Entropična mera tveganja s stopnjo nenaklonjenosti (tveganju) $\theta > 0$ je konveksna mera, definirana kot:

$$R^{\text{ent}}(X) = \frac{1}{\theta}\log(E(e^{-\theta X})) \tag{3}$$

Izpolnjena ni predpostavka pozitivne homogenosti:

$R^{ent}(\lambda X) = \frac{1}{\theta}\log(E(e^{-\theta\lambda X})) = \frac{1}{\theta}\log(e^{\lambda}E(e^{-\theta X})) =$
$= \frac{1}{\theta}\log(E(e^{-\theta X})) + \frac{1}{\theta}\lambda \neq \lambda\frac{1}{\theta}\log(E(e^{-\theta X})) = \lambda R^{ent}(X)$

□

3.1. **Množice sprejemljivih pozicij.** Pravimo, da je pozicija X sprejemljiva pozicija glede na mero tveganja R, če ni potrebno dodati nič denarja, da pridemo do mere tveganja enake 0.

Definicija 3.8. Množica sprejemljivih pozicij statične mere tveganja R je množica pozicij, za katere je mera tveganja nepozitivna.
$\mathcal{A}_R = \{X|R(X) \leq 0\}$

Množico $\mathcal{A}_R$ imenujemo tudi množica sprejemanja mere tveganja R.

Množice sprejemljivih pozicij imajo naslednje lastnosti:

- $\mathcal{A}_p \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$
- $\inf\{k \in \mathbb{R}|X + k \in \mathcal{A}_p\} > -\infty$ za vse $X \in \mathcal{X}$
- $X \in \mathcal{A}, Y \in \mathcal{X}, Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{A}$

Trditev 3.9. $R(X) = \inf\{k \in \mathbb{R} : X + k \in \mathcal{A}_R\}$.

Dokaz 3.10. *Naj bo R statična mera tveganja, X tvegan finančni instrument, $\mathcal{A}_p$ pa množica sprejemljivih pozicij glede na R.*
Sledi: $\inf\{k \in \mathbb{R} : X + k \in \mathcal{A}_p\} = \inf\{k \in \mathbb{R} : R(X + k) \leq 0\} =$
$= \inf\{k \in \mathbb{R} : R(X) - k \leq 0\} = \inf\{k \in \mathbb{R} : R(X) \leq k\} = R(X)$

Statično mero R lahko izrazimo na tri načine:

(1) eksplicitno s formulo,
(2) preko množice sprejemljivih pozicij,
(3) z dualno oziroma robustno reprezentacijo.

Izrek 3.11. [1] *R je konveksna mera tveganja natanko takrat, ko je $\mathcal{A}_R$ konveksna množica, in koherentna natanko takrat, ko je $\mathcal{A}_R$ konveksen stožec.*

3.2. **Robustna reprezentacija.**

Definicija 3.12. Ba prostor (ba($\mathcal{A}$)) algebre množic $\mathcal{A}$ je prostor, sestavljen iz vseh omejenih in končno aditivnih mer na $\mathcal{F}$.

Trditev 3.13. [2] *Dualni prostor protora L^∞ je prostor **ba** $(\Omega, \mathcal{F}, P_0)$ končno aditivnih mer, ki so absolutno zvezne glede na mero P_0. Z ba^1 označimo podmnožico pozitivnih verjetnostnih mer $\mu \ll P_0$.*

Izrek 3.14. [3] *Vsako konveksno mero tveganja lahko zapišemo kot*

$$R(X) = \max_{\mu \in ba^1} E^\mu(-X) - \alpha(\mu). \tag{4}$$

[1] Dokaz v [3]
[2] Dokaz v [3]
[3] Dokaz v [3]

Tu je $\alpha(\mu)$ kazenska funkcija (penalty function).

$$\alpha(\mu) = \sup_{X \in L^\infty} E^\mu(-X) - R(X) = \sup_{X | R(X)=0} E^\mu(-X) \tag{5}$$

Izrek 3.15. [4] *Vsako koherentno mero tveganja lahko zapišemo kot*

$$R(X) = \max_{P \in \mathcal{P}} E^p(-X), \tag{6}$$

kjer je $\mathcal{P}$ *neka podmnožica* ba^1. *Pri koherentnih merah tveganja je kazenska funkcija enaka 0.*

Zanima nas, kdaj lahko namesto končno aditivnih mer uporabljamo števno aditivne. To lahko naredimo, če je mera tveganja zvezna od zgoraj.

V tem primeru lahko tveganje X zapišemo kot:

$$R(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E^p(-X) \tag{7}$$

za neko množico $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}$. $\mathcal{M}$ označuje množico vseh verjetnostnih mer na $(\Omega, \mathcal{F})$, ki so absolutno zvezne glede na našo referenčno mero P_0. Tako lahko konveksno mero tveganja zapišemo kot:

$$R(X) = \sup_{P \in \mathcal{P}} E^\mu(-X) - \alpha(P) \tag{8}$$

natanko takrat, ko je konveksna mera R zvezna od zgoraj.

Dokaza izrekov 3.14 in 3.15 sta precej zahtevna in obsežna, njuno razumevanje pa ne pripomore bistveno k razumevanju robustne reprezentacije, zato sta izpuščena. Da pa bi si bralec lažje predstavljal pomen koherentnosti, smo dodali spodnji primer.

Primer 3.16. V zgledu bomo prikazali dejanski primer uporabe množice sprejemljivih pozicij in robustne reprezentacije ter ilustrirali prej zapisane definicije in trditve.

