UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Maja Horvatič

Implicirana binomska drevesa

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir

Ljubljana, 2014

Kazalo

Implicirana binomska drevesa

Povzetek

Moja diplomska naloga je napisana na podlagi članka Marka Rubinsteina iz leta 1994, Implicirana binomska drevesa. Raziskava izhaja iz Black-Scholesovega modela, ki je primeren za vrednotenje več vrst opcij, vendar pa v praksi prihaja do velikih razhajanj med vrednostjo opcije, izračunano po Black-Scholesovem modelu, in tržno ceno opcije. Rubinstein trdi, da Black-Scholesova formula postaja vedno bolj nezanesljiva ravno na trgih, kjer naj bi bila najbolj natančna. Zato v svojem članku razvija novo metodo za izpeljavo do tveganja nevtralnih verjetnosti iz sočasno opazovanih cen evropskih opcij. Te verjetnosti se nato uporabijo za izpeljavo rekombiniranega binomskega drevesa, ki je v skladu s temi verjetnostmi (in torej skladen z vsemi opazovanimi cenami opcij). Implicirana drevesa so v resnici modifikacija binomskega modela Cox-Ross-Rubinstein.

Implied binomial trees

Abstract

My thesis is based on an article by Mark Rubinstein, Implied binomial trees, from 1994. Despite its success, the Black-Scholes formula has become increasingly unreliable over time in the very markets where one would expect it to be most accurate. This paper develops a new method for inferring risk-neutral probabilities from the simultaneously observed prices of European options. These probabilities are then used to infer a unique fully specified recombining binomial tree that is consistent with these probabilities (and hence consistent with all the observed option prices). Implied binomial trees are in fact modifications of the original Cox-Ross-Rubinstein binomial trees.

Math. Subj. Class. (2010): 91G20

Ključne besede: Black-Scholesov model, nestanovitnost, opcije, rekombinirano binomsko drevo

Keywords: Black-Scholes model, volatiliy, options, recombining binomial tree

1. Black-Scholesov model in njegovo testiranje na S&P 500 indeksnih opcijah

Opcija je pogodba med nosilcem opcije, kupcem, in izdajateljem osnovnega finančnega instrumenta, prodajalcem, po določeni izvršilni ceni (K). Za sklenitev opcije mora kupec prodajalcu plačati premijo. Sprejem odločitve za nakup ali prodajo opcije imenujemo izvršitev opcije. Glavna tipa opcij sta evropski, ki daje pravico izvršitve ob zapadlosti, in ameriški, ki daje pravico izvršitve kadarkoli do zapadlosti.

Opcija spada med izvedene finančne instrumente; to so orodja, izpeljana iz osnovnih instrumentov, kot na primer delnice ali obveznice. Če opcija daje nosilcu pravico nakupa osnovnega finančnega istrumenta, jo imenujemo nakupna opcija; če pa daje pravico prodaje, ji pravimo prodajna opcija.

Black-Scholesov model vrednotenja opcij, ki sta ga leta 1973 razvila Fischer Black in Myron Scholes, je matematični model na finančnem trgu, ki vsebuje določene izvedene finančne instrumente. Model je zgrajen na naslednjih predpostavkah:

- izpeljan je za evropsko različico opcije;
- cena delnice sledi geometrijskemu Brownovemu gibanju s konstantno nestanovitnostjo donosa delnice;
- delnice ne izplačujejo dividend;
- ni arbitražnih priložnosti;
- trgovanje z delnicami se izvaja v zveznem času;
- ni transakcijskih stroškov, provizij in davkov;
- kratkoročna obrestna mera je znana, konstantna in netvegana.

Predpostavkam Black-Scholesovega modela najbolj ustrezajo S&P 500 indeksne opcije. S&P 500 je borzni indeks, ki vključuje delnice 500 korporacij, v glavnem iz ZDA. Z njim se največ trguje in zanj velja, da najbolje odraža dogajanje v realni ekonomiji. Opcije so evropskega tipa.

V letih 1976-1978 je Black-Scholesova formula dala razmeroma točne rezultate. Minimalna napoved Black-Scholesove formule je, da bi morale imeti vse opcije z enakim osnovnim premoženjem in časom zapadlosti, vendar različnimi izvršilnimi cenami, enako nestanovitnost (σ). Black-Scholesov model pri izračunu teoretične vrednosti opcije predvideva konstantno nestanovitnost osnovnega finančnega instrumenta, izračunano na podlagi predhodnega nihanja vrednosti osnovnega finančnega instrumenta, ki pa je v praksi daleč od resnice. Alternativni pristop k ugotavljanju nestanovitnosti osnovnega finančnega instrumenta vključuje implicirano nestanovitnost.

Implicirana nestanovitnost v finančni matematiki pomeni vrednost nestanovitnosti izvedenega instrumenta, ki ob vstavitvi v model vrednotenja opcij (npr. Black-Scholes) vrne teoretično vrednost enako trenutni tržni ceni opcije. Medtem ko je Rubinstein pokazal, da so odstopanja glede napovedi Black-Scholesa statistično značilna, ni bilo dokazanih ekonomskih razlogov.

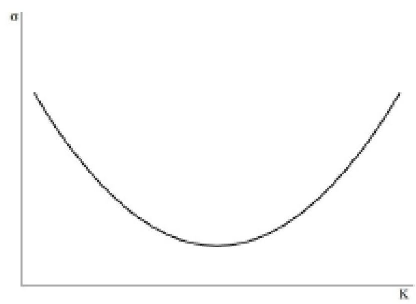
Za meritev ekonomske značilnosti odstopanj je Rubinstein uporabil test, ki ga imenujemo minimax statistika. Ideja tega testa je določiti spodnjo mejo uspešnosti formule brez ocenjevanja nestanovitnosti, bodisi implicirane ali statistične. Primerjamo dve opciji s prej omenjenimi lastnostmi, torej z enakim osnovnim premoženjem in časom dospetja ter različnimi izvršilnimi cenami. Za dano nestanovitnost za vsako opcijo izračunamo absolutno razliko med njeno tržno ceno in pripadajočo Black-Scholesovo vrednostjo, ki temelji na domnevni nestanovitnosti (to imenujemo dolarska napaka).

Ponavljamo proces z menjavo domnevnih nestanovitnosti in dobimo maksimalno dolarsko napako, tj. največjo razliko med nestanovitnostmi. Minimax statistika je minimum teh napak. Lahko rečemo, da ima Black-Scholesova formula samo s primerjavo teh dveh opcij za eno od njiju vsaj dolarsko napako, ne glede na nestanovitnost. To imenujemo minimax dolarska napaka.

Lahko bi tudi merili odstotne napake na nestanovitnosti, ki izenačuje absolutne vrednosti razmerja med dolarsko napako in pripadajočo opcijsko tržno ceno. To imenujemo minimax odstotna napaka.

Med 1976-1978 je bila izmerjena minimax odstotna napaka v višini 2 % - to bi lahko označili kot dovolj nizko napako za ustrezno uporabo Black-Scholesove formule na trgu opcij. Po letu 1986 pa sta se obe napaki začeli bliskovito povečevati.

Težnja grafa implicirane nestanovitnosti kot funkcije izvršilne cene za drugače identične opcije, da odstopa od vodoravne premice, je postala znana pod imenom "nasmešek", ki je prikazan na spodnji sliki. Povečana zaskrbljenost glede nasmeškov na trgih z opcijami nakazuje, da se bomo s podobnimi težavami spopadali z Black-Scholesovo formulo pri S&P 500 indeksnimi opcijami.



