UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Matic Zupančič

**Uporaba Wishartovih matrik v teoriji tveganja**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir

Ljubljana, 2014

# Kazalo

**Uporaba Wishartovih matrik v teoriji tveganja**


Povzetek

V delu diplomskega seminarja bom predstavil osnovni pristop k izbiri portfelja delnic - Markovitzev model. Izpostavil bom tudi glavno slabost tega modela, ki je težavnost ocenjevanja kovariančne matrike z vzorčno kovariančno matriko ter predstavil Bayesovo cenilko za kovariančno matriko ter se z novo cenilko poskušal izogniti glavni omejitvi vzorčno disperzijske matrike, ki jo predstavlja njena singularnost pri majhni velikosti vzorca ter velikem številu delnic. V poglavju 4 bom predstavil in izpeljal Bayesovo cenilko za kovariančno matriko, ki jo bom nato uporabil v Markovitzovem modelu. Z uporabo nove cenilke bom simuliral trgovanje na delnicah ameriškega delniškega indeksa S&P 500 na obdoju 12 let.


**Wishart matrices in risk managment**


Abstract

In this bachelor thesis Markovitz's model is presented. Singularity of sample covariance matrix at small $n$ and large $p$ is pointed out as this is the main weakness of the model. An introduction of Bayesian aproach toward parameter estimation is made and distribution of sample covariance matrix is derived. An alternative Bayesian estimator of sample covariance matrix is presented and an attempt to overcome the weakness of the model with this new estimator is made. Lastly, trading on universum of S&P 500 stocks is simulated for a period of 12 years using this new aproach.



**Math. Subj. Class. (2010):** 91G10

**Ključne besede:** Markovitzev model, vzorčna kovariančna matrika, Wishartova porazdelitev, Bayesova statistika

**Keywords:** Markovitz, sample covariance matrix, Wishart distribution, Bayesian statistics

# 1 Markovitzev model

Markovitzev članek iz leta 1952 je postavil temelje za to, kar je danes znano pod imenom "moderna portfeljska teorija" (angl. modern portfolio theory) ter močno vplival na takratno finančno industrijo. Pred tem je bilo držanje posameznega vrednostnega papirja pogosta praksa, nato pa se je pozornost preusmerila h diverzifikaciji ter analizi doprinosa donosa ter negotovosti posameznega vrednostnega papirja h celotnem portfelju. Markovitzev model predpostavlja, da racionalni investitorji izbirajo vrednostne papirje zgolj na podlagi pričakovanega donosa ter tveganja portfelja in sicer za dano stopnjo tveganja preferirajo portfelje z višjim pričakovanim donosom. Imejmo trg z $p$ tveganimi vrednostnimi papirji (od tu naprej bo $p$ označeval število vrednostnih papirjev na trgu), ter predpostavimo, da so neskončno deljivi. Logaritmski donos $i$-tega vrednostnega papirja naj bo slučajna spremenljivka $X_i$ porazdeljena $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$. Velja torej

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$$

kjer je X slučajni vektor donosov vrednostnih papirjev pri čemer

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$\Sigma$ pa je disperzijska matrika. Naj bo

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix}$$

kjer z $\omega_i$ označimo delež kapitala, ki ga vložimo v $i$-ti vrednostni papir. Za dan portfelj $P$, ki je definiran z vektorjem $\omega_P$ velja

$$\mu_P = \omega^T \mu$$

ter

$$\sigma_P^2 = \omega^T \Sigma \omega$$

Na trgu želimo alocirati portfelj, ki bo imel pri danem pričakovanem donosu najmanjšo varianco ozirom standardni odklon, to pa je optimizacijski problem, ki ga lahko zapišemo kot

$$\min \frac{1}{2}\omega^T \Sigma \omega$$
$$p.p.\ \omega^T \mu \geq \mu_P$$
$$1^T \omega = 1$$

Za različne pričakovane donose torej dobimo portfelje z različnimi variancami, ki tvorijo množico optimalnih portfeljev na trgu brez netveganega vrednostnega papirja (ang. efficient frontier with no risk-free asset). Če pa je na trgu še vrednostni papir, ki je netvegan (denimo zakladna menica), pa s kombinacijo tvegane in netvegane naložbe dobimo novo množico optimalnih portfeljev. Med portfelji sestavlejnimi iz samih tveganih naložb sedaj lahko izberemo tistega, ki bo imel na enoto standardnega odklona največji donos nad netvegano obrestno mero oziroma bolj natančno, tistega, ki bo maksimiziral Sharpov količnik

$$S = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_p}$$

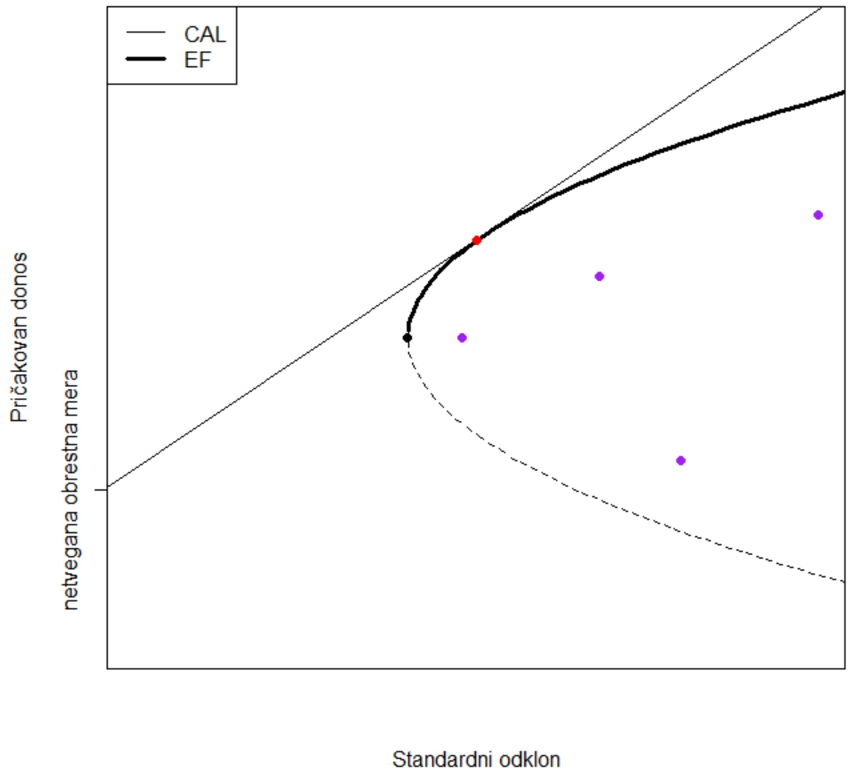
pri čemer je $r_f$ netvegana obrestna mera. Z kombinacijo netvegane naložbe ter optimalne tvegane naložbe sedaj lahko oblikujemo novo množico optimalnih portfeljev (ang. efficient frontier with risk-free asset), ki ležijo na premici

$$\mu = r_f + \sigma S_{max}$$

Na sliki 1 imamo grafični prikaz. Debela in črtkana črna črta označujeta množico portfeljev sestavljeno iz tveganih naložb, ki imajo za dan pričakovan donos najmanjši možen standarden odklon, pri čemer bo racionalen investitor vselej preferiral portfelje na debeli črti nad portfelji iz črtkane črte, saj imajo ti pri danem fiksnem standardnem odklonu večji donos. Vijolične pike predstavljajo portfelje znotraj množice možnih alokacij, ki niso optimalni. Črna pika označuje portfelj z najmnajšim možnim standardnim odklonom (ang. global minimum varaiance portfolio). Z uvedbo netvegane naložbe pa je naša množica optimalnih portfeljev dana s premico

$$\mu = r_f + \sigma S_{max}$$

ki je v angleščini znana pod imenom *Capital Allocation Line* ali krajše *CAL*.