Predpostavke

Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor z mero, kjer je $\Omega = \{s_1, s_2\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ in P neka verjetnostna mera. Naj bo $\mathcal{Z}$ prostor slučajnih spremenljivk, definiranih na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Očitno je $\forall Z \in \mathcal{Z}$ merljiva funkcija na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Naj velja $Z(s_1) = x$ in $Z(s_2) = y$ za poljuben $Z \in \mathcal{Z}$.

Naj bo R neka koherentna (posledično konveksna) mera tveganja in naj bo $\mathcal{A}$ konveksen stožec (konveksna množica). Konveksna množica je v geometriji množica točk, za katero velja, da pri poljubni izbiri dveh točk iz te množice, daljica, ki povezuje ti dve točki v celoti leži v tej množici. Množico sprejemljivih pozicij na spodnji sliki predstavlja osenčeno območje. To je območje, ki ga oklepata dva poltraka z začetkom v izhodišču. Ta dva poltraka sta določena z verjetnostnima merama na

[4] Dokaz v [3]

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$, takšnima, da je kot, s katerim omejujeta osenčeno območje, manjši od $180°$. Skupaj z izhodiščem predstavljajo rob množice $\mathcal{A}$.

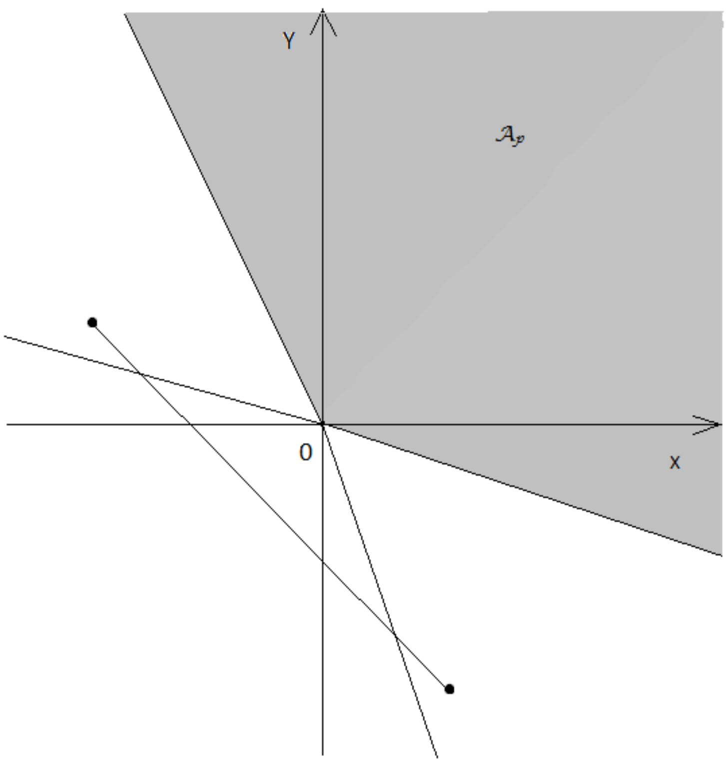
Brez privzetka konveksne množice $\mathcal{A}$ mera tveganja ni koherentna (in konveksna), saj obstajajo konveksne kombinacije elementov iz $\mathcal{A}$, ki niso v $\mathcal{A}$. To pomeni, da bi portfelj dveh spremenljivk in sprejemljive množice pozicij lahko prinesel gotovo izgubo.

Slučajno spremenljivko Z predstavimo v koordinatnem sistemu kot urejen par (x, y). V prvem kvadrantu velja $x > 0$ in $y > 0$. Od tod zaradi monotonosti sledi: $R(x, y) \leq R(0, 0) = 0$.

Nasproten primer je primer, ko sta $x < 0$ in $y < 0$. Ponovno iz monotonosti sledi: $R(x, y) \geq R(0, 0) = 0$.

Naj bo $\mathcal{M}$ množica verjetnostnih mer na $(\Omega, \mathcal{F})$, takšnih, da za $\forall P \in \mathcal{M}$ velja $P(s_1) = q$ in $P(s_2) = 1 - q$. Iz prej zapisanega izreka vemo, da za koherentne mere tveganja velja: $R(Z) = \sup_{P \in \mathcal{M}} E^p(-Z)$, kjer je $E^P(-Z) = -q \cdot x - (1 - q) \cdot y$.

Vsaka verjetnostna mera $P \in \mathcal{M}$ določa premico, podano z $E^P(-Z)$. $E^P(-Z)$ je premica skozi izhodišče, katere pozitivna polravnina določa spremenljivke s pričakovano vrednostjo večjo od 0, presek vseh teh polravnin pa je samo množico $\mathcal{A}$.



Slika 2: Množica sprejemljivih pozicij in tveganje

Od tod lahko sklepamo, da bodo vse zgoraj definirane slučajne spremenljivke Z, za katere velja $x > 0$ in $y > 0$, v množici sprejemljivih pozicij $\mathcal{A}$ za vsako verjetnostno mero $P \in \mathcal{M}$. Nasprotno pa bodo vse slučajne spremenljivke, za katere je $x < 0$ in

$y < 0$ izven množice sprejemljivih pozicij za vse $P \in \mathcal{M}$. Slučajne spremenljivke, ki pa imajo eno od komponent negativno, pa bodo v množici $\mathcal{A}$ natanko takrat, ko bo obstajala taka verjetnostna mera P, da bo $E^p(-Z) < 0$.

3.3. **Povprečna tvegana vrednost (AVaR).** VaR kot kvantil ne upošteva ekstremnih dogodkov in ni subaditiven. Diverzifikacija ne zmanjšuje nujno VaR-a. Posledično VaR ni koherentna in konveksna mera tveganja.

