UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Andrej Sedej

Opcije na valutnih trgih

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Dejan Velušček

Somentor: asist. dr. Aleš Toman

Ljubljana, 2014

Kazalo

Opcije na valutnih trgih

POVZETEK

Vsebina dela diplomskega seminarja so opcije na valutnih trgih oz. valutne opcije. Delo v prvem poglavju podrobneje predstavi valutne opcije ter z njimi povezano terminologijo in opcijske strategije. V nadaljevanju sledi predstavitev metod vrednotenja ter metod zaščite valutnih opcij. Opisane metode so implementirane v programskem jeziku R. Njihova uporabnost in ustreznost je na koncu prikazana na konkretnem zgledu.

Currency options

ABSTRACT

The topic of the thesis are FX options or currency options. In the first section of the thesis, currency options, terminology and option strategies are presented in detail. The following two sections discuss the valuation and hedge methods for currency options. The methods described are implemented in the programming language R. Finally their usefullness and apropriateness are demonstrated using real data examples.

Math. Subj. Class. (2010): 91G20, 91G60

Ključne besede: valutna opcija, Black-Scholesov model, binomski model, Garman-Kohlhagnova formula, delta, zaščitni portfelj

Keywords: currency option, Black-Scholes model, binomial model, Garman-Kohlhagen formula, delta, portfolio hedge

1. Opcije na valutnih trgih

1.1. Opis in nastanek valutnih opcij. Valutna opcija je izvedeni finančni instrument. Gre za pogodbeno razmerje med dvema stranema, ki daje kupcu (dolga stran) pravico, ne pa obveze, do nakupa za nakupno oz. do prodaje za prodajno valutno opcijo določenega zneska tuje valute po vnaprej določenem izvršilnem menjalnem tečaju. Sprejem odločitve kupca valutne opcije za nakup tuje valute v primeru nakupne valutne opcije oz. prodaje v primeru prodajne valutne opcije imenujemo izvršitev opcije. Na drugi strani daje valutna opcija izdajatelju (kratka stran) obvezo, da v primeru izvršitve proda tujo valuto, če gre za nakupno, oz. jo kupi, če gre za prodajno valutno opcijo.

Valutne opcije so se pojavile na trgu zaradi povečanega nihanja menjalnih tečajev med največjimi svetovnimi valutami v začetku 80-ih let prejšnjega stoletja, kar je za centralne banke, vlade, mednarodna podjetja in druge investitorje pomenilo velike težave. Tako je leta 1982 na borzi v Filadelfiji (Philadelphia Stock Exchange) nastal nov izvedeni valutni finančni inštrument kot alternativa obstoječim valutnim terminskim poslom in pogodbam, valutnim zamenjavam ter drugim produktom valutnih trgov [6].

Valutne opcije so ustvarjene tako, da zaščitijo kupca opcije pred neugodnim gibanjem menjalnega tečaja, saj je največja možna izguba le premija, hkrati pa dopuščajo, da ima korist zaradi ugodnih premikov, kar odpira dodatne možnosti tudi za špekulante.

Pri valutnih opcijah je pomembno razumeti izraza tuja in domača valuta. Tuja valuta je valuta, ki jo imetnik opcije na valutnih trgih lahko kupi oz. proda, če ima nakupno oz. prodajno opcijo, po vnaprej dogovorjenem tečaju. Domača valuta pri tem predstavlja drugo valuto v opciji. Ta dva izraza se torej ne nanašata na nacionalnost ali geografsko lego, pač pa izključno na stran dogovora v valutni opciji [5].

Nominalna vsota (N_f) je količina oz. znesek tuje valute, ki jo imetnik valutne opcije lahko kupi v primeru nakupne ali proda v primeru prodajne valutne opcije. Trenutni menjalni tečaj (S_t) je število enot domače valute, ki jih dobimo na valutnih trgih za 1 enoto tuje valute. Izvršilni menjalni tečaj (K) pa je vnaprej dogovorjeno število enot domače valute, ki jih kupec v primeru izvršitve dobi za 1 enoto tuje valute, če gre za prodajno oz. da izdajatelju, če gre za nakupno valutno opcijo.

1.2. Svetovni valutni trgi. Valutni trgi so največji in najbolj likvidni trgi na svetu, njihov center pa je, kljub temu da je trg globalen, v Združenem kraljestvu, konkretno pa v Londonu. Po podatkih Banke za mednarodne poravnave (Bank for International Settlements) je dnevni promet na svetovnih valutnih trgih leta 2010 znašal 5000 milijard USD, leta 2013 pa že več kot 6600 milijard USD [26]. Po podatkih iz leta 2013 se je od tega opravilo kar 40,9 % (2700 milijard USD) vseh dnevnih svetovnih transakcij v Združenem kraljestvu, veliko manjši delež pa imajo v nadaljevanju ZDA (18,9 %), Singapur (5,7 %), Japonska (5,6 %) in Hong Kong (4,1 %). Slovenija je pri tem edina izmed 54-ih držav, ki so zajete v raziskavi Banke za mednarodne poravnave, za katero velja, da še v nobenem letu od leta 1998, kadar je sodelovala, povprečni dnevni promet ni presegal 0,5 milijarde USD [26].

Pri tem pa je potrebno poudariti, da veliko večino dnevnega prometa na svetovnih trgih predstavljajo valutne zamenjave (ang. *foreign exchange swaps*) z 41,7% deležem in takojšnje valutno trgovanje (ang. *spot transactions*) z 38,3% deležem.

Valutne opcije pa še vedno predstavljajo dokaj majhen del, natančneje 6,3%, kar pa je vseeno kar za 1,1 odstotne točke več kot 3 leta prej [26].

Daleč najpogosteje trgovana valuta na valutnih trgih je bil po podatkih Banke za mednorodne poravnave aprila 2013 ameriški dolar z v povprečju kar 87% deležem prisotnosti, sledita evro (33,4 %) in japonski jen (23,0 %) [26]. Pri tem velja, da je vsota deležev vseh valut enaka 200 %, saj v vsakem trgovanju z valutami vedno nastopata natanko dve. Najpogosteje trgovani valutni pari v lanskem letu so bili USD/EUR (24,1 %), USD/JPY (18,3 %) ter USD/GBP (8,8 %). Največji delež trgovanja na valutnih trgih imata po podatkih iz maja 2014 ameriška banka Citi (16,04 %) in nemška banka Deutsche Bank (15,67 %) [11].

Vse transakcije povezane z valutnimi opcijami ureja temeljna pogodba o poslovanju z izvedenimi finančnimi instrumenti (pogodba ISDA).

1.3. **Vrste valutnih opcij.** Ker so opcije izvedeni finančni instrumenti, je ena najosnovnejših delitev opcij glede na njihov osnovni instrument. To je blago ali vrednostni papir, na katerega so opcije izdane. Tu so nam najbolj znane delniške opcije, o katerih ponavadi govorimo, ko mislimo na splošne opcije. Obstajajo pa tudi opcije na terminske pogodbe, blagovne opcije, obrestne opcije in seveda tudi valutne opcije.

1.3.1. *Delitev glede na tip izvršitve.* Prva delitev valutnih opcij se nanaša na čas, ko lahko kupec valutno opcijo izvrši. V grobem jih tako razdelimo na evropske, ameriške in eksotične.

Evropske valutne opcije so najbolj osnovne in kupec jih lahko izvrši izključno v času ob zapadlosti (T), na drugi strani pa lahko ameriške valutne opcije kupec izvrši v kateremkoli trenutku do vključno z zapadlostjo, vendar vedno največ enkrat [6].

Valutne opcije z nestandardnimi pravili izvrševanja, za katere velja, da jih v splošnem lahko izvršimo tudi pred zapadlostjo, vendar pa ne v vsakem trenutku, uvrščamo med eksotične valutne opcije.

1.3.2. *Delitev glede na obliko izplačila.* Valutne opcije lahko razdelimo na nakupne, ki dajejo pravico do nakupa tuje valute, in prodajne valutne opcije, ki dajejo pravico do prodaje tuje valute po vnaprej dogovorjenem izvršilnem menjalnem tečaju.

Kupec v nekem trenutku t, ko je izvršitev možna, nakupno valutno opcijo izvrši, če je $S_t > K$, nasprotno pa je pri prodajni, saj se mu jo splača izvršiti le, če je $S_t < K$.

Prav to, da kupec v primeru izvršitve dejansko kupi ali proda tujo valuto, je glavna razlika med valutnimi in delniškimi opcijami. Pri delniških opcijah ob izvršitvi običajno prejmemo samo razliko med izvršilno in tržno ceno delnice. Na drugi strani pa gre pri valutnih opcijah za fizično poravnavo, kjer dejansko izročimo osnovno premoženje.

V matematičnem modelu sicer lahko privzamemo, da tudi valutna opcija ob izvršitvi izplača samo razliko med izvršilnim in tržnim menjalnim tečajem.

Kupec nakupne valutne opcije izplačilo razlike doseže podobno kot pri delniških opcijah, če tujo valuto takoj po izvršitvi valutne opcije proda na trgu po trenutnem tržnem menjalnem tečaju in mu s tem ostane razlika. Pri tem pa smo morali privzeti, da na trgu lahko tujo valuto kupimo ali prodamo po istem menjalnem tečaju.

Torej je vrednost izplačila valutne opcije v času t v primeru izvršitve enaka

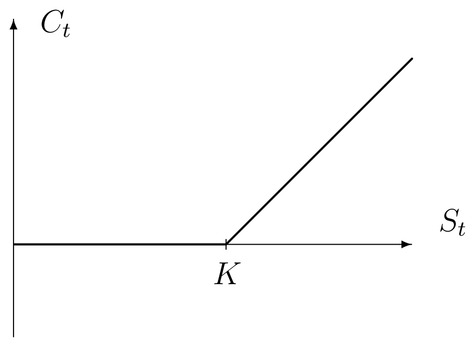
$$C_t = \max\{S_t - K, 0\} \tag{1}$$

za nakupno valutno opcijo in

$$P_t = \max\{K - S_t, 0\} \tag{2}$$

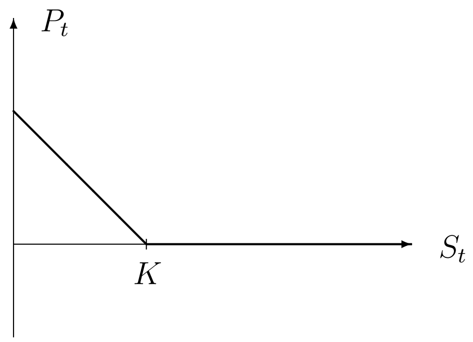
za prodajno valutno opcijo.

Slika 1 prikazuje graf izplačil za dolgo pozicijo v nakupni valutni opciji. Velja, da je graf izplačil za kratko pozicijo zrcalen čez abscisno os, saj mora biti v vsakem primeru vsota izplačila dolge in kratke pozicije v valutni opciji enaka 0.



Slika 1: Dolga pozicija v nakupni valutni opciji

Podobno slika 2 prikazuje graf izplačil za kupca v prodajni valutni opciji. Tudi tu je graf izplačil za izdajatelja zrcalen čez abscisno os.



Slika 2: Dolga pozicija v prodajni valutni opciji

Druge oblike izplačil imenujemo eksotične in so odvisne od poti, torej od gibanja valutnega tečaja v celotnem življenju opcije, in ne le od trenutnega menjalnega tečaja S_t v trenutku izvršitve.

Valutne opcije, ki torej po obliki izplačila ne spadajo med nakupne ali prodajne, prav tako uvrščamo med eksotične valutne opcije.

1.3.3. *Delitev glede na višino izvršilnega in trenutnega menjalnega tečaja.* Zadnja delitev se nanaša na višino izvršilnega menjalnega tečaja v primerjavi s trenutnim. Tako je opcija "in-the-money", če se jo v danem trenutku splača izvršiti, "at-the-money" če je izvršilni menjalni tečaj enak trenutnemu, in "out-of-the-money", če se je trenutno ne splača izvršiti [6]. Vseeno pa te delitve ne moremo uporabiti za nekatere eksotične opcije, saj tam pogosto ne vemo, kakšen je izvršilni menjalni tečaj. To navadno izvemo šele na koncu. V borzni terminologiji se izrazi "in-/at-/out of-the-money" pogosto uporabljajo za primerjavo izvršilnega menjalnega tečaja in terminskega menjalnega tečaja, ki bi ga določili v brezplačnem valutnem terminskem poslu. Pri trgovanju z valutnimi opcijami moramo biti pazljivi na različno terminologijo.

1.3.4. *Eksotične valutne opcije.* Eksotične valutne opcije so, kot že samo ime pove, najmanj poznane. Eksotične oz. nestandardne so lahko pri tipih izvrševanja ali obliki izplačila. Kot navajata [14, 6], poznamo:

- Azijske valutne opcije, pri katerih je izplačilo odvisno od povprečne vrednosti menjalnega tečaja v nekem obdobju.
- Valutne opcije s pogledom nazaj, pri katerih sta v končnem izplačilu pomembna maksimum in minimum menjalnega tečaja v nekem obdobju.
- Opcija z mejo oz. oviro, kjer vnaprej določimo neko mejo. Ko menjalni tečaj preseže to mejo, valutna opcija bodisi propade, bodisi tedaj šele "oživi".
- Binarne valutne opcije, kjer ima lahko izplačilo le dve možni vrednosti.
- Opcije na razkorak, mavrične opcije in druge.