Drugi način testiranja je, da uporabimo sicer identične opcije, vendar z različnimi časi dospetja. S tem lahko pridobimo pomembne informacije, ki pa niso nujno v pomoč pri testiranju rahlo posplošene Black-Scholesove formule, ki dovoljuje časovno odvisne implicirane nestanovitnosti.

Še en način pa je, da primerjamo implicirane nestanovitnosti merjene danes z impliciranimi nestanovitnostmi merjenimi jutri. Če Black-Scholesova formula s konstantno nestanovitnostjo drži, bi morale biti te implicirane nestanovitnosti enake. V skladu s tem so v članku Davida Shimka bile izmerjene razlike med impliciranimi nestanovitnostmi na S&P 100 indeksnih opcijah (podskupina S&P 500) in sočasnim donosom indeksa - korelacija, ki bi morala biti glede na Black-Scholesovo formulo enaka 0.

Povedano ponuja možno rešitev: Black-Scholesova formula drži, vendar je trg z opcijami neučinkovit.

Black-Scholesov model s konstantno nestanovitnostjo (razlikuje se od formule, ki jo je mogoče upravičiti na podlagi drugih razlogov) je neustrezen v kateri koli od naslednjih 4 kršitev njegovih predpostavk:

(1) Lokalna nestanovitnost osnovnega premoženja, netvegana obrestna mera ali stopnja izplačila sredstev je funkcija cene ali časa osnovnega premoženja;
(2) Lokalna nestanovitnost osnovnega premoženja, netvegana obrestna mera ali stopnja izplačila sredstev je funkcija predhodne poti cene osnovnega premoženja;
(3) Lokalna nestanovitnost osnovnega premoženja, netvegana obrestna mera ali stopnja izplačila sredstev je funkcija lokalne spremenljivke, ki ni hkrati cena osnovnega premoženja ali predhodna pot cene osnovnega premoženja; ali cena osnovnega premoženja, obrestna mera ali mera izplačila lahko ima skoke na ravni med zaporednimi priložnostmi za trgovanje;
(4) Trg ima nerealne predpostavke, kot na primer stroške transakcij, omejitve pri kratki prodaji, davke, nekonkurenčno oblikovanje cen, itd.

V tem kontekstu bodo v nadaljevanju predstavljeni računsko učinkoviti načini vrednotenja opcij tudi v prisotnosti kršitev (1), (2) in (3) ter računsko učinkovite načine za zaščito opcij tudi s kršitvijo (1). Začnemo s parametrizacijo fukcije, ki povezuje lokalno nestanovitnost s ceno osnovnega premoženja. To funkcijo dobimo iz modela in si to lahko predstavljamo kot poskus izčrpanja potenciala za kršitev (1) za razlago opazovanih cen opcij.

2. Vrednotenje in zaščita opcij

Za vrednotenje in zaščito opcij uporabimo pristop s 3 koraki:

(1) Ocenimo končne do tveganja nevtralne verjetnosti donosa osnovnega premoženja. V tem primeru jih bomo dobili iz netvegane obrestne mere, sočasnih tržnih cen osnovnega premoženja in pripadajočih evropskih opcij z drugačnimi izvršilnimi cenami.
(2) Iz do tveganja nevtralnih verjetnosti pridemo do enoličnega natančno določenega slučajnega procesa cene osnovnega sredstva.
(3) Nato lahko s pomočjo tega procesa izračunamo vrednost in zaščitne parametre katerega koli izvedenega finančnega instrumenta, ki zapade pred ali hkrati z evropskimi opcijami.

2.1. Implicirane končne do tveganja nevtralne verjetnosti.

Do tveganja nevtralne verjetnosti lahko izpeljemo na naslednje 3 načine:

2.1.1. *Longstaffova metoda (prilagojena).* Ta metoda opisuje, kako dobimo lokalno pogojene cene (ali njim sorodne do tveganja nevtralne verjetnosti) iz cen opcij.

2.1.2. *Shimkova metoda.* Breeden in Litzenberger sta pokazala, da če kontinuum evropskih opcij z enakim časom dospetja obstaja na enem osnovnem sredstvu, ki zajema izvršilne cene od 0 do neskončno, lahko porazdelitev do tveganja nevtralnih verjetnosti za tisti čas dospetja dobimo z izračunom drugega odvoda cene opcije glede na njeno izvršilno ceno. David Shimko je podal način, kako implementirati to idejo. Uporabil je Black-Scholesovo formulo, vendar ni zahteval njene točnosti.

2.1.3. *Optimizacijska metoda.* Pri tej metodi najprej predhodno ugibamo o do tveganja nevtralnih verjetnostih. V našem primeru bo to rezultat konstrukcije standardnega binomskega drevesa z n koraki z uporabo povprečja Black-Scholesovih impliciranih nestanovitnosti dveh nakupnih opcij blizu meje.

Označimo:

- cene osnovnega premoženja v končnih vozliščih od najmanše do največje z S_j za $j = 0, \ldots, n$
- do tveganja nevtralne verjetnosti končnih vozlišč s P'_j, kjer je $\sum_j P'_j = 1$. Na primer, če je p' do tveganja nevtralna verjetnost premika gor, sledi:

$$P'_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} p'^j (1-p')^{n-j}$$

- r ... netvegan donos obresti v vsakem obdobju
- d ... donos izplačila osnovnega premoženja
- S^b (oz. S^a) ... trenutna povpraševalna (oz. ponudbena) cena osnovnega premoženja
- C_i^b (oz. C_i^a) ... povpraševalna (oz. ponudbena) cena, sočasno opazovana na evropskih nakupnih opcijah $i = 1, \ldots, m$ z dospetjem na koncu drevesa

Izberemo $n >> m$, pri čemer je n število verjetnosti, m pa število opcij.

Implicirane posteriorne do tveganja nevtralne verjetnosti P_j so potem rešitev naslednjega kvadratičnega programa:

$$\min \sum_j (P_j - P'_j)^2$$

$$\text{pri pogojih } \sum_j P_j = 1 \text{ in } P_j \geq 0 \text{ za } j = 0, \ldots, n$$

$$S^b \leq S \leq S^a \text{ z } S = \frac{d^n \sum_j P_j S_j}{r^n}$$

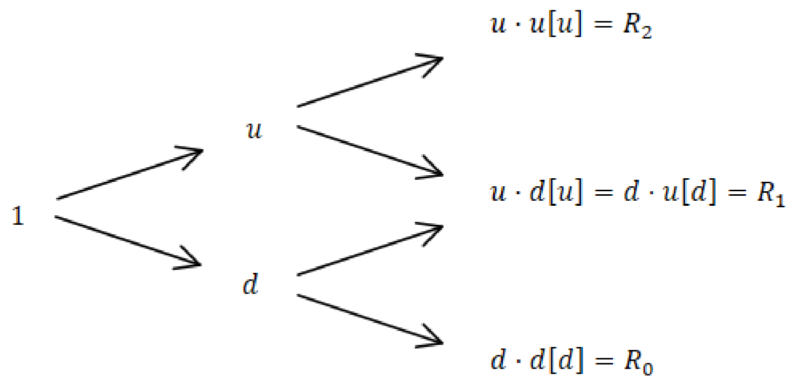
$$C_i^b \leq C_i \leq C_i^a \text{ s } C_i = \frac{\sum_j P_j \max[0, S_j - K_j]}{r^n} \text{ za } i = 1, \ldots, m$$

Katero koli metodo uporabimo, predpostavljamo, da imamo zadovoljivo ocenjene do tveganja nevtralne verjetnosti P_j, povezane z donosi sredstev $R_i = \frac{S_j}{S}$.

