UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Rok Grča

Strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Marjetka Krajnc

Ljubljana, 2014

Kazalo

Strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov

Povzetek

Strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov (STLS) je razširitev problema totalnih najmanjših kvadratov (TLS). Slednje uporabljamo za reševanje predoločenih sistemov enačb $Ax = b$, kjer so napake možne tako v matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kot v vektorju $b \in \mathbb{R}^m$. V primeru, da ima razširjena matrika $[A \ b]$ posebno strukturo, npr. Toeplitz, Hankel, je to strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov. V delu spoznamo tri glavne pristope k reševanju problema STLS. To so strukturirana totalna najmanjša norma (STLN), vezani totalni najmanjši kvadrati (CTLS) ter Riemannov singularni razcep (RiSVD). Vsi algoritmi za reševanje so iterativni. STLS problem se med drugim uporablja pri rekonstrukciji slik z dekonvolucijo, pri čemer se uporabi metodo STLN ali pa njeno izboljšavo RSTLN, tj. regularizirano strukturirano totalno najmanjši normo.

Structured total least squares

Abstract

The structured total least squares problem (STLS) is an extension of the total least squares problem (TLS). TLS is used for solving overdetermined system of equations $Ax = b$, where errors are found in a matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ as well as in a vector $b \in \mathbb{R}^m$. The use of STLS is required when the augmented matrix $[A \ b]$ has a special structure (Toeplitz, Hankel). Three most common approaches to solving STLS are structured total least norm (STLN), constrained total least squares (CTLS) and Riemannian singular value decomposition (RiSVD). All algorithms for solving STLS problems are iterative. STLN or regularized STLN (RSTLN) methods can both be used for image reconstruction using deconvolution.

Math. Subj. Class. (2010): 65F20, 15A18

Ključne besede: totalni najmanjši kvadrati, strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov, strukturirana totalna najmanjša norma, vezani totalni najmanjši kvadrati, Riemannov singularni razcep, dekonvolucija

Keywords: total least squares, structured total least squares, structured total least norm, constrained total least squares, Riemannian singular value decomposition, deconvolution

1. Uvod

V tem delu bomo predstavili strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov (STLS). Veliko problemov v identifikaciji sistemov, procesiranju signalov, analizi in modeliranju podatkov se prevede na STLS problem.

Najprej se bomo spomnili linearnih najmanjših kvadratov, ki so še zmeraj najpogosteje uporabljena metoda za aproksimacijo podatkov. Zatem si bomo pogledali totalne najmanjše kvadrate (TLS), ki so ključni za razumevanje problema STLS. Tudi totalni najmanjši kvadrati se pogosto uporabljajo pri aproksimaciji podatkov, najpogosteje v obliki ortogonalne regresije, ki je poseben primer TLS. Predstavili bomo enega izmed algoritmov za reševanje TLS problema in primerjavo z najmanjšimi kvadrati.

Pogosto se zgodi, da ima matrika v problemu TLS posebno strukturo, kar nas pripelje do glavne teme našega dela, tj. do strukturiranega problema totalnih najmanjših kvadratov. Predstavili bomo nekaj formulacij problema ter njegovo razširitev. Nato si bomo pogledali še najpogostejše metode za reševanje, in sicer strukturirano totalno najmanjšo normo, vezane totalne najmanjše kvadrate in Riemannov singularni razcep. Pri vsaki metodi bomo formulirali problem in zapisali algoritem za reševanje. Za konec si bomo pogledali še primer uporabe STLS pri aproksimaciji slik z dekonvolucijo.

2. Linearni najmanjši kvadrati

Metoda linearnih najmanjših kvadratov je najpogosteje uporabljena metoda za reševanje predoločenih sistemov. Predoločen sistem je sistem enačb, v katerem nastopa več enačb kot neznank. Zapišemo ga kot

$$Ax = b \ , \ A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m, m \geq n, \tag{1}$$

pri čemer iščemo vektor $x \in \mathbb{R}^n$.

Predoločen sistem ima rešitev zgolj v posebnem primeru, tj. ko je $b \in \mathrm{Im}(A)$. Če označimo vektor ostankov z $\Delta b = Ax - b$, to pomeni, da je v splošnem $\Delta b \neq 0$. Iščemo torej tak x, da se leva stran enačbe $Ax = b$ čim bolj prilega desni oziroma, da bo norma $\|\Delta b\|_p = \|Ax - b\|_p,\ p \geq 1$, čim manjša. Vsaki normi ustreza druga rešitev, najpogosteje pa rešujemo problem za $\|.\|_2$, kjer govorimo o rešitvi po metodi najmanjših kvadratov. Natančneje iščemo

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2.$$

Na problem lahko gledamo tudi drugače. Vemo, da velja $Ax = b + \Delta b$, pri čemer $\tilde{b} = b + \Delta b$ leži v $\mathrm{Im}(A)$. Iščemo torej tak vektor $\tilde{b} \in \mathrm{Im}(A)$, ki je najbližje vektorju b v drugi normi $\|\tilde{b} - b\|_2$. Ko tak $\tilde{b}$ najdemo, rešimo sistem $Ax = \tilde{b}$, kar nam da rešitev x našega predoločenega sistema po metodi najmanjših kvadratov. Zanima nas torej, za koliko moramo najmanj spremeniti desno stran enačbe, da bo $Ax = \tilde{b}$ rešljiv.

Rešitev je enolična, če je matrika A polnega ranga, v nasprotnem primeru ima namreč A neprazno jedro in obstaja $z \neq 0$, $z \in \ker(A)$, da velja

$$\|Ax - b\|_2 = \|A(x + z) - b\|_2.$$

Primer 2.1. Iščemo kvadratni polinom oblike $p(t) = a+bt+ct^2$, ki gre skozi meritve $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m), m > 3$. Sistem enačb zapišemo kot

$$\begin{array}{c} a + bx_1 + cx_1^2 = y_1 \\ a + bx_2 + cx_2^2 = y_2 \\ \vdots \\ a + bx_m + cx_m^2 = y_m \end{array} \qquad oz. \qquad \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Želimo dobiti koeficiente a, b, c, da bo

$$\|Ax - b\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} (p(x_i) - y_i)^2$$

minimalna.

Najpogosteje uporabljene metode za reševanje linearnih problemov najmanjših kvadratov so uporaba normalnega sistema, psevdoinverza, QR razcepa ter singularnega razcepa.

3. Totalni najmanjši kvadrati

Pri linearnih najmanjših kvadratih predpostavimo, da matriko A natančno poznamo, izvor napak, zaradi katerih $b \notin \mathrm{Im}(A)$, je zgolj v vektorju b. Pri totalnih najmanjših kvadratih (v nadaljevanju TLS) pa dopuščamo možnost, da so napake možne tudi v matriki A. Iščemo torej tako matriko $\tilde{A} = A + \Delta A$ in vektor $\tilde{b} = b + \Delta b$, za katera velja $\tilde{b} \in \mathrm{Im}(\tilde{A})$, da bo $\|[\tilde{A}\ \tilde{b}] - [A\ b]\|_F = \|[\Delta A\ \Delta b]\|_F$ minimalna. Pri tem ΔA in Δb vsebujeta meritvene napake, $\tilde{A}$ in $\tilde{b}$ pa prave vrednosti. Končna rešitev je torej $\tilde{x}$, ki reši enačbo $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.

Definicija 3.1. Frobeniusova norma matrike $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je definirana kot

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2} = \sqrt{\mathrm{sled}(A^H A)}\,.$$

Definicija 3.2. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $b \in \mathbb{R}^m$. Problem totalnih najmanjših kvadratov je problem iskanja matrike $\Delta A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ter vektorjev $x \in \mathbb{R}^n$ in $\Delta b \in \mathbb{R}^m$, pri katerih je dosežen minimum

$$\begin{gathered} \min_{x, \Delta A, \Delta b} \|[\Delta A \;\; \Delta b]\|_F \\ \text{pri pogoju } (A + \Delta A)x = b + \Delta b, \end{gathered} \tag{2}$$

kjer je $\|.\|_F$ Frobeniusova norma.

Če so vsi podatki (tako matrika A kot vektor b) pridobljeni z meritvami, je smiselno privzeti, da so meritvene napake prisotne tako v matriki A kot v vektorju b. Rešitev po metodi totalnih najmanjših kvadratov je v tem primeru boljša od rešitve po standardni metodi najmanjših kvadratov.

Totalni najmanjši kvadrati so razširitev nekaterih drugih znanih problemov, kot sta ortogonalna in Demingova regresija. Uporabljajo se na različnih področjih, kot so astronomija, identifikacija sistemov, rekonstrukcija slik, itd.

3.1. **Razširitev TLS.** TLS problem lahko uporabimo tudi v primeru, ko na desni strani enačbe $AX = B$, namesto vektorja stoji dana matrika $B \in \mathbb{R}^{m \times d}$. Tedaj tudi neznan $X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ni več vektor, temveč matrika. Vse definicije ostanejo enake, spremenijo se le dimenzije $x, b, \Delta b$.

3.2. **Reševanje.** Poglejmo si enega izmed algoritmov za reševanje TLS problema. Kot večino algoritmov za TLS problem, tudi tega rešujemo s pomočjo singularnega razcepa matrike $S = [A\ b]$, ki je predstavljen v naslednjem izreku.

Izrek 3.3. *Za vsako matriko $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, obstaja singularni razcep*

$$A = U \Sigma V^T,$$

kjer sta $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ in $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonalni matriki in je $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ oblike

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & & \end{bmatrix},$$

kjer so $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \sigma_n \geq 0$ singularne vrednosti matrike A.
Stolpci matrike $U = [u_1 \ldots u_m]$ so levi, stolpci matrike $V = [v_1 \ldots v_n]$ pa desni singularni vektorji.

