UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Stefania Strain

Arrow-Prattova mera nenaklonjenosti tveganju

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir

Ljubljana, 2015

Kazalo

Arrow-Prattova mera nenaklonjenosti tveganju

Povzetek

Nenaklonjenost tveganju je eden izmed najzanimivejših problemov ekonomske teorije, saj je to primarno značajska lastnost investitorja, potemtakem tudi težko merljiva. Prve mere nenaklonjenosti tveganju so se začele pojavljati šele proti koncu prve polovice 20. stoletja, razvijajo pa se še danes. Teorija, s katero sta Arrow in Pratt razvila prvi koeficient nenaklonjenosti tveganju, je teorija pričakovane koristnosti. Seznanili se bomo z njenimi začetki, njenim matematičnim modelom in najpomembnejšimi koraki, ki so do njega vodili. Pogledali si bomo, kako sta Arrow in Pratt prišla do ene izmed prvih mer nenaklonjenosti tveganju s pomočjo funkcije koristnosti investitorja in s primerom si bomo ogledali, kako dva investitorja med seboj primerjamo na podlagi funkcij koristnosti. V drugem delu je navedeno, kako sta članka Arrowa in Pratta vplivala na takratno ekonomsko teorijo, in kateri drugi koeficienti nenaklonjenosti tveganju so se takrat razvili. Na koncu je na kratko predstavljena še močnejša mera nenaklonjenosti tveganju, kot tista, ki sta jo razvila Arrow in Pratt.

Arrow-Pratt measure of risk aversion

Abstract

Risk aversion is one of the most interesting problems in economic theory, because it is primarily a personality trait and therefore difficult to measure. The first measures of risk aversion started appearing only towards the end of the first half of the 20th century and today they are still being developed. The theory in relation to which Arrow and Pratt deveoped the first coefficient of risk aversion is called the expected utility theory. We will learn about it's origins, it's mathematical model and the most important steps that led to it. We will see how Arrow and Pratt designed one of the first measures of risk aversion by using the utility function of the investor and we will give an example on how two inverstors can be compared by their utility function. In the second part we will indicate which effects had Arrow and Pratt's work on the economic theory at that time and which other coefficients of risk aversion were later formulated. Finally we will briefly present an even stronger measure of risk aversion than that of Arrow and Pratt.

Math. Subj. Class. (2010): 91B16

Ključne besede: nenaklonjenost tveganju, racionalni igralec, pričakovana koristnost, mere nenaklonjenosti tveganju

Keywords: risk aversion, rational player, expected utility, measures of risk aversion

1. Uvod

Človek se v življenju večkrat znajde pred tvegano situacijo in se glede nje odloča na podlagi posledic, ki bi ta lahko imela na njegovo življenje. Če je človek racionalen, se bo seveda odločil za ukrep, ki vodi do take posledice, ki si jo najbolj želi. Vendar kako se bo človek obnašal pred tako situacijo in kaj bo vplivalo na njegovo odločitev? Izkaže se, da se za tem osnovnim konceptom nahaja pomembna ekonomska teorija, ki ji pravimo teorija pričakovane koristnosti. Pomembna ni samo zato, ker je nastala več kot dvestopetdeset let nazaj in je do polovice 20. stoletja predstavljala edino aktualno ekonomsko teorijo, vendar tudi zato, ker se je njena uveljava s časom tako razširila, da še danes predstavlja podlago za večino ostalih ekonomskih teorij, ki so v prejšnjem stoletju nastale.

Pogledali si bomo, kako se je ta teorija razvila in kako je prišlo do koncepta nenaklonjenosti tveganju, ene izmed preučevanih komponent te teorije. Ta pojem se v ekonomski teoriji večkrat pojavi, ker je to ena od lastnosti, ki jo lahko pripišemo igralcu oziroma investitorju, ki se znajde pred tvegano situacijo. V posebnem je zanimivo, kako bi to lastnost lahko "izmerili", saj je v principu taka lastost značajska, torej ni številsko merljiva. Več znanstvenikov je ta koncept preučevalo, med najpomembnejšimi sta bila Arrow in Pratt. Ta sta postavila osnovo za vse kasnejše teorije. Pogledali si bomo, kako sta onadva definirala nenaklonjenost tveganju in kako sta jo prevedla na izračunljivo, ali vsaj merljivo lastnost.

Kaj pa je pravzaprav nenaklonjenost tveganju in zakaj nas zanima? *Nenaklonjenost tveganju* (v ekonomiji in financah) je odpor človeka do sprejetja tvegane odločitve, saj bi ta lahko prinesla velike denarne izgube, čeprav je donos le te lahko zelo visok.

Torej, je investitor *nenaklonjen tveganju*, ko, ob primerjavi dveh investicij s podobno pričakovano donosnostjo (ampak različni stopnji tveganja), preferira investicijo z nižjo stopnjo tveganja.

Tudi ob primeru, ko bo imel investitor na voljo dve investiciji, eno z nizko donosnostjo in nizkim tveganjem, ter eno z visoko donosnostjo a visokim tveganjem, bo izbral raje investicijo z nizkim tveganjem. Tak investitor ne bo imel v portfelju visoko tveganih delnic, ampak se bo omejil na državne obveznice, finančne instrumente vezane na različne indekse (borzne,...), itd.

Ta lastnost je skupna večini investitorjev, saj niso pripravljeni tvegati velikega deleža premoženja. Pomislimo, da je to res za večino posameznikov, ki ne upravljajo velikih zneskov, ampak le majhne (npr. svojo mesečno plačo), in si želijo nekaj investirati za prihodnost. Taki mali investitorji bodo raje sklenili depozit na banki kot investirali v delnice, saj so te veliko bolj tvegane. Tak tip investicije je bolj primeren za npr. mednarodne korporacije, ki upravljajo z velikimi količinami denarja, saj se nekaj tisoč evrska izguba pri njih skoraj ne bi poznala, kar bi pa lahko pri navadnem delavcu pomenilo tudi izgubo celotnega premoženja.

Opazili smo torej, da enaki zneski denarja nimajo enake vrednosti za različne tipe investitorja. Videli bomo, da lahko tudi ta problem delno rešimo s teorijo pričakovane koristnosti. Vendar kako in zakaj se je ta teorija razvila, kako je prišlo do koncepta nenaklonjenosti tveganju in kako je prišlo do njegovega kvantificiranja, je dolg proces. V naslednjem razdelku si bomo ogledali najpomembnejše korake, s katerimi se je ta teorija razvila.

2. Teorija pričakovane koristnosti

2.1. **Osnove teorije.**

Princip teorije pričakovane koristnosti je maksimizacija koristi, ki jo lahko človek dobi, glede na odločitve ki jih lahko sprejme pred tvegano situacijo. Vendar tako enostaven sklep ni bil postavljen takoj, ampak sega razvoj teorije pričakovane koristnosti daleč v preteklost in število znanstvenikov, ki je prispevalo k njenemu razvoju, je zelo veliko. Med najpomembnejšimi prispevki štejemo tiste Daniela ter Nicolasa Bernoullija in naknadno tiste s strani Johna von Neumanna skupaj z Oskarjem Morgensternom. Ti znanstveniki so v različnih zgodovinskih obdobjih uvedli nove ključne koncepte in s tem pripomogli, da se je teorija razširila v različne smeri.

S časom se je izkazalo, da so bile prve izjave (zgodovinsko gledano) najmočnejše, in so jim sledile le šibkejše. Presenetljivo je, koliko časa je bilo potrebno, da se je izkoristil celotni potencial te ekonomske teorije, saj se je ta teorija širila v vse smeri dlje kot dve stoletji.

2.1.1. *Pričakovana vrednost in st. petersburški paradoks.*

Začnemo s predpostavko, da se investitor (ta pojem predstavlja seveda investitorje, ki se ukvarjajo z velikimi denarnimi zneski, vendar tudi nekoga, ki se v vsakdanjem življenju odloča pred tvegano situacijo - lahko pomislimo na banko, ko sklepamo depozit) znajde pred tvegano situacijo. To je osnova teorije pričakovane koristnosti, saj v primeru determinističih situacij, kjer je posledica direktno odvisna od ukrepa, ki ga izberemo, se bo racionalni investitor že takoj odločil za tisti ukrep, ki mu prinese zaželjeno posledico. Zanima nas, kaj se zgodi v primeru, da se investitor znajde v taki situaciji, kjer ni popolnoma gotovo, kakšno posledico bo imelo neko dejanje. To si lahko predstavljamo kot neko slučajno spremenljivko, oziroma loterijo. Enostavno loterijo zapišemo kot:

$$L \sim \begin{pmatrix} A & B \\ p & 1-p \end{pmatrix},$$

kjer sta A in B denarna zneska.

Kriterij, na katerega najprej pomislimo ob evalvaciji tveganih rezultatov take igre, je pričakovana vrednost, ker upošteva verjetnost izidov ter njihov znesek. Pričakovana vrednost je posplošitev povprečja, v primeru da niso vsi izidi enako verjetni.

Pričakovana vrednost loterije L je torej enaka, kot vemo iz verjetnostnega računa:

$$E(L) = p \cdot A + (1-p) \cdot B.$$

V primeru, da primerjamo več kot dva izida, torej izide X_1 do X_n, za katere velja, da se vsak pojavi z verjetnostjo p_i, $i : 1...n$, lahko zapišemo

$$E(L) = \sum_1^n \mathrm{P}(L = X_i) \cdot X_i = \sum_1^n p_i \cdot X_i.$$

Glede na tak kriterij bi moral torej vsak investitor preferirati investicije oziroma igre z višjo pričakovano vrednostjo. To pomeni, da kot investitor izberemo tako igro, za katero pričakujemo, da bomo dobili največ. Premislimo, ali je to vedno res.