2.2. **Impliciran slučajni proces.** Za ponazoritev vzemimo do tveganja nevtralno verjetnostno porazdelitev v specifičnem času v prihodnosti. Na primer, predpostavimo, da imamo 3 možne končne donose R_0, R_1, R_2, kjer je $0 \leq R_0 \leq R_1 \leq R_2$. Vsak od teh donosov ima znane do tveganja nevtralne verjetnosti P_0, P_1, P_2, kjer so vse verjetnosti pozitivne in je njihova vsota enaka 1.

Predpostavka 1: Donos osnovnega premoženja sledi binomskemu procesu. Za naš primer imamo $n = 2$ binomsko drevo:

(1)

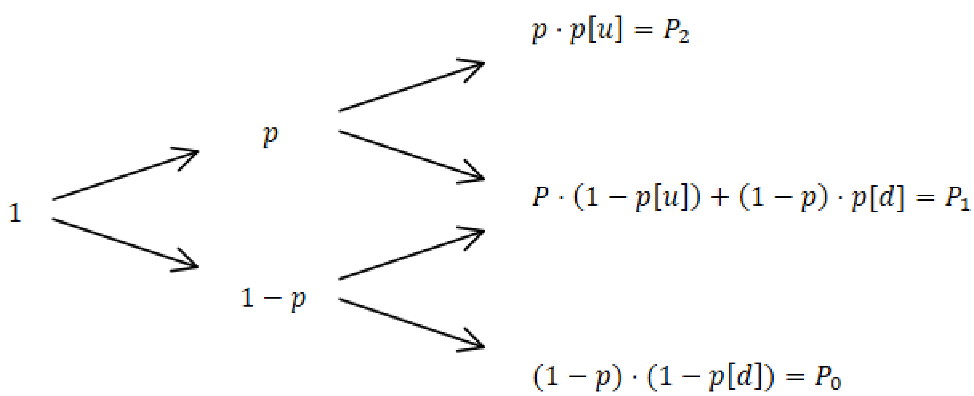


Predpostavka 2: Binomsko drevo je rekombinirano. To pomeni, da vsaka pot, ki vsebuje enako število premikov gor in dol, vodi k istemu donosu vozlišča, ne glede na zaporedje premikov.

Predpostavka 3: Vrednosti končnih vozlišč so razporejene od najmanjše do največje.

Tudi povezane z vsakim premikom so do tveganja nevtralne verjetnosti, kjer je $p[\cdot]$ verjetnost premika gor (oz. $1 - p[\cdot]$ verjetnost premika dol) po prejšnjem zaporedju realiziranih premikov, navedenih v oklepajih:

(2)



Ker so verjetnosti premikov $p[\cdot]$ do tveganja nevtralne, sledi:

$$r[\cdot] = ((1 - p[\cdot])d[\cdot]) + (p[\cdot]u[\cdot])$$

Tukaj je $r[\cdot] = 1+$ netvegana obrestna mera s pripadajočim binomskim korakom, ki je v tej točki lahko odvisen od prejšnjih kombinacij realiziranih premikov.

Zato mora biti vsaka verjetnost izražena z njo povezanimi premiki gor ali dol kot sledi:

$$p[\cdot] = \frac{r[\cdot] - d[\cdot]}{u[\cdot] - d[\cdot]}$$

Za naš primer:

$$\begin{aligned} p &= \frac{r - d}{u - d} \\ p[d] &= \frac{r[d] - d[d]}{u[d] - d[d]} \\ p[u] &= \frac{r[u] - d[u]}{u[u] - d[u]} \end{aligned} \tag{3}$$

Izplačila: Potem lahko uporabimo donose R_0, R_1, R_2 brez izplačil in ponovno interpretiramo spremenljivko $r[\cdot]$ kot razmerje $\frac{\text{1+netvegana obrestna mera}}{\text{1+stopnja izplačila na pripadajoč binomski korak}}$.

Naš cilj je izpeljati celotno drevo iz končnih donosov vozlišč (R_0, R_1, R_2) in končnih do tveganja nevtralnih vozlišč (P_0, P_1, P_2). Pri tem moramo določiti 12 neznank:

$$d, u, r, p, d[d], u[d], r[d], p[d], d[u], u[u], r[u] \text{ in } p[u]$$

iz 10 enačb; 4 iz enačbe (1), 3 iz (2) in 3 iz (3). Ker je več neznank kot enačb, dodamo še naslednji pogoj:

Predpostavka 4: Obrestna mera je konstantna (na enoto časa). $r = r[d] = r[u]$

Sedaj imamo 10 enačb z 10 neznankami. Dodamo še naslednji pogoj, da bodo enačbe (2) neodvisne ena od druge:

Predpostavka 5: Vse poti, ki vodijo do enakega končnega vozlišča, imajo enake do tveganja nevtralne verjetnosti.

Zdaj lahko napišemo naslednje enačbe:

$$p \cdot p[u] = P_2 \equiv P_{uu}$$

$$(1-p) \cdot p[d] = \frac{P_1}{2} \equiv P_{du} \text{ in } p \cdot (1 - p[u]) = \frac{P_1}{2} \equiv P_{ud}$$

$$(1-p) \cdot (1 - p[d]) = P_0 \equiv P_{dd}$$

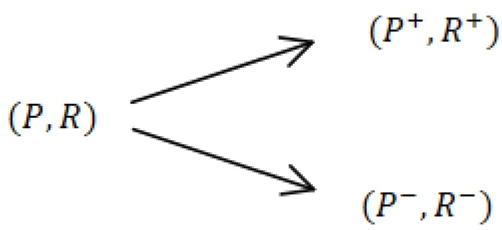
Spremenljivke P_{dd}, $P_{du} = P_{ud}$, P_{uu} imenujemo verjetnosti poti. To so verjetnosti, povezane s posameznimi potmi skozi drevo.

S tem zaključimo specifikacijo modela. Za razliko od standardnega modela u in d nista konstantna v celotnem drevesu. Poleg tega ta model dovoljuje končne verjetnosti poljubnih vrednosti in zato predstavlja pomembno posplošitev.

3. Rešitev

Zdaj lahko implicirano binomsko drevo enostavno rešimo rekurzivno nazaj od listov drevesa.