Zato uvedemo izboljšavo VaR-a, ki je koherentna in posledično tudi konveksna. Imenujemo jo povprečna tvegana vrednost oziroma average value at risk. Zanjo se uporabljajo tudi imena kot so: pogojna tvegana vrednost, repna tvegana vrednost in druga.

Definicija 3.17. Povprečna tvegana vrednost pri stopnji $\lambda \in [0, 1]$ je definirana kot:

$$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda VaR_p(X) dp. \tag{9}$$

Predpostavljamo, da ima X zvezno, strogo naraščujočo porazdelitveno funkcijo $F(X) = P_0(X \leq x)$. Potem je $\mathrm{VaR}_p(X) = -F^{-1}(p)$ in $\lambda = P_0(-X \geq VaR_\lambda(X))$. Če namesto $F^{-1}(p)$ pišemo y, dobimo:

$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{P_0(-X \geq VaR_\lambda(X))} \int_{-\infty}^{F^{-1}(\lambda)} yF(dy) = E^{P_0}(-X| - X \geq VaR_\lambda(X))$.

Definicija 3.18. Na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ naj bo definirana σ-končna mera ν, ki je absolutno zvezna glede na σ-končno mero μ. Funkciji π_*, za katero velja $\nu(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \pi_* d\mu$, pravimo Radon- Nikodymov odvod mere ν po meri μ in označimo z $\frac{d\nu}{d\mu}$.

Izrek 3.19. *(Radon-Nikodymov izrek)* [5] *Če sta $\nu \ll \mu$ končni meri na merljivem prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, potem obstaja nenegativna merljiva funkcija $\pi_* \in L^1(\mu)$, za katero velja: $\int f d\nu = \int f \pi_* d\mu$ za vse omejene merljive funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$.*

Pri razširitvi AVaR -a na dinamičen primer je zelo uporabna robustna reprezentacija.

Trditev 3.20. [6] *AVaR robustno reprezentiramo kot :*

$AVaR_\lambda(X) = \sup_Q\{E_Q(-X)| \frac{dQ}{dF} \leq \lambda^{-1}\}$, *kjer je $\frac{dQ}{dF}$ je Radon- Nikodymov odvod.*

[5] Dokaz v [15]

[6] Dokaz v [1]

4. Dinamične mere tveganja

V tem poglavju bomo definirali dinamične mere tveganja, opisali njihove lastnosti, podali dva praktična primera in prikazali robustno reprezentacijo dinamičnih mer tveganja.

Naj bo $T > 0$ nek čas v prihodnosti. Spet imamo tvegan finančni instrument. Njegova izplačila v času T ponazorimo s slučajno spremenljivko X, ki je definirana na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\in S}$. Tok informacij je podan s filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\ldots,T}$. S naj bo končen nabor časov, vključno s $t = 0$ in $t = T$. Naj bo še $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ in $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ za $T < \infty$. Prostor $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ je prostor omejenih slučajnih spremenljivk (skoraj gotovo omejenih), ki so merljive glede na $\mathcal{F}_t$. Z $\mathcal{M}_1(P)$ označujemo množico vseh verjetnostnih mer na $(\Omega, \mathcal{F})$, ki so absolutno zvezne glede na P.

V literaturi se pojavljata dva pristopa za opis dinamičnega tržnega tveganja:

(1) X daje izplačilo v času T,
(2) X definira slučajni proces, ki daje izplačila v vseh izbranih časih $t < T$. Ta so označena z X_t in so $\mathcal{F}_t$-merljiva.

V obeh primerih je bistvenega pomena časovna konsistentnost. Časovna konsistentnost kaže, kako so povezane meritve ob različnih časih. Če je portfelj A bolj tvegan od portfelja B v prihodnosti v času T, potem sledi, da je bolj tvegan v vseh prejšnjih časih do časa $t = T$. Pri opisu lastnosti dinamičnih mer tveganja v svojem delu diplomskega seminarja predpostavljamo, da daje X le končno izplačilo v času T. To izplačilo je definirano na $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$.

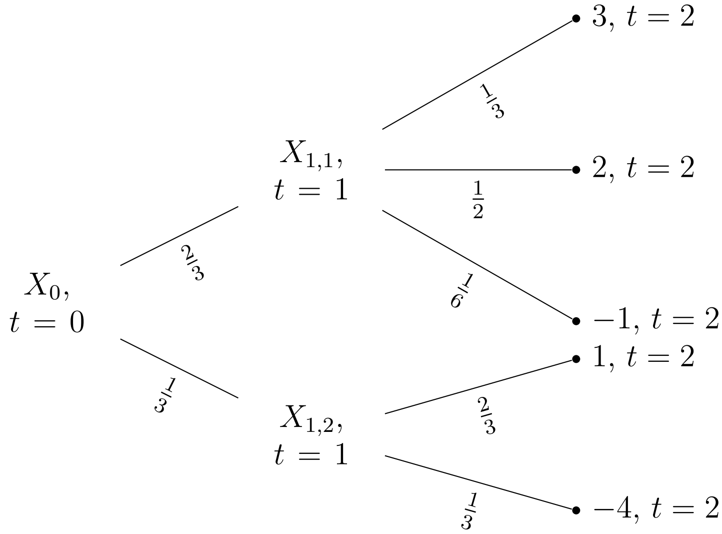
Definicija 4.1. Družino preslikav $R_t : L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \to L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ imenujemo dinamična mera tveganja.

Z $R_t(X)$ označujemo tveganje, povezano z X v času t, in si ga razlagamo kot minimalno kapitalsko zahtevo v času t, pri čemer poznamo informacijo $\mathcal{F}_t$. Ta družina preslikav slika izplačila v času T v izplačila v času $t < T$. Torej nam $\mathcal{F}_T$ merljivo slučajno spremenljivko, ki predstavlja možna izplačila v času T (zvezna ali diskretna slučajna spremenljivka), preslika v $\mathcal{F}_t$ merljivo slučajno spremenljivko. Ta ocenjuje tveganje pozicije X ob informaciji $\mathcal{F}_t$.

