UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Gašper Čampa

Sistemi diferenčnih enačb v ekonomiji

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Jasna Prezelj

Ljubljana, 2015

Kazalo

1. Diferenčne enačbe 4
2. Reševanje sistemov 6
2.1. Prevedba sistema na diferenčne enačbe n - tega reda 6
2.2. Prevedba diferenčne enačbe n - tega reda na sistem 6
2.3. Jordanova kanonična forma 7
2.4. Homogena rešitev 9
2.5. Partikularna rešitev 10
2.6. Stabilnostni pogoji 11
3. Sistemi diferenčnih enačb v ekonomskih modelih 18
3.1. Cournotov model oligopola 18
3.2. Multiplikator efektov v odprti ekonomiji 20
3.3. Oligopol in mednarodna trgovina 23
Literatura 26

Sistemi diferenčnih enačb v ekonomiji

Povzetek

Delo diplomskega seminarja se začne s splošnim definiranjem diferenčnih enačb ter sistemov diferenčnih enačb. Nato je razloženo kako rešujemo sisteme, saj so bolj pregledni kot enačbe n - tega reda. Pri reševanju si bolj podrobno pogledamo Joradnovo kanonično formo, saj je ena izmed hitrejših metod za reševanje diferenčnih sistemov. Ker si v zadnjem poglavju dela diplomskega seminarja pogledamo tri splošne primere sistemov diferenčnih enačb v ekonomskih modelih in njihove rešitve, so v nalogi definirani tudi stabilnostni pogoji. S stabilnostnimi pogoji seveda preverjamo ali so ekonomski modeli stabilni ali ne, kjer smo pogoje ločili na potrebne in zadostne pogoje. Zaradi stabilnostnih pogojev je v nalogi prav tako definiran Perron - Frobeniusov izrek, s pomočjo katerega nekatere stabilnostne pogoje tudi dokažemo.

Systems of Difference Equations in Economy

Abstract

The thesis begins with general defining difference equations and systems of difference equations. Then it is explained how we solve systems, because they are more transparent than n - th order equation. There is greater attention on Jordan canonical form, since it is one of the fastest method for solving difference systems. In the last chapter of the thesis we look at three general cases of systems od difference equations in economic models, we also defined stability conditions. With them we check if economic model is stabile or not, where we separate conditions in necessary and sufficient conditions. Due to stability conditions, we have also defined Perron - Frobeniusov theorem, by means of which we have proved stability conditions.

Math. Subj. Class. (2015):

Ključne besede: Diferenčne enačbe, Jordanova kanonična forma, stabilnostni pogoji, ekonomski model

Keywords: Difference equations, Jordan canonical form, stability conditions, economic models

1. Diferenčne enačbe

Notacija: Z $y_x := y(x)$ označujemo funkcijo y, ki je odvisna od neodvisne spremenljivke x.

Recimo, da imamo diskretno funkcijo y_x. Z x označimo začetno vrednost njene neodvisne spremenljivke in njene vrednosti se spreminjajo po aritmetičnem zaporedju s korakom $h = 1$. Če vrednosti neodvisne spremenljivke naraščajo potem zavzamejo vrednosti

$$x, x+1, x+2, x+3, ...$$

Tedaj tem vrednostim pripadajo funkcijske vrednosti

$$y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, y_{x+3}, \cdots$$

Podobno velja, če vrednosti neodvisne spremenljivke padajo. Če vrednosti neodvisne spremenljivke predstavimo v urejeni množici

$$\{..., x-2, x-1, x, x+1, x+2, ...\} \tag{1}$$

potem tej množici ustreza urejena množica funkcijskih vrednosti

$$\{\ldots, y_{x-2}, y_{x-1}, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots\} \tag{2}$$

Definicija 1.1. Naj bo $y = f(x)$ dana funkcija. Diference prvega reda z začetno vrednostjo x definiramo s predpisom

$$\triangle y_{x+n} = y_{x+n+1} - y_{x+n},$$

ter diference n-tega reda s predpisom

$$\triangle^n y_x = \triangle(\triangle^{n-1} y_x) = \triangle^{n-1} y_{x+1} - \triangle^{n-1} y_x,$$

kjer je $n \geq 1$.
Notacija: $\triangle$ imenujemo *diferenčni operator*

Diference višjih redov lahko definiramo oziroma razpišemo malo drugače. Na primer diference drugega reda