Vrst eksotičnih opcij je ogromno, ustvarjajo pa jih strokovnjaki v investicijskih bankah in so namenjene specifičnim skupinam uporabnikov [14].

V delu diplomskega seminarja se bomo izmed teh osredotočili na valutno opcijo na ekstremni razkorak (ang. *extreme spread currency option*). Valutna opcija na ekstremni razkorak je eksotična valutna opcija v smislu oblike izplačil (evropska pa v smislu tipa izvršitve), katere "delniško verzijo" je leta 1996 predstavil Bermin [15].

Gre za nekakšno podvrsto valutne opcije s pogledom nazaj, kjer ne poznamo izvršilnega menjalnega tečaja. Vnaprej določimo nek trenutek delitve (T) in trenutek zapadlosti (U). Nakupni tip valutne opcije tako ob zapadlosti U imetniku izplača pozitivni del razlike med najvišjima menjalnima tečajema v obdobju $[T, U]$ in v obdobju $[0, T)$, podobno pa prodajni tip valutne opcije izplača pozitivni del razlike med najnižjima menjalnima tečajema v obdobju $[T, U]$ ter obdobju $[0, T)$. S formulo lahko to zapišemo kot:

$$C_U = \max\{\max_{t\in[T,U]} S_t - \max_{t\in[0,T)} S_t, 0\} \tag{3}$$

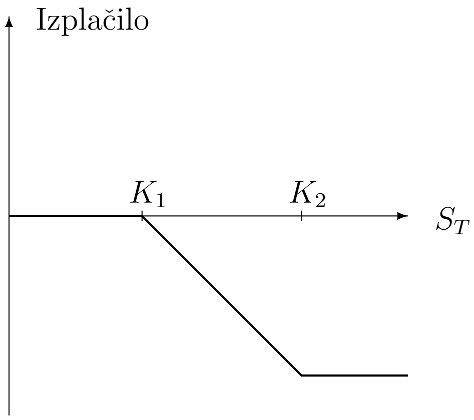
$$P_U = \max\{\min_{t\in[T,U]} S_t - \min_{t\in[0,T)} S_t, 0\} \tag{4}$$

Za "delniško" verzijo te valutne opcije sta Bermin in Haug uspela izpeljati tudi analitično formulo v Black-Scholesovem modelu [15], seveda pa jo je mogoče ovrednotiti med drugim tudi v binomskem modelu, kar bom predstavil v podpodpoglavju 2.5.3.

1.4. **Opcijske strategije.** V nadaljevanju se bomo osredotočili na strategije pri valutnih opcijah, ki so v finančni praksi najbolj pogoste [2, 6]. Skušali bomo podati tudi nekaj primerov, zakaj bi se nekdo za takšno strategijo sploh odločil oz. kakšne koristi mu prinaša.

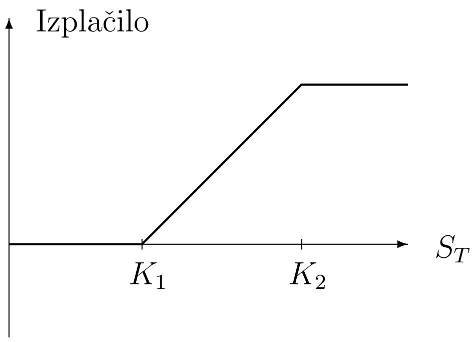
Poleg najbolj osnovnih strategij, kjer imamo v portfelju le eno izmed nakupne oz. prodajne opcije (bodisi dolgo ali kratko pozicijo), imamo še vrsto kombiniranih strategij:

- Medvedov korak (ang. *bear spread*): Je ena izmed tistih najbolj osnovnih strategij, ki vključujejo več kot eno pozicijo v opcijah, in jo je primerno uporabiti, ko kupec misli, da bo tečaj med dvema valutama do zapadlosti nekoliko padel, a vseeno v to ni najbolj prepričan. Pri medvedovem koraku ima investitor v portfelju kratko in dolgo pozicijo v nakupni oz. prodajni valutni opciji, odvisno ali gre za nakupni oz. prodajni medvedov korak [6]. Izvršilni tečaj je večji pri opciji z dolgo pozicijo v obeh možnostih medvedovega koraka. Pri medvedovem koraku je omejen tako dobiček kot izguba, kot to prikazuje graf na sliki 3. Običajno je ob izdaji trenutni menjalni tečaj med K_1 in K_2.



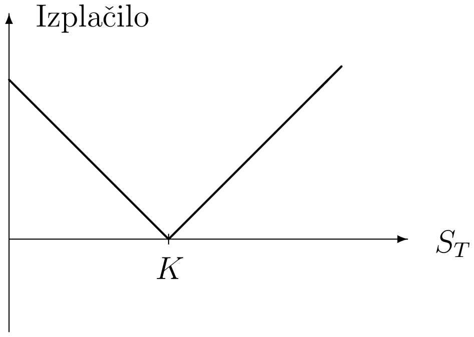
Slika 3: Izplačilo nakupnega medvedovega koraka

- Bikov korak (ang. *bull spread*): Bikov korak je nasprotje medvedovega. Kupec te strategije namreč pričakuje rast menjalnega tečaja, vendar ni pripravljen tvegati. Tudi graf bikovega koraka, zgrajen iz pozicij v nakupni valutni opcij, pokaže, da gre za zrcalno sliko. Razlika je namreč ta, da je izvršilni menjalni tečaj večji pri opciji s kratko pozicijo [6].



Slika 4: Izplačilo nakupnega bikovega koraka

- Razkorak (ang. *straddle*): Dolga pozicija v razkoraku je zgrajena iz dolgih pozicij v nakupni in prodajni valutni opciji. Uporabna je v primerih velikih nihanj in ko nismo gotovi, kaj se bo v prihodnosti na trgu zgodilo, oz. ko se pričakuje, da bo tečaj ali močno narastel ali padel [6]. V primeru stagnacije je izguba največja pri dolgi poziciji v razkoraku. Pri tem je pomembno, da je profit neomejen, kar nakazuje slika 5, na drugi strani pa je izguba omejena z vplačanimi premijami. V primeru, da tečaj naraste, uporabimo le nakupno opcijo, sicer pa le prodajno [2]. Pri tem smo privzeli, da je ob izdaji tečaj blizu K.



Slika 5: Izplačilo razkoraka

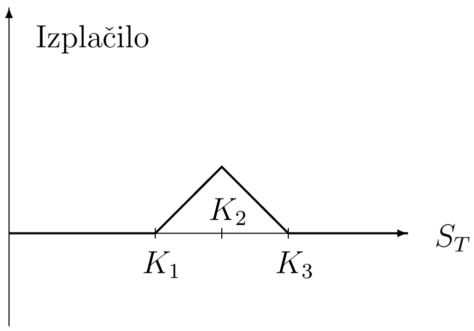
Graf kratke pozicije razkoraka je zrcalen čez abscisno os, saj imamo v tem primeru kratki poziciji v nakupni in prodajni valutni opciji. V obeh primerih pa sta izvršilna menjalna tečaja nakupne in prodajne valutne opcije identična [6].

Obstaja tudi iz razkoraka izpeljana strategija razkorak z zamikom (ang. *forward-start straddle*), kjer gre za to, da v času 0 določimo poleg izvršilnega časa še čas fiksacije in procent določenega tečaja. Izvršilni menjalni tečaj določimo v času fiksacije kot procent takratnega menjalnega tečaja [7].

- Metuljev korak (ang. *butterfly spread*): Metuljev korak je za razliko od prej prikazanih strategij že nekoliko bolj kompleksen, saj imamo tako v portfelju pozicije v štirih valutnih opcijah s tremi različnimi izvršilnimi menjalnimi tečaji. Dolga pozicija v metuljevem koraku vsebuje 2 kratki poziciji in 2 dolgi poziciji v nakupni valutni opciji, kjer je izvršilni tečaj dveh kratkih pozicij (K_2) večji od izvršilnega menjalnega tečaja ene dolge pozicije (K_1) in manjši od izvršilnega menjalnega tečaja druge dolge pozicije v nakupni valutni opiciji (K_3) [2]. Natančneje velja:

$$K_2 = \frac{K_1 + K_3}{2} \tag{5}$$

Takšen portfelj omogoča dobiček v primeru majhnega nihanja menjalnega tečaja, če pa tečaj močno zraste ali pade imamo izgubo v višini vplačane premije. Vsota premij opcij je v tem primeru razmeroma nizka.



Slika 6: Izplačilo metuljevega koraka

Na koncu je potrebno poudariti še, da morajo imeti pri vsaki izmed omenjenih strategij valutne opcije v njih identičen izvršilni čas.

Tega pa ne moremo posploševati na čisto vse strategije – obstajajo tudi koledarski korak (ang. *calendar spread*) in njegove izpeljanke, kjer imajo vse opcije v portfelju sicer enak izvršilni menjalni tečaj, vendar pa se razlikujejo izvršilni časi [2].

2. Modeli za vrednotenje valutnih opcij

Obstaja več modelov za vrednotenje valutnih opcij, vendar pa se bomo osredotočili le na dva. Prvi je Black-Scholesov model, s katerim s preprosto formulo vrednotimo evropske valutne opcije. Model sicer obstaja neodvisno od opcije, vendar v primerih, ko imamo ameriško ali eksotično valutno opcijo, ne moremo določiti analitične formule za izračun premije. Drugi, na katerega se bomi osredinili, pa je binomski model, s katerim lahko ovrednotimo tudi vse kompleksnejše oblike valutnih opcij.

Še prej pa moramo definirati naslednja pojma, ki sta predstavljena v [4].

Definicija 2.1. *Arbitraža* ali arbitražna priložnost pomeni, da lahko za ničelno ceno v nekem trenutku t skonstruiramo tako (arbitražno) strategijo, ki bo s pozitivno verjetnostjo vsaj enkrat v prihodnosti prinesla nek pozitiven denarni tok in nikoli negativnega denarnega toka.

Definicija 2.2. Finančni trg je *popoln*, če veljajo naslednje predpostavke:

- Vrednostni papirji so neskončno deljivi (lahko kupimo oz. prodamo poljubno realno število enot valute).
- Menjalni tečaj je enak za nakup in prodajo tuje valute, obrestne mere pa so enake za kredit in depozit.
- Finančni trg je brez trenja (ni stroškov transakcij, davkov, dividend ipd.).
- Kratka pozicija je dovoljena.
- Vsi investitorji lahko kupijo vse finančne inštrumente.
- Investitorji so racionalni in nenasičeni (z večjo potrošnjo so vedno na boljšem).
- Dejanja investitorjev ne vplivajo na menjalni tečaj.
- Investitorji imajo vsi enako informacijo (ni slabo informiranih in ne takih z notranjimi informacijami).
- Na trgu ni arbitraže.

V nadaljevanju bomo predpostavili, da je finančni trg, na katerem tudi temeljita modela, ki ju bom opisal, popoln.

Da zadostimo predpostavki neobstoja arbitraže, mora kupec valutne opcije v splošnem plačati premijo, ki jo določi izdajatelj in ki se jo lahko izračuna s pomočjo naslednjih modelov. Premija valutne opcije v času t mora biti na popolnih trgih torej vedno enaka vrednosti valutne opcije v danem trenutku t.

2.1. **Black-Scholesov model.**

2.1.1. *Predpostavke Black-Scholesovega modela.* Ker se klasična Black-Scholesova formula v Black-Scholesovemu modelu nanaša na vrednotenje evropskih delniških opcij, sta se leta 1982, ko so tudi nastale valutne opcije, Garman in Kohlhagen s prilagojeno formulo v istem modelu osredotočila prav na vrednotenje tovrstnih opcij [6].

Black-Scholesov model poleg predpostavke o popolnih trgih temelji še na naslednjih dveh predpostavkah. Prva je ta, da sta netvegani nominalni obrestni meri za tujo in domačo valuto konstantni ves čas obstoja valutne opcije. Veljati pa mora tudi, da trenutni menjalni tečaj sledi geometrijskemu Brownovemu[1] gibanju (ang. *Geometric Brownian motion*).

Za razumevanje slednje predpostavke definirajmo najprej standardno Brownovo gibanje [8].

Definicija 2.3. *Standardno Brownovo gibanje* (ali tudi standardni Wiennerjev[2] proces) je slučajni proces, ki ga označimo z W_t, $t \geq 0$, za katerega veljajo naslednje 3 točke:

- Za vsaka $t, s \geq 0$, za katera velja $t \geq s \geq 0$, velja, da je $W_t - W_s$ normalno porazdeljena slučajna spremenljivka z matematičnim upanjem 0 in varianco $t - s$. Torej je $W_t - W_s$ porazdeljena $N(0, t - s)$.
- Za vsak par disjunktnih časovnih intervalov $[t_1, t_2]$ in $[t_3, t_4]$, kjer $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, velja, da sta prirastka $W_{t_4} - W_{t_3}$ in $W_{t_2} - W_{t_1}$ neodvisni slučajni spremenljivki.
- $W_0 = 0$.
- W_t je zvezna skoraj povsod.