Opomba 4.2. $R_T(X) = -X$

Koliko je npr. vredna opcija pred časom zapadlosti. Ob času zapadlosti je ta vrednost navadno že znana. Prej pa gre za tvegano vrednost.

Primer 4.3. Za lažjo predstavo, kako dinamične mere tveganja delujejo, je podan zgled, v katerem imamo nek tvegan finančni instrument, pri čemer se omejimo na tri obdobja, in sicer $t = 0, t = 1$ in $t = 2$. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor, na katerem je definirana slučajna spremenljivka X, ki predstavlja izplačila tveganega finančnega instrumenta. V času $t = 0$ vemo, kakšna bo verjetnostna porazdelitev njegovih izplačil v času $t = 2$. Mera tveganja, ki jo bomo uporabili pri tem zgledu, bo tvegana vrednost (value at risk). Za stopnjo p, pri kateri računamo VaR, vzamemo $p = 0.95$ oziroma 95%.



Poradelitev X v času $t = 2$:

$$X \sim \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

V času $t = 1$ vemo, ali smo se iz začetnega stanja pomaknili v stanje $X_{1,1}$ ali v stanje $X_{1,2}$.

Pri pogoju, da je šla cena finančnega instrumenta v času $t = 1$ v stanje $X_{1,1}$, je $VaR_1^{95\%}(X) = 1$, saj je največji η takšen, da je $P(X \geq -\eta) \geq 0.95$ enak 1. To je v času $t = 1$ enako izplačilu -1, saj je $R_T(X) = -X$.
Če pa je šla cena finančnega instrumenta v stanje $X_{1,2}$, je $VaR_1^{95\%}(X) = 4$, saj je največji η takšen, da je $P(X \geq -\eta) \geq 0.95$ enak 4, to pa je v času $t = 1$ enako izplačilu -4.

Vidimo, da je izplačilo v času $t = 1$ slučajna spremenljivka z verjetnostma:
$P(X_1 = -4) = \frac{1}{3}$ in $P(X_1 = -3) = \frac{2}{3}$.

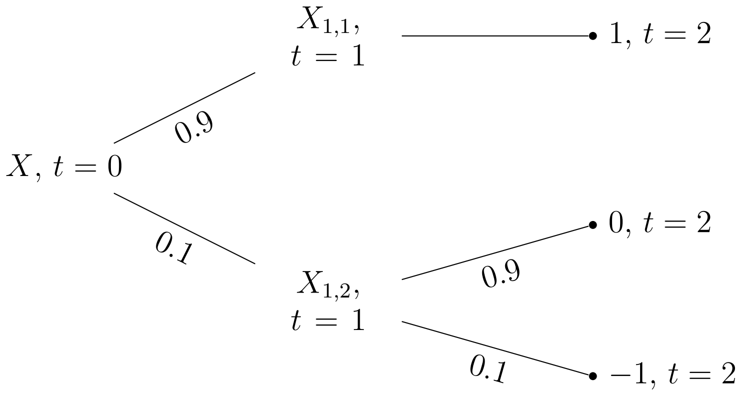
$VaR_1(X)$ je $\mathcal{F}_1$-merljiva slučajna spremenljivka.

$$VaR_1(X) \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\mathrm{VaR}_0(X)$ lahko izračunamo na dva načina. Lahko uporabimo že izračunan $\mathrm{VaR}_1(X)$ in ponovimo prej opisan postopek. Drugi način bi bil direktna izračunava iz trenutka $t = 2$ na trenutek $t = 0$. V obeh primerih dobimo enak rezultat: $VaR_0(X) = 4$.
To ne velja v vseh primerih. Če mera tveganja ni časovno konsistentna, lahko z izračunavo tveganja na omenjena načina dobimo različna razultata.

Iz zgleda je razvidno, da pri dinamičnih merah tveganja slikamo iz množice $\mathcal{F}_T$ merljivih slučajnih spremenljivk v množico $\mathcal{F}_t$ merljivih slučajnih spremenljivk. V vsakem trenutku t vemo, kakšna je cena finančnega instrumenta, saj je slučajna spremenljivka, ki predstavlja to ceno $\mathcal{F}_t$- merljiva. Prikazano je tudi dejstvo, da je $R_T(X) = -X$.

Primer 4.4. Rekurzivno izračunavanje mere tveganja daje pravilne rezultate le za časovno konsistentne mere tveganja. Opisali bomo primer časovno nekonsistentne mere, za katero rekurziven izračun ne deluje pravilno.



$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.01 & 0.09 & 0.9 \end{pmatrix}$$

$VaR_0^{98\%}(X) = 0$

Če pa računamo rekurzivno, dobimo $VaR_1^{98\%}(X) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$.

S pomočjo rekurzije dobljeni $VaR_0^{98\%}(X) = 1$. Dobili smo dva različna rezultata, kar se lahko zgodi pri uporabi nekoherentnih mer tveganja.