$$\begin{aligned} \triangle^2 y_x &= \triangle(\triangle y_x) = \triangle(y_{x+1} - y_x) = \triangle y_{x+1} - \triangle y_x = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x \\ \triangle^2 y_{x+1} &= \triangle(\triangle y_{x+1} = \triangle(y_{x+2} - y_{x+1}) = \triangle y_{x+2} - \triangle y_{x+1} = y_{x+3} - 2y_{x+2} + y_{x+1} \end{aligned} \tag{3}$$

in tako naprej. In še diference tretjega reda:

$$\begin{aligned} \triangle^3 y_x &= \triangle(\triangle^2 y_x) = \triangle^2 y_{x+1} - \triangle^2 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x \\ \triangle^3 y_{x+1} &= \triangle(\triangle^2 y_{x+1}) = \triangle^2 y_{x+2} - \triangle^2 y_{x+1} = y_{x+4} - 3y_{x+3} + 3y_{x+2} - y_{x+1} \end{aligned} \tag{4}$$

in po podobnem kopitu še nadaljnje diference višjih redov. Opazimo da se vzorec ponavlja, tako da lahko definiramo naslednjo trditev.

Trditev 1.2. *Za diference n-tega reda velja obrazec*

$$\triangle^n y_x = \binom{n}{0} y_{x+n} - \binom{n}{1} y_{x+n-1} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} y_x \tag{5}$$

Dokaz. Zgornjo trditev dokažemo z indukcijo. Najprej za $n = 1$

$$\triangle y_x = \tbinom{1}{0} y_{x+1} - \tbinom{1}{1} y_x = y_{x+1} - y_x$$

Da velja sklep od n na $n+1$, pa preverimo

$$\triangle^{n+1}y_x = \triangle(\triangle^n y_x) = \triangle^n y_{x+1} - \triangle^n y_x = \binom{n}{0}y_{x+n+1} - \binom{n}{1}y_{x+n} + ... +$$
$$(-1)^n\binom{n}{n}y_{x+1} - [\binom{n}{0}y_{x+n} + ... + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}y_{x+1} + (-1)^n\binom{n}{n}y_x] =$$
$$\binom{n+1}{0}y_{x+n+1} - \binom{n+1}{1}y_{x+n} + ... + (-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}y_x$$

□

Definicija 1.3. Naj bo y_x diskretna funkcija definirana na množici zaporednih celih števil $X = \{x+k; k \in \mathbb{Z}\}$. Funkcija naj ima zaporedne diference $\triangle y_x, \triangle^2 y_x, \triangle^3 y_x, ...$. Vsaka enačba, ki vključuje argument x, diskretno funkcijo y_x in eno ali več njenih diferenc $\triangle y_x, \triangle^2 y_x, ...$ se imenuje diferenčna enačba. V splošnem jo zapišemo kot:

$$f(x, y_x, \triangle y_x, \triangle^2 y_x, ..., \triangle^n y_x) = 0$$

Definicija 1.4. Naj bo $f(x, y_x, \triangle y_x, \triangle^2 y_x, ..., \triangle^n y_x) = 0$ dana diferenčna enačba n - tega reda. Če diference izrazimo z zgoraj izpeljanimi formulami, se diferenčna enačba prevede v rekurzivno formulo $g(y_{t+n}, ..., y_t) = 0$. Če hočemo, da je res n - tega reda, mora biti g odvisna od y_t in y_{t+n}, torej mora veljati $\frac{\partial g}{\partial y_{t+n}}, \frac{\partial g}{\partial y_t} \neq 0$.

Nehomogene diferenčne enačbe n - tega reda so enačbe tipa

$$a_n y_{t+n} + a_{n-1} y_{t+n-1} + ... + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = g(t) \tag{6}$$

definirane na množici $T = \{0, 1, 2, ...\}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$ in so $a_i, i = 0, 1, ..., n$ poljubne realne konstante. Konstanti a_n in a_0 sta različni od 0. če je $g(t) = 0$, potem je to homogena enačba. Rešitve nehomogenih diferenčnih enačb so sestavljene iz dveh delov. Prvi del rešitve je splošna rešitev ustrezne homogene enačbe, drugi pa je posebna rešitev nehomogene enačbe imenovana partikularna rešitev.