Razvijemo splošno metodo, ki jo zaradi enostavnosti imenujemo kar Ena-Dva-Tri. Spremenljivke P predstavljajo verjetnosti poti in R vrednosti vozlišč. Začnemo pri koncu drevesa in izračunamo (P^+, R^+) in (P^-, R^-), zdaj pa hočemo ugotoviti predhodnje vozlišče (P, R):



Vsakemu vozlišču dodamo njegovo vrednost R_j in verjetnost P_j. Zdaj vzamemo vsako končno verjetnost vozlišča in jo delimo s številom poti do tega vozlišča, da dobimo verjetnost poti, ki je splošna:

$$\frac{P_j}{\frac{n!}{j!(n-j)!}}$$

Definiramo tudi donos obresti r kot n-ti koren vsote $P_j R_j$, tako da:

$$r^n = \sum_j P_j R_j \text{ (z izplačili: } \left(\frac{r}{d}\right)^n = \sum_j P_j R_j)$$

Postopek Ena-Dva-Tri:

(1) Prvi korak pove, da je notranja verjetnost poti enaka vsoti poznejše verjetnosti poti, ki lahko iz nje izhaja. $P = P^- + P^+$

(2) Drugi korak je enostavno verjetnostno pravilo, ki razporedi skupno verjetnost po vseh premikih gor in dol.

$$p = \frac{P^+}{P} \text{ in } (1-p) = \frac{P^-}{P}$$

(3) Tretji korak: uporabimo do tveganja nevtralne verjetnosti premikov za določitev vrednosti notranjega vozlišča R, da je enaka diskontirani vrednosti njene pričakovane do tveganja nevtralne vrednosti na koncu premika.

$$R = \frac{(1-p) \cdot R^- + p \cdot R^+}{r}$$

Postopek iskanja rešitve vzame le nekoliko več časa kot za standardno binomsko drevo z danimi konstantnimi velikostmi in verjetnostmi premikov.

4. Zgled

V tem poglavju bodo med reševanjem primera implementirane prejšnje ugotovitve. Na podlagi izračunov bomo konstruirali implicirano binomsko drevo. Imamo podane naslednje podatke:

- $n = 3$, $h = 0,167$, $r = 1,017$, $d = 1,008$
- $R_0 = 0,7827$, $R_1 = 0,9216$, $R_2 = 1,0851$, $R_3 = 1,2776$
- $P_0 = 0,1$, $P_1 = 0,4$, $P_2 = 0,3$, $P_3 = 0,2$

Najprej izračunamo **verjetnosti poti**; sprva izračunamo delne rezultate, ki jih dobimo tako, da verjetnosti delimo s številom poti po prejšnji formuli:

- $p_{uuu} = \frac{P_3}{1} = 0,2$
- $p_{uud} = p_{udu} = p_{duu} = \frac{P_2}{3} = 0,1$
- $p_{udd} = p_{dud} = p_{ddu} = \frac{P_1}{3} = 0,133$
- $p_{ddd} = \frac{P_0}{1} = 0,1$

Naslednji izračuni so preprost seštevek zgornjih verjetnosti:

- $p_{uu} = p_{uud} + p_{uuu} = 0,3$
- $p_{ud} = p_{du} = p_{udd} + p_{udu} = p_{dud} + p_{duu} = 0,133 + 0,1 = 0,233$
- $p_{dd} = p_{ddd} + p_{ddu} = 0,1 + 0,133 = 0,233$

In na enak način izračunamo še:

- $p_u = p_{ud} + p_{uu} = 0,533$
- $p_d = 0,467$

p_d zaokrožimo navzgor zaradi pogoja: $p = p_d + p_u = 0,467 + 0,533 = 1$.

Poračunamo še **verjetnosti premikov**:

- $p[uu] = \frac{p_{uuu}}{p_{uu}} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = 0,667$
- $p[ud] = p[du] = \frac{p_{uud}}{p_{ud}} = \frac{0{,}1}{0{,}233} = 0,429$
- $p[dd] = \frac{p_{ddu}}{p_{dd}} = 0,571$
- $p[u] = \frac{p_{uu}}{p_u} = 0,563$
- $p[d] = \frac{p_{du}}{p_d} = 0,5$
- $p = \frac{p_u}{p} = 0,533$

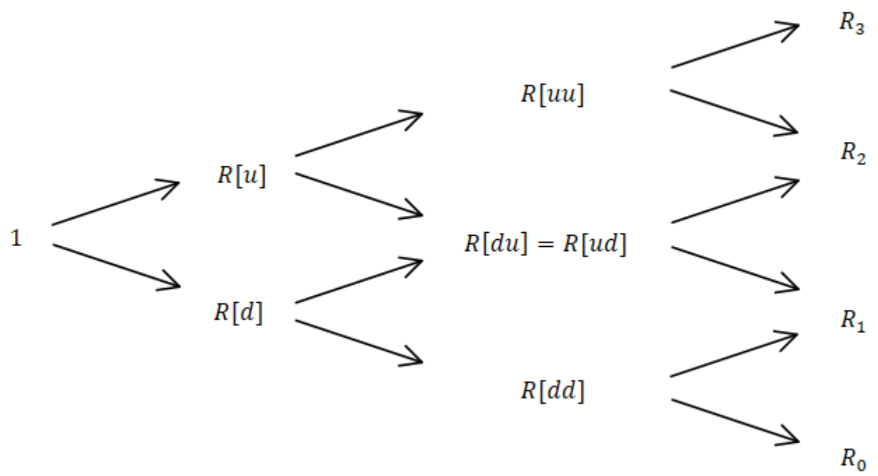
Donos obresti/izplačila:

$$\frac{r}{d} = (P_0R_0 + P_1R_1 + P_2R_2 + P_3R_3)^{\frac{1}{n}} = (0,1 \cdot 0,7827 + \ldots + 0,2776 \cdot 0,2)^{\frac{1}{3}} = 1,0089$$

Notranje vrednosti vozlišč:

- $R[uu] = \frac{(1-p[uu])R_2 + p[uu]R_3}{\frac{r}{d}} = 1,2023$
- $R[ud] = \frac{(1-p[ud])R_1 + p[ud]R_2}{\frac{r}{d}} = 0,9826$
- $R[du] = 0,9826$
- $R[dd] = 0,8542$
- $R[u] = \frac{(1-p[u])R[ud] + p[u]R[uu]}{\frac{r}{d}} = 1,0961$
- $R[d] = 0,9100$
- $R = \frac{(1-p)R[d] + p \cdot R[u]}{\frac{r}{d}} = 1$

Pripadajoče drevo:

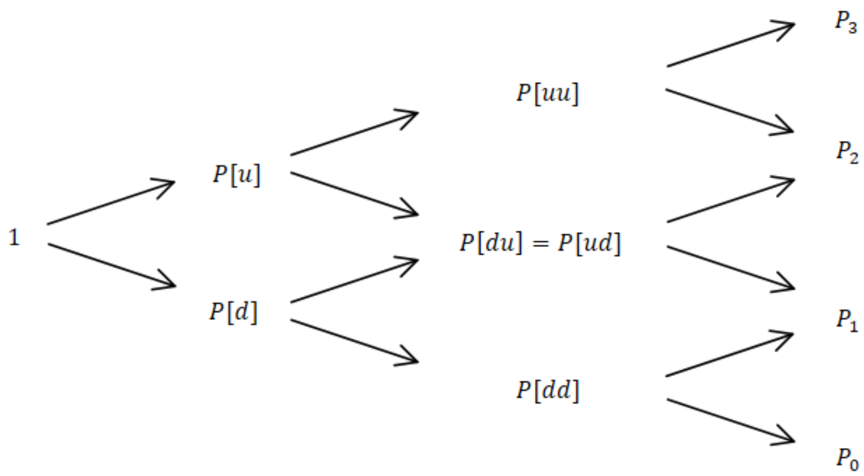


Verjetnosti notranjih vozlišč:

- $P[uu] = p_{uud} + p_{uuu} = 0,1 + 0,2 = 0,3$
- $P[ud] = P[du] = p_{udd} + p_{udu} + p_{dud} + p_{duu} = 0,467$
- $P[dd] = p_{ddd} + p_{ddu} = 0,233$

- $P[u] = p_{uu} + p_{ud} = 0,533$
- $P[uu] = p_{du} + p_{dd} = 0,467$

Pripadajoče drevo:



Velikosti premikov:

- $u[uu] = \frac{R_3}{R[uu]} = 1,0626$
- $u[ud] = u[du] = \frac{R_2}{R[ud]} = 1,1043$
- $d[uu] = \frac{R_2}{R[uu]} = 0,9025$
- $u[dd] = \frac{R_1}{R[dd]} = 1,0789$
- $d[du] = d[ud] = \frac{R_1}{R[du]} = 0,9379$
- $d[dd] = \frac{R_0}{R[dd]} = 0,9163$
- $u[u] = \frac{R[uu]}{R[u]} = 1,0969$
- $u[d] = \frac{R[du]}{R[d]} = 1,0798$
- $d[u] = \frac{R[ud]}{R[u]} = 0,8965$
- $d[d] = \frac{R[dd]}{R[d]} = 0,9387$
- $u = \frac{R[u]}{R} = 1,0961$
- $d = \frac{R[d]}{R} = 0,9100$

5. Razširitve

Kot je bilo že prej omenjeno, lahko predpostavki 4 in 5 popolnoma opustimo, če na nek način vemo, kako $1 + r$ varira z donosom osnovnega premoženja in časom ter kako so individualne končne do tveganja nevtralne verjetnosti P_j za $j = 0, \ldots, n$ razdeljene med različne poti, ki vodijo do enakega končnega vozlišča.

5.1. Obrestne mere, odvisne od vozlišč.

V nekaterih situacijah bi lahko izpeljali časovno odvisnost $r[\cdot]$ iz terminskih obrestnih mer impliciranih v trenutnih cenah netveganih obveznic z različnimi časi dospetja. Če bi bili na primer B_1 in B_2 trenutni ceni brezkuponskih obveznic, ki prinašata 1\$ na koncu korakov 1 in 2, bi potem lahko nastavili $r = \frac{1}{B_1}$ in $r[d] = r[u] = \frac{B_1}{B_2}$. Veliko težje je videti, kje bi lahko dobili zanesljive informacije o odvisnosti $r[\cdot]$ iz kombinacije predhodnjih potez - tj., upravičiti s sklepanjem iz cen vrednostnih papirjev, kjer $r[d] \neq r[u]$.

Denimo, da interpretiramo $r[\cdot]$ kot $\frac{1+\text{obrestna mera}}{1+\text{stopnja izplačila osnovnega premoženja}}$. To nam daje možnost enostavne vključitve v drevo z minimalnim dodatnim računanjem, s stopnjo izplačila, ki je lahko zelo splošna funkcija sočasnega donosa osnovnega premoženja in časa, če je ta funkcija eksogeno določena.

Vpeljava dividend v standardni binomski model s prilagoditvijo do tveganja nevtralnih verjetnosti premikov lahko pripelje do napačnih rezultatov, ko imajo dividende visoko vrednost ali so datumsko odvisne. Na primer, za nekatere skupne delnice s četrtletnimi dividendami bi lahko poskusili vključiti učinek dividend z računanjem verjetnosti premikov kot $p[\cdot] = \frac{\frac{r}{d[\cdot]} - d}{u-d}$. Vendar pa je za natančna drevesa z velikim številom premikov z dovolj velikim in diskretnim $d[\cdot]$ precej enostavno za $\frac{r}{d[\cdot]} < d$ z nekaj premiki dobiti negativne in nesmiselne "verjetnosti". Na srečo pa, kot je pokazal Bruno Depire, to ni problem z impliciranim drevesom, konstruiranim tukaj, ker se bodo velikosti premikov $d[\cdot]$ in $u[\cdot]$ samodejno prilagodile v rekurzivnem postopku, da se zagotovi veljavnost $d[\cdot] < \frac{r}{d[\cdot]} < u[\cdot]$ v vsakem premiku v drevesu.

Torej, če vemo, kako sta $r[\cdot]$ in $d[\cdot]$ odvisna od osnovnega premoženja in časa, lahko uporabimo te obrestne mere za konstrukcijo našega drevesa. Vendar nismo popolnoma svobodni pri njihovi izbiri, saj morajo biti zaradi izogibanja arbitražnih priložnosti $1+$obrestne mere (po možnosti deljeno z $1+$stopnje izplačil) posamično pozitivni in skupaj izpolnjujejo:

$$1 = P_{dd}\left(\frac{R_0}{r \cdot r[d]}\right) + P_{du}\left(\frac{R_1}{r \cdot r[d]}\right) + P_{ud}\left(\frac{R_1}{r \cdot r[u]}\right) + P_{uu}\left(\frac{R_2}{r \cdot r[u]}\right)$$

To je očitna posplošitev zgornje rešitve za r s konstantnimi obrestnimi merami, ki jo lahko za primerjavo ponovno napišemo kot:

$$1 = P_{dd}\left(\frac{R_0}{r^2}\right) + P_{du}\left(\frac{R_1}{r^2}\right) + P_{ud}\left(\frac{R_1}{r^2}\right) + P_{uu}\left(\frac{R_2}{r^2}\right)$$

Če posplošimo, preden lahko začnemo govoriti o pričakovanih do tveganja nevtralnih verjetnosti, mora biti vsak končni donos diskontiran z njim povezano potjo obrestnih mer.

Medtem ko se lahko ta posplošitev razširi na drevo z n koraki, ne smemo dovoliti, da bi bila struktura obrestnih mer odvisna od poti, saj bi s tem izgubili prednosti rekombiniranega drevesa. Vendar pa tega ob odsotnosti predpostavk 4 in 5 ne moremo zagotoviti. Zato moramo na primer pri drevesu s 3 koraki dodati zahtevo $r[du] = r[ud]$.

5.2. **Različne do tveganja nevtralne verjetnosti poti v istem končnem vozlišču.** Splošni način za izpeljavo teh verjetnosti je iz standardnih opcij z dospetji pred končnim datumom. V našem primeru z 2 korakoma, recimo skozi opcije, ki zapadejo ob koncu 1. koraka, lahko izpeljemo do tveganja nevtralne verjetnosti vozlišč (ki so v tem posebnem primeru tudi verjetnosti poti) P_d in P_u v tistem času, kjer velja $P_d+P_u = 1$. Izkaže se, da nam to daje dovolj informacij za izpeljavo posamičnih verjetnosti poti P_{du} in P_{ud}, ki nista več enaki, odkar smo izpustili predpostavko 5.