4.1. **Lastnosti dinamičnih mer tveganja.** Lastnosti dinamičnih mer tveganja so:

- D_1. Normalizacija: $R_t(0) = 0$
- D_2. Monotonost: $\forall X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}), X \leq Y \Rightarrow R_t(X) \geq R_t(Y)$
- D_3. Translacijska invarianca: $\forall X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}), \forall m \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$, $R_t(X + m) = R_t(X) - m$
- D_4. Lokalna lastnost: $\forall X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}), \forall A \in \mathcal{F}_t$, $R_t(1_A X + 1_{A^C} Y) = 1_A R_t(X) + 1_{A^C} R_t(Y)$
- D_5. Časovna konsistentnost: $\forall X, Y \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}), s \leq t$, $R_t(X) \leq R_t(Y) \Rightarrow R_s(X) \leq R_s(Y)$
- D_6. Konveksnost: $\forall X, Y \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}), \forall \eta :$ $L_+^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \to [0, 1], R_t(\eta X + (1 - \eta)Y) \leq \eta R_t(X) + (1 - \eta) R_t(Y)$
- D_7. Pozitivna homogenost: $\forall X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}), \forall m \in L_+^\infty(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, $R_t(mX) = m R_t(X)$

Normalizacijska lastnost pove, da pozicija 0 ne zahteva nikakršnih denarnih rezerv, da bi eliminirali tveganje. Pozicijo 0 si lahko razlagamo tudi kot stanje brez kakršnega koli finančnega instrumenta.

Monotonost kot v primeru statičnih mer tveganja določa, da je z manj vredno pozicijo povezano večje tveganje.

Podobno je pri **translacijski invarianci**, ki zagotavlja, da dodaten denar, oziroma premik porazdelitve slučajne spremenljivke X v desno po abscisni osi, zagotavlja nižje potrebe po kapitalskih rezervah.

Lokalna lastnost: Če je dogodek A $\mathcal{F}_t$ merljiv (to pomeni, da ga lahko opišemo s tem, kar se je zgodilo do časa t), potem mora odločevalec v času t vedeti, ali se je dogodek zgodil ali ne, in prilagoditi svojo oceno glede na to. Predpostavimo, da sta v nekem trenutku možna le dva scenarija, A in A^c. Če je trg v stanju A, bodo izplačila finančnega instrumenta predstavljena z $\mathcal{F}_t$ merljivo slučajno spremenljivko X, če pa se zgodi A^c, so izplačila tega instrumenta zajeta s prav tako $\mathcal{F}_t$ merljivo slučajno spremenljivko Y. Ta lastnost nam pove, da dobimo enako vrednost (v dinamičnem slučajno spremenljivko) v primeru računanja tveganja vsote teh slučajnih spremenljivk ali v primeru vsote tveganj teh dveh slučajnih spremenljivk.

Časovna konsistentnost: Če je portfelj A bolj tvegan od portfelja B v prihodnosti v času t, potem sledi, da je bolj tvegan v vseh časih, že izbranih na začatku, manjših of t. Podrobneje bo lastnost opredeljena v enem od naslednji poglavij.

Konveksnost: Tveganje, povezano z vsoto izplačil, je manjše od vsote tveganj posameznih izplačil. Konveksnost pove, da diverzifikacija zmanjšuje tveganje. Mera je koherentna, če zadošča lastnostim 1-5 in pozitivni homogenosti.

Pozitivna homogenost pove, da je tveganje premosorazmerno velikosti portfelja.

Lastnosti D_1, D_2 in D_3 veljajo za vse dinamične mere tveganja, ostale lastnosti pa pripisujemo le nekaterim meram tveganja.

4.2. **Množica sprejemljivih pozicij.** Navadno so statične mere tveganja povezane s ustreznimi/pripadajočimi sprejemljivimi pozicijami. To je množica pozicij, pri katerih ni potrebno dodati nič denarja, da pridemo do mere tveganja enake 0. Definirana je kot množica slučajnih spremenljivk X, za katere je mera tveganja nepozitivna. Definicijo razširimo na dinamični model. Lastnosti dinamičnih mer tveganja lahko izrazimo preko sprejemljivih množic in obratno.

Definicija 4.5. Naj bo $R_t : L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) \to L^p(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ dinamična mera tveganja. Množice sprejemljivih pozicij, povezane z R_t, definiramo kot:

(1) $\mathcal{C}_{R_t} = \{X \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) | R_t(X) \leq 0\}$.

Lastnosti množice sprejemljivih pozicij

Predpostavljamo, da R_t zadošča lastnostim D_1, D_2 in D_3. Potem ima $\mathcal{C}_{R_t}$ naslednje lastnosti:

- $\mathcal{C}_{R_t}$ je neprazna množica za katero velja:
  (1) $\inf\{m \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) | m \in \mathcal{C}_{R_t}\} > -\infty$

  (2) $\forall X \in \mathcal{C}_{R_t}, \forall Y \in L_t^\infty$, $Y \geq X \Rightarrow Y \in \mathcal{C}_{R_t}$.

- Naj bo $\mathcal{C}_{R_t}$ dana množica. Pripadajoča dinamična mera tveganja je $R_t(X) = \text{essinf}\{m \in L_t^\infty | m + X \in \mathcal{C}_{R_t}\}$.

- R_t je konveksna natanko takrat, ko je pripadajoča množica sprejemljivih pozicij $\mathcal{C}_{R_t}$ pogojno konveksna:
$\forall V, W \in \mathcal{C}_{R_t}, \beta V + (1-\beta)W \in \mathcal{C}_{R_t}$, kjer je β $\mathcal{F}_t$ merljiva, takšna, da je $0 \leq \beta \leq 1$.

4.3. **Robustna reprezentacija dinamičnih mer tveganja.** Z $\mathcal{M}_1(P)$ označujemo množico vseh verjetnostnih mer na $(\Omega, \mathcal{F})$, ki so absolutno zvezne glede na mero P. Alternativne verjetnostne mere v robustni reprezentaciji mere tveganja R_t pripeljejo do drugačnih ocen tveganja. Pri formulaciji tega uporabimo pojem **minimalne kazenska funkcija** (minimal penalty function), označimo pa jo z α_t^{min}.

$$\alpha_t^{min}(Q) = \text{esssup}_{X \in \mathcal{C}_{R_t}} E_Q(-X|\mathcal{F}_t) \tag{10}$$

za $Q \in \mathcal{M}_1(P)$.