Definicija 1.5. Naj bo $t \in \mathbb{N}_0$ diskretna spremenljivka, $y_{1t}, y_{2t}, ..., y_{nt} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ naj bodo neznane časovne funkcije, ter $g_1, g_2, ..., g_n : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ znane časovne funkcije. Sistem n diferenčnih enačb prvega reda je

$$\begin{aligned} y_{1(t+1)} &= a_{11}y_{1t} + a_{12}y_{2t} + ... + a_{1n}y_{nt} + g_1(t), \\ y_{2(t+1)} &= a_{21}y_{1t} + a_{22}y_{2t} + ... + a_{2n}y_{nt} + g_2(t), \\ &..., \\ y_{n(t+1)} &= a_{n1}y_{1t} + a_{n2}y_{2t} + ... + a_{nn}y_{nt} + g_n(t) \end{aligned}$$

Zaradi preglednosti pišemo sisteme raje v matrični obliki. Naj bodo

$$\mathbf{y}_{t+1} = \begin{bmatrix} y_{1(t+1)} \\ y_{2(t+1)} \\ ... \\ y_{n(t+1)} \end{bmatrix}, \mathbf{y}_t = \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ ... \\ y_{nt} \end{bmatrix}, \mathbf{g}(t) \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ ... \\ g_n(t) \end{bmatrix}.$$

Tako lahko zapišemo $n \times n$ sistem prvega reda kot

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{g}(t), \tag{7}$$

kjer je $\mathbf{y}_t$ vektor n neznanih časovnih funkcij, $\mathbf{g}(t)$ vektor n znanih časovnih funkcij, ter $\mathbf{A}$ je $n \times n$ matrika danih koeficientov. Ker želimo, da imamo res n različnih diferenčnih enačb, se smemo omejiti na matrike ranga n. V nasprotnem primeru je $\mathbf{A} = \mathbf{PBP}^{-1}$, kjer je $\mathbf{B}$ oblike

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right], \tag{8}$$

matrika $\mathbf{B}_1$ je $k \times k$ dimenzije, in sistem

$$y_{t+1} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1} y_t + g(t) \tag{9}$$

je ekvivalenten

$$\mathbf{P}^{-1} y_{t+1} = \mathbf{B}(\mathbf{P}^{-1} y_t) + \mathbf{P}^{-1}(g(t)). \tag{10}$$

Če pišemo

$$\begin{aligned} z_t &= \mathbf{P}^{-1} y_t \\ n_t &= \mathbf{P}^{-1} g(t) \end{aligned} \tag{11}$$

je sistem tak, da za zadnjih $n-k$ enačb velja

$$z^j_{t+1} = n^j_t, \quad j = k+1, ..., n \tag{12}$$

torej ni diferenčna enačba.

2. Reševanje sistemov

2.1. Prevedba sistema na diferenčne enačbe n - tega reda. Vsak $n \times n$ sistem se da s pomočjo substitucij in z izražanjem enih funkcij z drugimi prevesti na eno diferenčno enačbo n-tega reda z le eno neznano funkcijo. Recimo, da imamo 2×2 sistem

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= a_{11} y_t + a_{12} z_t + g_1(t) \\ z_{t+1} &= a_{21} y_t + a_{22} z_t + g_2(t) \end{aligned} \tag{13}$$

Recimo, da se odločimo da bomo sistem prevedli na diferenčno enačbo drugega reda z neznano funkcijo y. Opazimo, da je funkcija prvega reda, tako bomo za začetek zapisali funkcijo y_{t+2} in nato v to funkcijo vstavili z_{t+1}.

$$\begin{aligned} y_{t+2} &= a_{11} y_{t+1} + a_{12} z_{t+1} + g_1(t+1) \\ &= a_{11} y_{t+1} + a_{12} a_{21} y_t + a_{12} a_{22} z_t + a_{12} g_2(t) + g_1(t+1) \end{aligned} \tag{14}$$

Dobljena funkcija je še vedno odvisna od dveh neznanih funkcij, y in z. Da bo diferenčna enačba odvisna le od ene neznane funkcije, bomo iz prve enačbe iz našega sistema izrazili člen $a_{12} z_t$ in ga vstavili v našo diferenčno enačbo.

$$\begin{aligned} y_{t+2} &= a_{11} y_{t+1} + a_{12} a_{22} y_t + a_{22}(y_{t+1} - a_{11} y_t - g_1(t)) + a_{12} g_2(t) + g_1(t+1) \\ &= (a_{11} + a_{22}) y_{t+1} + (a_{12} a_{21} - a_{11} a_{22}) y_t - a_{22} g_1(t) + a_{12} g_2(t) + g_1(t+1) \end{aligned} \tag{15}$$

Kot vidimo je konstanta pred členom y_t ravno $-\det(A)$. Torej, da je dobljena enačba res n-tega reda, mora bit $\det(A) \neq 0$.