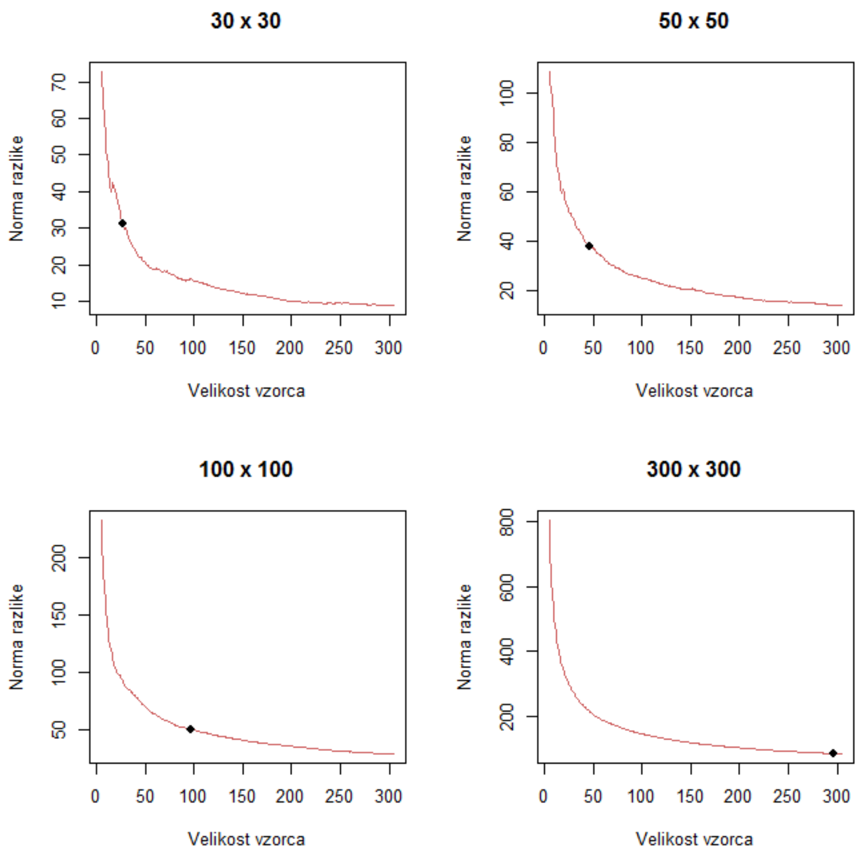



Slika 1: Grafični prikaz

V praksi $\Sigma$ ocenjujemo z vzorčno kovariančno matriko

$$S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(x_i - \overline{x})'$$

ki je nepristranska cenilka po metodi največjega verjetja. Ta cenilka je problematična, saj je pri $n < p$ nedefinitna, kjer $n$ predstavlja števiko podatkov o dnevnih donosih. V naši analizi pa bi po eni strani želeli zajeti čim večji univerzum vrednostnih papirjev, po drugi strani pa bi želeli vzeti čimbolj sveže podatke zato kmalu lahko velja $n < p$.




Slika 2: Norma razlike $\Sigma$ ter $S$ za podatke porojene z multivariatno normalno porazdelitvijio za različne dimenzije $\Sigma$. Črna pika označuje kdaj $S$ postane pozitivno definitna.

## 2 Bayesova paradigma

Bayesova statistika temelji na filozofiji drugačni od klasičnega statističnega pristopa. Tu je namreč parameter, ki ga ocenjujemo slučajna spremenljivka pri čemer z družino porazdelitve specificiramo svoje prepričanje o tem kakšne vrednosti ter s kakšnimi verjetnostmi naš parameter zavzema. Ocenjevanje parametov poteka z uporabo Bayesovega pravila pri čemer ob dodajanju podatkov popravljamo porazdelitveni zakon parametrov ter s tem dobimo novo porazdelitev parametra, za končno točkasto oceno pa uporabimo bodisi matematično upanje bodisi je to točka kjer gostota nove porazdelitve doseže maksimum. Za razliko od drugih statističnih pristopov nam Bayesova statistika dovoljuje, da upoštevamo naše predhodno prepričanje ter tudi izbiramo kakšno težo bomo pri ocenjevanju dali našem predhodnemu prepričanju ter kakšno težo dejanskim podatkom.

Predpostavimo, da je $\theta$ paramter, ki ga želimo oceniti, omejimo pa se na zvezne porazdelitve. Porazdelitev paramtera $\theta$ imenujemo apriorna porazdelitev, ta pa zajema vse informacije, ki jih imamo o paramtetru preden opazujemo podatke. Parametre apriorne porazdelitve imenujemo hiperparametri. Ključen korak v Bayesovi statistiki je povezava med priorno porazdelitvijo $\theta$ z informacijo iz podatkov. To je doseženo z izračunom aposteriorne porazdelitve, ki je pogojna porazdelitev $\theta$ pri danih podatkih.
Naj bo sedaj $\theta$ zvezno porazdeljen parameter z gostoto porazdelitve $\pi(\theta)$. Podatke označimo z $Y$, funkcijo verjetja pa z $f(y|\theta)$. Tedaj velja

$$f(y,\theta) = \pi(\theta)f(y|\theta)$$

ter

$$f(y) = \int \pi(\theta)f(y|\theta)d\theta$$

pogojna porazdelitev $\theta$ pri danem $Y$ pa je dana z

$$\pi(\theta|y) = \frac{\pi(\theta)f(y|\theta)}{f(y)} = \frac{\pi(\theta)f(y|\theta)}{\int \pi(\theta)f(y|\theta)d\theta}$$

pri čemer kot smo že omenili $\pi(\theta|y)$ imenujemo aposteriorna gostota porazdelitve.

Ocenjevanje parametrov temelji na aposteriorni porazdelitvi, najpogostejša cenilka pa je pogojno matematično upanje.

$$E(\theta|Y) = \int \theta\pi(\theta|Y)d\theta = \frac{\int \theta\pi(\theta)f(Y|\theta)d\theta}{\int \pi(\theta)f(Y|\theta)d\theta}$$

*Opomba:* Enačba

$$\pi(\theta|y) = \frac{\pi(\theta)f(y|\theta)}{\int \pi(\theta)f(y|\theta)d\theta}$$

je zvezna različica Bayesovega pravila.

*Oznaka:* Ker so pri večrazsežnih porazdelitvah funkcije gostote porazdelitve pogosto daljši izrazi si računanje poenostavimo tako, da opuščamo normalizacijske konstane. Naprimer namesto, da pišemo

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\}$$

označimo

$$f(x) \propto \exp\{\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\}$$

$\Diamond$

<u>*Zgled:*</u> Imejmo Bernulijevo porazdeljeno slučajno spremenljivko z neznanim parametrom $p \in (0,1)$ ter slučajni vzorec $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Naj bo apriorna gostota parametra $p$ porazdeljena enakomerno zvezno na intervalu $[0,1]$, torej je $\pi(p) = 1$. Tedaj je funkcija verjetja proporcionalna

$$f(\mathbf{x}|p) \propto p^k(1-p)^{n-k}$$

pri čemer je $k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Tedaj je aposteriorna gostota proporicionalna

$$\pi(p|\mathbf{x}) \propto f(\mathbf{x}|p)\pi(p) = p^k(1-p)^{n-k}$$

pri čemer $p \in [0,1]$. Iz tega pa razberemo, da je aposteriorna gostota enaka gostoti $Beta(k+1, n-k+1)$.