Lema 4.6. *Za $Q \in \mathcal{M}_1(P)$ in čase $0 \leq s \leq t$ velja*

$$E_Q(\alpha_t^{min}(Q)|\mathcal{F}_S) = \text{esssup}_{Y \in \mathcal{C}_{R_t}} E_Q(-Y|\mathcal{F}_s) \tag{11}$$

V posebnem velja $E_Q(\alpha_t^{min}(Q)) = \sup_{Y \in \mathcal{C}_{R_t}} E_Q(-Y)$.

Izrek 4.7. [7] *Za konveksno mero tveganja $R_t(X)$ so ekvivalentne naslednje lastnosti:*

- *$R_t(X)$ ima robustno reprezentacijo:*

$$R_t(X) = \text{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_t}(E_Q(-X|\mathcal{F}_t) - \alpha_t(Q)), \tag{12}$$

kjer je $X \in L^\infty$ in $\mathcal{Q}_t = \{Q \in \mathcal{M}_1(P) | Q = P|_{\mathcal{F}_t}\}$. α_t je funkcija, ki slika iz $\mathcal{Q}_t$ v množico $\mathcal{F}_t$ merljivih slučajnih spremenljivk z vrednostmi v $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ takšna, da je $\text{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_t}(-\alpha_t(Q)) = 0$.

- *R_t ima robustno reprezentacijo pri minimalni kazenski funkciji:*

$$R_t(X) = \text{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_t}(E_Q(-X|\mathcal{F}_t) - \alpha_t^{\min}(Q)), \tag{13}$$

kjer je $X \in L^\infty$ $\alpha_t^{\min}(Q))$ pa je podana z enačno (9).

- *$R_t(X)$ ima robustno reprezentacijo:*

$$R_t(X) = \text{esssup}_{Q \in \mathcal{Q}_t^f}(E_Q(-X|\mathcal{F}_t) - \alpha_t^{\min}(Q)), \tag{14}$$

kjer je $X \in L^\infty$ in $\mathcal{Q}_t^f = \{Q \in \mathcal{M}_1(P) | Q = P|_{\mathcal{F}_t}, E_Q(\alpha_t^{min}(Q)) < \infty\}$.

[7] Dokaz v [6]

- *R_t ima "Fatoujevo lastnost": Za vsako omejeno zaporedje, ki konvergira glede na P proti X skoraj gotovo, velja:*

$$R_t(X) \leq \liminf_{n\to\infty} R_t(X_n) \tag{15}$$

- *$R_t(X)$ je zvezna od zgoraj, torej:*

$$X_n \searrow X \textit{skoraj gotovo} \Longrightarrow R_t(X_n) \nearrow R_t(X) \textit{skoraj gotovo} \tag{16}$$

za vsako omejeno zaporedje $(X_n)_n$ in $X \in L^\infty$.

4.4. **Dinamični AVaR.** Pomemben primer koherentne mere tveganja je pogojna povprečna vrednost pri tveganju (conditional average value at risk). Pogojna vrednost pri tveganju ali AVaR je bila osnovana kot nadgradnja VaR-a, ki bi presegala nekatere omejitve predhodnice.

Definicija 4.8. AVaR je definiran kot:

$$AVaR_{t,\lambda_t}(X) = esssup\{E_Q(-X|\mathcal{F}_t)|Q \in \mathcal{Q}_t, \frac{dQ}{dP} \leq \lambda_t^{-1}\}, \tag{17}$$

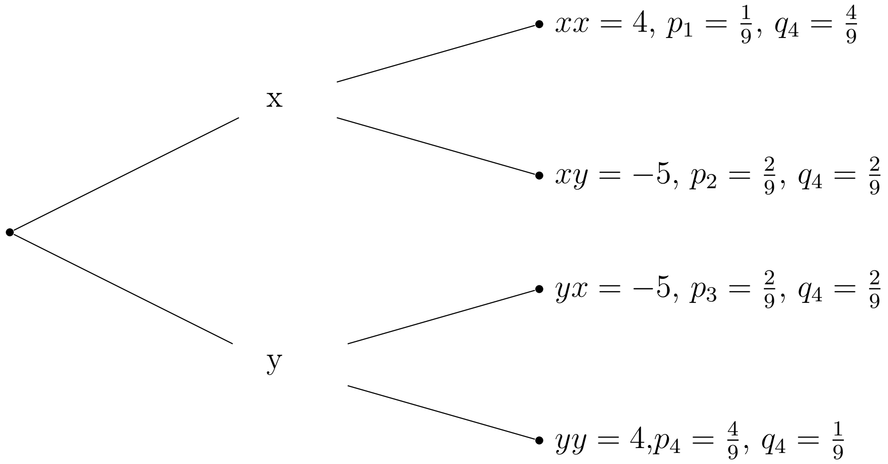
kjer je $\lambda_t \in L_t^\infty, 0 < \lambda_t < 1$.

Opomba 4.9. Vidimo, da se z naraščujočim t množica
$\mathcal{Q}_t = \{Q \in \mathcal{M}_1(P)|Q = P|_{\mathcal{F}_t}\}$ vedno bolj oža, saj se število zahtev z naraščajočim t veča. Q se mora vedno bolj prilegati P, zato se število verjetnostnih mer Q, za katere te zahteve veljajo, zmanjšuje.

5. Časovna konsistentnost

V petem poglavju bomo predstavili pomembno lastnost konveksnih mer tveganja - časovno konsistentnost. Na začetku bomo podali primer, v katerem časovna konsistentnost ni izpolnjena.