2.2. Prevedba diferenčne enačbe n - tega reda na sistem. Prav tako se da diferenčno enačbo n-te stopnje prevesti na $n \times n$ sistem. Recimo, da imamo enačbo n - tega reda

$$y_{t+n} + a_{n-1} y_{t+n-1} + ... + a_1 y_{t+1} + a_0 y_t = g(t) \tag{16}$$

Kako sedaj iz ene enačbe dobimo n enačb? Za začetek rahlo spremenimo notacijo in sicer $y_{t+n-i} = y_{n+i}(t), i = 0, 1, ..., n$. Nato določimo n enačb, katere zložimo v vektor

$$\begin{bmatrix} y_0(t+1) \\ y_1(t+1) \\ ... \\ y_{n-1}(t+1) \end{bmatrix} \tag{17}$$

Tem enačbam določimo vrednosti

$$\begin{aligned} y_0(t+1) &= y_1(t) \\ y_1(t+1) &= y_2(t) \\ &... \\ y_{n-2}(t+1) &= y_{n-1}(t) \\ y_{n-1}(t+1) &= -a_0 y_0(t) - a_1 y_1(t) - ... - a_{n-1} y_{n-1}(t) + g(t) \end{aligned} \tag{18}$$

Tako lahko vse skupaj zložimo v matrično/vektorsko obliko

$$\begin{bmatrix} y_0(t+1) \\ y_1(t+1) \\ ... \\ y_{n-2}(t+1) \\ y_{n-1}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & ... & -a_{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ ... \\ y_{n-2}(t) \\ y_{n-1}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ g(t) \end{bmatrix} \tag{19}$$

A vse te spremembe sistema so časovno zamudne in pomeni le večje število enačb, zato so direktne metode reševanja bolj primerne. Če za primer vzamemo naslednji homogeni sistem

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= a_{11} y_t + a_{12} z_t + a_{13} w_t \\ z_{t+1} &= a_{21} y_t + a_{22} z_t + a_{23} w_t \\ w_{t+1} &= a_{31} y_t + a_{32} z_t + a_{33} w_t \end{aligned} \tag{20}$$

lahko nemudoma sestavimo karakteristično enačbo

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Ko determinanto razpišemo dobimo karakteristični polinom tretje stopnje, katerega ničle označimo z λ_1, λ_2 in λ_3. To je bistveno hitreje kot če bi funkcije izrazili le z eno neznano funkcijo in kasneje reševali polinom tretje stopnje.

Kot že rečeno, vsaka splošna rešitev nehomogenega sistema diferenčnih enačb je sestavljena iz homogene in partikularne rešitve.

2.3. **Jordanova kanonična forma.** Za začetek bomo najprej fiksirali t na današnji čas, torej $t = 0$, in gledamo le v prihodnost, saj nas zanima kaj se bo zgodilo v času n. Na podlagi tega zapišemo sistem kot

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{A}\mathbf{y}_{n-1} + \mathbf{g}(n-1) \tag{22}$$

Če rekurzijo podremo, dobimo:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_n &= \mathbf{A}\mathbf{y}_{n-1} + \mathbf{g}(n-1) = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{y}_{n-2} + \mathbf{g}(n-2)) + \mathbf{g}(n-1) = ... = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-i}\mathbf{g}(i) + \mathbf{A}^n \mathbf{y}_0 \end{aligned} \tag{23}$$

kjer je $\mathbf{y}_0$ začetni pogoj. Z Jordanovo kanonično formo hkrati dobimo tako homogeno reštiev kot tudi partikularno. V zgornjem izrazu je homogena rešitev $\mathbf{A}^n\mathbf{y}_0$, partikularna pa $\sum_{i=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-i}\mathbf{g}(i)$. Zanima nas kako učinkovito izračunati $\mathbf{A}^n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. To storimo z Jordanovim razcepom. Jordanov razcep je zato učinkovit, ker če ima matrika $\mathbf{A}$ večkratne lastne vrednosti jo lahko vedno zreduciramo na Jordanovo kanonično formo $\mathbf{J}$,

$$\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}, \tag{24}$$

kjer je $\mathbf{P}$ prehodna matrika iz lastnih in korenskih vektorjev in je nesingularna. Matrika $\mathbf{J}$ ima na diagonali lastne vrednosti, nad diagonalo pa so lahko 0 ali 1, odvisno od lastnih vrednosti. Matriko $\mathbf{A}^n$ pa potem zračunamo kot

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{PJP}^{-1}\mathbf{PJP}^{-1}...\mathbf{PJP}^{-1} = \mathbf{PJ}^n\mathbf{P}^{-1} \tag{25}$$

Matrika $\mathbf{J}$ ima obliko

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_i & & \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & \lambda_k \end{bmatrix} \tag{26}$$

na naddiagonali so lahko 0 ali 1, odvisno od lastne vrednosti, povsod drugod pa same 0.