$\Diamond$

# 3 Wishartova porazdelitev

V tem poglavju izpeljemo porazdelitev vzorčno kovariančne matrike, ki je dana z Wishartovo porazdelitvijo. Podrobnejša formulacija ter glavna pridobitev poglavja se nahaja v posledici 3.

**Trditev 1.** *Naj bodo $X_1, X_2, \ldots X_N$ neodvisni identično porazdeljeni $\mathcal{N}(\mu_i, \Sigma)$. Naj bo $C = [c_{ij}]$ $N \times N$ ortogonalna matrika. Potem je $Y_i = \sum_{j=1}^N c_{ij} X_j$ porazdeljen $\mathcal{N}(\nu_i, \Sigma)$, kjer je $\nu_i = \sum_{j=1}^N c_{ij}\mu_j$ za $i = 1, 2, \ldots N$. Velja $Y_1, Y_2, \ldots Y_N$ so neodvisni.*

*Dokaz.* $Y_i$ je linearna kombinacija vektorjev, ki imajo normalno porazdelitev, zato je porazdelitev $Y_i$ spet normalna.

$$\mathrm{E}(Y_i) = \mathrm{E}\big(\sum_{j=1}^N c_{ij}X_j\big) = \sum_{j=1}^N c_{ij}\mathrm{E}\big(X_j\big) = \sum_{j=1}^N c_{ij}\mu_j = \nu_i$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(Y_k, Y_l) = \mathrm{E}((Y_k-\nu_k)(Y_l-\nu_l)^T) = \\
&= \mathrm{E}\Bigg(\Bigg(\sum_{j=1}^N c_{kj}(X_j-\mu_j)\Bigg)\Bigg(\sum_{j'=1}^N c_{lj'}(X_{j'}-\mu_{j'})^T\Bigg)\Bigg) = \\
&= \sum_{j,j'=1}^N c_{kj}c_{lj'}\mathrm{E}((X_j-\mu_j)(X_{j'}-\mu_{j'})^T) = \sum_{j,j'=1}^N c_{kj}c_{lj'}\delta_{jj'}\Sigma = \sum_j c_{kj}c_{lj}\Sigma = \\
&= \delta_{kl}\Sigma
\end{aligned}$$

kjer je

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{če} \quad k = l \\ 0, & \text{če} \quad k \neq l \end{cases}$$

Iz tega sledi, da je $Y_k$ neodvisen od $Y_l$ za $k \neq l$, ter $Y_k$ ima kovariančno matriko $\Sigma$. □

**Trditev 2.** *Naj bo $C = [c_{ij}]$ ortogonalna potem je $\sum_{i=1}^{N} X_i X_j^T = \sum_{i=1}^{N} Y_i Y_i^T$ kjer je $Y_i = \sum_{j=1}^{N} c_{ij} X_j$ za $i = 1, 2, \ldots N$.*

*Dokaz.*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} Y_i Y_i^T &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} c_{ik} X_k \sum_{l=1}^{N} c_{il} X_l^T \\
&= \sum_{k,l=1}^{N} \left( \sum_{i=1}^{N} c_{ik} c_{il} \right) X_k X_l^T \\
&= \sum_{k,l=1}^{N} \delta_{kl} X_k X_l^T \\
&= \sum_{k=1}^{N} X_k X_k^T
\end{aligned}$$

□

Naj bodo $X_1, X_2 \ldots X_N$ neodvisni in vsi porazdeljeni $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Obstaja $N \times N$ matrika $B = [b_{ij}]$ z zadnjo vrstico $\left( \frac{1}{\sqrt{N}}, \frac{1}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{N}} \right)$, ki je ortogonalna. Označimo

$$\overline{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$A = \sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^T$$

Naj bo

$$Z_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij} X_j$$

potem je

$$Z_N = \sum_{j=1}^{N} b_{Nj} X_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} X_j = \sqrt{N}\, \overline{X}$$

**Lema 1.** *Velja*

$$\sum_{i=1}^{N} X_i X_i^T - N\overline{X}\overline{X}^T = \sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^T = A$$

*Dokaz.*

$$\sum_{i=1}^{N} X_i X_i^T - N\overline{X}\overline{X}^T = \sum_{i=1}^{N}\left[(X_i - \overline{X}) + \overline{X}\right]\left[(X_i - \overline{X}) + \overline{X}\right]^T - N\overline{X}\overline{X}^T =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[(X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^T + (X_i - \overline{X})\overline{X}^T + \overline{X}(X_i - \overline{X})^T + \overline{X}\overline{X}^T\right] - N\overline{X}\overline{X}^T =$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^T + \sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})\overline{X}^T + \sum_{i=1}^{N}\overline{X}(X_i - \overline{X})^T$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^T = A$$

kjer smo upoštevali $\sum_{i=1}^{N} X_i - N\overline{X} = 0$. $\square$

Opazimo

$$A = \sum_{i=1}^{N} X_i X_i^T - N\overline{X}\overline{X} = \sum_{i=1}^{N} Z_i Z_i^T - Z_N Z_N^T = \sum_{i=1}^{N-1} Z_i Z_i^T$$

kjer smo upoštevali Trditev 2. Ker je $Z_N$ neodvisen od $Z_1, Z_2, \dots, Z_{N-1}$, je $\overline{X} = \frac{1}{\sqrt{N}} Z_N$ neodvisen od A. Ker

$$\mathrm{E}(Z_N) = \sum_{j=1}^{N} b_{Nj}\mathrm{E}(X_j) = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}}\mu = \sqrt{N}\mu$$

je $Z_N$ porazdeljen $\mathcal{N}(\sqrt{N}\mu, \Sigma)$ ter $\overline{X} = \frac{1}{\sqrt{N}} Z_N$ je porazdeljen $\mathcal{N}(\mu, \frac{1}{N}\Sigma.)$ Sedaj izračunajmo

$$\mathrm{E}(Z_i) = \sum_{i=1}^{N} b_{ij}\mathrm{E}(X_j) = \sum_{i=1}^{N} b_{ij} b_{Nj}\sqrt{N}\mu = 0$$

za $i = 1, 2, \dots, N-1$ kjer smo upoštevali, da je $B^T$ spet ortogonalna matrika.[1] Pokazali smo naslednjo trditev.