Recimo, da bi imeli na izbiro igrati tako igro, kjer z verjetnostjo 0.5 dobimo znesek 2000.005 d.e. ter z verjetnostjo 0.5 ne dobimo nič. V drugem primeru pa bi lahko izbrali izplačilo garantiranega zneska 1000 d.e. Glede na teorijo pričakovane vrednosti, bi morali v povprečju ljudje izbrati tvegano igro:

$$E(tvegana) = 0.5 \cdot 2000.005 + 0.5 \cdot 0 = 1000.0025$$

$$E(netvegana) = 1 \cdot 1000 = 1000,$$

saj presega pričakovana vrednost tvegane igre za 0.0025. Ali bi res investitor izbral tvegano igro? Ker je po naravi človek nenaklonjen tveganju, bi verjetno izbral garantirani znesek.

Torej v praksi ni vedno res, da je pričakovana vrednost najboljši kriterij. Matematično je sicer to najboljša izbira, vendar na odločitve posameznika vpliva tudi značaj. Videli smo torej, da obstajajo primeri iger, kjer je pričakovana vrednost tvegane igre višja kot pričakovana vrednost igre, kjer dobimo znesek z verjetnostjo 1, vendar bi večina ljudi v takem primeru izbrala garantirani znesek, kar je v protislovju s predpostavko.

Prav zaradi te pomanjkljivosti je Nicolas Bernoulli, švicarski matematik, ki je živel na prelomu 17. in 18. stoletja, opisal problem, ki ga poznamo kot st. petersburški paradoks:

Imejmo igralnico, kjer obstaja igra, v kateri mečemo kovanec, dokler ne pade grb. Če je število metov, v katerih je padla cifra enako n, potem je izplačilo igre 2^n denarnih enot. Koliko smo pripravljeni plačati za tako igro?

Poskusimo rešiti problem tako, da izračunamo pričakovano vrednost loterije. Število zaporedij, za katere velja, da v prvih n metih pade cifra, v $n+1$ metu pa pade grb je neskončno. Verjetnostno porazdelitev lahko predstavimo z

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \dots \end{pmatrix}$$

katere pričakovana vrednost je enaka (kot smo predhodno definirali)

$$E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + 1 + \ldots = \infty$$

Znesek, ki smo ga pripravljeni plačati za tako igro, kjer je pričakovana vrednost enaka ∞, je torej lahko katerikoli (saj mora biti znesek, ki smo ga pripravljeni plačati za tako igro manjši od pričakovane vrednosti). Ampak očitno, če je že verjetnost, da dobimo 4 denarne enote $\frac{1}{4}$, je potem cena igre, ki se bliža neskončnosti, previsoka, da bi si kdorkoli želel tako igro igrati za tako visok izplačani začetni znesek. To je tak primer igre, kjer kriterij pričakovane vrednosti ni dovolj, da bi se o tem racionalno odločali.

2.1.2. *Bernoullijeva formulacija.*

Daniel Bernoulli, katerega je ravno bratranec Nicolas vprašal za mnenje, je ob tem paradoksu trdil, da določitev vrednosti nekega objekta ne sme temeljiti le na njegovi ceni, ampak na koristi, ki ta objekt nekomu prinaša. Cena objekta je sicer enaka za vse, korist, ki pa ta objekt prinaša posamezniku, pa je odvisna od okoliščin ter od osebe, ki svojo oceno tega objekta postavi. Ta ugotovitev, čeprav zelo enostavna, je bila takrat izjemnega pomena.

Bernoulli je torej predlagal, da bi se namesto samih zneskov upoštevalo za vsakega posameznika posebno *funkcijo koristnosti*, ki bi bila odvisna od posameznikovega premoženja, vendar lahko tudi od drugih faktorjev. Ob tem je upošteval pomembno predpostavko v skladu z ekonomsko teorijo: predlagal je, da bi bila mejna koristnost obratno sorazmerna posameznikovemu premoženju (W). *Mejna koristnost* je koristnost posameznika ob dodatni dobljeni denarni (ali drugi) enoti. Mejno koristnost si lahko predstavljamo kot odvod funkcije koristnosti. Iz tega izhaja diferencialna enačba

$$\frac{du(W)}{dW} = \frac{a}{W}$$

kjer je a neka konstanta.

Že Bernoulli je opazil, da je mejna koristnost padajoča funkcija, saj za vsako dodatno enoto premoženja bo naša korist manjša kot za prejšnjo. Prav zaradi tega je vsaka dodatna enota premoženja "manj vredna" za ljudi z večjim osnovnim premoženjem. To lahko razložimo tako, da bo 1 evro veliko več vreden za človeka, ki ima trenutno na računu 1 evro kot za človeka, ki jih ima na računu že 100. Res je tudi, da vsak naslednji evro za oba manj vreden kot prejšnji dodatni evro. To izhaja tudi iz tega, da je rast v procentih glede na prejšnji evro vedno manjša.

Rešitev zgoraj navedene diferencialne enačbe je torej (enostavna diferencialna enačba z ločljivimi spremenljivkami) oblike $u(W) = a \ln W + C$ za neko konstanto C. Bernoulli je torej kot funkcijo koristnosti predlagal logaritemsko funkcijo. Opazimo, da je ta funkcija koristnosti funkcija ene spremenljivke, torej v tem primeru upoštevamo kot odvisno spremenljivko le pozameznikovo premoženje (v katero seveda vključimo tudi dobitke ali izgube v loterijah).

Čeprav upoštevamo Bernoullija kot znanstvenika, ki je uvedel ta koncept, je vredno omeniti, da je že predhodno Gabriel Cramer, drugi švicarski matematik iz 18. stoletja, ob st. petersburškem paradoksu menil, da bi bilo treba upoštevati tudi koristnost dobljenega zneska, in ob tem predlagal uporabo funkcije koristnosti, ki bi predstavljala kvadratni koren dobljenega zneska. V obeh primerih vrsta, ki predstavlja pričakovano koristnost igre, za izplačila oblike $\frac{1}{2^n}$, konvergira.

2.1.3. *Von Neumann Morgensternova formulacija.*

Tudi pri Bernoullievi interpretaciji paradoksa je še vedno prisoten problem, da logaritemska funkcija (in Cramerjeva korenska funkcija) nista navzgor omejeni, tako da obstajajo tudi taka zaporedja izplačanih zneskov, za katere pričakovana koristnost ne konvergira (na primer igra, kjer je izplačilo enako e^{2^n} za n zaporednih padlih cifer). Kot vidimo, v primeru Bernoullijevega predloga je

$$E(u(X)) = E(\ln(X)) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(e^{2^n}) \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \infty.$$

Pojavila se je torej potreba po takih funkcijah koristnosti, za katere bi lahko za vsako zaporedje izplačil pričakovana koristnost konvergirala.

Razni ekonomisti so se s tem ukvarjali in iskali tako funkcijo koristnosti, ki bi zadoščala določenim ekonomskim potrebam, vendar sta se šele von Neumann in Morgenstern, ki spadata med najpomembnejše ekonomiste prve polovice 20. stoletja, leta 1944 odločila postaviti določena pravila, katerim mora določena funkcija zadoščati, zato da jo lahko razglasimo za funkcijo koristnosti.

Definicija 2.1. Štirje aksiomi, ki definirajo racionalnega igralca, če lahko izbira med A, B in C, so:

(1) *Popolnost*: za $\forall$ A in B velja, ali da $A \succeq B$, ali da $B \preceq A$, torej za vsak A in B igralec preferira A, preferira B ali je indiferenten med obema.

(2) *Tranzitivnost*: za $\forall$ A, B in C velja, da če je $A \succeq B$ in $B \succeq C$, potem je $A \succeq C$, to pa pomeni, da so odločitve igralca konsistentne.

(3) *Neodvisnost*: ob možnih izbirah A, B in C naj velja $A \succeq B$ in naj bo $t \in (0, 1]$. Potem $tA + (1 - t)C \succeq tB + (1 - t)C$.

(4) *Zveznost*: naj za A, B in C velja $A \succeq B \succeq C$. Potem obstaja verjetnost $p \in (0, 1)$, da velja, da je izbira $pA + (1 - p)C$ ekvivalentna izbiri B. To pomeni, da ob preferencah $A \succeq B \succeq C$, obstaja taka kombinacija A in C, da bo igralec indiferenten med izbiro le te in izbiro B.

V definiciji aksiomi definirajo le racionalnega igralca, vendar naslednja trditev nam zagotovi obstoj funkcije koristnosti.

Trditev 2.2. *Za vsakega racionalnega igralca, torej igralca, katerih preference zadoščajo vsem štirim von Neumann-Morgensternovim aksiomom, obstaja taka funkcija $u()$, ki predstavlja njegove preference, oziroma, taka funkcija, ki vsakem izidu loterije priredi realno število.*

Kadar je za investitorja torej definirana funkcija koristnosti, lahko se ta odloči med dvema investicijama tako, da izbere tisto, ki ima večjo pričakovano koristnost. Torej investitor na tak način maksimizira pričakovano koristnost.

Zgornja trditev pa nam ne da metode za konstrukcijo same funkcije. Sama konstrukcija funkcije koristnosti je zelo kompleksen postopek. Za funkcijo koristnosti $u : X \to \mathbb{R}$, če ob izbirah x in y investitor preferira izbiro x, potem velja $u(x) \geq u(y)$.