Primer 5.1. Nekonsistentnost za sprejemanje oz. zavračanje pri uporabi robustne reprezentacije principa najslabšega scenarija.



Predpostavimo, da imamo neko dinamično koherentno mero tveganja R_t. Izrazimo jo lahko kot :

$$R_t(X) = \operatorname{esssup}_{p \in \mathcal{P}} E^p(-X|\mathcal{F}_t), \tag{18}$$

kjer je $\mathcal{P} \subset \mathcal{M}^1(P_0)$ družina konveksnih mer, ki so absolutno zvezne glede na mero P_0.

Vzamemo dve verjetnostni porazdelitvi X, takšni kot sta na sliki.
Imamo dvoobdobno binomsko drevo. Odločevalec uporablja dve verjetnostni meri. Pri prvi so pomiki navzgor neodvisni in se zgodijo z verjetnostjo 1/3, pri drugi pa so premiki navzgor prav tako neodvisni, a se zgodijo z verjetnostjo 2/3. Ostale verjetnosti so zapisane na drevesu.
Pričakovano tveganje je enako ne glede na to, katero izmed danih porazdelitev izberemo. Pričakovano tveganje je enako $R_0(X) = E^P(-X|\mathcal{F}_0) = 2 \cdot 2/9 \cdot 5 - (1/9 + 4/9) \cdot 4 = 0$. Odločevalec sprejme tveganje ob času 0.

V času $t = 1$ odločevalec ponovno oceni tveganje z uporabo pogojnih verjetnosti. Lokalizirajmo se na zgornji del drevesa. Najslabši scenarij je, ko je $X = -5$. Zato postavimo na to vejo 2/3 verjetnosti.
Tveganje je tu enako $2/3 \cdot 5 - 1/3 \cdot 4 = 2$. Na spodnji meji ponovimo postopek, zato damo na zgornjo mejo verjetnost 2/3. Tu je tveganje ponovno enako 2.

Kar koli se zgodi, odločevalec v času $t = 1$ zavrne to pozicijo. Vidimo, da agent sprejme pozicijo v času $t = 0$, čeprav ve, da jo bo v času $t = 1$ zavrnil ne glede na razvoj dogodkov. To je nekonsistentno glede na prejšnje trditve in lastnosti, ki smo jih opisali.

Zakaj je ta primer kontradiktoren glede na prej zapisane trditve?
Če odločevalec že danes ve, da bo neko pozicijo jutri zavrnil, bi jo moral zavrniti že danes. Torej bi moral biti $R_0(X) > 0$.
Ta mera tveganja očitno ni časovno konsistentna.
Razlog za nekonsistenco je neupoštevanje mere najslabšega scenarija v času 0. Odločevalec le izbere dve verjetnosti, pri katerih so gibanja navzgor neodvisna in identično porazdeljena. Pogojne verjetnosti pa so odvisne od poti. V zgornjem delu grafa je najslabši scenarij pot navzdol, torej je verjetnost za korak navzgor enaka 1/3. Za spodnji del grafa sta vrednosti zamenjani. Odločevalec bi moral uporabljati pogojne verjetnosti že pri ocenjevanju tveganja za čas $t = 0$.

Časovna konsistentnost kaže, kako so povezane meritve ob različnih časih. Če je portfelj A bolj tvegan od portfelja B v prihodnosti v času T, potem sledi, da je bolj tvegan v vseh predhodnih časih do časa $t = T$.

Definicija 5.2. Naj bo S nek nabor časov od trenutka 0 do trenutka T. Naj bo $(R_t)_{t\in S}$ dinamična konveksna mera tveganja in $\mathcal{Y}_t \subset L^\infty$ takšna, da $0 \in \mathcal{Y}_t$ in $\mathcal{Y}_t + \mathbb{R} = \mathcal{Y}_t$ za vsak $t \in S$. Za mero tveganja $(R_t)_t$ rečemo, da je konsistentna za sprejemanje glede na $(\mathcal{Y}_t)_{t\in S}$, če za vse $t \in S$, takšne, da je $t < T$, za vsak $X \in L^\infty$ in za vsak $Y \in \mathcal{Y}_{t+1}$ velja:

$$R_{t+1}(X) \leq R_{t+1}(Y) \Rightarrow R_t(X) \leq R_t(Y). \tag{19}$$

Opomba 5.3. Konsistentnost za sprejemanje se v angleškem jeziku glasi acceptance consistence. Nasprotje konsistentnosti za sprejemanje je konsistentnost za zavračanje (rejection consistence). Mera tveganja je konsistentna za zavračanje, če v zgornji definiciji obrnemo oba neenačaja.

Stopnja časovne konsistentnosti je določena z zaporedjem $(\mathcal{Y}_t)_{t\in S}$. Če za določeno finančno pozicijo v nekem trenutku v prihodnosti velja, da ji dajemo prednost pred$Y \in (\mathcal{Y}_t)_{t\in S}$, potem mora ta naša preferenca veljati že danes. Zaporedju $(\mathcal{Y}_t)_{t\in S}$ rečemo tudi benchmark set. Večja, kot je ta množica (benchmark set), močnejša je časovna konsistentnost.

Ločimo tri tipe časovne konsistentnosti dinamične konveksne mere $(R_t)_{t\in S}$:

- **Krepka časovna konsistentnost**
  Dinamična mera tveganja je krepko konsistentna (za sprejemanje ali zavračanje), če je konsistentna glede na $\mathcal{Y}_t \subset L^\infty$.
- **Zmerna konsistenca**
  Tu je $(R_t)_{t\in S}$ za vsak t konsistentna glede na $\mathcal{Y}_t \subset L_t^\infty$
- **Šibka konsistenca**
  $(R_t)_{t\in S}$ je šibko konsistentna, če je za vsak t $\mathcal{Y}_t \subset \mathbb{R}$.