Dokaz. Glej [8]. □

Opomba 3.4. Poznamo tudi singularni razcep oblike $A = \hat{U} \hat{\Sigma} V^T$, kjer je $\hat{U} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Matrika V ostane ista kot pri navadnem singularnem razcepu, matrika $\hat{U}$ se z matriko U ujema v prvih n stolpcih, matrika $\hat{\Sigma}$ pa se z matriko Σ ujema v prvih n vrsticah.

Predpostavimo, da je matrika A polnega ranga in $b \notin \mathrm{Im}(A)$, iz česar sledi, da je matrika $[A\ b]$ ranga $n+1$. Vemo, da je $\tilde{b} = b + \Delta b \in \mathrm{Im}(\tilde{A})$, torej je $\mathrm{rang}([\tilde{A}\ \tilde{b}]) = n$. Naj bo $[A\ b] = U \Sigma V^T$ singularni razcep in naj velja $\sigma_n > \sigma_{n+1} > 0$. Naslednji izrek pove, kako matriko najbolje aproksimiramo z matriko nižjega ranga.

Izrek 3.5. ***(Eckart-Young-Mirsky)**. Naj bo $A = U \Sigma V^T$ singularni razcep matrike $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, in rang$(A) > k$. Naj bo*

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T.$$

Potem velja

$$\min_{rang(B)=k} \|B - A\|_2 = \|A_k - A\|_2 = \sigma_{k+1}$$

in

$$\min_{rang(B)=k} \|B - A\|_F = \|A_k - A\|_F = \left(\sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i^2 \right)^{1/2}$$

Dokaz. Glej [8]. □

Izrek 3.5 nam pove, da je najboljša aproksimacija matrike $[A\ b]$ v Frobeniusovi normi z matriko ranga n, enolična in enaka

$$[\tilde{A}\ \tilde{b}] = [A\ b] - \sigma_{n+1} u_{n+1} v_{n+1}^T.$$

Iz $[\tilde{A}\ \tilde{b}]v_{n+1} = 0$ sledi, da so vsi vektorji iz jedra matrike $[\tilde{A}\ \tilde{b}]$ oblike $\alpha v_{n+1},\ \alpha \in \mathbb{R}$, torej te matrike ni potrebno eksplicitno izračunati. Če je $\tilde{x}$ rešitev enačbe $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, le-to lahko zapišemo kot $[\tilde{A}\ \tilde{b}] \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ -1 \end{bmatrix} = 0$. Iz te enačbe izrazimo $\tilde{x}$ kot

$$\tilde{x} = \frac{-1}{v_{n+1,n+1}} \begin{bmatrix} v_{n+1,1} \\ \vdots \\ v_{n+1,n} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

pri čemer je $v_{n+1} = (v_{n+1,j})_{j=1}^{n+1}$. Rešitev je dobro definirana, če velja $v_{n+1,n+1} \neq 0$. Če so $\sigma_1^{'} \geq \ldots \geq \sigma_n^{'}$ singularne vrednosti matrike A, se izkaže, da je $\sigma_n^{'} > \sigma_{n+1}$ potreben in zadosten pogoj za obstoj in enoličnost rešitve po metodi totalnih najmanjših kvadratov. Velja namreč (glej [8]), da sta ekvivalentna pogoja

(1) $\sigma_n^{'} > \sigma_{n+1}$
(2) $\sigma_n > \sigma_{n+1}$ in $v_{n+1,n+1} \neq 0$.

Poglejmo si še, kako izgleda rešitev v primeru razširjenega TLS problema. Naj bo $S = [A\ B] = \hat{U}\hat{\Sigma}V^T$ singularni razcep matrike S, kot smo ga opisali v opombi 3.4, $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_{n+d}$ pa naj bodo njene singularne vrednosti. Matriki $\hat{\Sigma}$ in V zapišemo po blokih tako, da velja

$$\hat{\Sigma} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & d \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \end{array} \quad \text{in} \quad V = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} n & d \end{array} \\ \begin{array}{c} n \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Izrek 3.6. *Rešitev razširjenega TLS problema obstaja natanko tedaj, ko je matrika V_{22} nesingularna. Rešitev je enolična natanko tedaj, ko je $\sigma_n \neq \sigma_{n+1}$. V primeru, da rešitev obstaja in je enolična, jo dobimo iz naslednjega izraza:*

$$\tilde{X} = -V_{12}V_{22}^{-1}.$$

Velja tudi

$$\Delta S_{tls} := [\Delta A_{tls}\ \ \Delta B_{tls}] = -U\mathrm{diag}(0, \Sigma_2)V^T.$$

Dobljena matrika

$$S_{tls} := S + \Delta S = U\mathrm{diag}(\Sigma_1, 0)V^T$$

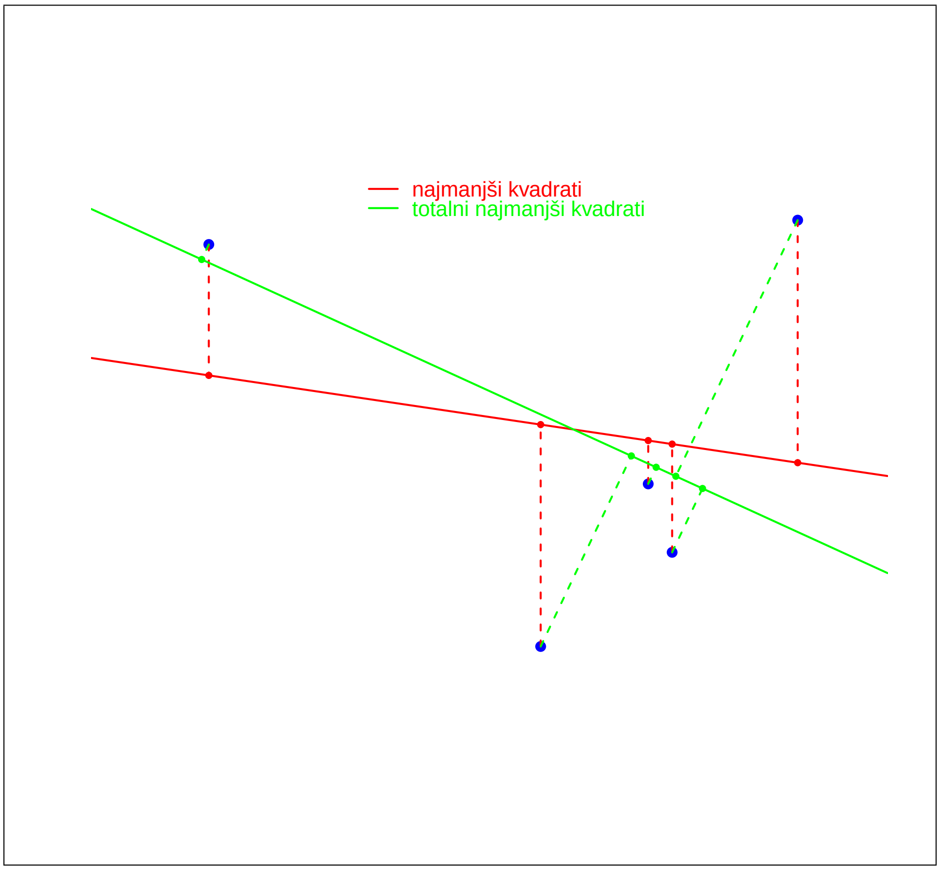
je najboljša aproksimacija matrike S z matriko ranga n.

Dokaz. Glej [2]. □

Opomba 3.7. Pri osnovnem problemu TLS, tj. $d = 1$, je $V_{22} = \begin{bmatrix} v_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}$. Matrika V_{22} je v tem primeru nesingularna natanko tedaj, ko je $v_{n+1,n+1} \neq 0$, kar ustreza pogoju za obstoj rešitve v (3).

Algoritem za reševanje TLS problema zapišemo torej na naslednji način.

ALGORITEM TLS
Vhod: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times d}$
Izhod: rešitev $\tilde{X}$
Postopek:



SLIKA 1. Primerjava LS in TLS

(1) Izračunaj singularni razcep matrike $[A\ B] = U\Sigma V^T$.
(2) **if** V_{22} je nesingularna **then** $\tilde{X} = -V_{12}V_{22}^{-1}$
else: vrni opozorilo, da TLS nima rešitve in končaj

3.3. **Primerjava z najmanjšimi kvadrati.** Poglejmo si primerjavo totalnih in navadnih najmanjših kvadratov na naslednjem primeru.

Primer 3.8. Iščemo premico oblike $y = kx$, ki aproksimira točke (0.535, -1.504), (1.133, -0.582), (-1.310, 0.776), (1.266, -0.970), (1.964, 0.914).

Pri navadnih najmanjših kvadratih dobimo rešitev $k_{ls} = -0.151$, pri totalnih pa $k_{tls} = -0.419$. Rezultati so prikazani na sliki 1.

Pri totalnih najmanjših kvadratih minimiziramo vsoto kvadratov razdalj med točkami ter premico, pri navadnih najmanjših kvadratih pa minimiziramo vsoto kvadratov razlik med y-koordinatami točk in premice.

4. Strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov

Strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov (v nadaljevanju STLS) je razširitev problema totalnih najmanjših kvadratov za reševanje predoločenega sistema enačb $Ax = b$. Pri problemu TLS smo definirali razširjeno matriko $S := [A\ b] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ in popravek $\Delta S = [\Delta A\ \Delta b]$. V primeru, da je S matrika s posebno strukturo, npr. (bločna-) Hankel, (bločna-) Toeplitz, krožna matrika, Toeplitz + Hankel, redka matrika, TLS ni najboljši pristop, saj ne ohranja strukture. Zato se v takih primerih uporablja strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov.

V praksi je matrika $[A\ b]$ velikokrat strukturirana, lahko zaradi posebne interpretacije, lahko je nekdo iz izmerjenih podatkov konstruiral tako matriko. V teh primerih je zaželjeno, da ima tudi matrika $[A + \Delta A\ \ b + \Delta b]$ enako strukturo kot matrika podatkov S. Ohranjanje strukture matrike je glavni razlog za vpeljavo problema STLS.

Definicija 4.1. Matrika S ima linearno strukturo, če lahko zapišemo $S = \sum_{i=1}^{q} s(i)T_i$, kjer so $T_i \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$, $i = 1,\dots,q$, fiksne bazne matrike, elementi vektorja $s \in \mathbb{R}^q$ pa predstavljajo različne elemente matrike S.

Če enačbi za S dodamo še matriko T_0, ki ni pomnožena z nobenim faktorjem, pravimo, da ima matrika S afino strukturo:

$$S = T_0 + s(1)T_1 + \ldots + s(q)T_q.$$

Očitno velja, da je $S - T_0$ linearna kombinacija matrik $T_i \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$, $i = 1,\dots,q$. Primer matrike z afino strukturo sta Toeplitzova in Hankelova matrika, primer matrike, ki nima afine strukture pa je Vandermondova matrika.

Definicija 4.2. Matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je Toeplitzova, če velja $A_{i,j} = A_{i+1,j+1}$. Toeplitzova matrika je generirana z vektorjem $a \in \mathbb{R}^{(m+n-1)}$, ki vsebuje različne elemente matrike A in ga shranimo v prvo vrstico in prvi stolpec. Ima naslednjo obliko:

$$A = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_{n+1} & a_n & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m+n-1} & a_{m+n-2} & \dots & a_m \end{bmatrix}.$$

Definicija 4.3. Matrika $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je Hankelova, če velja $A_{i,j} = A_{i-1,j+1}$. Hankelova matrika je generirana z vektorjem $a \in \mathbb{R}^{(m+n-1)}$, ki vsebuje različne elemente matrike A in ga shranimo v prvi stolpec in zadnjo vrstico. Ima naslednjo obliko:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_m & a_{m+1} & \dots & a_{m+n-1} \end{bmatrix}.$$

Če je matrika strukturirana, jo lahko predstavimo z manj kot $m\times(n+1)$ elementi. Število različnih elementov označimo s q ter jih shranimo v vektor $s \in \mathbb{R}^q$. Matrika S je v tem primeru natanko določena z vektorjem s in s podano strukturo. Označimo s $s_1 \in \mathbb{R}^{q_1}$ vektor različnih elementov matrike A in s $s_2 \in \mathbb{R}^{q_2}$ vektor različnih elementov vektorja b, kateri še niso v s_1. Očitno velja $q = q_1 + q_2$ in $s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$.

Ker želimo, da ima matrika $T := S + \Delta S$ isto strukturo kot S, lahko podobno kot za S različne elemente matrike T shranimo v vektor $t \in \mathbb{R}^q$. S pomočjo t lahko definiramo vektor $\Delta s \in \mathbb{R}^q$, da velja $s + \Delta s = t$.

Poglejmo si še, kako lahko podamo matrično strukturo.

Definicija 4.4. Matrična funkcija, ki določa strukturo matrike, je podana kot preslikava

$$\mathrm{M}\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^{m\times(n+1)} : m \to \mathrm{M}(m).$$

Funkcija M nam razporedi elemente vektorja m v matriko.

Naj bo M taka matrična funkcija, da je $S = \mathrm{M}(s)$. Ker ima T isto strukturo velja

$$T = \mathrm{M}(t) = \mathrm{M}(s + \Delta s).$$

Če je ta struktura linearna, veljata naslednji enačbi:

$$\mathrm{M}(s + \Delta s) = \mathrm{M}(s) + \mathrm{M}(\Delta s) \text{ in } \mathrm{M}(\Delta s) = \Delta S.$$

Za boljšo predstavo vektorjev, matrik in matričnih funkcij si poglejmo naslednji primer.

Primer 4.5. Naprej si poglejmo primer s Hankelovo matriko. Naj bodo

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ A + \Delta A = \begin{bmatrix} 5+\alpha \\ 2+\beta \\ 4+\gamma \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ in } b + \Delta b = \begin{bmatrix} 2+\beta \\ 4+\gamma \\ 7+\delta \end{bmatrix}.$$

Prej definirane matrike S, T in ΔS so v tem primeru enake

$$S = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix},\ T = \begin{bmatrix} 5+\alpha & 2+\beta \\ 2+\beta & 4+\gamma \\ 4+\gamma & 7+\delta \end{bmatrix},\ \Delta S = T - S.$$

Vektorji, ki generirajo zgornje matrike, so enaki

$$s = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},\ \Delta s = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix},\ t = s + \Delta s,\ s_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},\ s_2 = 7,$$

njihove dimenzije pa so

$$q = 4,\ q_1 = 3 \text{ in } q_2 = 1.$$

Matrična funkcija, ki razporedi elemente vektorja s v matriko S je v tem primeru enaka

$$\mathrm{M}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{3\times 2} : m \to \begin{bmatrix} m(1) & m(2) \\ m(2) & m(3) \\ m(3) & m(4) \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da velja $\mathrm{M}(s+\Delta s) = \mathrm{M}(s)+\mathrm{M}(\Delta s)$ in $\Delta S = \mathrm{M}(\Delta s)$, kar dokazuje, da ima Hankelova matrika linearno strukturo.

Primer 4.6. Sedaj si poglejmo še primer matrike z nelinearno strukturo. Izberimo Vandermondovo matriko (matrika A je Vandermondova, b je nestrukturiran):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \\ 25 & 9 \end{bmatrix},\ A + \Delta A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5+\alpha & 3+\beta \\ (5+\alpha)^2 & (3+\beta)^2 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix},\ b + \Delta b = \begin{bmatrix} 8+\gamma \\ -3+\delta \\ 6+\epsilon \end{bmatrix}$$

Matrike S, T in ΔS so enake

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 5 & 3 & -3 \\ 25 & 9 & 6 \end{bmatrix}, \; T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8+\gamma \\ 5+\alpha & 3+\beta & -3+\delta \\ (5+\alpha)^2 & (3+\beta)^2 & 6+\epsilon \end{bmatrix}, \; \Delta S = T - S,$$

vektorji $s, \Delta s, s_1, s_2$ ter njihovo število različnih elementov pa so enaki

$$s = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \; \Delta s = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \end{bmatrix}, \; t = s + \Delta s, \; s_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \; s_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \; q = 5, \; q_1 = 2, \; q_2 = 3.$$

Matrična funkcija se v tem primeru glasi

$$\mathrm{M}\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^{3\times 3} : m \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & m(3) \\ m(1) & m(2) & m(4) \\ m(1)^2 & m(2)^2 & m(5) \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da je v tem primeru $\mathrm{M}(s+\Delta s) \neq \mathrm{M}(s) + \mathrm{M}(\Delta s)$ in $\Delta S \neq \mathrm{M}(\Delta s)$, zato to ni linearna struktura. Še zmeraj pa velja $S = \mathrm{M}(s)$ in $T = \mathrm{M}(t) = \mathrm{M}(s + \Delta s)$.

STLS problem je definiran podobno kot TLS, dodamo le omejitev glede strukture matrike.

Definicija 4.7. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $b \in \mathbb{R}^m$. Strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov je problem iskanja matrike $\Delta A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ter vektorjev $x \in \mathbb{R}^n$ in $\Delta b \in \mathbb{R}^m$, pri katerih je dosežen minimum

$$\begin{gathered} \min_{x,\Delta A,\Delta b} \|[\Delta A \; \Delta b]\|_F^2 \\ \text{pri pogoju } (A + \Delta A)x = b + \Delta b, \end{gathered} \tag{4}$$

pri čemer mora imeti matrika $[\Delta A \; \Delta b]$ isto strukturo kot matrika $[A \; b]$.

STLS problem pa lahko definiramo tudi na naslednji način.

Definicija 4.8. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $b \in \mathbb{R}^m$. Matrika $[A \; b]$ naj ima afino strukturo, podano s q različnimi elementi, vsebovanimi v vektorju $s \in \mathbb{R}^q$. Iščemo vektorja $x \in \mathbb{R}^n$ in $\Delta s \in \mathbb{R}^q$, pri katerih je dosežen minimum

$$\begin{gathered} \min_{x,\Delta s} \Delta s^T W \Delta s \\ \text{pri pogoju } (A + \Delta A)x = b + \Delta b, \end{gathered} \tag{5}$$

pri čemer mora imeti matrika $[\Delta A \; \Delta b]$ isto strukturo kot matrika $[A \; b]$. Pri tem vektor $\Delta s \in \mathbb{R}^q$ vsebuje q različnih elementov matrike $\Delta S = [\Delta A \; \Delta b]$, matrika $W \in \mathbb{R}^{q\times q}$ pa je matrika uteži, ki je določena s predpisano strukturo.