Lahko uporabimo take vrste funkcije koristnosti, da si izide razvrstimo glede na koristnost, ki nam jo prinašajo, in nato jih "oštevilčimo"tako, da velja pravilo iz zgornjega odstavka. En način je ta, da se potem pričakovano koristnost direktno izrazi kot linearno kombinacijo koristnosti vsakega izida, kjer so uteži kar verjetnosti vsakega izida.

V resnici pa je funkcija koristnosti pogosto zvezna funkcija. Take funkcije ohranijo pravilo preferenc, torej če ob izbirah x in y investitor preferira izbiro x, potem velja $u(x) \geq u(y)$, tudi če na njih uporabimo afino transformacijo, kar za take funkcije koristnosti opisane v prejšnjem odstavku ne velja. Eksponentne funkcije, in razne variacije eksponentne funkcije, so najbolj pogosto uporabljene funkcije koristnosti.

2.2. **Matematični model.**

Združimo do sedaj vse znane pojme, in si poglejmo matematični model teorije pričakovane koristnosti. Vendar si pred tem oglejmo še razlago dveh novih pojmov, ki se v matematičnem modelu pojavita in sta ključna za vse naslednje ugotovitve.

2.2.1. *Zagotovljeni ekvivalent.*

Zagotovljeni ekvivalent definiramo kot garantiran donos, ki ga nekdo sprejme, namesto da bi tvegal z odločitvijo, pri kateri bi lahko bil donos višji. Enakovredna definicija zagotovljenega ekvivalenta je: znesek, ki ga agent mora dobiti, zato da bo indiferenten (torej ne bo imel preference), med zagotovljenim zneskom in tvegano igro.

2.2.2. *Premija za tveganje.*

Vzporedno z zagotovljenim ekvivalentom lahko definiramo *premijo za tveganje* kot minimalni znesek denarja, za katerega mora pričakovani donos tveganega finančnega instrumenta presegati pričakovani ali znani donos manj tveganega (netveganega) finančnega instrumenta, zato da bo investitor pripravljen investirati tudi v več tvegan instrument. Na premijo za tveganje lahko gledamo kot na nadomestilo, ki ga dobimo za to, da smo vložili v tvegan finančni instrument (ali v tvegano investicijo). Odločitev ob dani premiji za tveganje je seveda odvisna od investitorja samega in od njegove (ne) naklonjenosti tveganju.

2.2.3. *Model.*

Naj bo x denarni znesek. C je interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Loterija X pripada kumulativni funkciji $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$. Naj bo $f_X(x)$ gostota porazdelitvene funkcije $F_X(x)$. Pričakovana vrednost X je

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

kot vemo iz verjetnostnega računa.
Pričakovana koristnost loterije X glede na funkcijo koristnosti $u()$ je definirana kot

$$E(u(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dF(x).$$

To dobimo tako, da izračunamo pričakovano vrednost funkcije koristnosti $u()$ aplicirane na loterijo X.
Ob Bernoullijevi funkciji koristnosti $u()$ je zagotovljeni ekvivalent loterije s kumulativno porazdelitveno funkcijo $F()$, z oznako $c(F, u)$, količina, ki zadošča enačbi

$$u(c(F, u)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dF(x).$$

To pomeni, da je funkcija koristnosti, aplicirana na zagotovljeni ekvivalent, enaka pričakovani koristnosti loterije X, kar izhaja iz tega, da mora zagotovljeni ekvivalent predstavljati znesek, za katerega smo indiferentni med tveganjem z loterijo ali sprejetjem zagotovljenega zneska.
Iz tega sledi, da mora zagotovljeni ekvivalent zadoščati

$$u(c(F, u)) = E(u(F)).$$

V primeru, da je funkcija $u()$ bijektivna, lahko kar zapišemo

$$c(F, u) = u^{-1}(E(u(F))).$$

Premija za tveganje (oznaka $\rho(F, u)$) je v tem modelu enaka razliki med pričakovano vrednostjo F in zagotovljenim ekvivalentom $c(F, u)$, in sicer

$$\rho(F, u) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx - c(F, u).$$

To izhaja iz definicije, saj je zagotovljeni ekvivalent definiran kot garantiran donos pri tvegani investiciji, pričakovana vrednost investicije pa mora tega presegati za nek minimalni znesek denarja, ki si ga investitor želi, zato, da bo tvegal z naložbo v ta instrument. Opazimo, da se lahko zgodi, da je premija za tveganje ničelna in to tedaj, ko je pričakovana vrednost loterije enaka zagotovljenem ekvivalentu.

2.3. **Kritike.**

Teorija pričakovane koristnosti torej pravi, da se človek med negotovimi izbirami odloči tako, da maksimizira svojo pričakovano kositnost, ki je za vsak izid vsota koristnosti posameznega izida, utežena z verjetnostjo izida. Vendar obstaja nekaj kritik glede teorije pričakovane koristnosti:

- Bernoullijeva teorija predvideva, da dve osebi z istim premoženjem imata od tega enako korist, vendar koristnost osebe A, ki je imela v času 1 1000 denarnih enot, v času 2 pa dobila drugih 1000 denarnih enot ni enaka koristnosti osebe B, ki je v času 1 imela 5000 denarnih enot in jih v času 2 izgubila 3000, čeprav sta trenutno na istem stanju.
- Ljudje, poled tega da so večinoma nenaklonjeni tveganju, so tudi nenaklonjeni izgubi. To pomeni, da ljudje rajši preprečijo izgubo kot ustvarijo dobiček. Teorija pričakovane koristnosti ne upošteva nenaklonjenosti izgube.

Ampak treba je razumeti, da je ta model, kot vsak matematični model, poenostavitev realnosti. Očitno je, da z njim ne moremo zagotovo predvidevati odločitve vsakega posameznika. Za tisti čas je bila ta teorija velik dosežek v ekonomiji, in je zato prevladovala še naslednjih 250 let. Šele leta 1979 sta psihologa Daniel Kahneman in Amos Tversky predstavila teorijo, ki je konsistenta s tako imenovano *vedenjsko ekonomijo*, in v modelu upošteva tudi psihološke značilnosti posameznika ter druge dejavnike, s katerimi se posamezniki odločajo pri investicijah.

Vendar preden se je uveljavilo, tekom 20. stoletja, veliko novih ekonomskih teorij, med katerimi seveda tudi teorije v skladu z vedenjsko ekonomijo, se je teorija pričakovane koristnosti, skupaj z novim pojmom funkcije koristnosti, šele začela razvijati v ostale smeri. Na začetku 20. stoletja, hvala trditvi, ki sta jo dokazala von Neumann in Morgenstern, so se začeli razni ekonomisti spraševati o raznih lastnostih investitorja in kako so te povezane s funkcijo koristnosti. Eden izmed pojmov, ki je večino ekonomistov zanimal je pojem nenaklonjenosti tveganju. V naslednjem poglavju je pojasnjeno, kako je prišlo do Arrow-Prattovih mer nenaklonjenosti tveganju.

3. Mera nenaklonjenosti tveganju

Do sedaj smo prišli do ugotovitve, da mora človek zadoščati von Neumann-Morgensternovim aksiomom zato, da je lahko definiran kot racionalen igralec in da lahko zanj najdemo funkcijo koristnosti, ki predstavlja njegove preference.

Kadar smo za igralca definirali funkcijo koristnosti, se racionalen igralec pred tvegano igro tako odloči, da maksimizira pričakovano koristnost, saj to teorija predvideva. To implicira, da je lahko igralec tudi nenaklonjen tveganju, torej, da se lahko odreče igri, saj v primeru, da je pričakovana koristnost igre manjša od 0 je zanj boljše, da ne igra.

Kadar ima posameznik funkcijo koristnosti, obstaja več načinov kako definirati, ali je nenaklonjen tveganju. Poglejmo si jih.

3.1. Nenaklonjenost kot konkavnost funkcije koristnosti.

V modelu je igralec nenaklonjen tveganju, če za vsako loterijo $F()$ je degenerirana loterija, ki garantira izplačilo enako pričakovani vrednosti F (veljati mora torej $E(F) =$ garantirano izplačilo), preferirana kot sama loterija F. Če posameznik nima preferenc med obema loterijama, potem je indiferenten med loterijama. Posameznik je naklonjen tveganju, če vedno preferira loterijo F. To izhaja iz tega, da je igralec nenaklonjen tveganju, ko ima raje garantirano izplačilo, kot da tvega v igri. Za igralca naklonjenega tveganju velja ravno obratno.

Imejmo Bernoullijevo funkcijo koristnosti $u()$, ki predstavlja preference posameznika. Potem je, glede na informacije v prejšnjem odstavku, pozameznik nenaklonjen tveganju, če velja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)dF(x) \leq u\Big(\int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)\Big)$$

za vse $F()$, saj mora biti koristnost garantiranega izplačila večja ali enaka pričakovani koristnosti loterije $F()$, in sicer

$$E(u(F)) \leq u(E(F)).$$

Opazimo, da imamo opravka z Jensenovo neenakostjo, ki v tem primeru velja, če je funkcija $u(x)$ konkavna (striktno gledano velja neenakost v obratno smer v primeru konveksne funkcije, temu nato pravimo Jensenova neenakost). Sledi, da je nenaklonjenost tveganju ekvivalentna konkavnosti Bernoullijeve funkcije koristnosti $u(x)$. Z enostavnim izračunom lahko preverimo, da če je funkcija linearna, je posameznik indiferenten do tveganja, če pa je funkcija konveksna, je posameznik naklonjen tveganju.