Vendar pa vrednosti menjalnega tečaja ne moremo modelirati neposredno s standardnim Brownovim gibanjem, saj, kot lahko razberemo iz definicije, ta slučajen proces lahko zavzame tudi negativne vrednosti. Ker pa vemo, da so menjalni tečaji v realnem življenju vedno nenegativni, bi bilo takšno modeliranje neprimerno.

Zato uvedemo geometrijsko Brownovo gibanje S_t, ki je definirano takole [8].

Definicija 2.4. Slučajni proces S_t je *geometrijsko Brownovo gibanje*, če zadošča enačbi

$$S_t = s_0 \cdot e^{\mu t + \sigma W_t}, \tag{6}$$

kjer je W_t standardno Brownovo gibanje in je $S_0 = s_0 > 0$ začetna vrednost. Pri tem parameter μ imenujemo tendenca, σ pa volatilnost geometrijskega Brownovega gibanja.

Na ta način torej rešimo problem o nenegativnosti menjalnih tečajev in lahko modeliramo trenutni menjalni tečaj v Black-Scholesovemu modelu.

2.1.2. *Opis Black-Scholesovega modela.* V modelu imamo dva netvegana vrednostna papirja (bančna računa v domači in tuji valuti), ki ju bomo označili z B^d oz. B^f, in tvegan "vrednostni papir" (menjalni tečaj).

Pri tem vrednost obeh bančnih računov v času 0 (B_0^d in B_0^f) navadno postavimo na 1. Skozi čas pa se spreminjata v skladu z naslednjima formulama:

$$B_t^d = B_0^d \cdot e^{r_d \cdot t} \tag{7}$$

$$B_t^f = B_0^f \cdot e^{r_f \cdot t} \tag{8}$$

Poleg že dogovorjenih oznak S_t za menjalni tečaj v času t, K za izvršilni menjalni tečaj in T za zapadlost valutne opcije potrebujemo v Black-Scholesovem modelu še naslednje oznake. r_f naj bo netvegana konstantna nominalna obrestna mera pri zveznem obrestovanju za tujo valuto (moč obresti), r_d pa netvegana konstantna

[1]Robert Brown (1773–1858): škotski biolog, ki je ugotovil, da se zrnca cvetnega prahu v vodi neurejeno gibajo.

[2]Norbert Wiener (1894–1964): ameriški matematik, ki je leta 1923 predstavil izpeljavo Brownovega gibanja.

nominalna obrestna mera pri zveznem obrestovanju za domačo valuto (moč obresti). Parameter t označuje trenutek vrednotenja med 0 in T, $\tau = T - t$ pa predstavlja čas do zapadlosti v letih. Pomemben parameter je še volatilnost menjalnega tečaja (letni standardni odklon logaritemskih donosov S_t), ki ga označimo s σ, zadnja oznaka N pa predstavlja porazdelitveno funkcijo standardne normalne porazdelitve $N(0,1)$.

Sedaj lahko definiramo formulo za vrednotenje evropskih valutnih opcij.

2.2. **Garman-Kohlhagnova formula.** Izpeljana Garman-Kohlhagnova formula za valutne opcije, s katero lahko analitično izračunamo premijo evropskih valutnih opcij v Black-Scholesovem, je sledeča [5]:

$$c_t^E = S_t \cdot e^{-r_f \cdot \tau} \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-r_d \cdot \tau} \cdot N(d_2) \tag{9}$$

je premija za evropsko nakupno valutno opcijo, medtem ko je

$$p_t^E = K \cdot e^{-r_d \cdot \tau} \cdot N(-d_2) - S_t \cdot e^{-r_f \cdot \tau} \cdot N(-d_1) \tag{10}$$

premija za evropsko prodajno valutno opcijo. Pri tem sta d_1 in d_2:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r_d + r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}} \tag{11}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{\tau} \tag{12}$$

Izpeljava Garman-Kohlhagnove formule je podrobneje predstavljena v [3].

Mogoč je tudi drugačen zapis Garman-Kohlhagnove formule [5]. Pri tem pristopu moramo najprej definirati terminski menjalni tečaj med valutama z ročnostjo T, ki je

$$f(t,T) = S_t \cdot e^{(r_d - r_f) \cdot \tau}. \tag{13}$$

Če terminski tečaj opazujemo na trgu terminskih pogodb (npr. na borzi), potem je premija za evropsko nakupno valutno opcijo, kot navaja [5] enaka

$$c_t^E = e^{(r_d - r_f) \cdot \tau} \cdot (f(t,T) \cdot N(d_1) - K \cdot N(d_2)). \tag{14}$$

p_t^E pa je na drugi strani premija za prodajno evropsko valutno opcijo in je

$$p_t^E = -e^{(r_d - r_f) \cdot \tau} \cdot (f(t,T) \cdot N(-d_1) - K \cdot N(-d_2)), \tag{15}$$

kjer je formula za d_2 enaka, kot v zgornjem zapisu, d_1 pa

$$d_1 = \frac{\ln \frac{f(t,T)}{K} + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot \tau}{\sigma \cdot \sqrt{\tau}}. \tag{16}$$

Vidimo, da če vzamemo $r_f = 0$, in če bi S_t predstavljal ceno delnice, je formula pravzaprav identična Black-Scholesovi formuli za delniške opcije.

Vrednost valutne opcije v tem modelu dobimo v domači valuti [5]. Če jo želimo v tuji, jo moramo deliti s S_t. Valuti, v kateri je plačana premija, se reče *premijska valuta*, ki je navadno tista izmed valutnega para, ki je v valutni hierarhiji višja. V tej hierarhiji je prvi ameriški dolar, sledijo pa evro, britanski funt, avstralski, novozelandski ter kanadski dolar in švicarski frank [5]. Ostale valute se v hierarhiji nahajajo še nižje. Premijska valuta je pravzaprav zelo pomembna, saj je od nje odvisno, kako bomo oblikovali zaščitni portfelj investitorja, kar bomo videli v poglavju 3.

2.3. **Implementacija Black-Scholesovega modela v R-u.** Implementacija Black-Scholesovega modela v programskem jeziku R v funkciji `evropska_BS` je preprosta, saj gre pravzaprav le za prepis Garman-Kohlhagnove formule, torej formul (9) in (10).

Oznake parametrov v programih so usklajene z oznakami v diplomskem delu.

```
evropska_BS <- function(S0,K,rd,rf,sigma,T,tip){

  e <- exp(1)
  d1 <- (log(S0/K)+(rd-rf+(sigma^2)/2)*T)/(sigma*T^0.5)
  d2 <- d1-sigma*T^0.5

  if (tip=="nakupna"){
    return (S0*e^(-rf*T)*pnorm(d1)-K*e^(-rd*T)*pnorm(d2))
  }
  else if (tip=="prodajna"){
    return (K*e^(-rd*T)*pnorm(-d2)-S0*e^(-rf*T)*pnorm(-d1))
  }
}
```

2.4. **Binomski model.**

2.4.1. *Splošen opis binomskega modela.* Binomski model je model z diskretnim časom in menjalnim tečajem. Razvit je bil kot diskretizacija Black-Scholesovega modela. Prvič so ga Cox, Ross in Rubinstein predstavili leta 1979 [2].

Tudi v binomskem modelu predpostavimo, da sta netvegani nominalni obrestni meri za tujo in domačo valuto konstantni ves čas obstoja valutne opcije.

Oznake, ki jih uporabljamo v Black-Scholesovem modelu, bodo aktualne tudi v binomskem. Imamo pa dodaten parameter n, ki pomeni število obdobij med današnjim trenutkom in zapadlostjo valutne opcije, kar nam posledično pove tudi dolžino posameznega obdobja.

Binomski model je poseben primer večobdobnega modela, kjer velja, da imamo v vsakem obdobju $t = 0, 1, \ldots, n-1$ natanko 2 možna nadaljna razvoja menjalnega tečaja, in sicer dobrega (u) in slabega (d) [23]. Tu je potreben pogoj, da je $u > d > 0$. Menjalni tečaj se v vsakem obdobju pomnoži z d ali u, odvisno od razvoja glede na prejšnje obdobje.

2.4.2. *Parametrizacija binomskega modela.* Binomski model bo z rastočim n konvergiral k Black-Scholesovem modelu z ustreznimi parametri, če za u in d določimo

$$u = e^{\sigma \cdot \sqrt{\tau/n}} \tag{17}$$

$$d = 1/u \tag{18}$$

V nadaljevanju bomo morali šteti število dobrih in slabih ravojev. Zato bo 1 predstavljala dober razvoj, 0 pa slabega.

Sedaj vpeljimo verjetnostni prostor $\Omega_i = \{0, 1\}$, ki opiše razvoj i-tega obdobja, $\Omega = \Omega_i^n$ pa naj predstavlja verjetnostni prostor vseh možnih razvojev do časa $t = n$ [23].

Pri tem za vsako obdobje $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ velja, da je verjetnost dobrega razvoja v t enaka p $(0 < p < 1)$, slabega pa $1 - p$. Razvoj valutne opcije torej lahko opišemo z n neodvisnimi replikacijami Bernoullijevih poskusov – $Bern(p)$ [23].

V binomskem modelu privzamemo, da obstajata dva netvegana vrednostna papirja, bančna računa v tuji in domači valuti, ki ju kot v podpoglavju 2.1 označimo z B^f in B^d. Pri tem velja, da sta netvegana le glede na valuto, v kateri trgujeta. Na drugi strani pa imamo še tvegan "vrednostni papir" (menjalni tečaj), ki ga označimo s S.

V binomskem modelu valutnega trga moramo definirati še faktor rasti a. Ta opisuje rast bančnega računa v domači valuti glede na rast bančnega računa v tuji valuti [2]. Velja, da je a enak:

$$a = e^{(r_d - r_f)\cdot\frac{\tau}{n}} \tag{19}$$

V binomskem modelu za valutne opcije sta vrednostna procesa bančnega računa v tuji oz. domači valuti podana, kot je prikazano na sliki 7.

$$B^f\colon\ 1 \longrightarrow e^{r_f\cdot T/n} \longrightarrow \underbrace{\cdots}_{n-2} \longrightarrow e^{r_f\cdot T}$$

$$B^d\colon\ 1 \longrightarrow e^{r_d\cdot T/n} \longrightarrow \underbrace{\cdots}_{n-2} \longrightarrow e^{r_d\cdot T}$$

Slika 7: Vrednostni proces bančnega računa v tuji in domači valuti

Pri menjalnem tečaju pa potrebujemo za predstavitev vrednostnega procesa še D_t, ki šteje število dobrih razvojev do časa t in je

$$D_t(\omega) = \sum_{i=1}^{t} \omega_i, \tag{20}$$

kjer seveda velja, da je $\omega_i = 1$, če imamo dober razvoj, in $\omega_i = 0$, sicer [23]. D_t je torej slučajna spremenljivka, porazdeljena $Bin(t, p)$ [23].

Sedaj lahko definiramo vrednostni proces menjalnega tečaja v binomskem modelu. Zanj velja

$$S_t(\omega) = S_0(u^{D_t(\omega)} \cdot d^{(t - D_t(\omega))}), \tag{21}$$

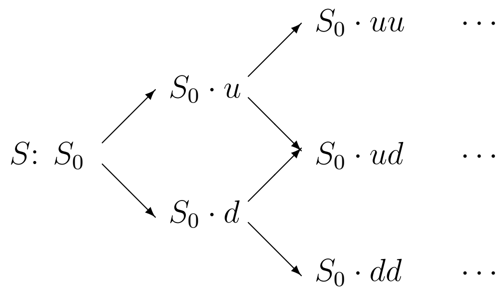
kjer je seveda $S_0 > 0$ [23].

Binomski model za valutne opcije pa lahko predstavimo tudi z binomskim drevesom.

V binomskem drevesu imamo n nivojev, kjer vsak nivo predstavlja ustrezno obdobje. V njem je vrednost korena v času $t = 0$ (na 0-tem nivoju) enaka S_0. Potem pa je vedno možen le premik desno navzgor ali desno navzdol iz nekega obdobja t v $t+1$, kjer je $t \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. V primeru premika desno navzgor imamo dober razvoj in je vrednost vozlišča, v katero se premaknemo enaka vrednosti $S_t \cdot u$. Podobno velja za premik navzdol, tam imamo slab razvoj, vrednost vozlišča na $t+1$. nivoju pa je enaka $S_t \cdot d$. Definirajmo sedaj do tveganja nevtralno prehodno verjetnost q [2].

$$q = \frac{a - d}{u - d}. \tag{22}$$

Z do tveganja nevtralno verjetnostjo q je namreč določena verjetnost premika gor v binomskem drevesu. Tako je verjetnost premika navzgor q, premika navzdol pa $1 - q$ [23].



Slika 8: Binomsko drevo menjalnega tečaja

Na koncu omenimo še, da če velja

$$-1 < d < a < u, \tag{23}$$

potem je finančni trg brez arbitraže [23].

Postopek vrednotenja delniških opcij v binomskem modelu smo podrobno študirali pri predmetu Finančna matematika 1. Valutne opcije v modelu vrednotimo povsem enako.