Da bi to videli v drevesu z 2 korakoma, moramo imeti po prvem koraku $p = P_u$. Sedaj lahko ponovno pogledamo enačbo (2), kjer so verjetnosti premikov nedoločene. S to dodano omejitvijo jih je mogoče enostavno rešiti kot:

$$p[d] = 1 - \frac{P_0}{P_d} \text{ in } p[u] = \frac{P_2}{P_u}$$

V tem primeru verjetnosti poti, ki vodita k sredinskemu končnemu vozlišču v drugem koraku, nista v splošnem enaki:

$$P_{du} = (1-p) \cdot p[d] = P_d - P_0 \text{ in } P_{ud} = p \cdot (1 - p[u]) = P_u - P_2$$

Seveda pa skupaj še vedno izpolnjujeta zahtevo:

$$P_{du} + P_{ud} = (P_d - P_0) + (P_u - P_2) = 1 - P_0 - P_2 = P_1$$

Če razširimo ta primer na n korakov, si moramo zapomniti, da čeprav ne velja več, da imajo vse poti, ki vodijo k istemu notranjemu ali končnemu vozlišču, iste verjetnosti, morajo ostati verjetnosti premikov neodvisne od predhodnje poti. Na primer, v drevesu s 3 koraki ostaja $p[ud] = p[du]$. To sledi iz prepostavke, da je binomsko drevo rekombinirano. Kot smo že prej omenili, rekombinirano drevo pomeni, da je $d[du] = d[ud]$, $u[du] = u[ud]$. Še več, da bi ohranili prednosti rekombiniranega drevesa ob odsotnosti predpostavk 4 in 5, moramo namesto tega predpostaviti $r[du] = r[ud]$. Potem imamo po prejšnjem rezultatu: $p[du] = p[ud]$.

Za izpeljavo vseh verjetnosti poti v drevesu z n koraki je zahtevano, da eksogeno poznamo vse verjetnosti notranjih in končnih vozlišč v drevesu. Po drugi strani pa so lahko te verjetnosti vozlišč izpeljane iz standardnih evropskih opcij, pod pogojem, da njihove zapadlosti zajemajo vse čase vozlišč v drevesu. Tj., potrebovali bi trenutno dosegljivo opcijo z zapadlostjo ob koncu koraka 1, koraka 2, koraka 3, ... Glede na naravo opcij, s katerimi se trguje, je to očitno nerealno pričakovanje za primerna drevesa, da bodo imela praktično vrednost. Zaradi tega bomo v namene uporabe še naprej uporabljali predpostavko 5.

6. Nestanovitnost in struktura matematičnega upanja

6.1. Lokalna nestanovitnost. Najprej definirajmo lokalno nestanovitnost $\sigma[\cdot]$, ki jo lahko izračunamo v vsakem vozlišču, če poznamo celotno binomsko drevo:

$$\mu[\cdot] \equiv ((1 - p[\cdot] \cdot \log d[\cdot]) + (p[\cdot] \cdot \log u[\cdot])$$
$$s\sigma^2[\cdot] \equiv ((1 - p[\cdot])(\log d[\cdot] - \mu[\cdot])^2) + (p[\cdot](\log u[\cdot] - \mu[\cdot])^2)$$

V Black-Scholesovem modelu je nestanovitnost predstavljena kot konstanta. Po vedno več dokazih o nestanovitnostnem nasmešku je postalo jasno, da nestanovitnosti ne morejo biti ves čas konstantne in so najverjetneje odvisne še od drugih faktorjev v modelu. Ena od idej je, da je nestanovitnost odvisna od tržne cene $S(t)$ in časa t in označimo $\sigma(S,t)$. Če vzamemo fiksen čas do dospetja in pravilno izberemo limito, ko število časovnih intervalov narašča in gre njihova dolžina proti 0, se lokalna nestanovitnost $\sigma[\cdot]$ približa trenutni nestanovitnosti, ki je odvisna od $S(t)$ in t.

V našem primeru lahko torej $\sigma(S,t)$ aproksimiramo s $\sigma[\cdot]$ in jo izračunamo po zgornjem procesu iskanja rešitve.

6.2. Globalna nestanovitnost. V tem primeru gledamo lokalne nestanovitnosti, ne pa Black-Scholesovih impliciranih nestanovitnosti, ki povzamejo raven negotovosti skozi celotno življenje opcije. Zelo visoke (nizke) lokalne nestanovitnosti bi lahko implicirale precej nižje (višje) Black-Scholesove implicirane nestanovitnosti v daljših časovnih intervalih. Ko v drevesu rešujemo po postopku od listov drevesa nazaj, lahko v vsakemu notranjemu vozlišču izračunamo verjetnosti končnih vozlišč, pogojene s prihodom v to notranje vozlišče. Z uporabo teh pogojnih verjetnosti lahko v vsakemu notranjemu vozlišču izračunamo do tveganja nevtralno globalno nestanovitnost iz tistega vozlišča, ki gleda proti koncu drevesa. Občutljivost globalne nestanovitnosti do ravni S&P 500 indeksa je približno pol občutljivosti lokalne nestanovitnosti. Torej, na primer, če indeks pade s 355 na 302 v naslednjih 12 dneh, medtem ko lokalna nestanovitnost zraste iz približno 20 % na 77 %, globalna nestanovitnost zraste z 20 % na 38%. Podobno, če se indeks premakne s 355 na 400 v 27 dneh, lokalna nestanovitnost pade z 20% na 4%, globalna nestanovitnost pa pade samo z 20% na 9%.

Možno je tudi izračunati drevo letnih Black-Scholesovih impliciranih nestanovitnosti opcij na meji. Opcija je na meji, kadar je izvršilna cena opcije enaka tržni ceni in je vseeno, ali izkoristimo pravice iz opcije.

Drevo iz letnih impliciranih nestanovitnosti naredimo tako, da za vsako notranje vozlišče izračunamo Black-Scholesovo vrednost opcije z izvršilno ceno, ki je enaka ravni indeksa v tistem vozlišču in čas dospetja, enakega preostalem času do konca drevesa. Nato obrnemo Black-Scholesovo formulo za pridobitev impliciranih nestanovitnosti v vsakem vozlišču. Tako drevo kaže, da je trenutna implicirana nestanovitnost (v času 0) 17%. Če po 12 dneh indeks pade s 355 na 302, implicirana nestanovitnost zraste na 39%. Po drugi strani po 27 dneh indeks zraste s 355 na 400, implicirana nestanovitnost pade na 9%. Torej je obnašanje Black-Scholesove implicirane nestanovitnosti opcije na meji precej podobno globalni nestanovitnosti.

6.3. **Dogovor o matematičnem upanju.** Lokalna nestanovitnost, izračunana iz do tveganja nevtralnih verjetnosti, in lokalna nestanovitnost, izračunana iz subjektivnih tržnih verjetnosti, konvergirata k istemu številu, ko gre velikost premika proti 0. Vendar pa to ne velja za matematično upanje. Do tveganja nevtralno matematično upanje za posamičen premik je očitno r. Če je $q[\cdot](1-q[\cdot])$ konsenzna subjektivna verjetnost premika gor (dol) po prejšnjem zaporedju izvedenih premikov, navedenih v oklepajih, je potem utrezni konsenz matematičnega upanja premikov:

$$m[\cdot] \equiv (((1-q[\cdot])d[\cdot]) + (q[\cdot]u[\cdot])) \cdot d[\cdot],$$

kjer je $d[\cdot] = 1 +$ stopnja izplačila v naslednjem binomskem koraku po prejšnjem zaporedju izvedenih premikov, navedenih v oklepajih. Moramo biti pazljivi, da interpretiramo $d[\cdot]$ in $u[\cdot]$ kot le del kapitalskega dobička donosa osnovnega premoženja.

V splošnem, ne le, da $m[\cdot]$ ni enak kot r v diskretnem času, vendar tudi ne bo konvergiral proti r v zveznem času. Pravzaprav, če je osnovno premoženje tržni portfelj, za celoten trg nenaklonjenost tveganju pomeni, da je $m[\cdot] > r$ v celotnem drevesu. To je skladno s splošnim opažanjem, da subjektivna verjetnostna porazdelitev končnih donosov ne more biti izpeljana le iz poznavanja njene do tveganja nevtralne porazdelitve.