3.2. Lokalna nenaklonjenost tveganju.

Z Jensenovo neenakostjo smo torej določili, da v primeru konkavne funkcije koristnosti $u(x)$ je posameznik nenaklonjen tveganju. Intuitivno je, da mora torej v meri nenaklonjenosti tveganju nastopati tudi drugi odvod funkcije koristnoti. Iz analize vemo, da predstavlja drugi odvod funkcije $u(x)$ "ukrivljenost grafa". Funkcija s pozitivnim drugim odvodom je konveksna, to pomeni da za vsak par točk x in y, ki ležita v nekem intervalu (a, b) iz definicijskega območja funkcije velja, da v pasu t $(x \leq t \leq y)$, leži graf funkcije pod sekanto skozi točki $(x, u(x))$ in $(y, u(y))$, ali se z njo ujema. Spomnimo se še, da če je funkcija konveksna, je zvezna. Funkcija z negativnim drugim odvodom je konkavna.

Naj bo dana Bernoullijeva funkcija koristnosti $u()$, ki je dvakrat odvedljiva (to bomo od sedaj naprej kar vedno predpostavili). Potem je Arrow-Prattova mera *absolutne nenaklonjenosti tveganju* pri x definirana kot:

$$r_A = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$$

Opazimo, da samo drugi odvod funkcije koristnosti, in sicer $u''(x)$, ni bil izbran kot kriterij za evalvacijo nenaklonjenosti tveganju. Odgovor na vprašanje, zakaj ta kriterij ni zadosten, je enostaven.

Funkcija koristnosti ni natančno določena, lahko se spreminja z afinimi transformacijami. Drugi odvod pa ni invarianten glede na afine transformacije, od kriterija za nenaklonjenost tveganju pa si želimo, da ostane konstanten, ne glede na afine transformacije na funkciji. Zato sta dva pomembna ekonomista prve polovice 20. stoletja, Arrow in Pratt, oblikovala tak kriterij, ki ostaja konstanten, ne glede na afine transformacije funkcije koristnosti. To je ravno mera absolutne nenaklonjenosti tveganju. Opazimo, da ima kvocient $\frac{u"(x)}{u'(x)}$ negativen predznak v primeru nenaklonjenosti tveganju, zato je smiselno postaviti tej meri negativni predznak zato, da večja kot je vrednost indeksa, več je posameznik s funkcijo koristnosti $u()$ nenaklonjen tveganju.

Za dva igralca (1 in 2) z dvakratno odvedljivimi konkavnimi funkcijami koristnosti u_1 in u_2, torej velja, da je posameznik 2 manj naklonjen tveganju kot posameznik 1 glede na x, če

$$r_A^1 = -\frac{u_1''(x)}{u_1'(x)} \leq -\frac{u_2''(x)}{u_2'(x)} = r_A^2. \tag{1}$$

Obstaja tudi druga lokalna mera nenaklonjenosti tveganju, ki ji pravimo koeficient *relativne nenaklonjenosti tveganju* pri x. Ob Bernoullijevi funkciji koristnosti $u()$ je ta definiran z:

$$r_R = x \cdot \frac{-u''(x)}{u'(x)} = x \cdot r_A.$$

Enačbo lahko naknadno razvijemo:

$$r_R = x \cdot \frac{-u''(x)}{u'(x)} = \frac{du'(x)}{dx} \cdot \frac{x}{u'(x)} = \frac{\frac{du'(x)}{u'(x)}}{\frac{dx}{x}} = \frac{\%\Delta u'}{\%\Delta x}.$$

Koeficient relativne nenaklonjenosti tveganju je kvocient med odstotno spremembo u' in odstotno spremembo x.

3.3. **Globalna nenaklonjenost tveganju.**

Prejšnji dve meri nenaklonjenosti tveganju merita lokalno nenaklonjenost tveganju, torej nenaklonjenost tveganju v neki točki x. Želimo si tudi tak kriterij, ki bi določal, če je en investitor konstantno manj naklonjen tveganju kot drugi. Zato lahko uporabimo kriterij globalne nenaklonjenosti tveganju, ki primerja funkciji koristnosti.

Naj bosta dani Bernoullijevi dvakratno odvedljivi funkciji koristnosti u_1 in u_2 za posameznika 1 in 2. Tedaj je posameznik 2 globalno manj naklonjen tveganju kot posameznik 1, če in samo če obstaja taka konkavna funkcija Ψ, da velja:

$$u_2(x) = \Psi(u_1(x)). \tag{2}$$

Potem pravimo, da je u_2 konkavna transformacija funkcije u_1.

3.4. **Premija za tveganje in zagotovljeni ekvivalent.**

Koncept nenaklonjenosti tveganju lahko povežemo s premijo za tveganje in zagotovljenim ekvivalentom. Ob istih predpostavkah kot v prejšnjem razdelku, je posameznik 2 manj naklonjen tveganju kot posameznik 1, če velja:

$$c(F, u_2) < c(F, u_1)$$

in ker je $\rho(F, u) = E(F) - c(F, u)$, potem:

$$\rho(F, u_2) > \rho(F, u_1) \tag{3}$$

Ta rezultat je smiseln, saj bo investitor z večjo premijo za tveganje potreboval večjo nagrado zato, da bo investiral v tvegano igro, drugi investitor pa se bo zadovoljil z manjšo. Podobno velja za zagotovljeni ekvivalent: z manjšim zneskom denarja se bo prej zadovoljil investitor, ki je manj naklonjen tveganju.

Izrek 3.1. *Pri danih dvakratno odvedljivih funkcijah koristnosti so mere nenaklonjenosti tveganju* (1), (2) *in* (3) *med seboj ekvivalentne.*

Temu izreku pravimo tudi Prattov izrek, ki trdi, da če je u_2 konkavna transformacija funkcije u_1 na intervalu $[a, b]$, potem je za vse x mera absolutne nenaklonjenosti tveganju večja za igralca 2 kot za igralca 1 in ima igralec 2 višjo premijo za tveganje. To lahko izrazimo z neenakostmi:

$$r_A(x, u_2) \geq r_A(x, u_1) \quad \text{za vse} \quad x \in [a, b]$$

ter

$$\rho(F, u_2) \geq \rho(F, u_1) \quad \text{za vse} \quad F().$$

Za boljše razumevanje koeficientov nenaklonjenosti tveganju si oglejmo primer, v katerem imamo funkcije koristnosti, ki zadoščajo von Neumann-Morgensternovim aksiomom.

Primer 3.2. Imejmo posameznika s funkcijo koristnosti $u_1(x) = \sqrt{x}$. Ta funkcija je konkavna. Čeprav je funkcija neomejena, se lahko omejimo na nek določeni interval $[0, a]$, kjer je $a < \infty$. Na takem intervalu bo funkcija omejena. Loteriji, med katerima izbiramo sta:

$$L_1 \sim \begin{pmatrix} 1000 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad L_2 \sim \begin{pmatrix} 100 & 1900 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Najprej izračunajmo pričakovano koristnost obeh loterij:

$$E(u_1(L_1)) = u_1(L_1) = \sqrt{1000} = 31,62$$

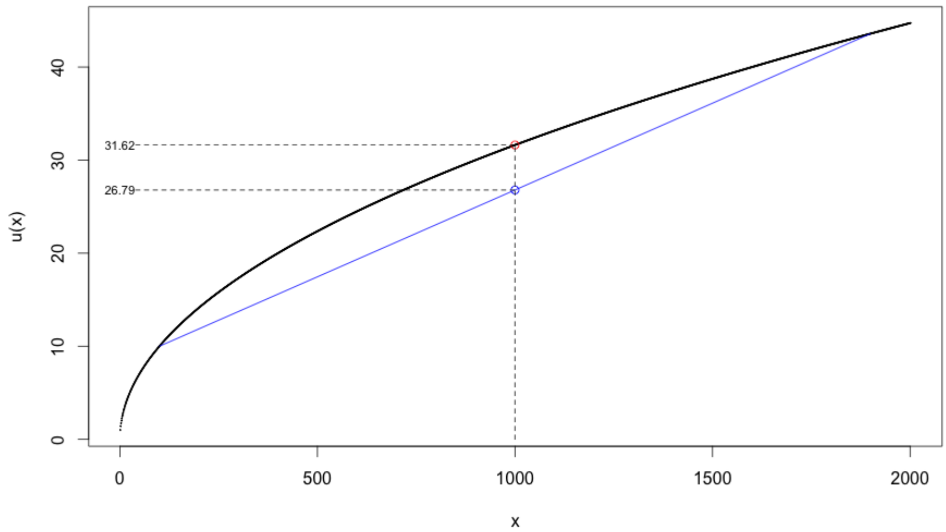
$$E(u_1(L_2)) = \sqrt{100} \cdot 0.5 + \sqrt{1900} \cdot 0.5 = 26,79$$

Sedaj pa izračunajmo še koristnost pričakovane vrednosti:

$$u_1(E(L_1)) = \sqrt{E(L_1)} = \sqrt{1000 \cdot 1} = 31,62$$

$$u_1(E(L_2)) = \sqrt{E(L_2)} = \sqrt{100 \cdot 0.5 + 1900 \cdot 0.5} = 31,62$$

Koristnost glede na pričakovanja je torej enaka pri obeh loterijah, vendar je pričakovana koristnost večja pri loteriji, ki garantira znesek 1000 d.e. kot pri loteriji, kjer tvegamo med dvema različnima zneska. To je razvidno tudi iz grafa iz slike 1. Modra daljica predstavlja pričakovano koristnost vseh možnih kombinacij loterij oblike $L \sim \begin{pmatrix} 100 & 1900 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$.