2.5. **Implementacija binomskega modela v R-u.** Da bomo predstavitev binomskega modela prikazali tudi v praksi, bomo predstavili še binomski model za evropsko in ameriško prodajno valutno opcijo ter prodajno valutno opcijo na ekstremni razkorak v programskem jeziku R in prikazali konvergenco premij iz binomskega modela.

Red časovne zahtevnosti pri evropski valutni opciji v binomskem modelu je $O(n)$, pri ameriški znaša $O(n^2)$, pri valutni opciji na ekstremni razkorak pa kar $O(n \cdot 2^n)$, saj je izplačilo tu odvisno od poti. V vsakem od omenjenih primerov je takšna namreč velikost tabele, ki jih potrebujemo za določitev premije, kot bomo videli pozneje pri opisu programa.

2.5.1. *Evropska valutna opcija.* V programu za evropsko valutno opcijo moramo najprej zapisati funkcijo `izplacilo`, ki je zelo preprosta, ima konstanten red časovne zahtevnosti in je le prepis definicije izplačila.

```
izplacilo <- function(S,K,tip){
  if (tip=='nakupna'){
    return (max(S-K,0))
  }
  else if (tip=='prodajna'){
    return (max(K-S,0))
```

```
  }
}
```

Nato pa potrebujemo funkcijo `evropska_bin`, ki z izjemo primera, da valutna opcija zapade v tem trenutku, torej da je `T` $= 0$, najprej ustvari parametre `u`, `d` ter `q`, kot v enačbah (17), (18) in (22), nato pa naredi vektor `vrednosti`, ki vsebuje `n` $+ 1$ členov, in predstavlja vrednosti menjalnega tečaja v zadnjem obdobju v vseh možnih razvojih. Vektor `verjetnosti` je iste dolžine in ustvari ustrezne verjetnosti za vsa končna stanja. Zatem dobimo v vektorju `izplacano` iz vektorja `vrednosti` s pomočjo prej definirane funkcije `izplacilo` vektor vseh izplačil v vseh možnih razvojih. Na koncu vektorja `izplacano` in `verjetnosti` le še skalarno zmnožimo in zvezno diskontiramo, seveda z domačo obrestno mero `rd`. V primeru, da valutna opcija zapade v tem trenutku, torej da je `T` $= 0$, pa funkcija `evropska_bin` le vrne rezultat funkcije `izplacilo` za dano evropsko valutno opcijo.

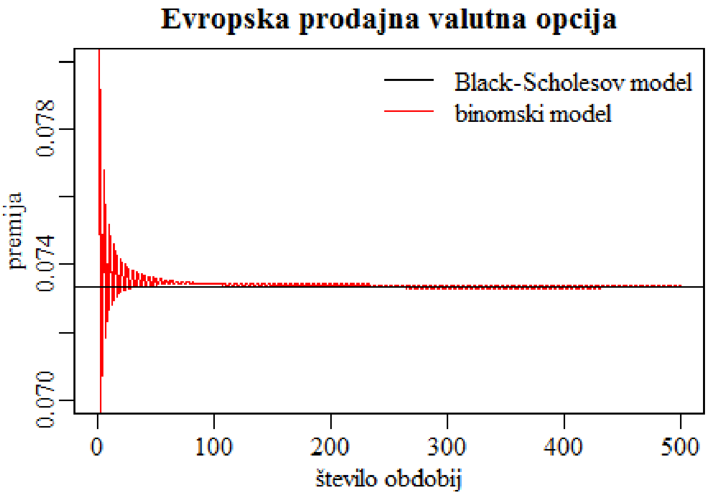
```
evropska_bin <- function(S0,K,rd,rf,sigma,T,n,tip){

  if (T>0){

    e <- exp(1)
    u <- e^(sigma*(T/n)^0.5)
    d <- 1/u
    q <- (e^((rd-rf)*T/n)-d)/(u-d)

    vrednosti <- S0*u^seq(-n,n,2)
    verjetnosti <- dbinom(0:n,n,q)
    izplacano <- sapply(vrednosti,izplacilo,K=K,tip=tip)

    return (sum(izplacano*verjetnosti)*e^(-rd*T))

  }
  else if (T==0){

    return (izplacilo(S0,K,tip))
  }
}
```

Za prikaz konvergence premij, dobljenih z binomskim modelom, proti premiji, dobljeni v Black-Scholesovemu modelu, za evropsko valutno opcijo smo s pomočjo funkcij `evropska_bin` in `evropska_BS` (slednja je predstavljena v podpoglavju 2.3), pripravili graf na sliki 9. Za prikaz na konkretnem primeru smo vzeli naslednje podatke za evropsko prodajno valutno opcijo:

- `S0` $= 1.61$
- `K` $= 1.6$
- `rd` $= 0.08$
- `rf` $= 0.09$
- `sigma` $= 0.12$

- $\mathtt{T} = 1$
- $\mathtt{n} = 500$

Rdeča krivulja na grafu 9 izriše vrednosti premij v odvisnosti od števila obdobij v binomskem modelu, s črno črto pa je narisana premija, dobljena v Black-Scholesovem modelu.



Slika 9: Graf konvergence premije evropske prodajne valutne opcije

2.5.2. *Ameriška valutna opcija.* Pri ameriški valutni opciji je pomembno, da ni potrebno zajeti vseh poti, saj bi to pomenilo eksponenten red časovne zahtevnosti, podobno kot pozneje pri valutni opciji na ekstremni razkorak v podpodpoglavju 2.5.3. Pomembno pa je, da zajememo vse točke v razvoju in ne le končnih stanj.

V programu za vrednotenje ameriške valutne opcije v binomskem modelu ponovno potrebujemo funkcijo `izplacilo` iz podpodpoglavja 2.5.1. Sedaj pa lahko ustvarimo funkcijo za vrednotenje v binomskem modelu.

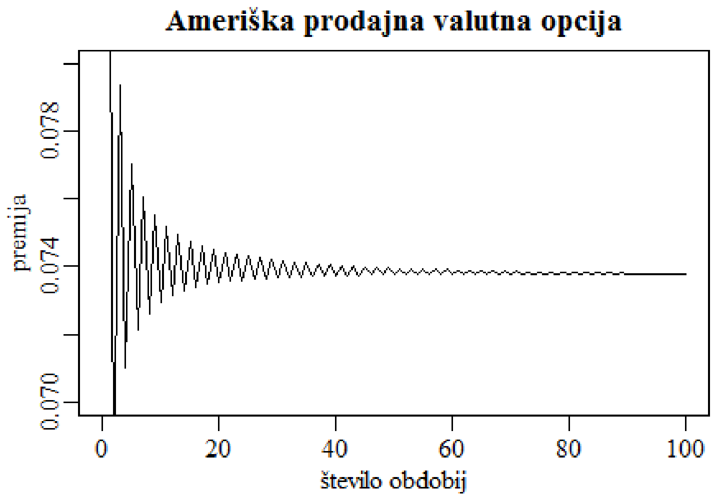
Funkcija `ameriska_bin` podobno kot prej `evropska_bin` v primeru, da valutna opcija še ni zapadla, najprej ustvari potrebne parametre `u`, `d` in `q`, nato pa naredi zgornjetrikotno matriko vrednosti menjalnih tečajev `D` v vsakem stanju, v vsakem obdobju, ki predstavlja binomsko drevo. V nadaljevanju pa pride del, ki se od vrednotenja evropske valutne opcije najbolj razlikuje. Ustvariti moramo zgornjetrikotno matriko `V`, matriko vrednosti valutne opcije, ki jo konstruiramo s pomočjo obratne indukcije, in kjer stolpci predstavljajo obdobja. Pri tem predstavlja prvi stolpec 0. obdobje, drugi stolpec 1. obodbje in tako naprej do $\mathtt{n} + 1$. stolpca. V zadnjem obdobju binomskega modela valutna opcija v vsakem primeru zapade, torej ne moremo čakati do naslednjega obdobja. Zato je vrednost valutne opcije v vsakem stanju v `n`-tem obdobju enaka kar izplačilu valutne opcije. Tako dobimo zadnji stolpec v matriki `V`. Obratno indukcijo nato udejanimo z dvojno zanko, kjer na vsakem koraku iz dveh zaporednih stanj iz nekega obdobja $t \in \{\mathtt{n}, \dots, 1\}$, za katera že poznamo vrednosti valutne opcije v danih stanjih, lahko izračunamo diskontirano matematično upanje vrednosti valutne opcije glede na do tveganja nevtralno verjetnost. Dobljeno vrednost primerjamo z izplačilom ob takojšnji izvršitvi in izberemo višjo izmed obeh. Tako dobimo vrednost valutne opcije za natanko eno stanje v obdobju $t - 1$. V binomskem drevesu si lahko predstavljamo, da je to tisto vozlišče na nivoju $t - 1$, iz katerega obstaja povezava do dveh ustreznih vozlišč na nivoju t.

Tako se rekurzivno pomikamo prek zunanje zanke od `n`. do 0. nivoja oz. do prvega člena prvega stolpca matrike `V`. Vrednost valutne opcije je s tem v obdobju 0 znana.

V primeru, da pa valutna opcija zapade ravno v danem trenutku, torej da je `T` $= 0$, pa funkcija `ameriska_bin` le vrne rezultat funkcije `izplacilo` za dano ameriško valutno opcijo.

```
ameriska_bin <- function(S0, K, rd, rf, sigma, T, n, tip){

  if (T>0){

    e <- exp(1)
    u <- e^(sigma*(T/n)^0.5)
    d <- 1/u
    q <- (e^((rd-rf)*T/n)-d)/(u-d)

    D <- matrix(ncol=n+1,nrow=n+1)

    for (j in 1:(n+1)){
      for (i in 1:j){

        D[i,j] <- S0*d^(i-1)*u^(j-i)
      }
    }

    V <- matrix(ncol=n+1,nrow=n+1)

    V[,n+1] <- sapply(D[,n+1],izplacilo,K=K,tip=tip)

    for (j in n:1){
      for (i in 1:j){

        V[i,j] <- max(izplacilo(D[i,j],K,tip),
          (q*V[i,j+1] + (1-q)*V[i+1,j+1])*e^(-rd*T/n) )
      }
    }

    return (V[1,1])

  }
  else if (T==0){

    return (izplacilo(S0,K,tip))
  }
}
```

Za prikaz konvergence v primeru ameriške prodajne valutne opcije smo vzeli iste parametre kot v podpodpoglavju 2.5.1, le parameter `n` naj bo tokrat enak 100. Zaradi kvadratičnega reda časovne zahtevnosti je namreč jasno, da v primerljivem času ne moremo opraviti 500-obdobnega modela pri ameriški valutni opciji, kot smo to storili pri evropski. Konvergenca premij je prikazana na sliki 10. Opozorimo, da v prikazu ameriške valutne opcije ne moremo narisati limitne črte, saj v Black-Scholesovemu modelu ne obstaja analitična formula za višino premije.



Slika 10: Graf konvergence premije ameriške valutne opcije

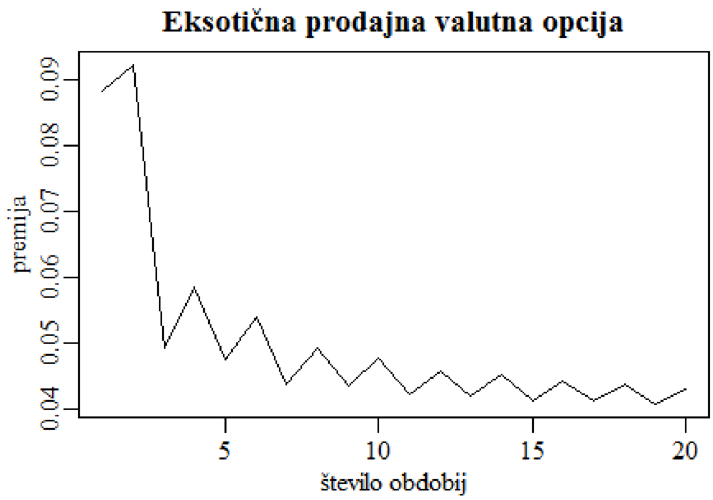
2.5.3. *Eksotična valutna opcija.* V tem podpodpoglavju bomo opisali vrednotenje valutne opcije na ekstremni razkorak v binomskem modelu v R-u. To dosežemo s funkcijo `eksoticna_bin`, ki za delovanje potrebuje knjižnico combinat [1]. Podobno kot v prvih dveh primerih si najprej pomagamo s pomožno funkcijo. V primeru te eksotične valutne opcije nam spodnja funkcija `izplacilo_eks` vrne izplačilo valutne opcije na ekstremni razkorak, ki je opisana v podpodpoglavju 1.3.4, za neko konkretno zaporedje vrednosti menjalnih tečajev od 0-tega do `n`-tega obdobja, ki je shranjeno v vektorju *vrsta*.

```
izplacilo_eks <- function(vrsta,T,tip){

  dolzina <- length(vrsta)

  if (tip=='nakupna'){
    return (max(max(vrsta[(T+1):dolzina])-max(vrsta[1:T]),0))
  }
  else if (tip=='prodajna'){
    return (max(min(vrsta[(T+1):dolzina])-min(vrsta[1:T]),0))
  }
}
```