[1] $B$ je ortogonalna natanko tedaj ko velja $B^T B = BB^T = I$. Označimo C $= B^T$, velja $C^T = B$ ter $C^T C = BB^T = I$

**Trditev 3.** *Vzorčno upanje vzorca velikosti $N$ porojenega z $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ je porazdeljeno $\mathcal{N}(\mu, \frac{1}{N}\Sigma)$ ter neodvisno od $A$. $A$ je porazdeljen enako kot $\sum_{i=1}^{N-1} Z_i Z_i^T$ pri čemer je $Z_i$ porazdeljen $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ za $i = 1, 2, \ldots, N-1$ ter velja, da so $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{N-1}$ neodvisne.*

*Dokaz.* Prvi del smo že pokazali. Neodvisnost $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{N-1}$ sledi po Trditvi 1. $\square$

Sedaj bomo izpeljali porazdelitev $A = \sum_{i=1}^{N}(X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^T$ kejr so $X_1, X_2, \ldots, X_N$ neodvisno identično porazdeljeni $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Pokazali bomo, da je gostota porazdelitve $A$-ja za pozitivno definitne $A$

$$\frac{|A|^{\frac{1}{2}(n-p-1)} \exp(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Sigma^{-1} A)}{2^{\frac{1}{2}np} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}n} \prod_{i=1}^{p} \Gamma[\frac{1}{2}(n+1-i)]} \tag{1}$$

kjer je p dimenzija vektorjev $X_i$ in kjer smo označili $n = N - 1$. Najprej bomo obravnavali primer, ko so $Z_1, Z_2, \ldots Z_n$ porazdeljeni neodvisno identično po $\mathcal{N}(0, I)$. Naj bo

$$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n) = \begin{pmatrix} \nu_1^T \\ \nu_2^T \\ \vdots \\ \nu_p^T \end{pmatrix}$$

Tedaj so elementi $A = (a_{ij})$ skalarni produkt teh $n$ dimenzionalnih vektorjev, to je $a_{ij} = \nu_i^T \nu_j$. Opazimo, da so $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ neodvisno identično porazdeljeni po zakonu $\mathcal{N}(0, I)$. Napravimo Gram-Schmidtovo ortogonlizacijo. Vzamemo $\omega_1 = \nu_1$ ostali vektorji so podani

$$\omega_i = \nu_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\omega_j^T \nu_i}{||\omega_j||^2} \omega_j$$

za $i = 2, 3, \ldots, p$.[2] Definirajmo $t_{ii} = ||\omega_i||$ za $i = 1, 2, \ldots, p$ ter $t_{ij} = \frac{\nu_i^T \omega_j}{||\omega_j||}$ za $j = 1, 2, \ldots, i-1$ in $i = 2, 3, \ldots, p$. Velja

$$\nu_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{t_{ij}}{||\omega_j||} \omega_j \tag{2}$$

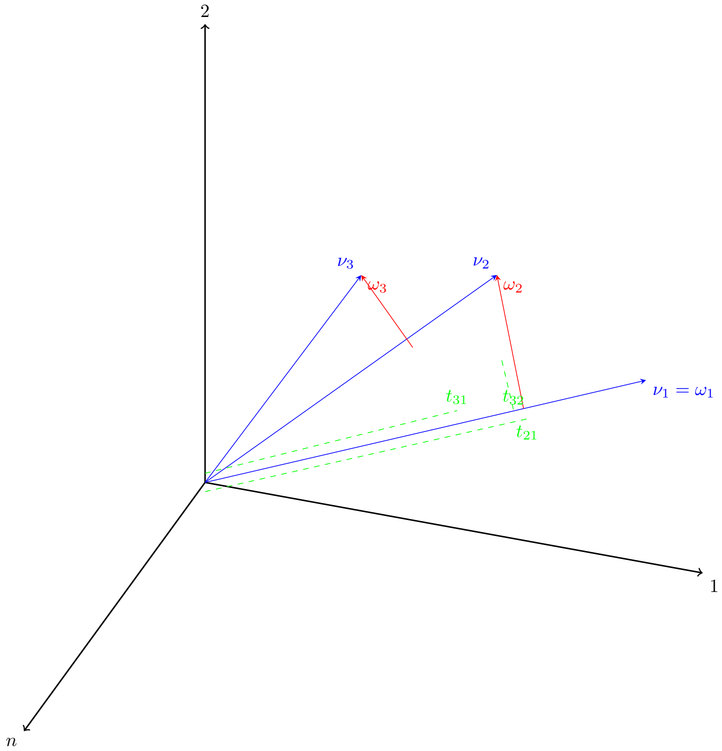
[2] $||\omega_i|| = \sqrt{\omega_i^T \omega_i}$

ter

$$a_{ij} = \nu_i^T \nu_j = \Big(\sum_{k=1}^{i} \frac{\nu_i^T \omega_k}{||\omega_k||^2}\omega_k^T\Big)\Big(\sum_{l=1}^{j} \frac{\nu_j^T \omega_l}{||\omega_l||^2}\omega_l\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{i} \frac{\nu_i^T \omega_k}{||\omega_k||^2}\omega_k^T\Big)\Big(\sum_{l=1}^{j} \frac{\nu_j^T \omega_l}{||\omega_l||^2}\omega_l\Big)\delta_{kl} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\min(i,j)} \frac{\nu_i^T \omega_k}{||\omega_k||^2}\omega_k^T \frac{\nu_j^T \omega_k}{||\omega_k||^2}\omega_k = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} t_{ik} t_{jk}$$

Če definiramo spodnje trikotno matriko $T = (t_{ij})$ z $t_{ii} > 0$ za $i = 1, 2, \dots p$ ter $t_{ij} = 0$ za $i < j$, potem $A = TT^T$.[3]




Po (2) velja torej

$$\nu_1 = \frac{t_{11}}{||\omega_1||}\omega_1$$

$$\nu_2 = \frac{t_{21}}{||\omega_1||}\omega_1 + \frac{t_{22}}{||\omega_2||}\omega_2$$

$$\nu_3 = \frac{t_{31}}{||\omega_1||}\omega_1 + \frac{t_{32}}{||\omega_2||}\omega_2 + \frac{t_{33}}{||\omega_3||}\omega_3$$

$$\vdots$$

[3]Poiskali smo razcep Choleskega, ki je za pozitivno definitno matriko enoličen.

Opazimo, da so $t_{ij}$ za $j = 1, 2, \dots, i-1$ ravno prvih $i-1$ koordinat $\nu_i$ v koordinatnem sistemu z prvimi $i-1$ osmi $\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_{i-1}$. Vsota $n-i+1$ koordinat na kvadrat pa je $||\nu_i||^2 - \sum_{j=1}^{i-1} t_{ij}^2 = t_{ii}^2 = ||\omega_i||^2$.

**Trditev 4.** *Pogojno na $\omega_1, \omega_2 \dots, \omega_{i-1}$ (ali ekvivalentno na $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_{i-1}$), so $t_{i1}, t_{i2}, \dots, t_{i,i-1}$ in $t_{ii}^2$ neodvisne. $t_{ij}$ je porazdeljen $\mathcal{N}(0,1)$ za $i > j$, $t_{ii}^2$ pa ima porazdelitev $\chi^2$ z $n-i+1$ prostostnimi stopnjami.*

*Dokaz.* Koordinate $\nu_i$ glede na nov koordinatni sistem, kjer $\nu_1, \nu_2 \dots \nu_{i-1}$ definirajo prve koordinatne osi so porazdeljene neodvisno standardno normalno (Trditev 1). $t_{ii}^2$ je vsota kvadratkov koordinat brez prvih $i-1$ koordinath. □

**Posledica 1.** *Naj bodo $Z_1, Z_2, \dots Z_n$ neodvisno identično porazdeljeni $\mathcal{N}(0, I)$. Naj bo $A = \sum_{i=1}^{N} Z_i Z_i^T = TT^T$, kjer $t_{ij} = 0$, $i < j$ in $t_{ii} > 0$ za $i = 1, 2, \dots, p$. Potem so $t_{11}, t_{21}, \dots, t_{pp}$ neodvisne. $t_{ij}$ je porazdeljen $\mathcal{N}(0,1)$ za $i > j$, $t_{ii}^2$ pa ima porazdelitev $\chi^2$ z $n-i-1$ prostostnimi stopnjami.*