Kot vidimo je matrika $\mathbf{J}$ bločna matrika, kar je zelo koristno, saj lahko obravnavamo vsak blok posebej neodvisno od ostalih. Bloke lahko razpišemo z podmatrikami, npr:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \tag{27}$$

Te podmatrike imenujemo *Jordanove kletke.*

Matrika $\mathbf{P}$ je sestavljena iz lastnih in korenskih vektorjev. Če ima lastna vrednost 'dovolj' lastnih vektorjev, tedaj je matrika $\mathbf{P}$ sestavljena iz le-teh. Če jih pa nima pa moramo poiskati t.i. *korenske vektorje.* Postopek je tak, da če je λ neka lastna vrednost, najprej poiščemo minimalen r, kjer se rang matrike $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^r$ stabilizira. Potem poiščemo linearno neodvisne vektorje v, za katere je

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^r v = 0 \tag{28}$$

ter

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1} v \neq 0. \tag{29}$$

Pozorni moramo biti še na to, da se lastne vrednosti v matriki $\mathbf{J}$ ujemajo z zaporedjem, kako smo lastne in korenske vektorje zlagali v matriko $\mathbf{P}$.

V splošnem, če pogledamo Jordanovo kletko i-te lastne vrednosti, jo lahko zapišemo kot

$$\mathbf{J}_i = \lambda_i\mathbf{I} + \mathbf{U}_i, \tag{30}$$

kjer ima $\mathbf{U}_i$ matrika na naddiagonali 1 in 0 drugje. Če zgornjo enačbo potenciramo na n, dobimo

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_i^n &= (\lambda_i \mathbf{I} + \mathbf{U}_i)^n = \\ &= \lambda_i^n \mathbf{I} + \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1}\mathbf{U}_i + \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2}\mathbf{U}_i^2 + ... + \binom{n}{j_i-1}\lambda_i^{n-j_i+1}\mathbf{U}_i^{j_i-1},\end{aligned} \tag{31}$$

kjer je $j_i \leq n_i$, kjer je n_i skalar, pri katerem je $U_i^{n_i} = 0$. Take matrike imenujemo *nilpotentne matrike.*

Definicija 2.1. Če za matriko $\mathbf{A}$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $\mathbf{A}^n = 0$, pravimo, da je $\mathbf{A}$ nilpotentna matrika.

Enačbo (31) lahko zapišemo kot

$$\mathbf{J}_i^n = \begin{bmatrix} \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda_i^{n-2} & ... & \binom{n}{j_i-1}\lambda_i^{n-j_i-1} \\ 0 & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} & ... & \binom{n}{j_i-2}\lambda_i^{n-j_i-2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i^n & \binom{n}{1}\lambda_i^{n-1} \\ 0 & 0 & ... & ... & \lambda_i^n \end{bmatrix} \tag{32}$$

Tedaj je splošna rešitev homogene enačbe $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_t$

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{A}^n \mathbf{c} = \mathbf{P}\mathbf{J}^n\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}, \tag{33}$$

kjer je n naša mera za čas.

Opomba 2.2. Če imamo verigo $v_{j_1-1} \to v_{j_1-2} \to \ldots \to v_0$ lastnih in korenskih vektorjev dobimo bazo rešitev po formuli:

$$\mathbf{A}^n v_l = \lambda_1^n v_l + n\lambda_1^{n-1} v_{l-1} + \ldots + \binom{n}{l-1}\lambda_1^{n-l-1} v_0$$

Opomba 2.3. Če je λ enostavna ničla, ji pripada 1×1 kletka, zato dobimo rešitve $\mathbf{A}^n v = \lambda^n v$.

V praksi se izkaže, da lahko homogeno in partikularno rešitev poiščemo še drugače.