Opomba 4.9. Namesto eksplicitno podane matrike A in vektorja b, sta pri problemu STLS lahko dana vektor s, ki vsebuje različne elemente matrike $[A \; b]$ in matrična funkcija M, s čimer sta matrika A in vektor b natančno določena.

Ekvivalenca med (4) in (5) velja, če velja $\|[\Delta A \;\; \Delta b]\|_F^2 = \Delta s^T W \Delta s$. To enakost je najlažje razložiti z naslednjim primerom. Recimo, da smo izmerili podatke, ki jih shranimo v vektor $s \in \mathbb{R}^6$. Zanima nas rešitev STLS problema za

$$[A\ b] = \begin{bmatrix} s(3) & s(2) & s(1) \\ s(4) & s(3) & s(2) \\ s(5) & s(4) & s(3) \\ s(6) & s(5) & s(4) \end{bmatrix}.$$

Če problem zapišemo kot TLS, tj. brez upoštevanja posebne strukture, potem je $\Delta s \in \mathbb{R}^{12}$ in

$$[\Delta A\ \Delta b] = \begin{bmatrix} \Delta s(3) & \Delta s(2) & \Delta s(1) \\ \Delta s(6) & \Delta s(5) & \Delta s(4) \\ \Delta s(9) & \Delta s(8) & \Delta s(7) \\ \Delta s(12) & \Delta s(11) & \Delta s(10) \end{bmatrix}.$$

Velja enakost $\|[\Delta A \;\; \Delta b]\|_F^2 = \Delta s^T \Delta s$, saj sta obe strani enaki vsoti kvadratov vseh elementov matrike $[\Delta A \;\; \Delta b]$. Tej enakosti dodamo še matriko $W = I_{12}$, saj se vsak element iz Δs pojavi zgolj enkrat in dobimo

$$\|[\Delta A \;\; \Delta b]\|_F^2 = \Delta s^T W \Delta s.$$

STLS problem iz definicije 4.8 dobimo na naslednji način.

i) Dodamo omejitev glede strukture $[\Delta A\ \Delta b]$, tako da je

$$[\Delta A\ \Delta b] = \begin{bmatrix} \Delta s(3) & \Delta s(2) & \Delta s(1) \\ \Delta s(4) & \Delta s(3) & \Delta s(2) \\ \Delta s(5) & \Delta s(4) & \Delta s(3) \\ \Delta s(6) & \Delta s(5) & \Delta s(4) \end{bmatrix},$$

pri čemer je $\Delta s \in \mathbb{R}^6$ in ne več $\Delta s \in \mathbb{R}^{12}$.

ii) Matriko uteži $W \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ določimo tako, da pove kolikokrat se določen element vektorja Δs pojavi v matriki $[\Delta A\ \Delta b]$. Matrika W je diagonalna, ki ima na mestu (i,i) število ponovitev $\Delta s(i)$ v matriki $[\Delta A\ \Delta b]$. V našem primeru je $W = \mathrm{diag}([1\ 2\ 3\ 3\ 2\ 1])$. V splošnem je za Hankelovo in Toeplitzovo matriko

$$W = \mathrm{diag}([1\ 2\ \ldots n\ \underbrace{n+1 \ldots n+1}_{m-n}\ n \ldots 2\ 1]).$$

4.1. **Obstoj rešitve.** Za začetek si poglejmo malo spremenjen problem. Iščemo vektorja $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ in $\Delta s \in \mathbb{R}^q$, pri katerih je dosežen minimum

$$
\begin{aligned}
&\min_{y,\Delta s} \Delta s^T W \Delta s \\
&\text{pri pogoju } [A+\Delta A \;\; b+\Delta b]y = 0,\; y^T y = 1,
\end{aligned} \tag{6}
$$

pri čemer mora imeti matrika $[\Delta A\ \Delta b]$ isto strukturo kot matrika $[A\ b]$.

Formulacija (6) je podobna (5), razlika je zgolj v vezi $y^T y = 1$, ki se pojavi namesto pogoja $y_{n+1} = -1$. Slednjega dobimo enostavno, če vzamemo $y = \begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix}$ v (5) in temu primerno preoblikujemo problem.

Naslednji izrek pove, da ob določenih predpostavkah rešitev za (6) vedno obstaja.

Izrek 4.10. *Naj bo f: $\Delta s \to [A+\Delta A \;\; b+\Delta b] = M(s+\Delta s)$ zvezna funkcija in naj bo matrika uteži W pozitivno definitna. Tedaj rešitev problema* (6) *obstaja.*

Dokaz. Glej [7]. □

Definicija 4.11. STLS problem (5) je negeneričen, če v vseh rešitvah problema (6), z istimi vhodnimi podatki, velja $y_{n+1} = 0$. Če problem ni negeneričen, je generičen.

Iz izreka 4.10 smo videli, da rešitev za (6) vedno obstaja. To pa ne velja za (5), saj v primeru, da je STLS problem negeneričen, rešitev problema ne more zadostiti pogoju $y_{n+1} = -1$, torej rešitev za (5) v tem primeru ne obstaja (za protiprimer glej [7]).

4.2. **Razširitev STLS.** Tako kot za TLS problem, je tudi za STLS problem možna razširitev.

Definicija 4.12. Naj bosta $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{m\times d}$. Večrazsežni STLS problem formuliramo kot problem iskanja matrike $X \in \mathbb{R}^{n\times d}$ in vektorja $\Delta s \in \mathbb{R}^q$, pri katerih je dosežen minimum

$$
\begin{aligned}
&\min_{X,\Delta s} \Delta s^T W \Delta s \\
&\text{pri pogoju } (A+\Delta A)X = B+\Delta B,
\end{aligned} \tag{7}
$$

pri čemer mora imeti matrika $[\Delta A\ \Delta B]$ isto strukturo kot matrika $[A\ B]$. Pri tem vektor $\Delta s \in \mathbb{R}^q$ vsebuje q različnih elementov matrike $\Delta S = [\Delta A \;\; \Delta b]$, matrika $W \in \mathbb{R}^{q\times q}$ pa je matrika uteži, ki je določena s predpisano strukturo.

Definicija 4.13. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Kroneckerjev produkt $A \otimes B$ je bločna matrika velikosti $mp \times nq$, definirana kot

$$
A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.
$$

S pomočjo Kroneckerjevega produkta lahko razširjen problem pretvorimo na osnoven, enorazsežen STLS problem.

Trditev 4.14. *Naj bosta* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *in* $B \in \mathbb{R}^{m\times d}$. *Označimo z* $\tilde{A} = I_d \otimes A \in \mathbb{R}^{md\times nd}$, $\tilde{B} = vec(B) \in \mathbb{R}^{md}$ *in* $\tilde{x} = vec(X) \in \mathbb{R}^{nd}$ *Večrazsežni STLS problem lahko prevedemo na problem iskanja vektorjev* $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{nd}$ *in* $\Delta s \in \mathbb{R}^{q}$, *pri katerih je dosežen minimum*

$$\begin{aligned} &\min_{\tilde{x},\Delta s} \Delta s^T W \Delta s \\ &\text{pri pogoju } (\tilde{A} + \Delta\tilde{A})\tilde{x} = \tilde{B} + \Delta\tilde{B}, \end{aligned} \tag{8}$$

pri čemer mora imeti matrika $[\Delta\tilde{A} \;\; \Delta\tilde{B}]$ *isto strukturo kot matrika* $[\tilde{A} \;\; \tilde{B}]$.
Pri tem so $\Delta\tilde{A} = I_d \otimes \Delta A \in \mathbb{R}^{md\times nd}$ *in* $\Delta\tilde{B} = vec(\Delta B) \in \mathbb{R}^{md}$, *vektor* $\Delta s \in \mathbb{R}^{q}$ *vsebuje q različnih elementov matrike* $[\Delta A \;\; \Delta B]$, *matrika* $W \in \mathbb{R}^{q\times q}$ *pa je matrika uteži.*

Dokaz. Glej [7]. □

5. Metode za reševanje STLS

V tem poglavju si bomo pogledali najpogostejše metode za reševanje problemov STLS. To so:

(1) STLN - strukturirana totalna najmanjša norma
(2) CTLS - vezani totalni najmanjši kvadrati
(3) RiSVD - Riemannov singularni razcep

5.1. **STLN - strukturirana totalna najmanjša norma.** STLN se, kot edina izmed naštetih metod, poleg aproksimacije v L_2 normi lahko uporabi tudi za aproksimacijo v L_1 ali L_∞ normah. Naj omenimo, da govorimo o vektorskih normah, velja namreč, da Frobeniusovi normi ustreza L_2 norma, če shranimo elemente matrike velikosti $m \times n$ v vektor dolžine mn:

$$\|A\|_F = \|\text{vec}(A)\|_2.$$

Metoda STLN se lahko uporablja tako v primerih, ko ima matrika $[A\ b]$ posebno strukturo, kot v primerih, ko ima zgolj A posebno strukturo. Kot pri vseh metodah za reševanje STLS je tudi pri STLN v ospredju ohranjanje strukture matrike A oz. $[A\ b]$.

Pogledali si bomo postopek za primer, ko je A Toeplitzova, b pa je nestrukturiran. Označimo s $q_1 \leq mn$ število različnih elementov matrike A. V našem primeru je $q_1 \leq m + n + 1$.

Ker smo si za strukturirano izbrali zgolj matriko A in ne razširjene matrike S kot prej, bomo uporabili nove oznake. Vektor različnih elementov matrike ΔA bomo označili s $\alpha \in \mathbb{R}^{q_1}$, matriko uteži pa z $D_\alpha \in \mathbb{R}^{q_1\times q_1}$.