Na začetku funkcija `eksoticna_bin` ustvari parametre `u`, `d` in `q`. Zatem pa tokrat potrebujemo `m`, v primeru, da vnešen `T` ni večkratnik števila `U/n`. Tako izberemo za `m` prvo obodbje, ki sledi trenutku `T`. V nadaljevanju ustvarimo matriko `poddrevo`, ki predstavlja vse možne poti menjalnega tečaja v binomskem drevesu, kjer 1 predstavlja dober razvoj, 0 pa slabega. Iz tega lahko pripravimo matriko `drevo`, ki ob izhodu iz stavka `for` predstavlja vrednosti menjalnega tečaja v vsakem stanju v vsakem obdobju. Vektor `gor` nam na drugi strani šteje število dobrih obdobij v ustrezni posamezni vrstici matrike (za posamezno pot), vektor `vektor` pa s pomočjo funkcije `izplacilo_eks`, ki smo jo definirali tik pred tem, izračuna vektor vrednosti valutne opcije na ekstremni razkorak za posamezno pot, pomnožen z ustrezno verjetnostjo. Če seštejemo `vektor` in ga diskontiramo, seveda z domačo obrestno mero, dobimo premijo valutne opcije na ekstremni razkorak.

```
eksoticna_bin <- function(S0,rd,rf,sigma,T,U,n,tip){

  e <- exp(1)
  u <- e^(sigma*(U/n)^0.5)
  d <- 1/u
  q <- (e^((rd-rf)*U/n)-d)/(u-d)
  m <- floor(T*n/U)+1

  preddrevo <- hcube(rep(2,n),translation=-1)
  drevo <- preddrevo*u
  drevo[drevo==0] <- d

  vektor <- numeric(2^n)

  for (i in 1:2^n){

    drevo[i,] <- S0*cumprod(drevo[i,])
    gor <- sum(preddrevo[i,])

    vektor[i] <- izplacilo_eks(c(S0,drevo[i,]),m,tip)*(q^gor)*((1-q)^(n-gor))
  }

  return (sum(vektor)*e^(-rd*U))
}
```

Za prikaz konvergence prodajne valutne opcije na ekstremni razkorak smo ponovno vzeli enake podatke za začetni menjalni tečaj, obe netvegani konstantni nominalni obrestni meri pri zveznem obrestovanju ter volatilnost, medtem ko naj bodo `T` $= 0{,}5$, `U` $= 1$ in `n` $= 20$, pri katerem je izračun premij že problematičen, a v doglednem času še mogoč. Torej je jasno, da za tovrstne eksotične valutne opcije binomski model ni primeren.



Slika 11: Graf konvergence premije valutne opcije na ekstremni razkorak

Podoben model binomskemu je tudi trinomski, kjer je razlika le ta, da imamo v vsakem stanju, v vsakem obdobju tri možne razvoje. Med drugim je en izmed možnih razvojev vedno tak, da ostane menjalni tečaj v naslednjem obdobju nespremenjen glede na predhodnega [2]. Zato je trinomsko drevo tudi ustrezno časovno potratnejše. Velja pa, da sta v limiti vrednosti valutnih opcij v primeru binomskega in trinomskega modela enaki, seveda pod pogojem, da je tudi trinomski model parametriziran tako, da konvergira k istemu Black-Scholesovem modelu.

2.6. **Evalvacija modelov.**

2.6.1. *Slabosti Black-Scholesovega in binomskega modela.*

- Menjalni tečaji se v praksi ne gibljejo zvezno, kot to predvideva Black-Scholesov model, pa tudi ne tako, kot predvideva binomski model.
- Netvegani konstantni nominalni obrestni meri za tujo in domačo valuto skoraj gotovo nista konstantni od trenutka vrednotenja do zapadlosti, kot to predpostavljata Black-Scholesov in binomski model.
- Empirične študije so pokazale, da Black-Scholesov model v praksi zgreši vrednosti tako "at-the-money", "in-the-money", kot tudi "out-of-the-money" valutnih opcij [22]. Razlog za manjšo anomalijo se skriva v predpostavki, da je vrednost osnovnega premoženja porazdeljena lognormalno oz. da sledi geometrijskem Brownovem gibanju. V praksi naj bi imel menjalni tečaj v povprečju večjo asimetričnost in kurtozis od predpostavljene porazdelitve [25]. Od asimetričnosti osnovnega premoženja je potem odvisno, ali Black-Scholesov model preceni ali podceni "in-the-money" in "out-of-the-money" valutne opcije, medtem ko ima kurtozis dominanten efekt pri določanju precenjenosti "at-the-money" valutnih opcij Black-Scholes napake 2.
- Binomski model je v praksi pri vrednotenju evropskih valutnih opcij prepočasen v primerjavi z Black-Scholesovim modelom, in zato za vrednotenje teh valutnih opcij ni uporabljan. Podobno je časovno prezahteven pri vrednotenju nekaterih eksotičnih valutnih opcij, zato se pogosto uporabljajo npr. metode Monte Carlo.

2.6.2. *Metode Monte Carlo.* Kot smo že omenili, Black-Scholesov model lahko vrednoti le evropske valutne opcije, binomski model pa je časovno zelo zahteven (v primeru grafa na sliki 11 smo lahko videli, da imamo težave pri vrednotenju valutne opcije na ekstremni razkorak že pri 20-obdobnem modelu). Zato potrebujemo nek drug koncept.

Tu velja omeniti simulacije Monte Carlo, ki se zlasti pri vrednotenju eksotičnih valutnih opcij zelo pogosto uporabljajo. Uporabljamo jih lahko tudi tedaj, ko so izplačila odvisna od "poti" in ne le od končne vrednosti menjalnega tečaja [2].

Ideja simulacije Monte Carlo je ta, da generiramo N (N naj bo zelo velik) naključnih poti menjalnega tečaja in za vsako ponovitev izračunamo izplačilo valutne opcije. Na koncu vzamemo diskontirano povprečno vrednost izračunanih izplačil. Ko N povečujemo, gre dobljena premija z metodo Monte Carlo proti dejanski premiji [2].

3. Zaščitni portfelj izdajatelja valutnih opcij

3.1. **Grške črke.** Pri metodah zaščite valutnih opcij so glavna orodja grške črke oz. tako imenovani "grki" [5]. Ti merijo občutljivost vrednosti izvedenega instrumenta na majhne spremembe vrednosti nekega parametra trga. Tako lahko tveganja obravnavamo ločeno in portfelj ustrezno zaščitimo pred konkretno izpostavljenostjo.

Grke lahko razdelimo na grke prvega, drugega in tretjega reda, kjer gre za to, da se le-ti ukvarjajo z odvodi ustreznega reda. Seveda so najpogosteje uporabljani prvi [21]. Med njimi je zagotovo najpomembnejši izraz grška črka delta, na katerega se bomo osredotočili. Delta v konkretnem primeru valutnih opcij meri občutljivost premije oz. vrednosti valutne opcije na spremembo menjalnega tečaja.

3.2. **Vrste delt v Black-Scholesovem modelu.** V financah nam delta pomaga konstruirati portfelj osnovnega in izvedenega finančnega instrumenta, tako da vrednost portfelja ostane nespremenjena pri manjših spremembah vrednosti osnovnega instrumenta. Prav zaradi te lastnosti je izmed grkov najpomembnejši.

V izvedbeni strategiji izvedenega instrumenta je delta količina osnovnega instrumenta. Tako je delta odstotek od števila enot tuje valute, ki jo mora kupiti ali prodati investitor, ko prodaja valutno opcijo, da drži zaščitno pozicijo za spremembe valutnega tečaja [5]. Torej če npr. investitor prodaja valutno opcijo in če je delta enaka 35 % to pomeni, da moramo kupiti 35 % od števila enot tuje valute, da ščitimo kratko pozicijo v valutni opciji.

Kot opisano v [5], poznamo 4 tipe delt v Black-Scholesovem modelu za evropske valutne opcije, ki lahko dajo različne rezultate, in sicer:

- Trenutna delta (ang. *spot delta*), ki ščiti na tečajnem trgu.
- Terminska delta (ang. *forward delta*), ki ščiti na trgih valutnih terminskih poslov.
- Prilagojeni verziji omenjenih delt, ki sta popravljeni za plačano premijo v primeru, če je premija plačana v tuji valuti.

Pri metodah zaščite in s tem konkretno tudi pri vseh štirih vrstah delt je potrebno povedati, da so omenjene grške črke in s tem tudi zaščitni portfelji veljavni samo za kratek čas. Teoretično jih moramo v Black-Scholesovem modelu ves čas spreminjati, v praksi pa periodično – najpogosteje enkrat dnevno, lahko celo pogosteje. Tako ves čas ohranjamo zaščito pred konkretno izpostavljenostjo. Pogoste spremembe v praksi niso primerne zlasti za manjše investitorje, saj bi stroški transakcij presegali koristi, ki jih imamo od zaščite.

3.2.1. *Trenutna delta.* Je najenostavnejša in najpogosteje omenjena izmed vseh štirih vrst. Dobimo jo kot odvod premije iz Garman-Kohlhagnove formule po S_t (trenutnem tečaju). Velja, da je odvod vrednosti ene enote tuje valute po menjanem tečaju enak 1. Če ima izdajatelj valutne opcije poleg valutne opcije v svojem portfelju še delta enot tuje valute, je odvod vrednosti njegovega portfelja po menjalnem tečaju S_t enak 0. S tem si zagotovimo, da ostaja pri manjših spremembah vrednosti menjalnega tečaja vrednost portfelja nespremenjena [5].

Formuli za trenutno delto pri nakupni in prodajni valutni opciji sta naslednji:

$$\Delta_{s,c} = \frac{\partial c_t}{\partial S_t} = e^{-r_f \cdot \tau} \cdot N(d_1) \tag{24}$$

$$\Delta_{s,p} = \frac{\partial p_t}{\partial S_t} = e^{-r_f \cdot \tau} \cdot N(-d_1) \tag{25}$$

Zaščita na tečajnem trgu je torej enaka nominalni vsoti valutne opcije (N_f), pomnoženi z iz formul (24) oz. (25) dobljeno delto, ki se sicer nahaja nekje na intervalu $[0, 1)$, če gre za nakupno valutno opcijo, oz. $(-1, 0]$ v primeru prodajne [5]. Iz enačbe lahko vidimo, da je razlog za to dejstvo, da je $e^{-r_f \cdot \tau} < 1$. Pri tem pa moramo predpostaviti, da je $r_f > 0$, sicer omenjeno ne velja. V praksi je to sicer zelo smiselna predpostavka, ki pa je v izjemnih primerih splošnega nezaupanja v tvegane finančne instrumente lahko tudi kršena.

Za pravkar izračunane trenutne delte v Black-Scholesovem modelu velja naslednja pariteta, zapisana v [5].

$$\Delta_{s,c}(K, \sigma) - \Delta_{s,p}(K, \sigma) = e^{-r_f \cdot \tau} \tag{26}$$

3.2.2. *Terminska delta.* Je alternativa tečajnemu zavarovanju pred tveganji (ang. *spot hedge*), s katero se prav tako lahko zaščitimo pred manjšimi spremembami menjalnega tečaja [5]. Velja:

$$\Delta_{f,c} = \frac{\partial c_t}{\partial v_f} = N(d_1) \tag{27}$$

$$\Delta_{f,p} = \frac{\partial p_t}{\partial v_f} = -N(-d_1) \tag{28}$$

Pri tem je v_f vrednost terminskega posla v času t.

$$v_f(t, T) = e^{-r_d \cdot \tau} \cdot (S_t \cdot e^{(r_d - r_f) \cdot \tau} - K) = S_t \cdot e^{-r_f \cdot \tau} - K \cdot e^{-r_d \cdot \tau} \tag{29}$$

V tem primeru ne kupujemo določenega števila enot tuje valute kot prej, pač pa investitor za terminsko zaščito kupi ustrezno število enot valutnih terminskih poslov, pomnoženo z zgoraj zapisano terminsko delto – torej $N_f \cdot \Delta_f$. Tudi terminska delta je veljavna le kratek čas.

Pariteta je pri terminskih deltah simetrična, za razliko od trenutnih [5], tako da velja

$$\Delta_{f,c}(K, \sigma) - \Delta_{f,p}(K, \sigma) = 1. \tag{30}$$

Prednost terminske delte je ta, da zajame tudi tveganja obrestne mere in ne le tveganja, povezana z menjalnim tečajem, zato so bolj uporabne zlasti za dolgoročna ščitenja, kjer obstajajo velike razlike v obrestnih merah [5].

Za delte, ki so dobljene z omenjenima metodama, velja, da če je vrednost delte za nakupno valutno opcijo okoli 1, je valutna opcija močno "in-the-money", pri 0 pa močno "out-of-the-money". Za prodajno valutno opcijo pa na drugi strani velja, da če je močno "out-of-the-money", je delta blizu 0, če pa je blizu -1, je omenjena valutna opcija zelo "in-the-money" [5].

3.2.3. *Na premijo prilagojeni verziji delt (ang. premium adjusted delta).* Ta tip določanja zaščitnega portfelja je primeren, če je premijska valuta tuja valuta [5].