7. Opcije

7.1. **Evropske opcije.** Za standardne nakupne opcije obstajajo opcijske mere občutljivosti, ki merijo spremembo posameznih parametrov, ki vplivajo na vrednost opcije. Matematično so to odvodi posameznih parametrov, uporabljamo pa jih pri Black-Scholesovem modelu za vrednotenje izvedenih finančnih instrumentov.

Delta meri vpliv nihanja osnovnega finančnega instrumenta na vrednost opcije. Matematično je delta prvi odvod vrednosti opcije (C) po vrednosti osnovnega finančnega instrumenta (S), na katerega je opcija zapisana:

$$\delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{C_u - C_d}{d(S_u - S_d)}$$

$$\delta[d] = \frac{C_{du} - C_{dd}}{d[d](S_{du} - S_{dd})}$$
$$\delta[u] = \frac{C_{uu} - C_{ud}}{d[u](S_{uu} - S_{ud})}$$

Delta nakupne opcije je pozitivna. Je pripomoček za analizo opcijske pozicije, predvsem v zvezi z zaščito, saj pove, koliko opcij moramo imeti, da pokrijemo ali zaščitimo svojo pozicijo.

Gama meri odzivanje delte na vrednost osnovnega finančnega instrumenta. Matematično je gama drugi odvod vrednosti opcije po vrednosti osnovnega finančnega instrumenta:

$$\gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\gamma[u] - \gamma[d]}{d(S_u - S_d)}$$

Gamo uporabljamo, ker delta ni stabilna. Delta z višjo gamo pomeni večje tveganje.

S theto merimo spremembo vrednosti opcije v razmerju s časom. Matematično je theta prvi odvod vrednosti opcije po času:

$$\theta = \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C_{ud} - C}{2h}$$

h je čas za posamičen binomski korak. Theta je večinoma negativna, saj opcije vedno izgubljajo vrednost v času do dospetja.

Ta formula deluje, ker v standardnem binomskem drevesu velja $S_{ud} = S$, tako da v zgornjem števcu lahko primerjamo vrednost dveh nakupnih opcij v identični situaciji, vendar z različnim časi dospetja. V našem posplošenem binomskem drevesu pa je tipičen primer $S_{ud} \neq S$, ki z lahkoto povzroči, da so zgornje meritve thete netočne.

Namesto te tehnike lahko uporabimo Black-Scholesovo diferencialno enačbo, ki drži, tudi če je σ fukcija S in t. Ta enačba nam da možnost izražanja θ v diskretnem času približno kot funkcijo C, δ in γ:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}S^2 s^2 + r\frac{\partial C}{\partial S}St - rC = 0$$
$$\theta = rC - \frac{1}{2}\gamma s^2 S^2 - r\delta St$$

Tako kot v primeru standardnega binomskega drevesa so lahko evropske opcije vrednotene neposredno, brez računanja od listov drevesa rekurzivno nazaj. Na primer, za trenutno vrednost evropskih nakupnih je lahko navedena v zapri obliki. Izraz je v zaprti obliki, če je izražen s končnim številom simbolov (simboli v tem primeru vključujejo vse operacije in funkcije).

$$C = \frac{\sum_j P_j \max[0, SR_j - K]}{r^n}$$

Kljub dodani kompleksnosti posplošenega binomskega drevesa so evropske delte, game in thete lahko ovrednotene z uporabo relativno enostavnih izrazov zaprtih oblik. Začnemo z izpeljavo izrazov zaprte oblike za končne verjetnosti v vozliščih, ocenjenih v kateremu koli notranjem vozlišču. Iz teh lahko izpeljemo izraze zaprtih oblik za osnovno premoženje in vrednosti evropskih opcij v katerem koli notranjem vozlišču. V zameno lahko te uporabimo za izražanje v zaprtih oblikah zaščitnih parametrov za evropske opcije, ki zapadejo na koncu ali pred koncem drevesa.

Naj bo $P_j[\cdot]$ verjetnost v končnem vozlišču, ocenjena iz vozlišča po prejšnjem zaporedju realiziranih premikov, navedenih v oklepajih. Torej, na primer, $P_j[u]$ je verjetnost v vozlišču, vezana na končno vozlišče j, izmerjeno po tem, ko je že znano, da se je zgodil en premik gor. Z uporabo predpostavke (5) in nekaj algebre lahko pokažemo:

$$p = \sum_j \frac{j}{n} P_j \text{ in } 1 - p = \sum_j \frac{n-j}{n} P_j$$

$$P_j[u] = \frac{\frac{j}{n} P_j}{p} \text{ in } P_j[d] = \frac{\frac{n-j}{n} P_j}{1-p}$$

$$p[u] = \sum_j \frac{j-1}{n-1} P_j[u] \text{ in } p[d] = \sum_j \frac{j}{n-1} P_j[d]$$

$$P_j[uu] = \frac{\frac{n-j}{n} \frac{j-1}{n-1} Pj}{p \cdot p[u]}$$

$$P_j[ud] = P_j[du] = \frac{\frac{n-j}{n} \frac{n-j-1}{n-1} P_j}{(1-p) \cdot p[d]}$$

$$P_j[dd] = \frac{\frac{n-j}{n} \frac{n-j-1}{n-1} P_j}{(1-p) \cdot p[d]}$$

Sedaj lahko uporabimo te notranje ocene verjetnosti v vozliščih za določitev naslednjih vrednosti v notranjih vozliščih za nakupno opcijo in osnovno premoženje (s predpostavko, da je stopnja izplačila $d[\cdot]$ konstantna):

$$S_d = \frac{S \sum_j P_j[d] R_j}{(\frac{r}{d})^{n-1}}$$

$$S_u = \frac{S \sum_j P_j[u] R_j}{(\frac{r}{d})^{n-1}}$$

$$C_d = \frac{\sum_j P_j[d] \max[0, SR_j - K]}{r^{n-1}}$$

$$C_u = \frac{\sum_j P_j[u] \max[0, SR_j - K]}{r^{n-1}}$$

$$S_{dd} = \frac{S \sum_j P_j[dd] R_j}{(\frac{r}{d})^{n-2}}$$

$$S_{du} = S_{ud} = \frac{S \sum_j P_j[du] R_j}{(\frac{r}{d})^{n-2}}$$

$$S_{uu} = \frac{S \sum_j P_j[uu] R_j}{(\frac{r}{d})^{n-2}}$$

$$C_{dd} = \frac{\sum_j P_j[dd] \max[0, SR_j - K]}{r^{n-2}}$$

$$C_{du} = C_{ud} = \frac{\sum_j P_j[du] \max[0, SR_j - K]}{r^{n-2}}$$

$$C_{uu} = \frac{\sum_j P_j[uu] \max[0, SR_j - K]}{r^{n-2}}$$

Za konec lahko te izraze vstavimo v zgornje enačbe za δ, γ in θ.