S podano strukturo in vektorjem α je matrika ΔA natančno določena. Vektor ostankov $\Delta b = b - (A + \Delta A)x$ je v tem primeru funkcija parametrov x in α, zato ga označimo z $\Delta b = \Delta b(\alpha, x)$.
STLS problem zapišemo kot minimizacijski problem, v katerem iščemo vektorja $x \in \mathbb{R}^n$ in $\alpha \in \mathbb{R}^{q_1}$, pri katerih je dosežen minimum

$$\min_{\alpha,x} \left\| \begin{bmatrix} \Delta b(\alpha, x) \\ D_\alpha \alpha \end{bmatrix} \right\|_p . \tag{9}$$

Minimizacijo rešimo iterativno s pomočjo linearne aproksimacije. Vzamemo Δx, ki predstavlja zelo majhno spremembo x in $\Delta\alpha$, ki predstavlja zelo majhne spremembe pri elementih ΔA. Poglejmo si razvoj preslikave $\Delta b(\alpha+\Delta\alpha, x+\Delta x)$ v Taylorjevo vrsto okrog točke (α, x) do členov prvega reda. Dobimo

$$\begin{aligned}\Delta b(\alpha+\Delta\alpha, x+\Delta x) \approx \Delta b(\alpha, x) + \left[\frac{\delta}{\delta x_j}(\Delta b)_i(\alpha, x)\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \Delta x + \\ + \left[\frac{\delta}{\delta \alpha_j}(\Delta b)_i(\alpha, x)\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le q_1} \Delta \alpha,\end{aligned}$$

pri čemer smo z $(\Delta b)_i$ označili i-to komponento preslikave Δb. Opazimo, da je

$$\left[\frac{\delta}{\delta x_j}(\Delta b)_i(\alpha, x)\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le n} = -(A+\Delta A).$$

Ob predpostavki, da je matrika A Toeplitzova, pa izpeljemo

$$\begin{aligned}-\left[\frac{\delta}{\delta \alpha_j}(\Delta b)_i(\alpha, x)\right]_{1\le i\le m, 1\le j\le q_1} = \\ = \begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & x_n & x_{n-1} & \dots & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & x_n & x_{n-1} & \dots & \dots & x_1 \end{bmatrix} =: X \in \mathbb{R}^{m\times q_1}.\end{aligned}$$

Od tod sledi, da je

$$\Delta b(\alpha+\Delta\alpha, x+\Delta x) \approx \Delta b(\alpha, x) - X\Delta\alpha - (A+\Delta A)\Delta x$$

in

$$\left\| \begin{bmatrix} \Delta b(\alpha+\Delta\alpha, x+\Delta x) \\ D_\alpha \alpha \end{bmatrix} \right\|_p \approx \left\| \begin{bmatrix} X & A+\Delta A \\ D_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta b(\alpha, x) \\ D_\alpha \alpha \end{bmatrix} \right\|_p . \tag{10}$$

Namesto prvotnega problema rešimo torej naslednji minimizacijski problem:

$$\min_{\Delta\alpha, \Delta x} \left\| \begin{bmatrix} X & A+\Delta A \\ D_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta b \\ D_\alpha \alpha \end{bmatrix} \right\|_p , \tag{11}$$

ki pa se ga da enostavno rešiti. Izračunamo torej popravka $\Delta\alpha$ in Δx, iz katerih določimo nov približek kot

$$x = x + \Delta x \text{ in } \alpha = \alpha + \Delta\alpha.$$

Za začetne vrednosti algoritma vzamemo $\Delta A = 0$ in $x = x_{ln}$, kjer je x_{ln} dan z rešitvijo minimizacijskega problema

$$\min_x \|b - Ax\|_p . \tag{12}$$

Za $p = 2$ začetni x_{ln} ustreza rešitvi po metodi najmanjših kvadratov. Iteracije izvajamo dokler nista $\|\Delta\alpha\|_p$ in $\|\Delta x\|_p$ manjša od na začetku dane tolerance ϵ.

STLN
Vhod: matrika A, vektor b, toleranca ϵ
Izhod: matrika napak ΔA, vektor ostankov Δb, vektor parametrov x
Postopek:

(1) Nastavi $\alpha = 0$, $\Delta A = 0$, izračunaj x iz (12), iz njega sestavi matriko X in izračunaj $\Delta b = b - Ax$.

(2) (a) Izračunaj $\Delta\alpha, \Delta x$ z rešitvijo minimizacijskega problema

$$\min_{\Delta\alpha,\Delta x} \left\| \begin{bmatrix} X & A + \Delta A \\ D_\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta b \\ D_\alpha \alpha \end{bmatrix} \right\|_p .$$

(b) Nastavi $x = x + \Delta x$, $\alpha = \alpha + \Delta\alpha$.

(c) Konstruiraj X iz x in ΔA iz α ter izračunaj $\Delta b = b - (A + \Delta A)x$.

(3) **if** $\|\Delta x\|_p, \|\Delta\alpha\|_p \leq \epsilon$ **then** return ΔA, Δb in x
else: ponovi korak 2

5.2. **CTLS - vezani totalni najmanjši kvadrati.** Pri metodi CTLS shranimo različne elemente matrike ΔS v vektor $\Delta s \in \mathbb{R}^q$. Strukturo ΔS določajo matrike $F_i \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $i = 1, \ldots, n+1$, in sicer tako, da i-ti stolpec matrike ΔS dobimo na naslednji način:

$$\Delta S_i = F_i \Delta s,\ i = 1, \ldots, n+1$$

Očitno velja $\Delta A = [F_1\Delta s \ldots F_n\Delta s]$ in $\Delta b = F_{n+1}\Delta s$.
STLS problem (5) zapišemo kot problem iskanja vektorjev $x \in \mathbb{R}^n$ in $\Delta s \in \mathbb{R}^q$, pri katerih je dosežen minimum

$$\begin{aligned} &\min_{x,\Delta s} \Delta s^T W \Delta s \\ \text{pri pogoju } (A + [F_1\Delta s \ldots F_n\Delta s])x &= b + F_{n+1}\Delta s. \end{aligned} \tag{13}$$

Sedaj si bomo pogledali še malo drugačno formulacijo STLS problema. Najprej si poglejmo, kako lahko zapišemo TLS problem s pomočjo Rayleighovega kvocienta. Če vzamemo $y = \begin{bmatrix} x \\ -1 \end{bmatrix}$ in je TLS problem generičen, problem (2) zapišemo na naslednji način. Iščemo $y \in \mathbb{R}^{n+1}$, pri katerem je dosežen minimum

$$\min_{y\in\mathbb{R}^{n+1}} \frac{y^T S^T S y}{y^T y}. \tag{14}$$

Poglejmo si, zakaj ta problem vrne isto rešitev kot osnoven TLS problem (2). Ciljna funkcija problema (14) je ravno Rayleighov kvocient, ki po definiciji doseže minimum pri $y = z_{n+1}$, kjer je z_{n+1} lastni vektor matrike $S^T S$, ki ustreza najmanjši lastni vrednosti λ_{min}, ki predstavlja tudi vrednost minimuma v (14). Vemo tudi, da so lastni vektorji matrike $S^T S$ enaki desnim singularnim vektorjem matrike S, lastne vrednosti pa kvadratom singularnih vrednosti, torej je $\lambda_{min} = \sigma_{n+1}^2$ in $z_{n+1} = v_{n+1}$. Iz poglavja 3.2 vemo, da rešitev problema (2) dobimo tako, da vzamemo prvih n

elementov vektorja v_{n+1}, kar bomo označili z $v_{n+1}(1:n)$, saj je $y(n+1) = -1$. Pri tem smo, zaradi boljše preglednosti, z $y(n+1)$ označili $(n+1)$-o komponento vektorja y. To oznako bomo uporabili tudi v nadaljevanju, razen če bo navedeno drugače. Pri problemu (14) je rešitev enaka $y(1:n) = z(1:n)$ in, ker je $z_{n+1} = v_{n+1}$, dobimo v obeh primerih isto rešitev.

Z vpeljavo matrike $H_y := [T_1 y \ T_2 y \ \dots T_q y] = \sum_{i=1}^{n+1} y_i F_i \in \mathbb{R}^{m\times q}$, kjer so $T_i,\ i = 1,\dots,q$, bazne matrike, lahko STLS problem zapišemo kot problem iskanja vektorja $y \in \mathbb{R}^{(n+1)}$, pri katerem je dosežen minimum

$$\min_{y\in\mathbb{R}^{n+1}} y^T S^T D_y^{-1} S y, \quad y(n+1) = -1, \tag{15}$$

pri čemer je $D_y := H_y W^{-1} H_y^T$, $W \in \mathbb{R}^{q\times q}$ pa je matrika uteži (za izpeljavo glej [7]).

Opomba 5.1. Opazimo lahko, da ciljna funkcija v (15) spominja na Rayleighov kvocient. Od klasičnega Rayleighovega kvocienta se razlikuje po matriki D_y, katera temelji na y ter na posebni strukturi, ki jo ohranjamo v našem problemu. Če na ΔS ne bi zahtevali posebne strukture, bi bila matrika D_y enaka $\|y\|_2^2$ in dobili bi problem (14).