Ideja, zakaj je v primeru tuje premijske valute potreben popravek pri izračunu zaščite premije, je ta, da gre pravzaprav za podoben primer, kot če bi plačali premijo za delniško opcijo v samih delnicah. Tudi tam bi morali zaščitni portfelj temu prilagajati – npr. kupiti manj delnic [5].

Primer: če imamo valutni par jena in dolarja, kjer je dolar tuja valuta, bo premijska valuta zaradi valutne hierarhije tradicionalno v dolarjih, torej v tuji valuti, zato uporabimo trenutno ali terminsko prilagojeno delto.

Prilagojena različica za trenutno delto je enaka trenutni delti, zmanjšana za premijo, izraženo v tuji valuti [5].

$$\Delta_{s,pa,c} = \Delta_{s,c} - c_t^E/S_t = e^{-r_f \cdot \tau} \cdot K/f(t,T) \cdot N(d_2) \tag{31}$$

$$\Delta_{s,pa,p} = \Delta_{s,p} - p_t^E/S_t = -e^{-r_f \cdot \tau} \cdot K/f(t,T) \cdot N(-d_2) \tag{32}$$

Za prilagojeno različico terminske delte pa velja:

$$\Delta_{f,pa,c} = K/f(t,T) \cdot N(d_2) \tag{33}$$

$$\Delta_{f,pa,p} = -K/f(t,T) \cdot N(-d_2) \tag{34}$$

Za vse 4 verzije velja, da so v Black-Scholesovem modelu teoretično veljavne samo za kratek čas.

3.3. **Implementacija trenutne delte v Black-Scholesovem modelu v R-u.** Implementacija trenutne delte v Black-Scholesovem modelu v R-u je podobno kot vrednotenje v Black-Scholesovem modelu le prepis definicije, le da tokrat uporabimo formuli (24) in (25). Ostale 3 manj uporabljane tipe delt v Black-Scholesovem modelu bi lahko implementirali podobno.

```
trenutna_delta_BS <- function(S0,K,rd,rf,sigma,T,tip){

  e <- exp(1)
  d1 <- (log(S0/K)+(rd-rf+(sigma^2)/2)*T)/(sigma*T^0.5)

  if (tip=="nakupna"){
    return (e^(-rf*T)*pnorm(d1))
  }
  else if (tip=="prodajna"){
    return (-e^(-rf*T)*pnorm(-d1))
  }
}
```

3.4. **Trenutna delta v binomskem modelu.** Delto lahko izračunamo tudi v binomskem modelu.

Dobimo jo, ne glede na tip valutne opcije, iz dveh enačb z dvema neznankama α_0 in β_0 ter s pomočjo že obrazloženih postopkov za vrednotenje valutnih opcij in potrebnih parametrov [13].

$$\alpha_0 \cdot e^{r_d \cdot T/n} + \beta_0 \cdot S_0 \cdot e^{r_f \cdot T/n} \cdot u = V_u \tag{35}$$

$$\alpha_0 \cdot e^{r_d \cdot T/n} + \beta_0 \cdot S_0 \cdot e^{r_f \cdot T/n} \cdot d = V_d \tag{36}$$

Tu sta V_u in V_d vrednosti valutne opcije v 1. obdobju v primeru dobrega oz. slabega razvoja. α_0 je pri tem količina domače, β_0 pa količina tuje valute v izvedbenem portfelju. Pri tem je β_0 delta, ki jo iščemo [2].

Če predpostavimo, da je $T > 0$, lahko iz enačb (35) in (36) izpeljemo

$$\beta_0 = (V_u - V_d)/(S_0 \cdot e^{r_f \cdot T/n} \cdot (u - d)). \tag{37}$$

V binomskem modelu zaščitni portfelj popravljamo enkrat na obdobje. Velika prednost delte v binomskem modelu je, da jo na enak način lahko izračunamo za eksotične, pa tudi za ameriške valutne opcije. V Black-Scholesovem modelu delte za takšne valutne opcije namreč ne moremo analitično poračunati.

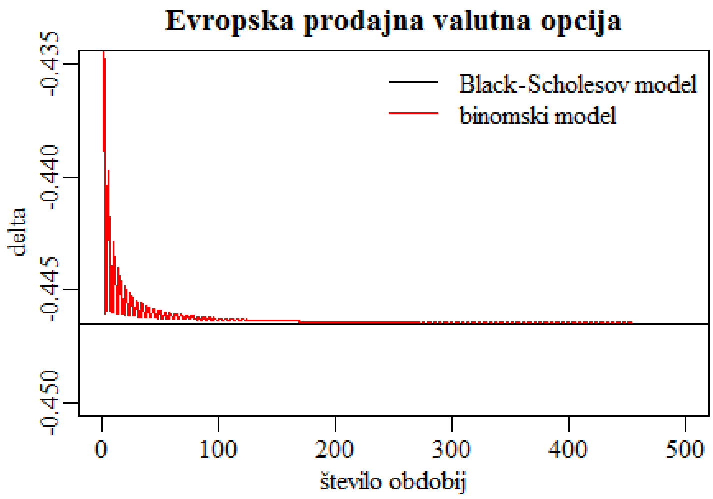
3.5. **Implementacija trenutne delte v binomskem modelu v R-u.** Podobno kot v podpoglavju 3.3 lahko implementiramo trenutno delto v Black-Scholesovem, jo lahko tudi v binomskem modelu, kjer si pomagamo s formulo (37). Vendar pa moramo biti pazljivi v primeru, ko je `T` $= 0$. V tem primeru nas zanima za kakšno vrsto oblike izplačila gre in ali je izplačilo pozitivno. Če imamo nakupno valutno opcijo in je izplačilo pozitivno, potem mora biti delta enaka 1, sicer pa 0. Podobno velja pri prodajni valutni opciji, le da mora biti tam v primeru pozitivnega izplačila delta enaka -1, v nasprotnem primeru pa 0.

```
trenutna_delta_bin <- function(S0,K,rd,rf,sigma,T,n,tip){

  if (T>0){

    e <- exp(1)
    u <- e^(sigma*(T/n)^0.5)
    d <- 1/u
    Vu <- evropska_bin(S0*u,K,rd,rf,sigma,T*(n-1)/n,n-1,tip)
    Vd <- evropska_bin(S0*d,K,rd,rf,sigma,T*(n-1)/n,n-1,tip)

    beta0 <- (Vu-Vd)/(S0*u*e^(rf*T/n)-S0*d*e^(rf*T/n))

    return (beta0)

  }
  else if (T==0){

    if (tip=="nakupna"){
      return (ifelse(izplacilo(S0,K,tip)>0,1,0))
    }
    else if (tip=="prodajna"){
```

```
      return (ifelse(izplacilo(S0,K,tip)>0,-1,0))
    }
  }
}
```

Za prikaz konvergence trenutnih delt, dobljenih z binomskim modelom, proti trenutni delti, dobljeni v Black-Scholesovem modelu, za evropsko valutno opcijo smo s pomočjo funkcije `trenutna_delta_bin` in funkcije `trenutna_delta_BS`, predstavljeno v podpoglavju 3.3, pripravili graf na sliki 12. Za prikaz na konkretnem primeru smo vzeli identične podatke, kot so v podpodpoglavju 2.5.1.

Rdeča krivulja na sliki 12 izriše vrednosti trenutnih delt v odvisnosti od števila obdobij v binomskem modelu, s črno črto pa je narisana trenutna delta, dobljena v Black-Scholesovem modelu.



Slika 12: Graf konvergence delte evropske prodajne valutne opcije

3.6. **Druge grške črke.** Poleg najpomembnejše delte imamo še druge pomembne grke prvega in drugega reda. V tem podpoglavju bomo na kratko predstavili še tri pomembnejše izmed njih.

3.6.1. *Vega* (ν). Vega je tista, ki meri občutljivost vrednosti valutne opcije glede na spremembo v volatilnosti menjalnega tečaja.

Še posebej je pomembna, saj smo do sedaj predpostavljali, da je σ ves čas do izvršitve konstantna, kar v praksi skoraj nikoli ne drži, in zato skoraj vedno obstajajo tovrstna tveganja, ki jih vega opiše. Vega je pomembna zlasti za tiste investitorje, katerih portfelj je močno odvisen od volatilnosti menjalnega tečaja. Zelo pomembna je torej v strategiji razkorak, ki sem jo opisal v poglavju 1.4, kjer predvidevamo velik porast ali padec.

Za vego velja, da je vedno pozitivna in da sta vegi evropske nakupne in prodajne valutne opcije enaki [9]. V Black-Scholesovem modelu jo dobimo kot odvod vrednosti valutne opcije po volatilnosti menjalnega tečaja. Velja:

$$\nu = \frac{\partial c_t}{\partial \sigma} = \frac{\partial p_t}{\partial \sigma} = S_t \cdot e^{-r_f \cdot \tau} \cdot \sqrt{\tau} \cdot N(d_1) = K \cdot e^{-r_d \cdot \tau} \cdot \sqrt{\tau} \cdot N(d_2) \tag{38}$$

3.6.2. *Gama* (Γ). Gama pa je najpomembnejša grška črka višjega reda in meri ukrivljenost (ang. *curvature*) med vrednostjo valutne opcije in trenutnim menjalnim tečajem. Gama valutne opcije oz. portfelja s tem predstavlja stopnjo spremembe vrednosti delte glede na spremembo trenutnega menjalnega tečaja.

Če se z delta ščitenjem lahko zavarujemo pred majhnimi nihanji menjalnega tečaja, se lahko z delta-gama ščitenjem tudi pred večjimi [9].

Velja, da je gama evropske nakupne valutne opcije enaka gami evropske prodajne valutne opcije, če sta izvršilna menjalna tečaja enaka [9].

V Black-Scholesovem modelu je gama enaka:

$$\Gamma = \frac{\partial^2 c_t}{\partial S_t^2} = \frac{\partial^2 p_t}{\partial S_t^2} = \frac{e^{-r_f} \cdot N(d_1)}{S_t \cdot \sigma \cdot \sqrt{T-t}} \tag{39}$$

3.6.3. *Ro* (ρ). Ro predstavlja črko, s katero se zaščitimo pred spremembami obrestne mere, domače ali tuje, za kateri podobno kot za volatilnost velja, da v praksi nista ves čas do izvršitve konstantni. V primeru valutnih opcij imamo v posebnem dve vrsti ro zaščite, saj imamo tujo in domačo obrestno mero. Je pa potrebno povedati, da je, razen izjemoma, vrednost valutne opcije bistveno manj občutljiva na spremembo obrestnih mer, kot pa npr. na volatilnost ali celo vrednost menjalnega tečaja [9]. Zato je ro najmanj uporabljan grk izmed omenjenih.

Tako dobimo ro za domačo obrestno v zveznem modelu kot odvod premije v Garman-Kohlhagnovi formuli po netvegani konstantni nominalni obrestni meri pri zveznem obrestovanju za domačo valuto. Za nakupno valutno opcijo tako, kot v [9], velja

$$\rho_c = \frac{\partial c_t}{\partial r_d} = K \cdot \tau e^{-r_d \cdot \tau} \cdot N(d_2), \tag{40}$$

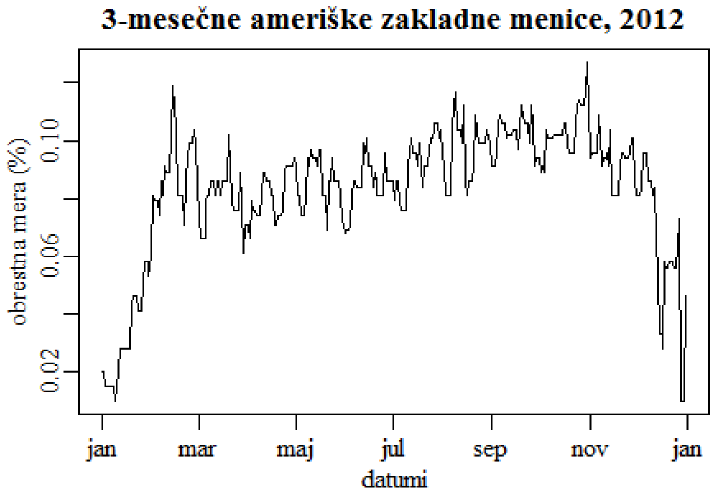
za prodajno pa

$$\rho_p = \frac{\partial p_t}{\partial r_d} = -K \cdot \tau e^{-r_d \cdot \tau} \cdot N(-d_2). \tag{41}$$

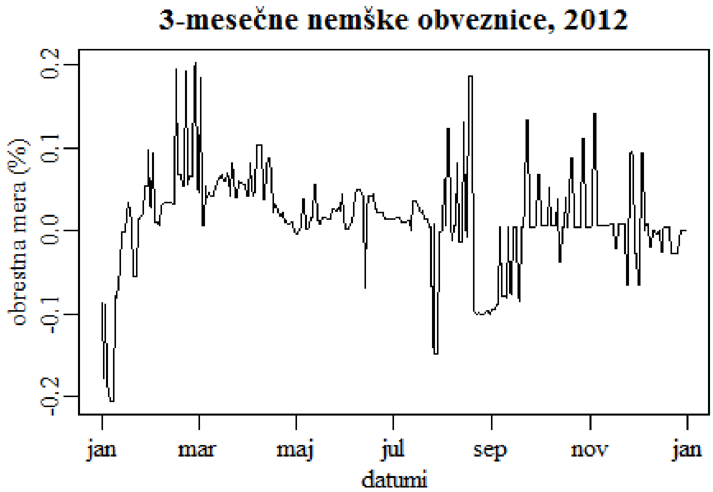
4. Zgledi z realnimi podatki

4.1. **Opis in vir podatkov.** Za prikaz vrednotenja valutne opcije v realnem svetu smo se odločili, da bomo za leto 2012 vrednotili izmišljeno evropsko nakupno valutno opcijo, za katero naj bo $K = 1{,}25$, njena zapadlost pa naj bo kar 31. 12. 2012. Pri tem pa bomo uporabili realne podatke za obdobje leta 2012. Valutni par bo najpogosteje trgovan valutni par, kot omenjeno v podpoglavju 1.1. Gre torej za USD/EUR, kjer za konkreten primer vzamemo ameriški dolar za domačo, evro pa za tujo valuto.