SLIKA 1. Funkcija koristnosti posameznika 1

Poglejmo si primer loterije

$$L \sim \begin{pmatrix} 100 & 1900 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Tukaj je koristnost glede na pričakovanja

$$u_1(E(L)) = \sqrt{E(L)} = \sqrt{100 \cdot 0.3 + 1900 \cdot 0.7} = 36,87,$$

pričakovana koristnost te loterije pa je

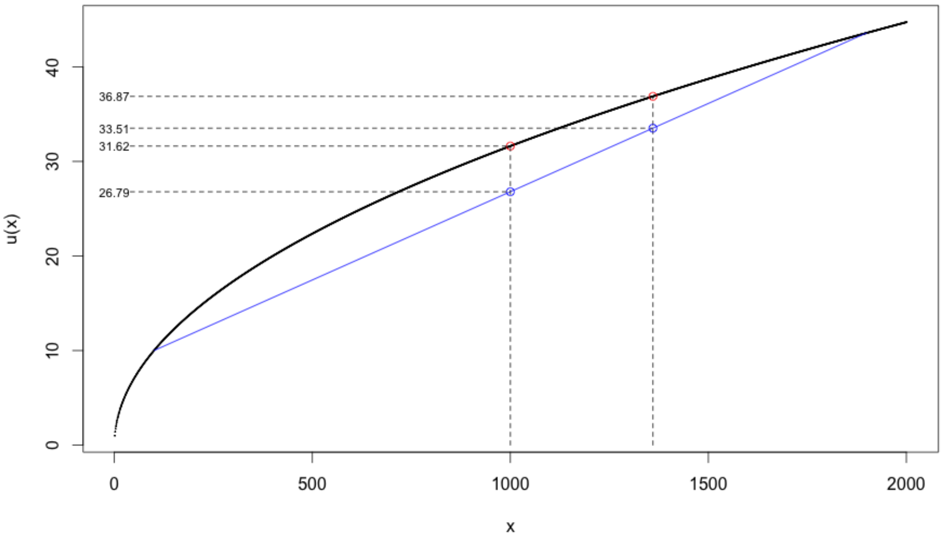
$$E(u_1(L)) = \sqrt{100} \cdot 0.3 + \sqrt{1900} \cdot 0.7 = 33,51.$$

Te vrednosti označimo na grafu iz slike 2, skupaj s prejšnjimi. Opazimo, da je pričakovana koristnost večja za tisto loterijo, za katero je verjetnost višjega donosa večja. To je v skladu s teorijo, saj nam večja nagrada, v tem primeru utežena z večjo verjetnostjo, prinaša večjo korist.

V obeh primerih s tako (konkavno) funkcijo koristnosti je torej posameznik preferiral igro z zagotovljenim zneskom. Kot predhodno povedano, velja torej, da ob konkavni funkciji koristnosti je posameznik nenaklonjen tveganju. Tudi grafično lahko sklepamo, da ob funkciji koristnosti oblike $u(x) = kx + n$, je posameznik indiferenten tveganju, saj se bo premica ujemala z daljico, ki predstavlja vse možne kombinacije loterij L. Sledi, da je ob konveksni funkciji koristnosti posameznik naklonjen tveganju.

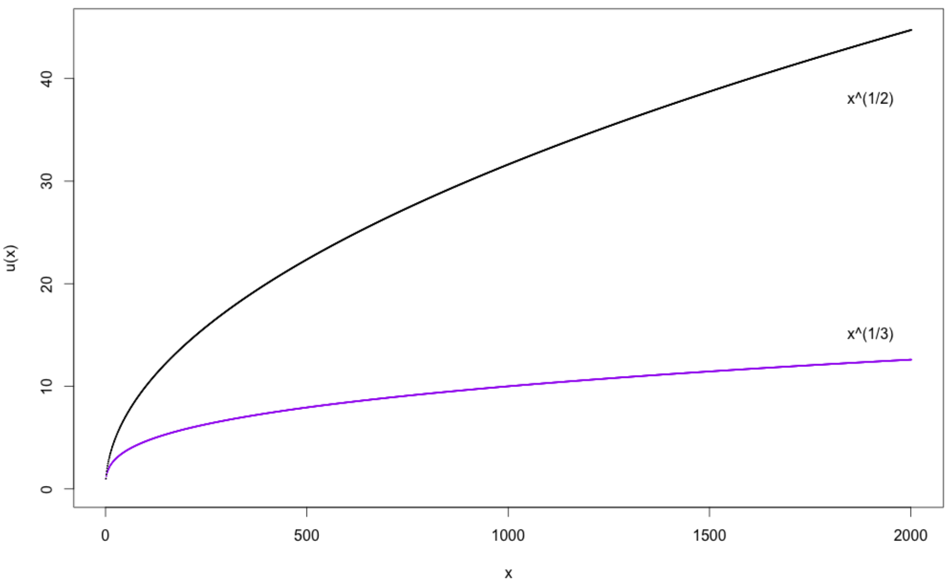
Imejmo sedaj pri loterijah L_1 in L_2 še posameznika 2 s funkcijo koristnosti $u_2(x) = \sqrt[3]{x}$. Funkcijo koristnosti posameznika 2 (u_2) lahko zapišemo kot $u_2 = (u_1)^{\frac{2}{3}}$. Res:

$$u_2(x) = x^{\frac{1}{2}^{\frac{2}{3}}} = x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}.$$



Slika 2

Torej je u_2 res konkavna transformacija u_1. Iz tega mora slediti, da je posameznik 2 manj naklonjen tveganju kot posameznik 1. Izračunajmo za loterijo L_2 še zagotovljena ekvivalenta ter premiji za tveganje in se prepričajmo, da je to res.



Slika 3

Od prej imamo

$$E(u_1(L_2)) = \sqrt{100} \cdot 0,5 + \sqrt{1900} \cdot 0,5 = 26,79$$

in

$$u_1(E(L_2)) = \sqrt{E(L_2)} = \sqrt{100 \cdot 0,5 + 1900 \cdot 0.5} = 31,62$$

Zagotovljeni ekvivalent mora zadoščati

$$u_1(c(L_2, u_1)) = E(u_1(L_2)) = 26,79$$

torej

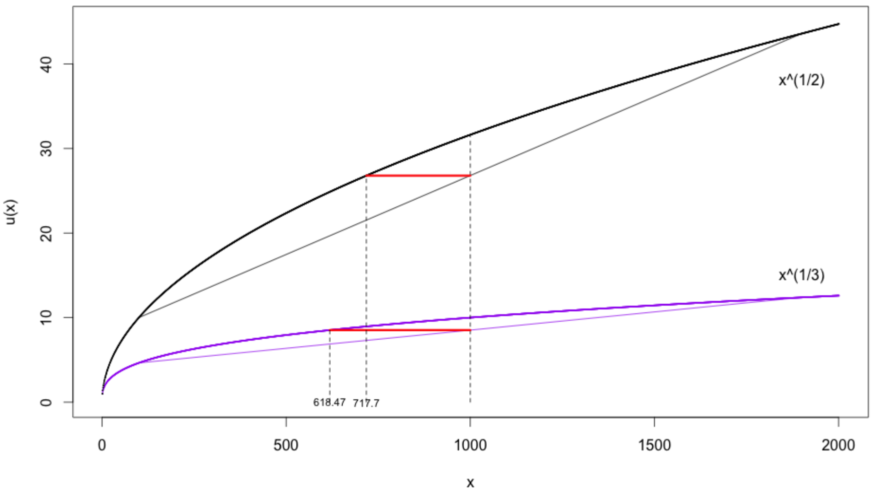
$$c(L_2, u_1) = u_1^{-1}(26,79) = 26,79^2 = 717,70.$$

Premija za tveganje je enaka

$$\rho(L_2, u_1) = E(L_2) - c(L_2, u_1) = 1000 - 717,70 = 282,30.$$

Lokalna nenaklonjenost tveganju v točki x je

$$r_A^1 = \frac{-u_1''(x)}{u_1'(x)} = -\frac{-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2x}.$$



Slika 4

Podobno izračunamo še za drugega igralca, s tem da moramo prej izračunati še pričakovano koristnost igre in korist glede na pričakovano vrednost.

$$E(u_2(L_2)) = \sqrt[3]{100} \cdot 0,5 + \sqrt[3]{1900} \cdot 0,5 = 8,52$$

$$u_2(E(L_2)) = \sqrt[3]{E(L_2)} = \sqrt[3]{100 \cdot 0,5 + 1900 \cdot 0.5} = 10$$

Tudi za posameznika 2, ker ima konkavno funkcijo koristnosti velja, da je nenaklonjen tveganju. Zagotovljeni ekvivalent mora zadoščati

$$u_2(c(L_2, u_2)) = E(u_2(L_2)) = 8,52$$

in podobno kot prej

$$c(L_2, u_2) = u_2^{-1}(8,529) = 8,52^3 = 618,47.$$

Premija za tveganje pa je

$$\rho(L_2, u_2) = E(L_2) - c(L_2, u_2) = 1000 - 618,47 = 381,53.$$

Opazimo, da res velja za pričakovani vrednosti

$$\rho(L_2, u_2) = 381,53 > 282,30 = \rho(L_2, u_1).$$

Izračunajmo še absolutno nenaklonjenost tveganju posameznika 1.

$$r_A^2 = \frac{-u_2''(x)}{u_2'(x)} = -\frac{-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3x}$$

V tem primeru je posameznik 2 globalno manj naklonjen tveganju. Zato mora za vsak x biti tudi lokalno lokalno manj naklonjen tveganju. Preverimo kriterij lokalne nenaklonjenosti tveganju

$$r_A^1 = \frac{-u_1''(x)}{u_1'(x)} = \frac{1}{2x} \leq \frac{2}{3x} = \frac{-u_2''(x)}{u_2'(x)} = r_A^2$$

Tudi ta kriterij je izpolnjen, saj

$$\frac{1}{4x} \leq \frac{1}{3x}$$

za vse $x > 0$.