Prepričamo se lahko, da ima $t_{ii}$ gostoto

$$\frac{1}{2^{(n-i-1)/2}\Gamma[\frac{1}{2}(n+1-i)]} t^{n-i} \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)$$

tedaj pa je skupna porazdelitev $t_{ij}$ za $j = 1, 2 \dots, i$, $i = 1, 2, \dots p$

$$\prod_{i=1}^{p} \frac{t_{ii}^{n-i} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i} t_{ij}^2)}{\pi^{(i-1)/2} 2^{n/2-1} \Gamma[\frac{1}{2}(n-i+1)]} = \frac{\prod_{i=1}^{p} t_{ii}^{n-i} \exp(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{i} t_{ij}^2)}{2^{(n-2)p/2} \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^{p} \Gamma[(n-i+1)/]} \tag{3}$$

Naj bo $C$ spodnje trikotna $p \times p$ matrika, tako, da $\Sigma = CC^T$ in $c_{ii} > 0$.[4] Oglejmo si $T^* := CT$. Ta linearna transformacija je podana s predpisom

$$t_{ij}^* = \begin{cases} \sum_{k=j}^{i} c_{ik} t_{kj}; & i \geq j \\ 0 \quad ; & i < j \end{cases}$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\begin{pmatrix} t_{11}^* \\ t_{21}^* \\ t_{22}^* \\ \vdots \\ t_{p1}^* \\ \vdots \\ t_{pp}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ * & c_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & \dots & c_{pp} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & \dots & * & \dots & c_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{p1} \\ \vdots \\ t_{pp} \end{pmatrix}$$

[4] Razcep Choleskega.

da pa dobimo predpis, kako se stare koordinate izražajo s novimi zapišemo[5]

$$\begin{pmatrix} t^*_{11} \\ t^*_{21} \\ t^*_{22} \\ \vdots \\ t^*_{p1} \\ \vdots \\ t^*_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ * & c_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & \dots & c_{pp} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & \dots & * & \dots & c_{pp} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{22} \\ \vdots \\ t_{p1} \\ \vdots \\ t_{pp} \end{pmatrix}$$

Opazimo

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{i} t_{ij}^2 = \operatorname{tr} TT^T = \operatorname{tr} C^{-1}T^*T^T(C^{-1})^T = \operatorname{tr} T^*T^T(C^T)^{-1}C^{-1} = \operatorname{tr} T^*T^T\Sigma^{-1}$$
$$= \operatorname{tr}(T^*)^T\Sigma^{-1}T^*$$

Gostoto $T^*$ dobimo tako, da v (†) vstavimo $t_{ii} = \frac{t^*_{ii}}{c_{ii}}$. Pri tem $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{i} t_{ij}^2$ samo izrazimo z $\operatorname{tr}(T^*)^T\Sigma^{-1}T^*$, torej ne substiramo, zato je determinanta Jakobijeve matrike

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{p} c_{ii}}$$

Upoštevamo še $\prod_{i=1}^{p} c_{ii}^2 = |C||C^T| = |\Sigma|$. S tem smo pokazali neslednjo trditev.

**Trditev 5.** *Naj bodo $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ ($n \geq p$) neodvisno porazdeljene, vsak $\mathcal{N}(0,\Sigma)$. Naj bo $A = \sum_{i=1}^{n} Z_i Z_I^T$ ter naj bo $A = T^*(T^*)^T$ kjer $t^*_{ij} = 0$ za $i < j$ ter $t^*_{ii} > 0$. Potem je gostota $T^*$*

$$\frac{\prod_{i=1}^{p}(t^*_{ii})^{n-i}\exp(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\Sigma^{-1}T^*(T^*)^T)}{2^{(p(n-2))/2}\pi^(p(p-1))/4|\Sigma|^{n/2}\prod_{i=1}^{p}\Gamma[(n-i+1)/2]}$$

(2) lahko zapišemo kot $a_{ij} = \sum_{k=1}^{j} t^*_{ik}t^*_{ik}$ za $i \geq i$. Potem je

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t^*_{kl}} = \begin{cases} 0\,; & k \geq i \\ 0\,; & l \geq j \end{cases}$$

Determianta Jakobijeve matrike transformacije $A$ v $T^*$ je determinanta spodnje trikotne matrike z diagonalnimi elementi

$$\frac{\partial a_{ii}}{\partial t^*_{ii}} = 2t^*_{ii}$$

[5] Ker so diagonalni elementi matrike $C$ strogo pozitivni je tudi determinanta naše $\frac{p(p+1)}{2} \times \frac{p(p+1)}{2}$ matrike pozitivna, zato je ta substitucija regularna.

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial t^*_{ij}} = 2t^*_{jj}$$

za $i > j$. Torej je determinanta Jakobijeve matrike za transformacija $2^p \prod_{i=1}^p (t^*_{ii})^{p+1-i}$. Determinanta Jakobijeve matrike za transformacijo $T^*$ v $A$ je potem recipročna vrednost. Pokazali smo naslednjo trditev.

**Trditev 6.** *Naj bodo $Z_1, Z_2 \dots Z_n$ neodvisno porazdeljeni vsak po $\mathcal{N}(0, \Sigma)$. Potem je gostota $A = \sum_{i=1}^n Z_i Z_I^T$*

$$\frac{|A|^{(n-p-1)/2} \exp(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Sigma^{-1} A}{2^{pn/2} \pi^{p(p-1)/4} |\Sigma|^{n/2} \prod_{i=1}^p \Gamma[\frac{1}{2}(n-i+1)]} \qquad (\dagger)$$

*če je $A$ pozitivno definitna in 0 sicer.*

**Posledica 2.** *Naj bodo $X_1, X_2 \dots, X_N$ $(N > P)$ neodvisno identično porazdeljeni $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Potem je gostota porazdelitve $A = \sum_{i=1}^N (X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^T$ enaka $(\dagger)$ za $n = N - 1$.*

Gostota $(\dagger)$ je gostota Wishartove porazdelitve $\mathcal{W}(\Sigma, n)$ ter jo bomo od sedaj označevali z $w(A|\Sigma, n)$.

**Posledica 3.** *Naj bodo $X_1, X_2 \dots, X_N$ $(N > p)$ neodvisno identično porazdeljeni $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Porazdelitev vzorčno disperzijske matrike*

$$S = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^T$$

*je $\mathcal{W}(\frac{1}{n}\Sigma, n)$ kjer je $n = N - 1$.*

*Dokaz.*

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N (X_i - \overline{X})(X_i - \overline{X})^T = \sum_{i=1}^n [\frac{1}{\sqrt{n}} Z_i][\frac{1}{\sqrt{n}} Z_i]^T$$

kjer so $\frac{1}{\sqrt{n}} Z_1, \frac{1}{\sqrt{n}} Z_2, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} Z_N$ neodvisno identično porazdeljeni $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n}\Sigma)$. Trditev 6 implicira Posledico 3. □

**Lema 2.** *Determinanta Jakobijeve matrike transformacije $E = F^{-1}$ (iz $E$ v $F$) je $|F|^{-2m}$, kjer je $m$ dimenzija $E$ in $F$.*

*Dokaz.* Brez dokaza.