Primer 5.2. Za boljšo predstavo si poglejmo kako izgledajo nekatere prej definirane matrike, ko je $S \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ Hankelova. Iskani vektor $y \in \mathbb{R}^2$ je oblike $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Bazne matrike $T_i,\ i = 1,\dots,4$ so enake

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ T_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriki F_1 in F_2 sta enaki

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ F_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrika H_y je torej enaka

$$H_y = y_1 F_1 - F_2 = \begin{bmatrix} y_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vemo že, da je $W = \operatorname{diag}([1\ 2\ 2\ 1])$, iz česar sledi

$$D_y = H_y W^{-1} H_y^T = \begin{bmatrix} y_1^2 + \frac{1}{2} & -\frac{y_1^2}{2} & 0 \\ -\frac{y_1^2}{2} & \frac{y_1^2+1}{2} & -\frac{y_1^2}{2} \\ 0 & -\frac{y_1^2}{2} & \frac{y_1^2}{2} + 1 \end{bmatrix}.$$

V primeru, da je STLS negeneričen, je naslednja enačba ekvivalentna (15):

$$\min_{y\in\mathbb{R}^{(n+1)}} y^T S^T D_y^{-1} S y, \quad y^T y = 1. \tag{16}$$

Sedaj si poglejmo dva iterativna algoritma, ki izhajata iz formulacije (15), tj. (IQML1), oziroma iz formulacije (16), tj. (IQML2).

IQML1
Vhod: matrika podatkov $S = [A\ b]$, toleranca ϵ
Izhod: vektor parametrov x
Postopek:

(1) $y^{[0]} = \min_{y, y(n+1)=-1} y^T S^T S y$, $k = 0$

(2) $y^{[k+1]} = \min_{y, y(n+1)=-1} y^T S^T D_{y^{[k]}}^{-1} S y$

(3) **if** $\|y^{[k+1]} - y^{[k]}\|_2 < \epsilon$ **then** $x = y(1:n)$
else: $k = k + 1$ in ponovi korak 2

Ker je $y(n+1) = -1$, korak 2 ustreza naslednjemu problemu najmanjših kvadratov:

$$\min_{y(1:n)} \|L^{[k]T} A y(1:n) - L^{[k]T} b\|_2,$$

kjer je $L^{[k]} L^{[k]T} = D_{y^{[k]}}^{-1}$, $L^{[k]}$ in $L^{[k]T}$ pa sta faktorja Choleskega matrike $D_{y^{[k]}}^{-1}$ (glej [6]).

IQML2
Vhod: matrika podatkov S, toleranca ϵ
Izhod: vektor parametrov x
Postopek:

(1) $y^{[0]} = \min_{y, \|y\|_2=1} y^T S^T S y$, $k = 0$

(2) $y^{[k+1]} = \min_{y, \|y\|_2=1} y^T S^T D_{y^{[k]}}^{-1} S y$

(3) **if** $\|y^{[k+1]} - y^{[k]}\|_2 < \epsilon$ **then** $x = -\frac{y(1:n)}{y(n+1)}$
else: $k = k + 1$ in ponovi korak 2

V algoritmu IQML2 korak 2 ustreza iskanju lastnega vektorja, ki ustreza najmanjši lastni vrednosti $S^T D_{y^{[k]}}^{-1} S$.

5.3. **RiSVD - Riemannov singularni razcep.** Od prejšnjih dveh pristopov se razlikuje v tem, da tu računamo z matrikama S in $T := S + \Delta S$, namesto s S in ΔS. Tudi pri tem različne elemente matrike S shranimo v vektor $s \in \mathbb{R}^q$, elemente T pa v $t \in \mathbb{R}^q$. S pomočjo baznih matrik T_i, $i = 1, \ldots, q$, zapišemo

$$T = \sum_{i=1}^{q} t_i T_i \text{ in } S = \sum_{i=1}^{q} s_i T_i.$$

Pri RiSVD pristopu problem STLS zapišemo kot problem iskanja vektorjev $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ in $t \in \mathbb{R}^q$, pri katerih je dosežen minimum

$$\begin{gathered}\min_{y,t} \sum_{i=1}^{q} W_{ii}(t_i - s_i)^2 \\ \text{pri pogoju } Ty = 0,\ y^T y = 1,\end{gathered} \tag{17}$$

pri čemer W_{ii} predstavlja (i,i)-ti element matrike W. Formulacija (17) je očitno ekvivalentna (6), saj je $\Delta s_i = t_i - s_i$.

Iz poglavja 3.2 vemo, da rešitev problema TLS dobimo s pomočjo singularnega razcepa. Rešitev izhaja iz desnega singularnega vektorja, ki ustreza najmanjši singularni vrednosti matrike S. Ta vektor lahko najdemo tudi z iskanjem trojice (u, σ, v), ki ustreza najmanjšemu σ in zadošča enačbam

$$\begin{aligned} Sv &= u\sigma, \quad u^T u = 1, \\ S^T u &= v\sigma, \quad v^T v = 1. \end{aligned} \tag{18}$$

Podoben zapis lahko dobimo tudi pri STLS problemu. Z uporabo Lagrangeevih multiplikatorjev lahko (17) pretvorimo v Riemannov singularni razcep (za izpeljavo glej [5]), pri katerem iščemo trojico (u, τ, v), ki ustreza najmanjšemu τ, da velja

$$\begin{aligned} Sv &= D_v u\tau, \quad u^T D_v u = 1, \\ S^T u &= D_u v\tau, \quad v^T D_u v = 1, \quad v^T v = 1, \end{aligned} \tag{19}$$

kjer so

$$\begin{aligned} D_v &:= H_v W^{-1} H_v^T = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{W_{ii}} (T_i v)(T_i v)^T \in \mathbb{R}^{m \times m}, \\ H_v &:= [T_1 v\ T_2 v\ \ldots T_q v] \in \mathbb{R}^{m \times q}, \\ D_u &:= H_u W^{-1} H_u^T = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{W_{ii}} (T_i^T u)(T_i^T u)^T \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}, \\ H_u &:= [T_1^T u\ T_2^T u\ \ldots T_q^T u] \in \mathbb{R}^{(n+1) \times q}. \end{aligned}$$

Opomba 5.3. Pogoj $v^T v = 1$ je pomemben za enoličnost rešitve. Brez omejitve bi namreč iz $u^T D_v u = 1$ avtomatično sledilo $v^T D_u v = 1$. Velja namreč, da je

$$u^T D_v u = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{W_{ii}} (u^T T_i v)(u^T T_i v)^T = \sum_{i=1}^{q} \frac{1}{W_{ii}} (v^T T_i^T u)(v^T T_i^T u)^T = v^T D_u v$$

in poleg rešitve (u, τ, v), bi enačbam (19) zadoščala tudi trojica $(\frac{u}{\xi}, \tau, v\xi)$, $\xi \neq 0$.

Opomba 5.4. Enačbe pri Riemannovem singularnem razcepu (19) so zelo podobne enačbam pri klasičnem singularnem razcepu (18), edina razlika je, da imamo tu matriki D_u in D_v, ki sta simetrični, pozitivno semidefinitni matriki, odvisni od u in v ter posebne strukture, katero moramo ohraniti v našem STLS problemu. Elementi matrik D_u in D_v so kvadratne funkcije v spremenljivkah u oz. v. Če na ΔS ne bi zahtevali posebne strukture (kot pri problemu TLS), bi dobili $D_u = \|u\|_2 I_{n+1}$ in

$D_v = \|v\|_2 I_m$, enačbe (19) pa bi v tem primeru predstavljale klasičen singularni razcep, ki reši problem TLS.

Za potrebe reševanja zapišemo enačbe (19) na sledeči način:

$$S^T D_v^{-1} S v = D_u v \tau^2, \quad v^T v = 1,$$
$$u = \frac{D_v^{-1} S v}{\tau}, \quad u^T D_v u = 1. \tag{20}$$

Ekvivalenco med enačbami (19) in (20) enostavno preverimo s preoblikovanjem enačb.

Tudi pri RiSVD metodi problem rešujemo iterativno. Za začetne vrednosti vzamemo trojico (u, τ, v), ki ustreza najmanjši singularni vrednosti matrike S. Iteracije ponavljamo, dokler ne dosežemo željene natančnosti, tj. $\|y^{[k+1]} - y^{[k]}\|_2 < \epsilon$, kjer je $y^{[k]}$ k-ti približek rešitve, ϵ pa toleranca. Na vsakem koraku rešimo Riemannov singularni razcep (iz enačb (20)) s spremenjenima matrikama $D_{u^{[k]}}$ in $D_{v^{[k]}}$ in za približek, zaradi omejitve $v^T v = 1$, ki ustreza vezi v (17), vzamemo

$$y^{[k]} = v^{[k]}.$$

Ko je zaustavitveni pogoj izpolnjen, izrazimo x iz y z enačbo

$$x = -\frac{y(1:n)}{y(n+1)} = -\frac{v(1:n)}{v(n+1)}$$

in konstruiramo popravljeno matriko T iz vektorja t z elementi

$$t_i = s_i - \frac{1}{W_{ii}} u^T T_i v \tau, \quad i = 1, \cdots, q.$$

Primer 5.5. Za boljšo predstavo si poglejmo, kako izgledajo matrike H_u, H_v, D_u in D_v, ko je $S \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ Hankelova. Naj bosta

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ in } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

Kot smo že videli v primeru 5.2 so bazne matrike enake

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, T_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriki H_u in H_v smo izračunali s pomočjo baznih matrik in sta enaki

$$H_u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}, H_v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_1 & v_2 \end{bmatrix}.$$

Na koncu izračunamo še matriki D_u in D_v in dobimo

$$D_u = \begin{bmatrix} u_1^2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{u_3^2}{2} & \frac{u_1u_2}{2} + \frac{u_2u_3}{2} \\ \frac{u_1u_2}{2} + \frac{u_2u_3}{2} & \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} + u_3^2 \end{bmatrix}, D_v = \begin{bmatrix} v_1^2 + \frac{v_2^2}{2} & \frac{v_1v_2}{2} & 0 \\ \frac{v_1v_2}{2} & \frac{v_1^2+v_2^2}{2} & \frac{v_1v_2}{2} \\ 0 & \frac{v_1v_2}{2} & \frac{v_1^2}{2} + v_2^2 \end{bmatrix}.$$

Vidimo, da so elementi matrik D_u in D_v res kvadratne funkcije u oz. v ter, da sta matriki simetrični.