Trditev 5.4. *Stroga konsistenca implicira zmerno konsistenco, ta pa implicira šibko konsistenco (stroga konsistenca $\Rightarrow$ zmerna konsistenca $\Rightarrow$ šibka konsistenca).*

Dokaz 5.5. $L^\infty \subset L_t^\infty \subset \mathbb{R}$

Razlaga:

Predpostavimo, da se nahajamo v trenutku $t = 0$ in nas zanima tveganje za $t = 1$. Pri strogi konsistenci je $\mathcal{Y}_t$ omejena že danes, pri zmerni konsistentci pa bo šele v $t = 1$.

Izrek 5.6. [8] *Dinamična konveksna mera $(R_t)_{t\in S}$ je krepko časovno konsistentna natanko tedaj, ko je izpolnjen kateri od naslednjih pogojev:*

- *Za vsak $t \in S, t < T$ in za vse $X, Y \in L^\infty$ skoraj gotovo:*
$$R_{t+1}(X) \leq R_{t+1}(Y) \Rightarrow R_t(X) \leq R_t(Y). \tag{20}$$
- *Za vsak $t \in S, t < T$ in za vse $X, Y \in L^\infty$ skoraj gotovo:*
$$R_{t+1}(X) = R_{t+1}(Y) \Rightarrow R_t(X) = R_t(Y). \tag{21}$$
- *$(R_t)_{t\in S}$ je rekurzivna, torej:*
$$R_t = R_t(-R_{t+s}) \tag{22}$$
skoraj gotovo. To velja za vse $t, s \geq 0, t + s \in S$.

Primeri časovno konsistentnih in nekonsistentnih dinamičnih mer tveganja:

Časovno konsistentne: dinamično entopično tveganje (dynamic entropic risk), dinamična cena superščitenja (dynamic superhedging price).

Časovno nekonsistentne: tvegana vrednost (VaR), pogojna tvegana vrednost(AVaR).

[8] Dokaz v [6]

6. Zaključek

V delu smo obravnvali statične in dinamične mere tveganja. V prvem delu so opisane statične mere tveganja. Pri njih smo pokazali pomembnost koherence in konveksnosti mer. Z uporabo *tvegane vrednosti* smo opisali pomanjkljivosti mer, za katere prejšnji lastnosti ne veljata. Statične mere smo robustno reprezentirali in definirali *povprečno tevegano vrednost*. V drugem delu smo se osredotočili na dinamične mere tveganja in njihove lastnosti. Robustno reprezentacijo smo iz statičnega primera razširili na dinamičnega. Podali smo primer, v katerem mera tveganja ni bila časovno konsistentna, zato se je v različnih obdobjih spreminjalo sprejemanje in zavračanje pozicij nekega finančnega instrumenta. Za konec smo opisali še časovno konsistentnost- lastnost dinamičnih mer tveganja, ki odpravlja zgoraj zapisane pomanjkljivosti.

Dinamične mere tveganja so pomembno orodje bank in drugih finančnih institucij. Z njimi določamo količino premoženja, ki je v rezervah. Pri optimalni določitvi količine tega premoženja bi bilo poslovanje finančnih institucij bolj uspešno.

Dinamične mere tveganja bi bilo zanimivo razširiti do zveznosti v času, saj bi lahko za vsak trenutek v prihodnosti določili potrebne kapitalske rezerve.

Literatura

[1] H. Follmer, A. Schied *Convex and coherent risk measures*, October 8, 2008, [13.9.2014], dostopno na http://www.math.hu-berlin.de/~foellmer/papers/CCRM.pdf.

[2] H. Follmer, I. Penner *Convex risk measures and the dynamics of their penalty functions*, 2006, [16.9.2014], dostopno na http://www.rmi.nus.edu.sg/_files/events/paper/Foellmer_Penner\%20file1.pdf.

[3] F. Riedel, *Dynamic Risk Measures*, oktober in december 2007 , [8.9.2014], dostopno na http://www.ifd.dauphine.fr/fileadmin/mediatheque/IFD/Seminaire_risque/LectureNotesDauphineSorbonne07_Riedel.pdf.

[4] A. Schied, *Risk measures and robust optimization problems*, 17.6.2004 , [19.9.2014], dostopno na http://www.alexschied.de/PueblaNotes8.pdf.

[5] D. Kopycka, *http://www.math.vu.nl/ sbhulai/theses/thesis-kopycka.pdf*, 2009, [17.9.2014], dostopno na http://www.math.vu.nl/~sbhulai/theses/thesis-kopycka.pdf.

[6] B. Acciaio, I. Penner, *Advanced Mathematical Methods for Finance*, **VIII**, Oslo, 2011.

[7]

[8] *Dynamic risk measures*, [ogled 12. 9. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamic_risk_measure.

[9] *Entropic risk measure*, [ogled 16. 9. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Entropic_risk_measure.

[10] *Risk measure*, [ogled 3. 7. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Risk_measure.

[11] *Risk measures*, [ogled 22. 3. 2014], dostopno na http://www.investopedia.com/terms/r/riskmeasures.asp.

[12] *Coherent risk measures*, [ogled 15. 9. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Coherent_risk_measure.

[13] *Value at risk*, [ogled 17. 9. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Value_at_risk.

[14] *Strictly convex space*, [ogled 14. 9. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Strictly_convex_space.

[15] *Radon-Nikodym theorem*, [ogled 18. 9. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Radon-Nikodym_theorem.