2.4. **Homogena rešitev.** Prostor rešitev homogene diferenče enačbe n-tega reda je n-dimenzionalen vektorski prostor, rešitve nehomogenega sistema pa so n-dimenzionalni afini podprostori.

Iščemo rešitev sistema

$$\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_t. \tag{34}$$

To lahko rešimo s pomočjo nastavka $\mathbf{y}_t = \alpha\lambda^t$, kjer je $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n]$ vektor konstant, ki niso vse enake 0. S substitucijo in po ureditvi dobimo

$$\lambda^t[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}]\alpha = \mathbf{0}. \tag{35}$$

Iz algebre vemo, da če je determinanta sistema enaka 0, potem ima homogeni sistem poleg trivialne rešitve ($\alpha = 0$) tudi netrivialne rešitve. Zgornja enačba pomeni, da mora biti α v jedru $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, torej je determinanta:

$$\left|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right| = 0. \tag{36}$$

Ko determinanto razpišemo dobimo karakteristični polinom n-te stopnje oblike

$$(-1)^n\lambda^n + c_1(-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + ... + c_{n-1}(-1)\lambda + c_n = 0 \tag{37}$$

Opomba 2.4. Ker je po predpostavki koeficient $c_n = \det \mathbf{A} \neq 0$ in vodilni koeficient 1, je polinom res n-te stopnje.

Rešitev zgornje enačbe nam da n lastnih vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ matrike $\mathbf{A}$. Za vsako lastno vrednost λ_i, $i = 1, 2, ..., n$ dobimo lastni vektor $\alpha^{(i)}$. Kakšno obliko oziroma kakšna je sama rešitev homogenega sistema diferenčnih enačb je odvisna od lastnih vrednosti.

(1) če je $\lambda \in \mathbb{R}$ enostavna ničla, potem je $y_t = C_1\lambda^t$
(2) če je $\lambda \in \mathbb{R}$ k-kratna ničla, potem je $y_t = C_1\lambda^t + C_2 t\lambda^t + ... + C_k t^{k-1}\lambda^t$
(3) če pa je $\lambda \in \mathbb{C}$, tedaj je $y_t = C_1 r^t \cos(\varphi \cdot t) + C_2 r^t \sin(\varphi \cdot t) + ...$, kjer je $r = |\lambda|$ in $\varphi = arg(\lambda)$.

Recimo, da so v obravnavanem primeru vse lastne vrednosti enostavne. Tedaj je rešitev homogenega sistema diferenčnih enačb enaka

$$
\begin{array}{rcl}
y_{1t} & = & A_1\alpha_1^{(1)}\lambda_1^t + A_2\alpha_1^{(2)}\lambda_2^t + ... + A_n\alpha_1^{(n)}\lambda_n^t \\
y_{2t} & = & A_1\alpha_2^{(1)}\lambda_1^t + A_2\alpha_2^{(2)}\lambda_2^t + ... + A_n\alpha_2^{(n)}\lambda_n^t \\
... & ... & \qquad\qquad ... \\
y_{nt} & = & A_1\alpha_n^{(1)}\lambda_1^t + A_2\alpha_n^{(2)}\lambda_2^t + ... + A_n\alpha_n^{(n)}\lambda_n^t
\end{array} \tag{38}
$$

Če želimo določiti konstante $A_1, A_2, ..., A_n$ moramo imeti n dodatnih pogojev (t.i. začetnih pogojev), npr. $\mathbf{y}_t = \mathbf{y}_0$, kjer so elementi vektorja $\mathbf{y}_0$ znani.

2.5. **Partikularna rešitev.** Partikularna rešitev je posebna rešitev nehomogene enačbe. Poiščemo jo lahko na več načinov z različnimi nastavki, operatorji, itd. Vedno pa jo lahko poiščemo z variacijo konstante. Izraz variacija konstante pomeni, da konstanto variramo, kar pomeni, da jo spremenimo v funkcijo. Postopek poteka tako, da najprej izračunamo splošno rešitev ustreznega homogenega sistema, potem pa nadomestimo konstante v tej splošni rešitvi homogenega sistema s funkcijami, ki jih določimo tako, da dobimo partikularno rešitev nehomogenega sistema.