Z uporabo enačb (20) pridemo do naslednjih dveh iterativnih algoritmov.

RiSVD
Vhod: matrika podatkov S, toleranca ϵ
Izhod: vektor parametrov x
Postopek:

(1) Izračunaj $(u^{[0]}, \tau^{[0]}, v^{[0]})$, kjer trojica ustreza najmanjši singularni vrednosti S, $k = 0$

(2) (a) $v^{[k+1]} = (S^T D_{v^{[k]}}^{-1} S)^{-1} D_{u^{[k]}} v^{[k]} (\tau^{[k]})^2$

(b) $v^{[k+1]} = \frac{v^{[k+1]}}{\|v^{[k+1]}\|_2}$

(c) $u^{[k+1]} = \frac{D_{v^{[k+1]}}^{-1} S v^{[k+1]}}{\tau^{[k]}}$

(d) $\gamma = (u^{[k+1]})^T D_{v^{[k+1]}} u^{[k+1]}$

(e) $u^{[k+1]} = \frac{u^{[k+1]}}{\sqrt{\gamma}}$

(f) $\tau^{[k+1]} = (u^{[k+1]})^T S v^{[k+1]}$

(3) **if** $\|v^{[k+1]} - v^{[k]}\|_2 < \epsilon$ **then** $x = -\frac{v(1:n)}{v(n+1)}$
else: $k = k + 1$ in ponovi korak 2

BTLS
Vhod: matrika podatkov S, toleranca ϵ
Izhod: vektor parametrov x
Postopek:

(1) $u^{[0]}$ in $v^{[0]}$, kjer trojica ustreza najmanjši singularni vrednosti S, $k = 0$
(2) (a) Reši naslednji generaliziran problem lastnih vrednosti:
$S^T D_{v^{[k]}}^{-1} S v = D_{u^{[k]}} v \tau^2$

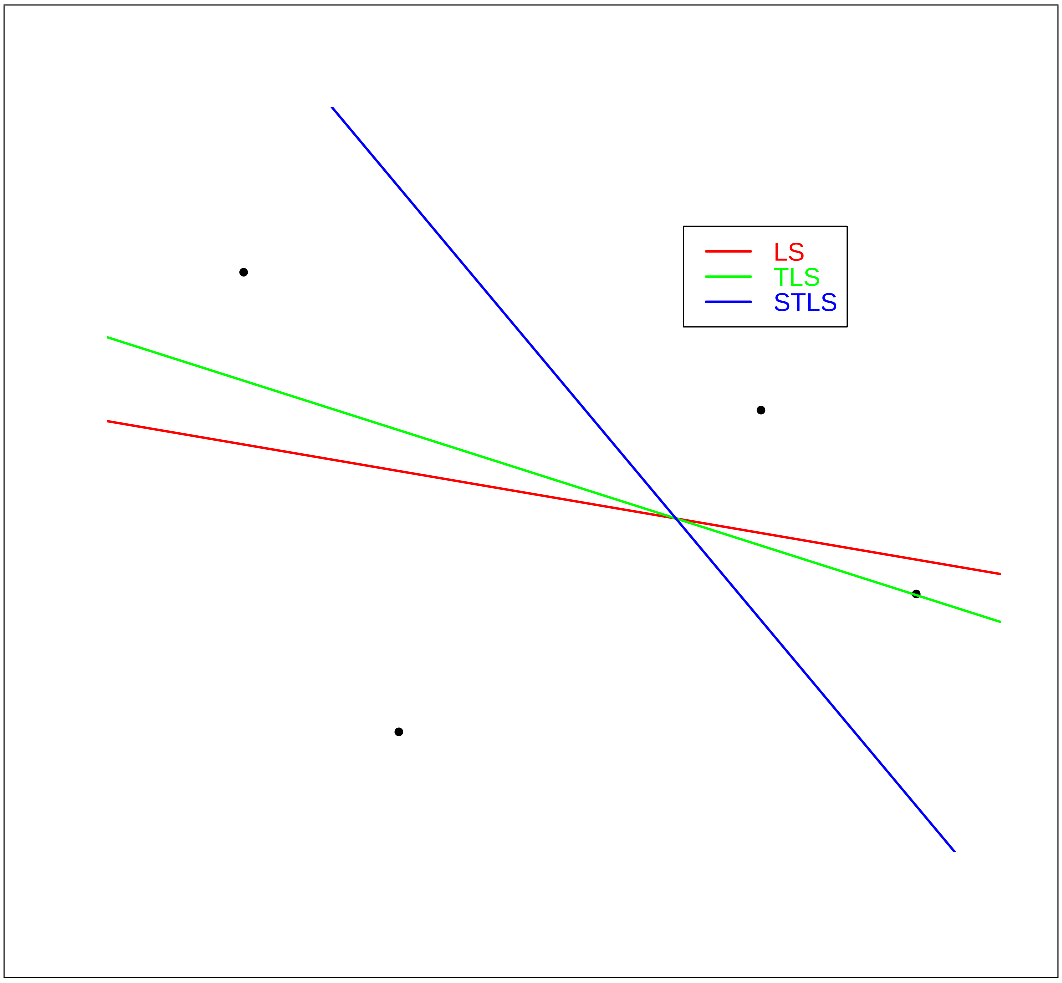
(b) za $v^{[k+1]}$ vzemi lastni vektor, ki ustreza najmanjši lastni vrednosti τ

(c) $v^{[k+1]} = \frac{v^{[k+1]}}{\|v^{[k+1]}\|_2}$

(d) $u^{[k+1]} = \frac{D_{v^{[k+1]}}^{-1} S v^{[k+1]}}{\tau}$

(3) **if** $\|v^{[k+1]} - v^{[k]}\|_2 < \epsilon$ **then** $x = \frac{-v(1:n)}{v(n+1)}$
else: $k = k + 1$ in ponovi korak 2

5.4. **Primerjava LS, TLS in STLS.** V poglavju 3.3 smo že primerjali LS in TLS metodi, v tem poglavju bomo v primerjavo dodali še STLS.



Slika 2. Primerjava LS, TLS in STLS.

Vse tri metode bomo primerjali na naslednjem preprostem primeru. Iščemo premico oblike $y = kx$, ki aproksimira točke (4, 1), (-6, 4), (-3, -6), (7, -3). Podatki so torej

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ in } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Kot vidimo, je matrika $S = [A\ b]$ Toeplitzova.

Nalogo smo rešili v matlabu. Problem LS smo rešili z operacijo $\backslash$ in dobili rešitev $k = -0.1927$. TLS problem smo rešili z algoritmom opisanim v poglavju 3.2 in dobili rešitev $k = -0.4018$. STLS problem pa smo rešili z metodo RiSVD (s toleranco $\epsilon = 10^{-4}$) in dobili rešitev $k = -1.3460$. Primerjava vseh treh premic je vidna na sliki 2.

6. Uporaba STLS

Strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov se uporablja v analizi podatkov, procesiranju signalov, identifikaciji sistemov, v katerih lahko veliko problemov pretvorimo v STLS.

Konkretni primer uporabe STLS je npr. jedrska magnetna resonanca, ocena smeri prihoda (uporablja se pri radarjih, sonarjih, brezžičnih omrežjih,...), iskanje informacij (spletni brskalniki), rekonstrukcija slik.

6.1. **Dekonvolucija.** Konvolucija zaporedij $\{\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots\}$ in $\{\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots\}$ je zaporedje $\{\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots\}$, definirano kot

$$b_i = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j a_{i-j}.$$

Ob predpostavki $x_j = 0$ za $j < 0$ in za $j > n$, lahko dobljen sistem enačb zapišemo v matrični obliki $Ax = b$, in sicer

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & \ldots & a_{1-n} \\ a_1 & a_0 & \ldots & a_{2-n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & \ldots & a_{m-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Kot vidimo je matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Toeplitzova, generirana z vektorjem

$$a = \begin{bmatrix} a_{1-n} \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+n-1}.$$

V primeru znanih a in b ter neznanega x se proces imenuje dekonvolucija. Če je še $m > n$, lahko na dekonvolucijo gledamo kot na strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov s Toeplitzovo matriko A in nestrukturiranim vektorjem b.

Dekonvolucija se uporablja na različnih področjih, kot so telekomunikacije, medicina, seizmologija, rekonstrukcija slik,...

Dekonvolucijo običajno rešujemo s strukturirano totalno najmanjšo normo. Z uporabo Tikhonove regularizacije (glej [3]) lahko metodo STLN regulariziramo in dobimo njeno izboljšavo, tj. regularizirano strukturirano totalno najmanjšo normo (RSTLN).
Tokrat formuliramo problem, v katerem iščemo vektorja x in α, ki minimizirata

$$\min_{\alpha, x} \left\| \begin{bmatrix} \Delta b(\alpha, x) \\ D_\alpha \alpha \\ \lambda x \end{bmatrix} \right\|_p,$$

kjer je λ nek pozitiven skalar.