In smo preverili, da je posameznik 2 res manj naklonjen tveganju kot posameznik 1, saj so vsi Arrow Prattovi kriteriji izpolnjeni. To je razvidno tudi iz slike 4, kjer sta z rdečo barvo označeni premiji za tveganje.

4. Razvoj teorije in ostale mere

Članka, ki sta Arrow in Pratt napisala o nenaklonjenosti tveganju, sta v šestdesetih letih prejšnjega stoletja imeli velik vpliv tako na takratno ekonomsko teorijo tveganja, kot tudi na področjih, kjer se je razne mere tveganja uporabljalo. Zato se je v naslednjih letih ekonomska teorija tveganja začela zelo hitro razvijati v tej smeri in s tem se je Arrow-Prattova teorija še močneje utrdila.

4.1. Interpretacija Arrow-Prattovih mer.

Mere navedene v prejšnjem razdelku so najpomembnejše mere nenaklonjenosti tveganju, čeprav obstajajo še druge. Najbolj uporabljena mera izmed naštetih je koeficient absolutne nenaklonjenosti tveganju in glede na ta koeficient lahko določimo, če je absolutna nenaklonjenost tveganju konstantna, padajoča ali naraščajoča.

V primeru eksponentne koristnosti, to je funkcija koristnosti oblike

$$u(x) = -e^{-\alpha x}$$

velja, da je α koeficient absolutne nenaklonjenosti tveganju, saj

$$r_A = r_A(x,u) = \frac{-u''(x)}{u'(x)} = -\frac{-\alpha^2 \cdot e^{\alpha x}}{\alpha \cdot e^{\alpha x}} = \alpha.$$

Torej je absolutna nenaklonjenost tveganju *konstantna* glede na x. To velja samo za eksponentno in linearno koristnost.

Ker je ta lastnost zelo ugodna, tako funkcijo koristnosti večkrat uporabljamo v ekonomski analizi, vendar večina ekonomistov trdi, da absolutna nenaklonjenost tveganju pada skupaj z naraščanjem premoženja (torej je *padajoča*), kar pomeni, da bogatejši ljudje sprejemajo bolj tvegane odločitve. Ta predpostavka je privedla do koncepta relativne nenaklonjenosti tveganju. Koeficient, ki meri relativno nenaklonjenost tveganju je

$$r_R = x \cdot \frac{-u''(x)}{u'(x)} = x \cdot r_A,$$

kot že navedeno. Ta mera se lahko z x spreminja, zato lahko v določenih odsekih posameznik spremeni funkcijo koristnosti iz konveksne v konkavno ali obratno. Lahko se zgodi torej, da se z različno vrednostjo premoženja spremeni tudi naklonjenost tveganju.

Povrnimo se k absolutni nenaklonjenosti tveganju. Da določimo, ali je padajoča ali naraščajoča, izračunamo prvi odvod koeficienta, in sicer

$$\frac{\partial r_A(x)}{\partial x} = -\frac{u'(x) \cdot u'''(x) - [u''(x)]^2}{[u'(x)]^2}$$

Kot vemo, če je prvi odvod negativen, potem je funkcija padajoča, če pa velja obratno, je naraščajoča. Imenovalec bo vedno pozitiven, kot tudi člen $[u''(x)]^2$, zato lahko koeficient spreminja znak le glede na prvi člen števca. Še dodatni pogoj, ki mora veljati, zato da lahko trdimo, da je nenaklonjenost tveganju padajoča, je pogoj $u'(x) \cdot u'''(x) > 0$.

Primer 4.1. Primer funkcije koristnosti z naraščajočo nenaklonjenostjo tveganju je kvadratična funkcija koristnosti $u(x) = x - ax^2$. Izračunajmo sedaj prvi, drugi in tretji odvod:
$u'(x) = 1 - 2ax$
$u''(x) = 2a$

$u'''(x) = 0$
Koeficient absolutne nenaklonjenosti tveganju:

$$r_A = -\frac{u''(x)}{u'(x)} = -\frac{2a}{1-2ax}$$

Imenovalec mora biti različen od 0, zato mora biti $x \neq \frac{1}{2a}$. Odvod koeficienta je

$$\frac{\partial r_A(x)}{\partial x} = -\frac{u'(x) \cdot u'''(x) - [u''(x)]^2}{[u'(x)]^2} = -\frac{-(2a)^2}{(1-2ax)^2} = \frac{4a^2}{(1-2ax)^2}$$

Imenovalec je pozitiven za katerakoli a in x, tako kot tudi števec (zaradi kvadrata). Za katerikoli x je torej funkcija $r_A(x) > 0$ in sledi, da je nenaklonjenost tveganju naraščajoča.

Kaj to pomeni v praksi? Recimo, da smo investitor, ki ima del svojega premoženja investiranega v nek mešani portfelj, torej imamo več in manj tvegane finančne instrumente. Če je naša nenaklonjenost tveganju padajoča pomeni, da v primeru, ko se naše premoženje poveča, nas ni več tako strah negotovosti, torej bomo del investicij v manj tvegane naložbe preusmerili v bolj tvegane naložbe. Obratno velja za naraščajočo nenaklonjenost tveganju: če premoženje narašča, bomo večji del le tega investirali v manj tvegane naložbe. Intuicijsko lahko sklepamo, da je v povprečju nenaklonjenost tveganju padajoča.

Lastnost padajoče nenaklonjenosti tveganju lahko torej napišemo tudi drugače: x je eden od možnih denarnih zneskov, ki ga lahko dobimo v neki loteriji, w_1 in w_2, $w_1 > w_2$ sta pa dva različna nivoja premoženja. Posameznikova nenaklonjenost tveganju je padajoča, če za njegovo funkcijo koristnosti u velja:

$$r_A(w_1 + x, u) < r_A(w_2 + x, u).$$

4.2. **Kimball in previdnost.**
Miles Kimball, ameriški ekonomist, je 25 let za objavama Arrowa in Pratta objavil članek, ki je postal znan zaradi povezave s previdnostnim varčevanjem (varčevanje denarja zaradi negotovosti glede prihodnjih prihodkov), vendar je ena izmed interpretacij različna. Relevantni koncept pri analizi odločitev je mejna koristnost (in ne celotna koristnost), zato je pomembna karakterizacija tveganja preko njenega vpliva na mejno koristnost. Kimball je namesto premije za tveganje, ki ohranja celotno koristnost konstantno, predlagal uvedbo premije za previdnost (ψ), ki pa ohranja konstantno mejno koristnost. Formalno, za neko loterijo $x + \varepsilon$:

$$E\frac{\partial u(x+\varepsilon)}{\partial x} = \frac{\partial u(E(x+\varepsilon) - \psi(x,\varepsilon))}{\partial x} \tag{4}$$

Če pa si pogledamo premijo za tveganje

$$\rho(x,\varepsilon) = E(x+\varepsilon) - c(x+\varepsilon,u),$$

in to preuredimo v

$$c(x+\varepsilon,u) = E(x+\varepsilon) - \rho(x,\varepsilon) \quad /u$$

$$E(u(x+\varepsilon)) = u(E(x+\varepsilon) - \rho(x,\varepsilon)) \tag{5}$$

Opazimo, da je razlika med (4) in (5) ta, da pri enačbi (4) nastopa odvod funkcije u.

Kimball je premijo za previdnost aproksimiral tako:

$$\psi(x,\varepsilon) \cong \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2} \cdot \Big(-\frac{u'''(x)}{u''(x)}\Big),$$

kjer je $-\frac{u'''(x)}{u''(x)}$ indeks *absolutne previdnosti.*

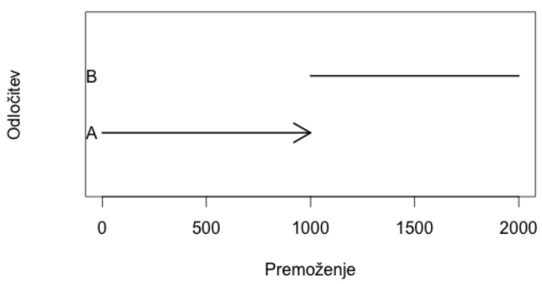
Na analogen način kot sta Arrow in Pratt dokazala, da večji je koeficient absolutne nenaklonjenosti tveganju, manj je posameznik naklonjen tveganju in bo imel v portfelju večji delež varnih naložb, tako je Kimball pokazal, da večja previdnost pomeni večjo količino previdnostnega varčevanja.

Sam Kimball v članku *Precautionary saving in the small and in the large* definira previdnost kot nagnjenost posameznika k temu, da sprejme nek ukrep zaradi negotovosti v prihodnosti, medtem ko pomeni nenaklonjenost tveganju to, da bi se posameznik izognil negotovosti, če bi le to bilo možno.