Imamo sistem $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_t + \mathbf{g}(t)$, veljajo vse prejšnje predpostavke. Najprej moramo rešiti homogeni del sistema, torej $\mathbf{y}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{y}_t$. Kot smo že pokazali zgoraj, velja $\mathbf{y}_{t+n} = \mathbf{A}^n\mathbf{y}_t$. Brez škode za splošnost lahko fiksiramo t na danes, torej $t = 0$ in gledamo kaj se bo zgodilo v času n. Tako dobimo

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{A}^n\mathbf{y}_0 \tag{39}$$

kjer je $\mathbf{y}_0$ neka konstanta, ki je dana kot začetni pogoj. Na tem koraku variramo konstanto, torej $\mathbf{y}_0$ (to pomeni, da dopustimo, da je $\mathbf{y}_0$ odvisna od n) in jo zapišemo kot vektor $\mathbf{z}$

$$\mathbf{y}_n^p = \mathbf{A}^n\mathbf{z}_n \tag{40}$$

Opomba 2.5. V zgornji enačbi s p ne označujemo potence, ampak partikularno rešitev.

Sedaj ta nastavek vstavimo v začeten sistem, pri čemer upoštevamo, da je $\mathbf{y}_{n+1}^p = \mathbf{A}^{n+1}\mathbf{z}_{n+1}$, dobimo

$$\mathbf{A}^{n+1}\mathbf{z}_{n+1} = \mathbf{A}^{n+1}\mathbf{z}_n + \mathbf{g}(n) \tag{41}$$

Z leve strani množimo z $\mathbf{A}^{-(n+1)}$ in razpišemo, pri čemer upoštevamo, da je $\mathbf{z}_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{z}_{n+1} &= \mathbf{z}_n + \mathbf{A}^{-(n+1)}\mathbf{g}(n) \\
&= \mathbf{A}^{-(n+1)}\mathbf{g}(n) + \mathbf{A}^{-n}\mathbf{g}(n-1) + ... + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}(0)
\end{aligned} \tag{42}
$$

S tem smo prav tako določili $\mathbf{z}_n$, ki ga vstavimo v (40) in za partikularno rešitev dobimo

$$\mathbf{y}_n^p = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-1-i}\mathbf{g}(i) \tag{43}$$

2.6. **Stabilnostni pogoji.** V tem razdelku naloge si bomo pogledali pogoje za stabilnost sistema. Potrebno je biti pozoren na to, da ko te pogoje apliciramo na ekonomske modele vemo, ali so ti pogoji zadostni in potrebni, ali so le zadostni oziroma potrebni. Ker je stabilnost skozi čas odvisna le od lastnih vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ je dovolj, da analiziramo le-te za stabilnost sistema, tako nam ni potrebno računati lastnih vektorjev $\alpha^{(i)}$. S stabilnostnimi pogoji preverjamo, če absolutne vrednosti lastnih vrednosti λ_i, naj bodo realne ali kompleksne, ležijo znotraj enotske krožnice v kompleksni ravnini. Če absolutne vrednosti lastnih vrednsoti ležijo znotraj enotske krožnice, potem je rešitev stabilna, v nasprotnem primeru rešitev ni stabilna.

Za začetek nekaj definicij matrik, s katerimi bomo dokazovali in izpeljevali stabilnostne pogoje.

Definicija 2.6. Realna matrika $\mathbf{A}$ je *nenegativna* (ali *pozitvna*), če so vsi elementi enaki ali večji od nič (ali strogo večji od nič) in jo označimo $\mathbf{A} \geq 0$ ($\mathbf{A} > 0$).
S simboli:
Nenegativna matrika:

$$\mathbf{A} \geq 0 \text{ za vse } a_{i,j} \geq 0$$

Pozitivna matrika:

$$\mathbf{A} > 0 \text{ za vse } a_{i,j} > 0$$

Definicija 2.7. Nenegativno matriko $\mathbf{A}$ imenujemo *primitivna*, če obstaja tako število k za katero velja, da so vsi elementi matrike $\mathbf{A}^k$ pozitivni.

Definicija 2.8. Naj bo $\mathbf{A}$ kvadratna matrika, ne nujno pozitivna ali realna. Če ima matrika $\mathbf{A}$ obliko:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \tag{44}$$

kjer sta $\mathbf{B}$ in $\mathbf{D}$ kvadratni matriki, potem ji pravimo *reducibilna* matrika. Če matrika $\mathbf{A}$ ni reducibilna, pravimo da je *ireducibilna.*

Opomba 2.9. Naj bo $\mathbf{A}$ kvadartna matrika, ne nujno pozitivna ali realna. Če obstaja permutacija vrstic in stolpcev, s katero bi lahko matriko spravili v zgornjo obliko, potem je matrika reducibilna.