Pri tem potrebujemo podatke za netvegani obrestni meri, ki bosta v modelih vrednotenja predstavljali netvegani konstantni nominalni obrestni meri. Tu se pojavi vprašanje, kaj pravzaprav je netvegana obrestna mera. Dolgo časa so v ta namen uporabljali ustrezni LIBOR oz. EURIBOR, vendar pa zlasti od začetka velike svetovne finančne krize leta 2008 bank več ne pojmujemo kot netvegane, zato se zadnja leta v praksi za ta parameter vzame nominalno letno obrestno mero, ki pripada netveganim trimesečnim državnim obveznicam dobro situiranih držav. V konkretnem primeru valutnega para USD/EUR je tako najbolj smiselno za netvegano konstantno nominalno obrestno mero pri zveznem obrestovanju za domačo valuto uporabiti donosnost 3-mesečnih ameriških zakladnih menic (ang. *treasury bills*), za tujo valuto pa donosnost 3-mesečnih nemških obveznic. Na spodnjih slikah 13 in 14 je grafično prikazana njuna dinamika v letu 2012. Težava pri donosnostih nemških obveznic je le pojav negativnih obrestnih mer v zadnjih letih, kar lahko vidimo na sliki 14, a za namene prikaza vrednotenja valutne opcije in zaščite v diplomskem delu so vseeno primerne.

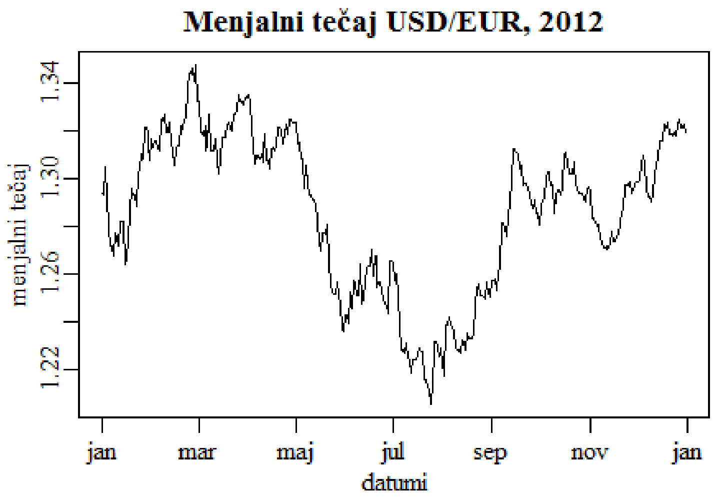


Slika 13: Graf dinamike donosnosti 3-mesečnih ameriških zakladnih menic v letu 2012



Slika 14: Graf dinamike donosnosti 3-mesečnih nemških obveznic v letu 2012

Poleg tega je za vrednotenje v realnem svetu potrebno poznati tudi trenutni menjalni tečaj za valutni par oz. število enot domače valute potrebne za to, da kupimo eno enoto tuje valute. Dinamika menjalnega tečaja USD/EUR, ki jo bomo uporabili za prikaz vrednotenja in zaščite valutne opcije v letu 2012, je prikazana na sliki 15.



Slika 15: Graf dinamike menjalnega tečaja USD/EUR v letu 2012

Vse omenjene podatke za leto 2012, ki smo jih potrebovali za vrednotenje, smo dobili na spletnih straneh [20, 28, 12].

4.2. **Ocena volatilnosti menjalnega tečaja.** Najtežje pa je določiti volatilnost menjalnega tečaja. Za to obstaja ogromno metod, med katerimi smo izbrali najpreprostješo, historično metodo, kjer za določanje trenutne volatilnosti vzamemo volatilnost menjalnega tečaja v zadnjih nekaj mesecih – običajno vzamemo obdobje od 3 do 6 mesecev [2]. Pri tem moramo omeniti, da so v praksi podatki datumsko zelo neusklajeni zaradi praznikov, sobot in nedelj. Zato smo v primeru, da na določen dan ni bilo podatka, vzeli za vrednost menjalnega tečaja ali obrestnih mer kar zadnjo pred tem dnevom obstoječo vrednost menjalnega tečaja oz. obrestnih mer.

Ko imamo vse zgoraj omenjene podatke, lahko s historično metodo, kjer za določanje volatilnosti menjalnega tečaja na konkreten dan vzamemo volatilnost menjalnega tečaja v zadnjih 90 dneh, določimo σ.

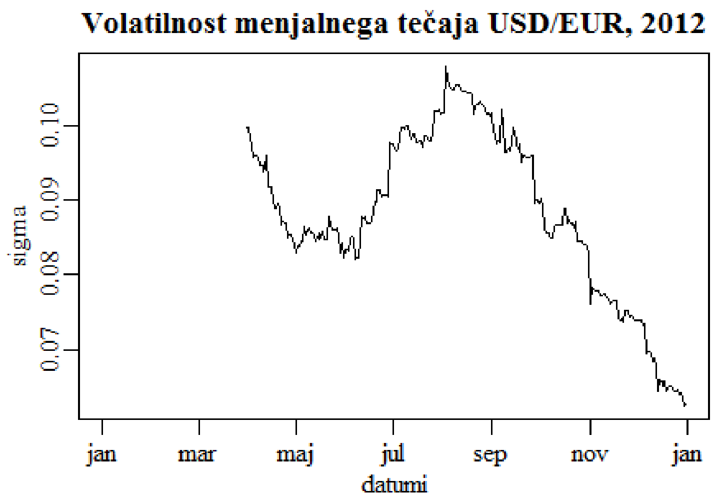
V naslednjem programu, s katerim bomo določili spreminjanje σ skozi obdobje, naj bo:

- `n` ... število dni začetnih podatkov, torej 366 (toliko znaša število dni v letu 2012)
- `menjalni.tecaj` ... vektor vrednosti menjalnih tecajev v letu 2012 (število komponent je torej prav 366)
- `Rd` ... vektor vrednosti donosnosti 3-mesečnih ameriških zakladnih menic v 2012
- `Rf` ... vektor vrednosti donosnosti 3-mesečnih nemških obveznic v 2012

Pri historični metodi najprej potrebujemo vektor logaritemskih donosov menjalnega tečaja za vsak dan v letu 2012. Označimo ga z `u`. Pri tem je prvi dan v letu 2012 donos menjalnega tečaja neznan. V nadaljevanju izračunamo še `s.vektor`, ki je vektor standardnih odklonov logaritemskih donosov menjalnega tečaja na dnevni ravni v zadnjih 90. dnevih. Da dobimo željen vektor volatilnosti menjalnih tečajev na letni ravni, `s.vektor` samo še pomnožimo s $\sqrt{366}$ [2]. Spodaj je prikazan še program.

```
u <- c(NA)
for (i in 1:(n-1)){
  u <- c(u,log(menjalni.tecaj[i+1]/menjalni.tecaj[i]))
}

dolzina <- 90
s.vektor <- rep(NA,dolzina)
for (i in 2:(n-dolzina+1)){

  s.vektor <- c(s.vektor,sd(u[i:(i+dolzina-1)]))
}

sigma <- s.vektor*366^0.5
```

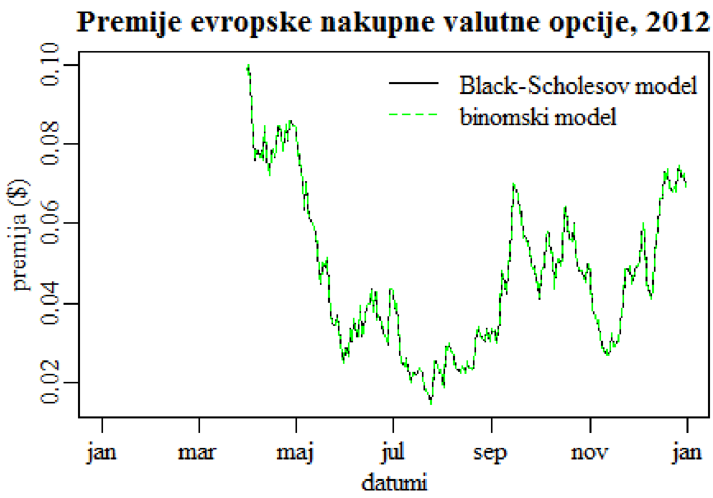
Dobljena volatilnost v letu 2012 je prikazana na sliki 16.



Slika 16: Graf dinamike volatilnosti menjalnega tečaja USD/EUR v letu 2012

4.3. **Časovna dinamika opcijske premije.** Valutno opcijo z začetnimi podatki za leto 2012 torej lahko vrednotimo vsak dan od 1. 4. 2012 do 31. 12. 2012. Prvih 90 dni namreč vrednotenje, če ne poznamo vrednosti menjalnega tečaja pred 1. 1. 2012, z zgoraj opisano metodo v konkretnem primeru ni mogoče. Sedaj, ko imamo vse potrebne podatke, lahko vrednotimo tako v Black-Scholesovem kot v binomskem modelu. V binomskem modelu vzamemo za število obdobij kar število dni do zapadlosti valutne opcije, saj jo vrednotimo enkrat dnevno. Zato bomo tedaj tudi posodabljali portfelje.

Slika 17 prikazuje spreminjanje vrednosti izbrane valutne opcije v Black-Scholesovem oz. binomskem modelu. Opazimo lahko, da v praksi vračata zelo podobne vrednosti valutne opcije.

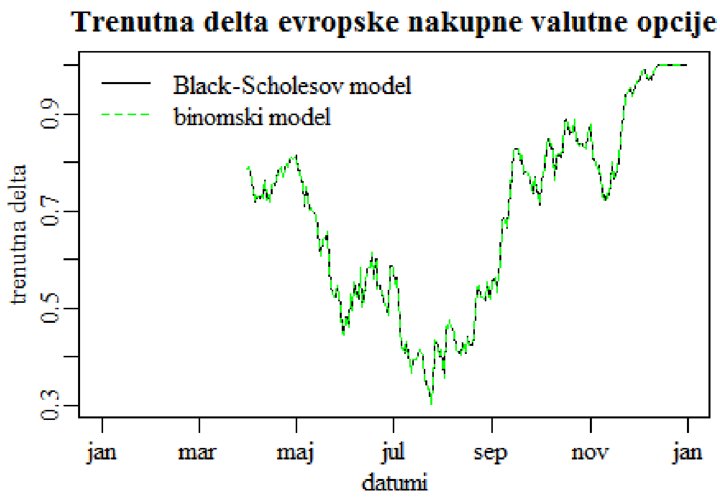


Slika 17: Graf dinamike vrednosti evropske nakupne valutne opcije z zapadlostjo 31. 12. 2012 v Black-Scholesovem in binomskem modelu v letu 2012

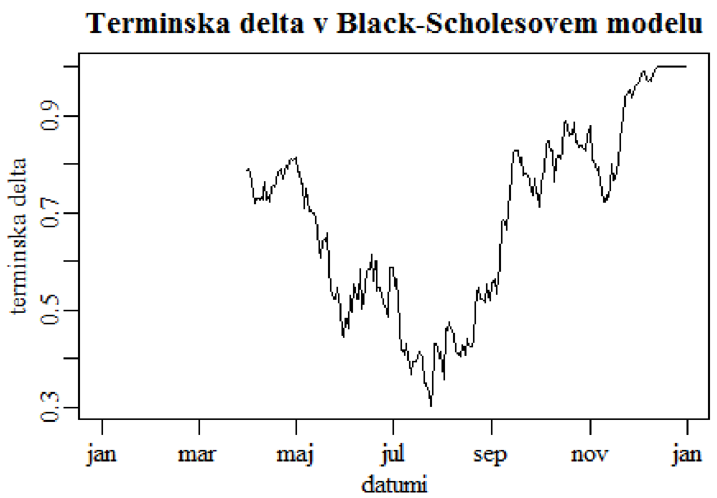
Vrednost valutne opcije konvergira h končnemu izplačilu, ko se čas približuje zapadlosti.

4.4. **Časovna dinamika opcijskega zavarovanja.** Podobno kot v podpoglavju 4.3 vrednotimo valutno opcijo, lahko določimo tudi zaščitni portfelj za valutno opcijo v realnem svetu. Seveda za prikaz izberemo identične podatke kot v podpoglavju 4.3. Ker pa bo zaradi valutne hierarhije premijska valuta domača valuta, nam ni potrebno računati prilagojenih verzij delt. Zato izračunamo le trenutno in terminsko delto v Black-Scholesovem modelu ter trenutno v binomskem modelu.