Podobno kot pri indeksu absolutne nenaklonjenosti tveganju je tudi Kimball predpostavil, da je previdnost padajoča glede na premoženje. Opazimo torej, da je koncept previdnosti tesno povezan s konceptom nenaklonjenosti tveganju, in to sledi iz tega, da je posameznik lahko previden, samo če velja $u'''(x) > 0$. Ista predpostavka velja za padajočo nenaklonjenost tveganju, v primeru, da je prvi odvod funkcije koristnosti pozitiven.

4.3. **Funkcija koristnosti z eno zamenjavo in mešana nenaklonjenost tveganju.**

Dokler so se po eni strani razvijali novi indeksi povezani z nenaklonjenostjo tveganju, po drugi strani so se ekonomisti spraševali, kakšne oblike lahko še imajo funkcije koristnosti, zato da zadoščajo določenim lastnostim. Ena izmed teh je pravilo ene zamenjave.



Slika 5. Pravilo ene zamenjave

Definicija 4.2. Posameznik se drži *pravila ene zamenjave*, če za vsaki dve alternativi odvisni od premoženja obstaja tak nivo premoženja, nad katerim je preferirana prva alternativa, pod tem nivojem premoženja pa druga. *Funkcija koristnosti ene zamenjave* je taka funkcija koristnosti, za katero posameznik maksimizira pričakovano koristnost in obenem zadošča pravilu ene zamenjave. V splošnem, za funkcijo koristnosti n zamenjav velja, da obstaja n takih količin denarja, ki vplivajo na premoženje, pri katerih bo posameznik spremenil izbiro med dvema alternativama.

Fukcija koristnosti z eno zamenjavo je torej taka vrsta funkcije koristnosti, kjer ob izbiri dveh tveganih izidov A in B bo posameznik ob trenutnem premoženju izbral izid A, vendar bi ob drugačni količini denarja (npr. od 1000 Eur več) izbral izid B. Če se torej posameznik drži pravila ene zamenjave pomeni, da bo možnost A izbiral, dokler ne bo njegovo premoženje zraslo za vsaj 1000 Eur. Za vse višje vrednosti premoženja bo pa izbral možnost B.

Ta pojem je definiral David Bell leta 1988 in je dokazal, da funkcija koristnosti zadošča pravilu ene zamenjave če in samo če pripada k eni izmed naslednjih funkcijskih družin:

(1) kvadratična funkcija $u(x) = ax^2 + bx + c$
(2) vsota eksponentnih funkcij $u(x) = ae^{bx} + ce^{dx}$, kjer so konstante a, b, c in d negativne
(3) vsota linearne in eksponentne funckije $u(x) = ax + be^{cx}$, kjer je a pozitiven, b in c pa negativna
(4) produkt linearne in eksponentne funkcije $u(x) = (ax + b)e^{cx}$.

Opazimo, da sta funkciji koristnosti iz točk (1) in (4) taki, da je nenaklonjenost tveganju naraščajoča.

Članek, ki ga je napisal Bell, ni imel veliko odmeva, vendar sta skoraj deset let kasneje ekonomista Jordi Caballé in Alexey Pomansky napisala članek o mešani nenaklonjenosti tveganju. Takoj na začetku članka sta avtorja napisala ugotovitev, da ima večina funkcij koristnosti, uporabljenih v primerih izbire pred negotovostjo, vse lihe odvode pozitivne in vse sode odvode negativne. Funkcije, ki zadoščajo tej lastnosti so prav vsote eksponentnih funkcij, oziroma *mešane eksponentne funkije* (iz točke (2)). Posameznik s tako funkcijo koristnosti je torej *mešano nenaklonjen tveganju.*

Za predstavo svojih ugotovitev sta Caballé in Pomansky predstavila tudi enostaven primer t.i. *sodih* in *lihih* loterij.

Primer 4.3. Pošten kovanec vržemo n-krat. Za prvi tip loterije - sode loterije- je dobiček posameznika $k \cdot h$ za nek pozitiven znesek h, če je padlo sodo število cifer, torej k , ter ničelen, če je padlo liho število cifer. Za drugi tip loterije - lihe loterije- velja obratno: dobiček je $k \cdot h$, če je število cifer (k) liho in nič sicer.

Lihe loterije **Sode loterije**

- n=1

$$L_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & h \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad L_2 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- n=2

$$L_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & h \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad L_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2h \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- n=3

$$L_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & h & 3h \\ 4/8 & 3/8 & 1/8 \end{pmatrix} \qquad L_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 2h \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

- ...

Opazimo, da so za vsak n vsi $(n-1)$. momenti sodih in lihih loterij enaki. Kadar je n sod je nato n-ti moment sode loterije večji kot n-ti moment lihe loterije, obratno se zgodi za lihi n.

Preverimo, da to res velja za n=3:

$E[L_1] = h \cdot \frac{3}{8} + \frac{3h}{8} = \frac{6h}{8}$ $\qquad$ $E[L_2] = 2h \cdot \frac{3}{8} = \frac{6h}{8}$

$E[(L_1)^2] = h^2 \cdot \frac{3}{8} + \frac{(3h)^2}{8} = \frac{12h^2}{8}$ $\qquad$ $E[(L_2)^2] = (2h)^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{12h^2}{8}$

$E[(L_1)^3] = h^3 \cdot \frac{3}{8} + \frac{(3h)^3}{8} = \frac{30h^3}{8}$ $\qquad$ $E[(L_2)^3] = (2h)^3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{8h^3}{8}$

torej $E[(L_1)^i] = E[(L_2)^i]$ za $i = 1, 2$ in $E[(L_1)^3] > E[(L_2)^3]$. Tretji moment lihe loterije je večji kot tretji moment sode loterije. Pri takih igrah je zanimivo to, da če je posameznik mešano nenaklonjen tveganju s funkcij koristnosti $u(x)$, potem za vsak n in za vsak h ter za vsako nenegativno vrednost premoženja x vedno preferira liho loterijo.

Članek je predvsem pomemben zato, ker sta bila Caballé in Pomansky med prvimi, ki sta analizirala povezavo med momenti loterij (na izbiro posameznika) in značilnostmi funkcije koristnosti posameznika. Kasneje so tudi drugi pomembni ekonomisti v svojih člankih poudarili pomen koeficienta asimetrije in kurtosisa za ocenjevanje tveganj na finančnih trgih.

Avtorja članka sta tudi razširila koeficient absolutne nenaklonjenosti tveganju do višjih redov:

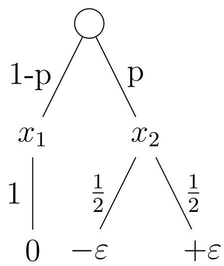
$$A_n(x) = -\frac{u^{(n+1)}(x)}{u^{(n)}(x)}.$$

Ta koeficient predstavlja *n-to stopnjo nenaklonjenosti tveganju.* Pokazala sta, da je posameznik mešano nenaklonjen tveganju, če in samo če je $A_n(x)$ nenaraščajoč v x za vse $n \in \mathbb{N}$. Poleg tega, se je indeks izkazal zelo uporaben pri primerjavi dveh loterij z enako pričakovano vrednostjo in varianco, ali tudi več enakimi višjimi momenti. Največkrat, skupaj z indeksom absolutne previdnosti, uporabljamo indeks absolutne umirjenosti (absolute temperance), ki je definiran kot kvocient med četrtim in tretjim odvodom funkcije koristnosti, oziroma $-\frac{u^{(4)}(x)}{u^{(3)}(x)}$.

4.4. **Močnejše mere nenaklonjenosti tveganju.**

Medtem je Stephen Ross v reviji *Econometrica* leta 1981 postavil pomembno vprašanje: iz pogoja (1) iz razdelka 3.2 je razvidno, da sta Arrow in Pratt večinoma primerjala eno tvegano situacijo z eno netvegano. Ross se torej vpraša, ali se vse *lepe* lastnosti ohranijo, ko primerjamo dve *podobno* tvegani situaciji? Ross je uporabil strukturo, kjer se posameznik sooča z dvema tveganima situacijama in je pripravljen plačati, da se enega vira tveganja znebi.

Struktura je naslednja (loterija $\tilde{x} + \tilde{\varepsilon}$):



V tem primeru Ross analizira primer, ko se je posameznik pripravljen znebiti $\tilde{\varepsilon}$, medtem ko se začetno tveganje $\tilde{x}$ obdrži. Pomembno je tudi to, da tveganji nista neodvisni, in velja $E[\tilde{\varepsilon}|\tilde{x} = x] = 0$.