Podobno kot pri metodi STLN, tudi pri RSTLN metodi problem rešujemo iterativno. Za začetne vrednosti vzamemo, tako kot pri STLN, $\Delta A = 0$ in $x = x_{ln}$, kjer je x_{ln} dan z rešitvijo minimizacijskega problema

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|_p . \tag{21}$$

Nato aproksimiramo

$$\left\| \begin{bmatrix} \Delta b \\ D_\alpha \alpha \\ \lambda x \end{bmatrix} \right\|_p \approx \left\| \begin{bmatrix} X & A + \Delta A \\ D_\alpha & 0 \\ 0 & \lambda I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ \Delta x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\Delta b \\ D_\alpha \alpha \\ \lambda x \end{bmatrix} \right\|_p .$$

Na vsakem koraku iteracije rešimo minimizacijski problem

$$\min_{\Delta\alpha,\Delta x}\left\|\begin{bmatrix} X & A+\Delta A \\ D_\alpha & 0 \\ 0 & \lambda I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha \\ \Delta x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\Delta b \\ D_\alpha\alpha \\ \lambda x\end{bmatrix}\right\|_p$$

in podobno kot pri STLN nastavimo $x = x + \Delta x$ in $\alpha = \alpha + \Delta\alpha$. To ponavljamo dokler nista tako $\|\Delta\alpha\|_p$ kot $\|\Delta x\|_p$ manjša od tolerance ϵ.

RSTLN
Vhod: matriki A, D_α, vektor b, λ, toleranca ϵ
Izhod: matrika napak ΔA, vektor ostankov Δb, vektor parametrov x
Postopek:

(1) Nastavi $\alpha = 0$, $\Delta A = 0$, izračunaj x iz (21), iz njega sestavi matriko X in izračunaj $\Delta b = b - Ax$.

(2) (a) Izračunaj $\Delta\alpha, \Delta x$ z rešitvijo minimizacijskega problema

$$\min_{\Delta\alpha,\Delta x}\left\|\begin{bmatrix} X & A+\Delta A \\ D_\alpha & 0 \\ 0 & \lambda I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha \\ \Delta x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\Delta b \\ D_\alpha\alpha \\ \lambda x\end{bmatrix}\right\|_p.$$

(b) Nastavi $x = x + \Delta x$, $\alpha = \alpha + \Delta\alpha$.

(c) Konstruiraj X iz x in ΔA iz α ter izračunaj $\Delta b = b - (A + \Delta A)x$.

(3) **if** $\|\Delta x\|_p, \|\Delta\alpha\|_p \leq \epsilon$ **then** return ΔA, Δb in x
else: ponovi korak 2

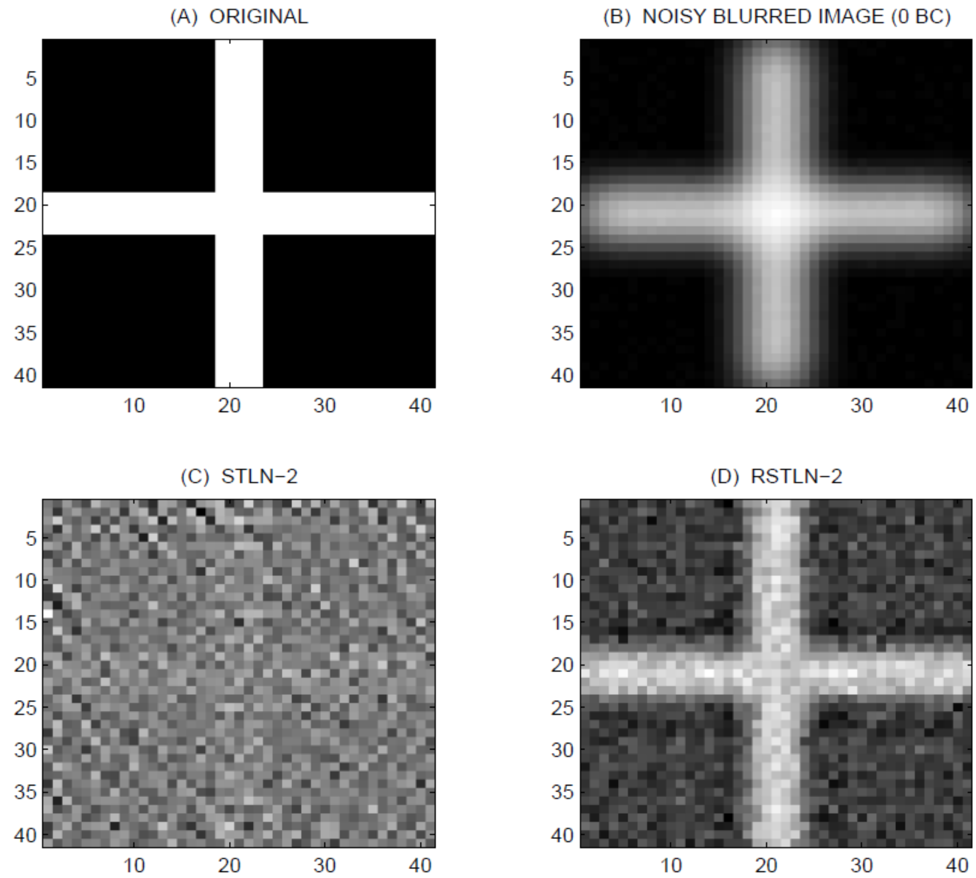
Primerjavo STLN in RSTLN na rekonstrukciji slik lahko vidimo na sliki 3. Pri STLN je $\epsilon = 10^{-3}$, pri RSTLN je $\epsilon = 10^{-3}$ in $\lambda = 0.75$ (vir [3]).

7. Zaključek

Predstavili smo strukturiran problem totalnih najmanjših kvadratov in najpogostejše metode za reševanje. Najprej smo na kratko povedali nekaj o linearnih najmanjših kvadratih, najpogosteje uporabljeni metodi za reševanje predoločenih sistemov $Ax = b$. Podali smo tudi primer in omenili metode za reševanje. Nato smo razložili problem totalnih najmanjših kvadratov, ki se uporabljajo naprimer, ko so napake možne tudi v matriki $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in izpeljali algoritem za reševanje, ki temelji na singularnem razcepu. Za boljšo predstavo smo na konkretnem primeru primerjali totalne in navadne najmanjše kvadrate.

Nato smo prišli do strukturiranega problema totalnih najmanjših kvadratov. V ospredju STLS je ohranjanje strukture dane matrike podatkov S. Pogledali smo si različne formulacije problema in pokazali, da so ekvivalentni. Videli smo, da rešitev za osnovno formulacijo obstaja, če je problem negeneričen, smo pa predstavili tudi malce drugačen problem, za katerega rešitev zmeraj obstaja. Pogledali smo si tudi razširitev STLS problema in kako ga lahko s pomočjo Kroneckerjevega produkta zapišemo kot osnoven problem.

Pogledali smo si še najpogostejše metode za reševanje, to so STLN, CTLS in RiSVD. Vsi algoritmi za reševanje so iterativni. Pri vsaki metodi smo si pogledali formulacijo problema, iz katere izhaja algoritem in zapisali algoritem. Videli smo, da je CTLS formulacija podobna Rayleighovemu kvocientu, RiSVD pa singularnemu



Slika 3. Primerjava STLN in RSTLN. Vir: [3]

razcepu, ki se lahko uporabljata za reševanje TLS problema. Razlika je zgolj v posebnih matrikah, ki določajo strukturo, katero moramo ohranjati. Za primerjavo smo primerjali metode LS, TLS in STLS.

Za konec smo si pogledali še uporabo STLS. Primer uporabe je rekonstrukcija slik z dekonvolucijo. Pogledali smo si izboljšavo metode STLN, tj. RSTLN in primerjali algoritma na konkretnem primeru.

Literatura

[1] J.B. Rosen, H. Park in J. Glick, *Total least norm formulation and solution for structured problems*, SIAM. J. Matrix Anal. Appl. **17(1)** (1996) 110-126.

[2] I. Markovsky in S. Van Huffel, *Overview of total least squares methods*, Signal Processing **87(10)** (2007) 2283-2302.

[3] A. Pruessner in D.P. O'Leary, *Blind deconvolution using a regularized structured total least norm algorithm*, SIAM. J. Matrix Anal. Appl. **24(4)** (1996) 1018-1037.

[4] A. Kalsi in D.P. O'Leary, *Fast algorithms for structured least squares and total least squares problems*, J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol. **111** (2006) 113-119.

[5] B. De Moor, *Structured total least squares and L2 approximation problems*, Linear Algebra and its Applications **188-189** (1993) 163-205.

[6] P. Lemmerling, L. Vanhamme, S. Van Huffel, B. De Moor, *IQML-like algorithms for solving structured total least squares problems: a unifed view*, Signal Processing **81(9)** (2001) 1935-1945.

[7] P. Lemmerling, *Structured total least squares: analysis, algorithms and applications*, PhD thesis, Electrical Engineering Department, K.U. Leuven, Belgium, (1999)

[8] B. Plestenjak, *Numerične metode 1 (finančna matematika)*, verzija 15. 10. 2012, [ogled 12. 3. 2014], dostopno na `http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/5666/mod_resource/content/1/Skripta_UVNM_051012.pdf`.

[9] *Matrix norm*, [ogled 12. 3. 2014], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_norm`.

[10] *Singular value decomposition*, [ogled 12. 3. 2014], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition`.

[11] *Least squares*, [ogled 12. 3. 2014], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Least_squares`.

[12] *Total least squares*, [ogled 12. 3. 2014], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Total_least_squares`.