**Definicija 1.** *Definiramo multivariatno gama funkcijo*

$$\Gamma_p[t] = \pi^{p(p-1)/4} \prod_{i=1}^p \Gamma[t - \frac{1}{2}(i-1)]$$

*Tedaj je gostota Wishartove porazdelitve*

$$w(A|\Sigma, n) = \frac{|A|^{(n-p-1)/2} \exp(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Sigma^{-1} A)}{2^{pn/2} |\Sigma|^{n/2} \Gamma_p[\frac{1}{2} n}$$

**Trditev 7.** *Če ima $A$ porazdelitev $\mathcal{W}(\Sigma, m)$ potem ima $B = A^{-1}$ gostoto porazdeltive*

$$\frac{|\Psi|^{m/2} |B|^{-(m+p+1)/2} \exp(-\frac{1}{2} \operatorname{tr} \Psi B^{-1}}{2^{mp/2} \Gamma_p[\frac{1}{2} m]} \qquad (\ddagger)$$

*za $B$ positivni definitne in* 0 *sicer, pri čemer smo označili $\Psi = \Sigma^{-1}$.*

*Dokaz.* Po lemi 2 je determinanta Jakobijeve matrike $|B|^{-(p+1)}$. Zamenjamo $B^{-1}$ za $A$ ter množimo z $|B|^{-(p+1}$ ter dobimo ($\ddagger$). $\square$

Gostota ($\ddagger$) je gostota inverzne Wishartove porazdelitve z $m$ prostostnimi stopnjami. Porazdelitev bomo označevali z $\mathcal{W}^{-1}(\Psi, m)$, gostoto pa z $w^{-1}(B|\Psi, m)$.

## 4 Multivariatni normalni model

Disperzijska matrika $\Sigma$ vzorca velikosti $N$ iz $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ ima enako porazdelitev kot $\frac{1}{n}A$, kjer ima $A$ porazdelitev $\mathcal{W}(\Sigma, n)$ ter je $n = N-1$. V tem poglavju bomo pokazali, da če je apriorna porazdelitev $\Sigma$ Wishartova potem je aposteriorna porazdelitev $\Sigma$ pri danem $A$ inverzna Wishartova. Ključna pridobitev poglavja je posledica 4.

**Lema 3.** *Naj bosta $Q$, $R$ pozitivno definitni $p \times p$ matrike in $\alpha \in \mathbb{R}$, potem velja*

$$|Q|^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma_p[\alpha]} \int |R|^{\alpha-(p+1)/2} \exp(-\operatorname{tr} QR) dT$$

**Trditev 8.** *Če je $A$ porazdeljen $\mathcal{W}(\Sigma, n)$ ter ima $\Sigma$ apriorno porazdelitev $\mathcal{W}^{-1}(\Psi, m)$ potem je aposteriorna gostota $\Sigma$ pri danem $A$ inverzna Wisharova $\mathcal{W}^{-1}(A + \Psi, n + m)$.*

*Dokaz.* Skupna gostota $A$ in $\Sigma$ je

$$\frac{|\Psi|^{m/2} |\Sigma|^{-(n+m+p+1)/2} |A|^{(n-p-1)/2} \exp(-\frac{1}{2} \operatorname{tr}(A + \Psi)\Sigma^{-1})}{2^{(n+m)p/2} \Gamma_p(\frac{1}{2} n) \Gamma_p(\frac{1}{2} m)} \qquad (1)$$

za pozitivno definitne $A$ in $\Sigma$. Da bi dobili robno gostoto $A$-ja moramo 1 integrirati po vseh pozitivno definitnih $\Sigma$. Označimo $Q := \frac{1}{2}(A + \Psi)$. Z uporabo leme 3 dobimo

$$\frac{|\Psi|^{m/2} (\frac{1}{2})^{-p(n+m)/2} |A + \Psi|^{-(n+m)/2)} \Gamma_p[\frac{1}{2}(n + m)] |A|^{(n-p-1)/2}}{2^{p(n+m)/2} \Gamma_p[\frac{1}{2} n] \Gamma_p[\frac{1}{2} m]} \qquad (2)$$

Da bi dobili aposteriorno gostoto moramo 1 deliti z 2. Dobimo

$$\frac{|A+\Psi|^{(n+m)/2}|\Sigma^{-(n+m+p+1)/2}\exp(-\frac{1}{2}\operatorname{tr}(A+\Psi)\Sigma^{-1})}{2^{(n+m)p/2}\Gamma_p[\frac{1}{2}(n+m)]}$$

kar pa je $w^{-1}(\Sigma|A+\Psi, n+m)$. □

**Lema 4.** *Naj bo $A$ porazdeljena $\mathcal{N}(\Sigma, n)$, potem velja*

$$\mathrm{E}(A^{-1}) = \frac{1}{n-p-1}\Sigma^{-1}$$

**Trditev 9.** *Naj bo $X_1, X_2, \ldots, X_N$ slučajni vzorec porojen z $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. Naj imata $\mu$ in $\Sigma$ apriorno gostoto $n(\mu|\nu, \frac{1}{K}\Sigma)w^{-1}(\Sigma|\Psi, m)$ Potem je aposteriorna gostota $\mu$ in $\Sigma$ pogojno na $\overline{X}$ in $S$ enaka*

$$n(\mu|\frac{1}{N+K}(N\overline{X}+K\nu, \frac{1}{N+K}\Sigma)w^{-1}(\Sigma|\Psi+nS+\frac{NK}{N+K}(\overline{X}-\nu)(\overline{X}-\nu)^T) \qquad (*)$$

*Dokaz.* Skupna gostota $\overline{X}$, $A$, $\mu$ ter $\Sigma$ je

$$\frac{K^{p/2}N^{p/2}|\Psi|^{m/2}|\Sigma|^{-(N+m+p+2)/2}|A|^{-(N-P-2)/2}}{2^{(N+m+1)p/2}\pi^p\Gamma_p[\frac{1}{2}(N-1)\Gamma_p[\frac{1}{2}m]]}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\frac{1}{2}(N(\overline{X}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\overline{X}-\mu)+\operatorname{tr}A\Sigma^{-1}+K(\mu-\nu)\Sigma^{-1}(\mu-\nu)+\operatorname{tr}\Psi\Sigma^{-1})) \tag{1}$$

Robna gostotna $\overline{X}$ in $A$ je integral 1 po $\mu$ ter $\Sigma$. Eksponent v 1 preoblikujemo

$$\frac{1}{2}\Big[(N+K)\mu^T\Sigma^{-1}\mu-2(N\overline{X}+K\nu)\Sigma^{-1}\mu+N\overline{X}^T\Sigma^{-1}\overline{X}+K\nu\Sigma^{-1}\nu+\operatorname{tr}(A+\Psi)\Sigma^{-1}\Big]=$$
$$=\Big[(N+K)[\mu-\frac{1}{N+K}(N\overline{X}+K\nu)]^T\Sigma^{-1}[\mu-\frac{1}{N+K}(N\overline{X}+K\nu)]+$$
$$+\frac{NK}{N+K}(\overline{X}-\nu)^T\Sigma^{-1}(\overline{X}-\nu)+\operatorname{tr}(A+\Psi)\Sigma^{-1}\Big] \tag{2}$$