Pričakovana koristnost loterije $\tilde{x} + \tilde{\varepsilon}$ pri neki funkciji koristnosti $u(x)$ je:

$$E[u(\tilde{x} + \tilde{\varepsilon})] = p \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot u(x_1 - \varepsilon) + \frac{1}{2} \cdot u(x_1 + \varepsilon)\right] + (1 - p) \cdot u(x_2).$$

To aproksimiramo s pomočjo Taylorjeve vrse (člene višjih redov zanemarimo):

$$E[u(\tilde{x} + \tilde{\varepsilon})] \approx p \cdot u(x_1) + (1 - p) \cdot u(x_2) + \frac{1}{2} \cdot p \cdot u''(x_1)\varepsilon^2.$$

Pričakovana koristnost loterije, kjer se pa $\tilde{\varepsilon}$ znebimo, s tem da plačamo premijo π_u:

$$E[u(\tilde{x} - \pi_u)] = p \cdot u(x_1 - \pi_u) + (1 - p) \cdot u(x_2 - \pi_u),$$

saj loterija, označena z $\tilde{\varepsilon}$, ne predstavlja več težave. Cena tega je premija π_u, zato moramo v pričakovano koristnost upoštevati tudi to, saj predstavlja denarni znesek in pripomore k koristnosti. Enačbo lahko spet aproksimiramo s Taylorjevo vrsto (člene višjih redov zanemarimo):

$$E[u(\tilde{x} - \pi_u)] \approx p \cdot u(x_1) + (1 - p) \cdot u(x_2) - [p \cdot u'(x_1) + (1 - p) \cdot u'(x_2)] \cdot \pi_u.$$

Ross torej aproksimira premijo, ki jo je posameznik pripravljen plačati tako, da odšteje $E[u(\tilde{x} + \tilde{\varepsilon})]$ od $E[u(\tilde{x} - \pi_u)]$ ter enači z 0. To mora veljati zato, da bo posameznik pripravljen plačati premijo za tveganje, pričakovana koristnost obeh loterij pa bi bila enaka. Dobimo

$$\pi_u(\tilde{\varepsilon}) \approx \frac{0.5pu''(x_1)\varepsilon^2}{pu'(x_1) + (1 - p)u'(x_2)}.$$

Nato, z uporabo eksponentne funkcije, pokaže, da čeprav je posameznik s funkcijo koristnosti v manj naklonjen tveganju kot posameznik s funkcijo koristnosti u, se lahko zgodi:

$$\pi_v(\tilde{\varepsilon}) < \pi_u(\tilde{\varepsilon}).$$

To se zgodi predvsem zato, ker se korist zmanjšanja tveganja opazi samo pri enem stanju (x_1), medtem ko se premijo plača takoj na začetku, torej za obe stanje. Zato je Ross uvedel novo mero nenaklonjenosti tveganju, ki ji pravimo *stroga nenaklonjenost tveganju*.

Definicija 4.4. v je strogo manj naklonjen tveganju kot u če in samo če za vsak par (x_1, x_2) obstaja pozitivna konstanta λ, tako da:

$$\frac{v''(x_1)}{u''(x_1)} \geq \lambda \geq \frac{v'(x_2)}{u'(x_2)}$$

in ekvivalentno

$$\pi_v(\tilde{\varepsilon}) \geq \pi_u(\tilde{\varepsilon}).$$

Leva stran enačbe predstavlja relativno povečanje škode povzročene s tveganjem z ničelno pričakovano vrednostjo; desna stran predstavlja relativno povečanje škode povzročene z gotovo izgubo ene denarne enote. Ker so lahko škode povzročene pri različnih časih, potem mora neenačba veljati za vsak par x_1 in x_2.

Ross je nato prišel do pomembne ugotovitve. Predstavil jo je z izrekom.

Izrek 4.5. *Ob dveh posameznikih s funkcijama koristnosti u in v, za katera velja, da je posameznik s funkcijo koristnosti v strogo manj naklonjen tveganju kot u, velja tudi, da je posameznik s funkcijo koristnosti v manj naklonjen tveganju kot posameznik s funkcijo koristnosti u glede na Arrow-Prattov koeficient. Obratno ne velja.*

Dokaz. (S protiprimerom):

Imejmo dva posameznika s funkcijama koristnosti:

$v = -e^{-ax}$, torej $r_A(x, v) = a$ $\qquad$ $u = -e^{-bx}$, torej $r_A(x, u) = b$;

kjer $a > b$. V tem primeru je posameznik s funkcijo koristnosti v manj naklonjen tveganju kot posameznik s funkcijo koristnosti u.

$\frac{v'(x_2)}{u'(x_2)} = \frac{a}{b} \cdot e^{(b-a) \cdot x_2}$ $\qquad$ $\frac{v''(x_1)}{u''(x_1)} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot e^{(b-a) \cdot x_1}$

Opazimo, da za dovolj velike razlike $x_1 - x_2$, se lahko zgodi

$$\frac{v''(x_2)}{u''(x_2)} < \frac{v'(x_2)}{u'(x_2)},$$

torej stroga nenaklonjenost tveganju ne velja.

□

Čeprav je Ross dokazal, da obstaja tudi strožja mera nenaklonjenosti tveganju kot Arrow-Prattova, ostaja ta ena najpomembnejših ugotovitev v teoriji pričakovane koristnosti, kar se tiče nenaklonjenosti tveganju. Obstajajo seveda tudi druge funkcije koristnosti, za katere je Arrow-Prattova mera še dovolj dobra mera nenaklonjenosti tveganju.

5. Zaključek

Pogledali smo si najpomembnejše korake, ki so vodili preko teorije pričakovane koristnosti, do uvedbe Arrow-Prattovih mer nenaklonjenosti tveganju in tiste, ki so tej teoriji sledili. Poleg Arrow-Prattovih mer smo si pogledali še druge pomembne mere, ki jih je treba upoštevati pri analizi investitorjeve funkcije koristnosti, kot so naprimer indeks absolutne previdnosti, absolutne umirjenosti ter ostali koeficienti višjih redov. Ugotovili smo, da čeprav obstajajo močnejše mere nenaklonjenosti tveganju tudi v sami teoriji pričakovane koristnosti, ostaja Arrowa-Prattova mera ena izmed najpomemnejših.

Čeprav se je ekonomska teorija pričakovane koristnosti začela kot rešitev matematičnega problema, je ostala ena izmed najpomembnejših ekonomskih teorij do druge polovice 20. stoletja, in se še danes, s pomočjo znanstvenikov in ekonomistov celega sveta, razvija v vse smeri, predvsem koncept nenaklonjenosti tveganju in ostali pojmi, ki definirajo lastnosti investitorja. To je ostal skozi desetletja, eden izmed najzanimivejših ekonomskih problemov, seveda tudi v drugih ekonomskih teorijah, in je še sedaj zelo aktualna tema tudi v drugih vedah.

Literatura

[1] Yvan Lengwiler, *The Origins of Expected Utility Theory* (Junij 2008), pdf, dostopno na internetu.

[2] Tim Gronberg, *Risk Aversion and Expected Utility* , dostopno na http://econweb.tamu.edu/tgronberg/Old\%20Semesters/629\%20F06/629_Lecture13_Slides.pdf.

[3] Leopold Sogner, gradivo za predmet "Microeconomics 1"(September 2012), dostopno na internetu.

[4] Ted Bergstrom, *Notes on Uncertainty and Expected Utility* (November 2013), dostopno na http://www.econ.ucsb.edu/~tedb/Courses/GraduateTheoryUCSB/NotesExpectedUtility.pdf.

[5] Philippe Mongin, *Expected Utility Theory*, dostopno na https://studies2.hec.fr/jahia/webdav/site/hec/shared/sites/mongin/acces_anonyme/page\%20internet/O12.MonginExpectedHbk97.pdf

[6] Rachel Kranton, *Measuring risk aversion*, dostopno na http://public.econ.duke.edu/~rek8/econ604/lecturenotes/topic2notesparttwo.pdf

[7] *Attitudes Toward Risk*, [ogled 23. 03. 2015], dostopno na http://ocw.mit.edu/courses/economics/14-123-microeconomic-theory-iii-spring-2010/lecture-notes/MIT14_123S10_notes04.pdf

[8] Louis Eeckhoudt, *Arrow-Pratt's risk aversion: 50 years later*, pdf, dostopno na internetu.

[9] Thorsten Hens, Kremena Bachmann, *Behavioural Finance for Private Banking* (Julij 2011), pdf, dostopno na internetu.

[10] Jordi Caballé, Alexey Pomansky, *Mixed Risk Aversion*, Journal of economic theory 71, (1996), strani 485-513

[11] Miles S. Kimball,*Precautionary Saving in the Small and in the Large*, Econometrica, Vol. 58 (Januar 1990), strani 53-73

[12] David E. Bell, *One Switch Utility Functions and a Measure of Risk*, Management Science, Vol. 34 (December 1988), strani 1416-1424

[13] Stephen A. Ross, *Some Stronger Measures of Risk Aversion in the Small and the Large with Applications*,Econometrica,Vol. 49, No. 3 (Maj, 1981), strani 621-638

[14] Arthur Rubinstein, *Lecture Notes in Microeconomic Theory*, Lecture 8, Princeton University Press (2006)

[15] *Risk Aversion*, [ogled 24. 10. 2014], dostopno na http://www.investopedia.com/terms/r/riskaverse.asp

[16] *Risk Aversion*, [ogled 16. 03. 2015], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Risk_aversion

[17] *Certainty equivalent*, [ogled 24. 10. 2014], dostopno na http://www.investopedia.com/terms/c/certaintyequivalent.asp

[18] *Risk Premium*, [ogled 24. 10. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Risk_premium

[19] *Expected Utility*, [ogled 25. 10. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Expected_utility_hypothesis

[20] *St. Petersburg Paradox*, [ogled 25. 10. 2014], dostopno na http://plato.stanford.edu/entries/paradox-stpetersburg/

[21] *Risk Premium*, [ogled 24. 10. 2014], dostopno na http://economics.about.com/library/glossary/bldef-cara-utility.htm

[22] *Gabriel Cramer*, [ogled 06. 09. 2015], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Gabriel_Cramer

[23] *Risk Aversion*, [ogled 07. 09. 2015], dostopno na http://www.econport.org/econport/request?page=man_ru_advanced_riskaversion

[24] *Utility*, [ogled 08. 09. 2015], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Utility#Utility_functions