Sliki 18 oz. 19 prikazujeta spreminjanje vrednosti trenutne delte v Black-Scholesovem in binomskem modelu oz. vrednost terminske delte v Black-Scholesovem modelu na izbrano valutno opcijo. Vidimo, da so modeli dosledni in vračajo zelo podobne vrednosti. Dogaja pa se, da je vrednost delte večja od 1. To se zgodi zato, ker je netvegana konstantna nominalna obrestna mera pri zveznem obrestovanju za tujo valuto občasno nižja od 0 %.



Slika 18: Graf dinamike trenutne delte evropske nakupne valutne opcije v Black-Scholesovem in binomskem modelu v letu 2012



Slika 19: Graf dinamike terminske delte evropske nakupne valutne opcije v Black-Scholesovem modelu v letu 2012

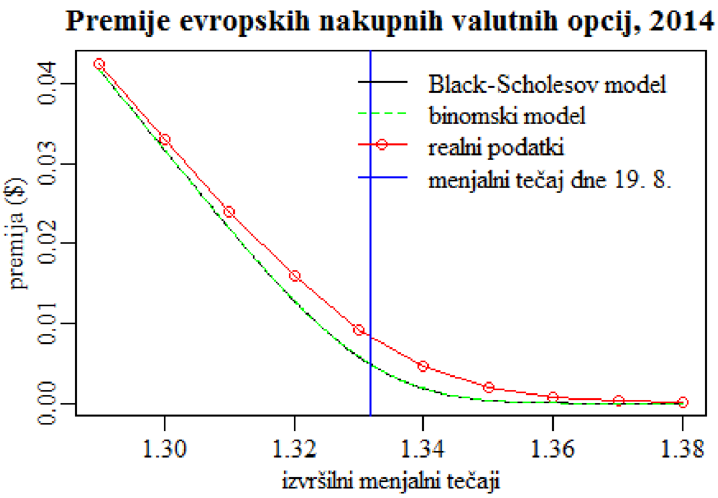
4.5. **Ujemanje modelskih in tržnih premij.** Učinkovitost teoretičnih modelov lahko preverimo le tako, da primerjamo vrednosti realnih valutnih opcij na trgu z za takšno valutno opcijo dobljenimi vrednostmi v teoretičnih modelih. Žal nismo nikjer dobili zgodovinskih podatkov o premijah kakršnihkoli valutnih opcij. Smo pa dobili aktualne podatke za vrednosti valutnih opcij dne 19. 8. 2014 na [10, 18]. Gre za evropske nakupne in prodajne valutne opcije, kjer je EUR tuja valuta, USD pa domača in hkrati premijska valuta zaradi valutne hierarhije. Njihova nominalna vsota naj bo za poenostavitev enaka 1 EUR, vse valutne opcije pa bodo zapadle dne 14. 9. 2014. Podatki, ki smo jih poleg tega potrebovali so:

- Vektor menjalnih tečajev, ki je potreben za določitev vrednosti in volatilnosti menjalnega tečaja na dan 19. 8. 2014.
- Donosnost 3-mesečnih ameriških zakladnih menic (0,03 %) in donosnost 3-mesečnih nemških obveznic (−0,052 %) na dan 19. 8. 2014.

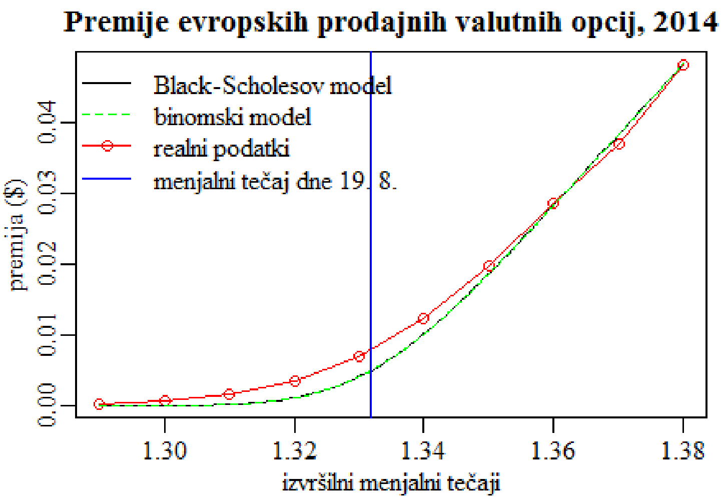
- Vektor izvršilnih menjalnih tečajev (zaporedne vrednosti števil z dvema decimalkama od 1,29 do 1,38).
- Vektorja realnih premij za nakupno oz. prodajno valutno opcijo pri ustreznem izvršilnem menjalnem tečaju.

Za netvegano konstantno nominalno obrestno mero pri zveznem obrestovanju za domačo valuto vzamemo donosnost 3-mesečnih ameriških zakladnih menic, za tujo pa donosnost 3-mesečnih nemških obveznic. Za določanje volatilnosti uporabimo enak postopek kot v podpoglavju 4.3.

Sliki 20 in 21 prikazujeta vrednosti evropskih nakupnih oz. prodajnih valutnih opcij v odvisnosti od izvršilnega menjalnega tečaja. Poleg tega kažeta še primerjavo med teoretičnimi vrednostmi, dobljenimi z Black-Scholesovim in binomskim modelom, ter tržnimi vrednostmi. Pri tem seveda velja, da sta grafa teoretičnih vrednosti evropskih valutnih opcij zvezna, kar pa seveda ne drži za realne podatke.



Slika 20: Primerjava tržnih in s teoretičnima modeloma določenih premij za evropsko nakupno valutno opcijo dne 19. 8. 2014



Slika 21: Primerjava tržnih in s teoretičnima modeloma določenih premij za evropsko prodajno valutno opcijo dne 19. 8. 2014

Na točnost oz. napake vrednotenja evropske valutne opcije vplivajo metoda določanja volatilnosti, izbor netveganih konstantnih nominalnih obrestnih merih pri zveznem obrestovanju za domačo in tujo valuto, kakovost dobljenih podatkov in pa tudi pomanjkljivosti v predpostavkah teoretičnih modelov, ki smo jih omenili v podpodpoglavju 2.6.1.

5. Zaključek

Valutne opcije so uveljavljeni izvedeni finančni instrumenti, valutni trgi pa so največji in najbolj likvidni trgi na svetu. Valutne opcije so vrsta splošne opcije – v delu smo jih razdelili glede na tip izvršitve, obliko izplačila in glede na višino izvršilnega in trenutnega menjalnega tečaja. Pri tovrstnih izvedenih finančnih instrumentih poznamo veliko opcijskih strategij; opisali smo medvedov, bikov in metuljev korak ter razkorak. V diplomskem delu smo se osredotočili na dva modela za vrednotenje valutnih opcij in zaščito. To sta zvezni Black-Scholesov model, kjer za vrednotenje uporabimo Garman-Kohlhagnovo formulo, ter njegova diskretizirana različica, binomski model, kjer za predstavo vrednotenja pogosto uporabimo binomsko drevo. Oba modela sta bila tudi implementirana v programskem jeziku R, prikazana je tudi konvergenca vrednosti premij za tri vrste valutnih opcij. Pri metodah zaščite sta najpomembnejša izraza grki in delta. V Black-Scholesovem modelu smo predstavili 4 tipe delte, v binomskem pa le trenutno delto. Za konec smo pripravili primerjavo med premijami, dobljenimi s teoretičnimi modeli, in realnimi premijami. Ugotovili smo, da je pri primerjavi prišlo do manjših odstopanj, deloma zaradi vprašljivih predpostavk modela, deloma pa so k napakam prispevali kakovost dobljenih podatkov za realne premije, metoda določanja volatilnosti ter izbor netveganih konstantnih nominalnih obrestnih merih pri zveznem obrestovanju za domačo in tujo valuto. Vseeno pa lahko glede na predstavljen zgled rečemo, da sta Black-Scholesov in binomski model pri vrednotenju valutnih opcij zelo natančna.

Literatura

[1] Scott Chasalow, *combinat: combinatorics utilities, R package version 0.0-8*, 2012.

[2] J. C. Hull, *Options, futures & other derivatives*, Prentice-Hall International, Inc., Upper Saddle River, 2000.

[3] J. J. Kung, *A Continuous-Time Model for Valuing ForeignExchange Options*, v: Abstract and Applied Analysis (Qun Lin), Hindawi, Taipei, 2013, 1-10.

[4] P. K. Medina, S. Merino, *Mathematical finance and probability: a discrete introduction*, Birkhäuser, Basel, 2003.

[5] D. Reiswichi in U. Wystup, *A Guide to FX Options Quoting Conventions*, The Journal of Derivatives **18** (2010) 58–68.

[6] S. Shamah, *A Currency Options Primer*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2004.

[7] U. Wystup, *Editorial*, [ogled 10. 10. 2013], dostopno na `https://mathfinance2.com/Newsletter/`.

[8] *Brownian Motion and Geometric Brownian Motion*, [ogled 11. 8. 2014], dostopno na `http://www.econ-pol.unisi.it/fm10/BMandGBMdoc.pdf`.

[9] *Currency option pricing II* , [ogled 4. 3. 2014], dostopno na `http://www.globalriskguard.com/resources/deriv/currency_option.pdf`.

[10] *Euro Currency Options Detail*, [ogled 9. 8. 2014], dostopno na `http://www.nasdaq.com/aspxcontent/optionsWC.aspx?symbol=%5eXDE&qm_page=78887&qm_symbol=%5eXDE`.

[11] *Euromoney Foreign Exchange survey*, [ogled 14. 10. 2013], dostopno na `http://www.euromoney.com/poll/3301/PollsAndAwards/Foreign-Exchange.html`.

[12] *EUR/USD - Euro US Dollar*, [ogled 31. 7. 2014], dostopno na `http://www.investing.com/currencies/eur-usd`.

[13] *Exercise Set 3: Binomial-Tree Option Pricing*, [ogled 12. 8. 2014], dostopno na `https://wwz.unibas.ch/fileadmin/wwz/redaktion/cofi/A._Lehre/F._FS11/Quantitative_Security_Analysis/exercise%20set%203_final.pdf`.

[14] *Exotic option*, [ogled 27. 7. 2014], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_option`.

[15] *Extreme spread options*, [ogled 3. 3. 2014], dostopno na `http://www.global-derivatives.com/index.php/component/content/article/13-options-database/35-extreme-spread-options`.

[16] *Foreign exchange market*, [ogled 12. 10. 2013], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Foreign_exchange_market#Option`.

[17] *Forward start option*, [ogled 3. 11. 2013], dostopno na `http://www.sdgm.com/Support/Glossary.aspx?term=Forward%20start%20option`.

[18] *FX Options Product Specifications*, [ogled 9. 8. 2014], dostopno na `http://www.nasdaqtrader.com/micro.aspx?id=phlxwcoproductspecs#eu`.

[19] *Geometric Brownian motion*, [ogled 11. 8. 2014], dostopno na `http://www.columbia.edu/~ks20/FE-Notes/4700-07-Notes-GBM.pdf`.

[20] *Germany 3-Month Bond Yield*, [ogled 31. 7. 2014], dostopno na `http://www.investing.com/rates-bonds/germany-3-month-bond-yield-historical-data`.

[21] *Greeks (finance)*, [ogled 2. 3. 2014], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Greeks_(finance)`.

[22] *Limitations of the Black-Scholes Model*, [ogled 12. 8. 2014], dostopno na `http://www.math.unl.edu/~sdunbar1/MathematicalFinance/Lessons/BlackScholes/Limitations/limitations.xml`.

[23] *Model Cox - Ross - Rubinstein (binomski model)*, [ogled 29. 7. 2014], dostopno na `http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/12025/mod_resource/content/4/binomski_13maj13.pdf`.

[24] *Stochastic Processes and Advanced Mathematical Finance*, [ogled 28. 7. 2014], dostopno na `http://www.math.unl.edu/~sdunbar1/MathematicalFinance/Lessons/BrownianMotion/Definition/definition.pdf`.

[25] *The Black-Scholes European Call Option Formula Corrected Using the Gram-Charlier Expansion*, [ogled 12. 8. 2014], dostopno na `http://demonstrations.wolfram.com/TheBlackScholesEuropeanCallOptionFormulaCorrectedUsingTheGra/`.

[26] *Triennial Central Bank Survey, Foreign exchange turnover in April 2013: preliminary global results*, verzija september 2013, [ogled 14. 10. 2013], dostopno na `http://www.bis.org/publ/rpfx13fx.pdf`.

[27] *Triennial Central Bank Survey of foreign exchange turnover in April 2013 - preliminary results released by the BIS*, [ogled 12. 10. 2013], dostopno na `http://www.bis.org/press/p130905.htm`.

[28] *U.S. 3-Month Bond Yield*, [ogled 31. 7. 2014], dostopno na `http://www.investing.com/rates-bonds/u.s.-3-month-bond-yield`.

[29] *Vega neutral*, [ogled 3. 3. 2014], dostopno na `http://www.investopedia.com/terms/v/vega-neutral.asp`.