Integral 1 po $\mu$ je

$$\frac{K^{p/2N^{p/2}|\Psi|^{m/2}|\Sigma|^{-(N+M+P+1)/2}|A|^{-(N-p-2)/2}}}{(N+K)^{p/2}2^{(N+m)p/2}\pi^{p/2}\Gamma_p[\frac{1}{2}(N-1)]\Gamma_p[\frac{1}{2}m]}\cdot$$
$$\cdot\exp(-\frac{1}{2}[\operatorname{tr}A\Sigma^{-1}+\frac{NK}{N+K}(\overline{X}-\nu)^T\Sigma^{-1}(\overline{X}-\nu)+tr\Psi\Sigma^{-1}]) \tag{3}$$

Če to integriramo še po $\Sigma$ dobimo

$$\frac{K^{p/2}N^{p/2}\Gamma_p[\frac{1}{2}(N+m)]}{\pi^{p/2}\Gamma_p[\frac{1}{2}(N-1)]\Gamma_p[\frac{1}{2}m](N+K)^{p/2}}\cdot$$
$$\cdot|A|^{(N-p-2)/2|\Psi|^{m/2}|\Psi+A+\frac{NK}{N+K}(\overline{X}-\nu)(\overline{X}-\nu)^T|^{(N+m)/2}} \tag{4}$$

Aposteriorna gostota $\mu$ in $\Sigma$ prid danem $\overline{X}$ ter $A$ je kvocient 1 in 4

$$\frac{N+K)^{p/2}|\Sigma|^{-(N+m+p+2)/2}|\Psi + A + \frac{NK}{N+K}(\overline{X}-\nu)(\overline{X}-\nu)^T|^{(N+m)/2}}{2^{(N+m+1)p/2}\pi^{p/2}\Gamma_p[\frac{1}{2}(N+M)]}\cdot$$
$$\cdot \exp\Big(-\frac{1}{2}\big[(N+K)[\mu - \frac{1}{N+K}(N\overline{X}+K\nu)]^T\Sigma^{-1}[\mu - \frac{1}{N+K}(N\overline{X}+K\nu)]+$$
$$+\operatorname{tr}[\Psi + A + \frac{NK}{N+K}(\overline{X}-\nu)(\overline{X}-\nu)^T]\Sigma^{-1}\big]\Big) \tag{5}$$

kar lahko zapišemo kot $(*)$. □

**Posledica 4.** *Naj bo $X_1, X_2 \dots X_N$ slučajni vzorec porojen z $\mathcal{N}(\nu, \Sigma)$. Če imata $\mu$ ter $\Sigma$ apriorni gosotoi $n(\mu|\nu, \frac{1}{K}\Sigma)w^{-1}(\Sigma|\Psi, m)$ potem velja*

$$\mathrm{E}(\mu|\overline{X}) = \frac{1}{N+K}(N\overline{X}+K\nu)$$

*ter*

$$\mathrm{E}(\Sigma|\overline{X}, S) = \frac{1}{N+m-p-1}\big(nS + \Psi + \frac{NK}{N+K}(\overline{X}-\nu)(\overline{X}-\nu)^T\big)$$

# 5 Uporaba na pravih podatkih

Iz yahoo.finance.com sem zajel podatke o dnevnih cenah ob zaprtju za delnice, ki tvorji S&P 500 indeks in sicer v obdobju od 1. januarja 2000 do 31. decembra 2013. Iz prvotne množice petstotih delnic sem izločil delnice podjetij, katera pred letom 2000 še niso obstajala oziroma še niso kotirala na borzi, kar pa me je pustilo z množico 490-tih delnic. Iz podatkov sem nato izračunal logaritemske dnevne donose za posamezno delnico.
Sedaj se spomnimo formulacije Markovitzevega optimizacijskega problema iz prvega poglavja danega z

$$\begin{gathered} min\ \frac{1}{2}\omega^T\Sigma\omega \\ p.p.\ \omega^T\mu - \mu_P \geq 0 \\ 1^T\omega - 1 = 0 \end{gathered}$$

Slednji optimizacijski problem lahko numerično rešimo s kvadratičnim programiranjem. Splošna oblika kvadratičnega programa je dana z

$$
\begin{aligned}
&min\ \frac{1}{2}x^TQx + d^Tx \\
&p.p. Ax \leq b
\end{aligned}
$$

pri čemer je $Q$ simetrična matrika. Obstaja več metod in postopkov za numerično reševanje vendar se v to ne bomo poglabljali, saj ima večina programskih paketov že vgrajene knjižnice za reševanje tovrstnih problemov. Če uskladimo notacijo

$$
\begin{aligned}
x &\leftarrow \omega \\
Q &\leftarrow \Sigma \\
d &\leftarrow \vec{0} \\
A &\leftarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{pmatrix} \\
b &\leftarrow \begin{pmatrix} \mu_P p \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Če želimo še pozitivnost vseh uteži (brez kratke prodaje), pa specificiramo

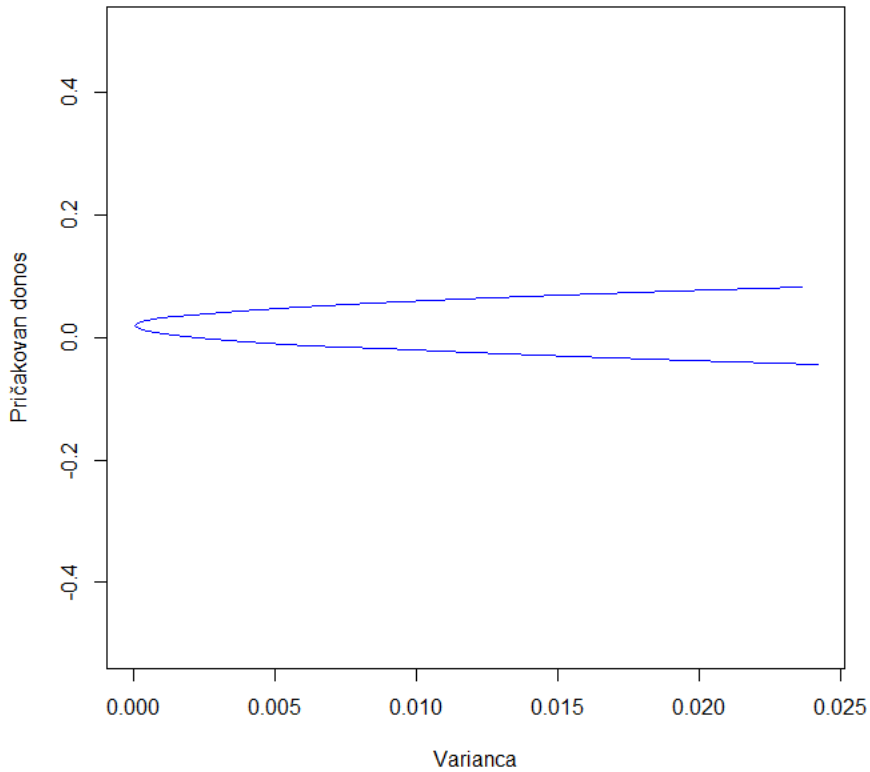
$$
\begin{aligned}
\tilde{A} &\leftarrow \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} \\
\tilde{b} &\leftarrow \begin{pmatrix} b \\ \vec{0} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

kjer je I $p \times p$ indentiteta.