Tukaj imamo še splošno formulo (z nadaljevanjem uporabe prepostavke (5)) za notranje ocene verjetnosti v končnih vozliščih. Naj bo:

$$X_j(k,l) \equiv \frac{j(j-1)\dots(n-j)(n-j-1)\dots(n-j-l+1)}{n(n-1)\dots(n-k-l+1)}$$

Potem sledi:

$$P_j[u^k d^l] = \frac{X_j(k,l)P_j}{\sum_j X_j(k,l)P_j}$$

7.2. **Eksotične opcije.** Več vrst eksotičnih opcij lahko enostavno vrednotimo z uporabo posplošenega binomskega drevesa.

7.2.1. *Opcije z mejo.* Morda najpreprostejši tip opcij, odvisnih od poti, je tisti, kjer je izplačilo odvisno ne samo od končne cene osnovnega premoženja, temveč tudi od tega, če je osnovno premoženje doseglo nekakšno mejno ceno v dobi opcije. Takim opcijam pravimo opcije z mejo (angl. barrier options). Če mejna vrednost v življenju opcije ni dosežena, opcija z mejo propade. Mejna vrednost je vnaprej določena tržna vrednost osnovnega instrumenta. Glede na pogoj za ustvarjanje notranje vrednosti ločimo dve vrsti takih opcij. Prva vrsta je opcija z mejo, ki propade, če tržna vrednost osnovnega instrumenta ne doseže mejne vrednosti (angl. knock-out barrier option), ki jo poimenujemo opcija z nedoseženo mejno vrednostjo. Druga vrsta pa je opcija z mejno vrednostjo, ki začne veljati, če tržna vrednost osnovnega instrumenta preseže mejno vrednost (angl. knock-in barrier option).

Vsako izmed opisanih vrst nato delimo še glede na to, ali je trenutna tržna vrednost osnovnega instrumenta višja (angl. up barrier option) ali nižja od mejne vrednosti (ang. down barrier option).

Poglejmo še vse opisane kombinacij zgornjih nakupnih opcij z mejno vrednostjo:

(1) Ob doseganju mejne vrednosti propade
  - trenutni tržni tečaj je višji od mejne vrednosti (angl. up-and-out call barrier option)
  - trenutni tržni tečaj je nižji od mejne vrednosti (angl. down-and-out call barrier option)

(2) Ob preseganju mejne vrednosti začne veljati
  - trenutni tržni tečaj je višji od mejne vrednosti (angl. up-and-in call barrier option)
  - trenutni tržni tečaj je nižji od mejne vrednosti (angl. down-and-in call barrier option)

Za primer, ko opcija ob doseganju mejne vrednosti propade in je trenutni tržni tečaj nižji od mejne vrednosti, začne standardna evropska nakupna opcija obstajati, ko je izdana opisana opcija. Vendar standardna nakupna opcija preteče pred iztekom, če cena osnovnega premoženja kdaj pade pod mejo, "knock-out", H. V tem primeru je kupec opcije lahko plačan s stalnim rabatom, B, ki je plačan na dan, ko je prvič dosežena meja.

V nasprotnem primeru, če cena osnovnega premoženja nikoli ne pade pod H, bo imel "down-and-out call"enako izplačilo kot standardna nakupna opcija. Vrednotenje take opcije je precej enostavno. Vključuje računanje nazaj kot ponavadi na posplošenem binomskem drevesu. Če je standardna opcija ameriška, vmestimo v vsakem vozlišču trenutno vrednost imetja nakupne opcije za še eno obdobje ali njegovo uveljavljeno vrednost; tisto, ki je večja. Vendar pa, kadar je trenutna cena osnovnega premoženja manjša ali enaka meji H, to prepišemo in vmestimo rabatno vrednost B v vozlišče.

7.2.2. *Povratne opcije.* Nekoliko bolj kompleksne so povratne opcije (angl. lookback options), katerih izvršilna cena je odvisna od najvišje ali najnižje tržne cene osnovnega instrumenta v življenju opcije.

Evropske povratne opcije so lahko vrednotene z uporabo impliciranega binomskega drevesa kot osnovo za simulacijo Monte-Carlo. Za konstrukcijo poti Monte-Carlo v vsakem časovnem koraku v drevesu vzdolž ene same poti naključno izberemo premik gor $u[\cdot]$ z verjetnostjo $p[\cdot]$ ali premik dol $d[\cdot]$ z verjetnostjo $1 - p[\cdot]$. S tem postopkom dobimo eno naključno izbrano pot od začetka do konca drevesa. Za to pot zabeležimo končno ceno osnovnega premoženja, prav tako tudi minimalno (ali maksimalno) ceno, ki se pojavi skozi vzorčno pot. To uporabimo za izračun izplačila za opcijo na koncu poti. Sedaj ponovimo ta postopek tisočkrat, izračunamo navadno povprečje doseženih izplačil opcij in diskontiramo to nazaj v sedanjost s primernimi netveganimi obrestnimi merami. Ta pristop je lahko enostavno posplošen za vključitev povratnih opcij z ekstremi, izračunanimi skozi samo en del življenja opcije, in za variacije povratnih opcij.

7.2.3. *Azijske opcije.* Azijske opcije prestavljajo še en razred opcij, odvisnih od poti, kjer je izplačilo odvisno od povprečne cene osnovnega premoženja skozi določen čas opcije. Pri azijski opciji je donos imetnika opcije določen kot razlika med vnaprej določeno izvršilno ceno in povprečno tržno vrednostjo osnovnega premoženja.

Za azijske opcije evropskega tipa lahko uporabimo simulacijo Monte-Carlo na podoben način kot v zgoraj opisani metodi za povratne opcije.

8. Zaključek

Razhajanja v Black-Scholesovem modelu so že vrsto let podlaga raziskav, v katere se vključujejo matematiki in fiziki. Zaradi pomanjkljivosti je potrebno model ustrezno popraviti oziroma dopolniti. Zato so številni avtorji skušali razvijati nove modele vrednotenja opcij, ki naj bi dopolnili ali celo izpodrinili Black-Scholesov model. Eden od primerov so Rubinsteinova implicirana binomska drevesa.

Kljub pomanjkljivostim Black-Scholesov model še danes velja za eno boljših povezav med ceno delnice in ceno opcije. Znan je kot najbolj uspešen v družbenih vedah in ima vključno z binomsko razširitvijo najbolj uporabljeno formulo v zgodovini.

Literatura

[1] M. Rubinstein, *Implied binomial trees*, Journal of Finance **1994** strani od 771 do 818.

[2] A. Borko, *Opcijska volatilnost kot instrument ugotavljanja negotovosti na finančnih trgih*, verzija 2010, dostopno na http://www.epf.uni-mb.si/ediplome/pdfs/borko-ales-mag.pdf.

[3] D. Najvirt, *Black-Scholesov model vrednotenja opcij*, verzija 2010, dostopno na http://dkum.uni-mb.si/IzpisGradiva.php?id=15070.

[4] V. Nose, *Eksotične opcije in strukturirani finančni instrumenti*, verzija 2009, dostopno na http://www.cek.ef.uni-lj.si/UPES/nose161.pdf.

[5] H. Ye, *A comparison of Local Volatility and Implied Volatility*, verzija 2011, dostopno na http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:422086/FULLTEXT02.

[6] T. Košir, *Binomski model*, verzija 13. 5. 2013, dostopno na http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/pluginfile.php/12025/mod_resource/content/4/binomski_13maj13.pdf.

[7] *Black-Scholes model*, [ogled 10. 9. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Local_volatility.

[8] *Local volatility*, [ogled 10. 9. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Black-Scholes_model.