Ko ocenjujemo kovariančno matriko z cenilko

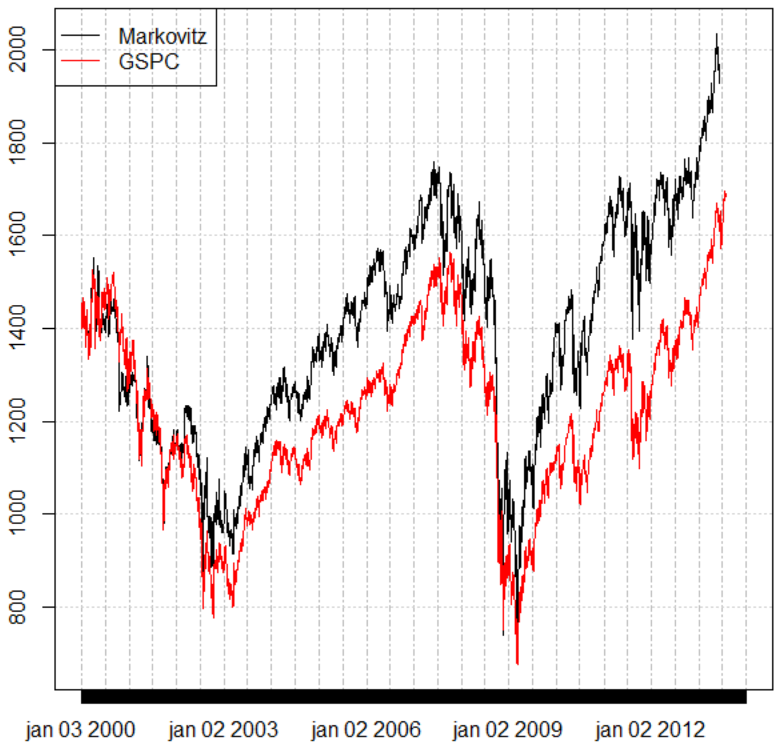
$$
\frac{1}{N+m-p-1}\left(nS + \Psi + \frac{NK}{N+K}(\overline{X}-\nu)(\overline{X}-\nu)^T\right)
$$

za hipermarameter $\Psi$ vzamemo identiteto pomnoženo z nekim skalarjem, ki je istega velikostnega razreda kot varianca donosov. Za K vzamemo $\frac{1}{8}N$, za $m$ pa $p+1$, za $\nu$ vzamemo $\vec{0}$ (kot je predlagano v [1]).



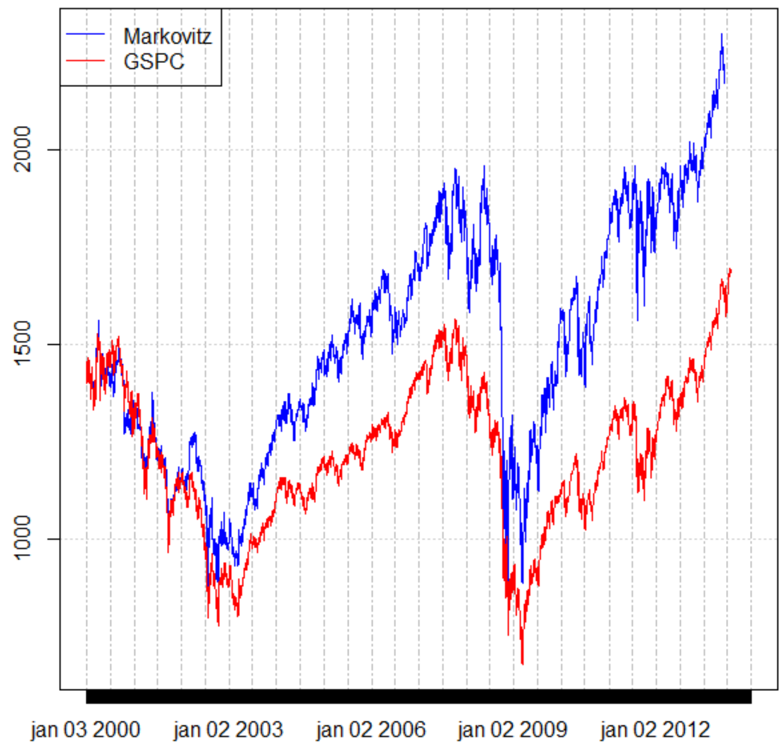

Slika 3: Učinkovita meja izračunana z kovariančno matriko ocenjeno na podatkih prvih 3 mesecev v letu 2000 (brez kratke prodaje).

Za obdobje od 1.januarja 2000 do 31.decembra 2013 sem simuliral naložbeno strategijo z na 490, kjer sem vsakih 21 mesecev rebalansiral portfelj. Za prvo obdobje sem za hiperparameter $\Psi$ vzel indentiteto pomnoženo s skalarjem, po prvem rebalansu, pa sem za $\Psi$ vzel kovariančno matriko ocenjeno v prejšnem obdobju, za $\nu$ pa oceno za upanje. Parametra $K$ ter $m$ sem po prvem obdobju ustrezno spremenil.




Slika 4: Prikaz vrednosti rebalansiranega portfelja 490 delnic (črna) v primerjavi z indeksom S&P500 (rdeča). Brez kratke prodaje.

V praksi je seveda mesečno spreminjanje uteži na 490 delnicah zaradi transakcijskih stroškov zelo drago in po vsej verjetnosti bi nam izničilo ves profit, zato je smiselno omejiti število delnic, ki jih držimo v portfelju. Tedaj vpeljemo binarne spremenljivke $y_1, y_2, \ldots, y_p$, ki nam povedo, ali je delnica $i$ del portfelja. Kvadratični program tedaj




Slika 5: Prikaz vrednosti rebalansiranega portfelja 490 delnic (modra) v primerjavi z indeksom S&P500 (rdeča). Dovolimo negativne uteži na delnicah a najmanj -0.05.

formuliramo

$$x \leftarrow \begin{pmatrix} \omega \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$Q \leftarrow \begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$d \leftarrow \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

$$A \leftarrow \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_p \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$b \leftarrow \begin{pmatrix} \mu_P \\ 1 \\ -1 \\ K \end{pmatrix}$$

kjer je K največje število delnic, ki jih želimo držati v portfelju, dobili pa smo mešani kvadratični program (mixed integer quadratic program).

## 6 Zaključek

Na obeh grafih simuliranega portfelja je opazno, da naša naložbena strategija v letih 2008/2009 naredi večjo izgubo kot indeks. Ena izmed glavnih omejitev ocenjevanja kovarianče matrike z normalno inverznim Wishartovim modelom je, da predpostavljamo normalost logaritemskih donosov. Menim, da je v krizi prišlo do abnormalnosti donosa s tem pa posledično do slabših ocen ter velikih izgub.
Prav tako je predpostavka Markovitzevega modela, da investitorji izbirajo portfelje le na podlagi standardnega odklona ter pričakovanega donosa preveč omejujoča. Menim, da je Markovitzev model lep prikaz alokacije portfelja v teoriji, v praksi pa veliko manj uporaben.

# 7 Literatura

[1] S. T. Rachev, J. S. Hsu, B. S. Bagasheva, Frank J. Fabozzi, *Bayesian methods in finance*, T. Frank J. Fabozzi Series **28** (2008) 92-117

[2] T. W. Anderson, *An introduction to Multivariate Statistical Analysis*, Wiley series in probability and statistics, Wiley-interscience, (2003) 251-283

[3] R. Jamnik, *Matematična statistika*, Državna založba Slovenija (1980)

[4] Z. Bodie, A. Kane, A.J.Marcus *Investments*, Mcgraw-Hill-Irwin, (2009) 196-239