Trditev 2.10. *Če je matrika* $\mathbf{A}$ *ireducibilna, pozitivna oziroma nenegativna, potem je matrika* $\mathbf{I} + \mathbf{A}$ *primitvna.*

Opomba 2.11. Dokaz te trditve najdemo na spetu, in sicer glejte naveden spletni vir pri literaturi [5].

Pri reducibilnih matrikah tako problem lastnih vrednost razpade na dva ločena problema.

Definicija 2.12. *Diagonalno dominantna* matrika je matrika, ki ima v vrstici na glavni diagonali element, ki ima takšno absolutno vrednost, da je vsota vseh absolutnih vrednosti ostalih nediagonalnih elementov manjša ali enaka temu elementu,

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \text{ za vse } i,$$

kjer je a_{ii} element glavne diagonale, a_{ij} pa nediagonalni element i-te vrstice. Če v zgornjem izrazu velja stroga neenakost za vse diagonalne elemente, pravimo, da je matrika strogo diagonalno dominantna matrika.

Opomba 2.13. V izreku in dokazu boste zasledili izraze urejenosti med matrikami oziroma med matrikami in vektorji. To pomeni, da gledamo elemente matrike oziroma vektorja in, da mora neenakost veljati med istoležečimi elementi.

Opomba 2.14. V množici C, ki je kasneje definirana, gledamo vektor x po komponentah.

Izrek 2.15. *Perron - Frobeniusov izrek*
Naj bo $\mathbf{A}$ *ireducibilna matrika.*

(1) $\mathbf{A}$ *ima pozitvno (realno) lastno vrednost* $\lambda_{\max}$*, tako, da vse ostale lastne vrednosti matrike* $\mathbf{A}$ *zadoščajo:*

$$|\lambda| \leq \lambda_{\max}.$$

(2) *Še več,* $\lambda_{\max}$ *ima algebraično in geometrično večkratnost ena in ima pozitiven lastni vektor* x $(x > 0)$.
(3) *Vsak nenegativen lastni vektor je večkratnik lastnega vektorja* x.
(4) *Bolj splošno, naj bo* $y \geq 0,\ y \neq 0$ *vektor in* c *neko število, tako da*

$$\mathbf{A}y \leq cy$$

potem

$$y > 0 \text{ in } c \geq \lambda_{\max}$$

kjer velja enakost $(c = \lambda_{\max})$ *natanko tedaj, ko je* y *večkratnik* x.
(5) *Naj bo* $0 \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{A},\ \mathbf{S} \neq \mathbf{A}$. *Potem vsaka lastna vrednost* σ *matike* $\mathbf{S}$ *zadošča*

$$|\sigma| < \lambda_{\max}.$$

(6) *Še posebej, vsi diagonalni minorji* $\mathbf{A}_{(i)}$ *dobljeni iz* $\mathbf{A}$*, kjer izpustimo* i*-to vrstico in stolpec imajo lastne vrednosti, katere absolutne vrednosti so vse manjše od* $\lambda_{\max}$.

Za potrebe dokaza Perron - Frobeniusovega izreka bomo še določili K,

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, x \neq 0\},$$

nenegativen kvadrant brez izhodišča, ali *pozitven* kvadrant. S C pa bomo označili množico presečišča pozitivnega kvadranta z enotsko sfero. S simboli:

$$C := \{x \geq 0 : \|x\| = 1\},$$

Dokaz. Naj bo

$$\mathbf{P} := (\mathbf{I} + \mathbf{A})^k,$$

kjer je k tako velik, da je $\mathbf{P}$ pozitvna matrika. Velja $v < w \ \Rightarrow \mathbf{P}v < \mathbf{P}w$.
Za vsak $z \in K$ naj bo:

$$L(z) := \max_{s \in \mathbb{R}, s > 0} \{s : sz \leq \mathbf{A}z\} = \min_{1 \leq i \leq n, z_i \neq 0} \frac{(\mathbf{A}z)_i}{z_i} \tag{45}$$

Po definiciji je $L(rz) = L(z)$ za vsak $r > 0$, torej je funkcija $L(z)$ odvisna le od $\frac{z}{\|z\|} \in C$. Če je $z \le y,\ z \ne y$ sledi $\mathbf{P}z < \mathbf{P}y$. Velja tudi $\mathbf{PA} = \mathbf{AP}$. Torej, če je $sz \le \mathbf{A}z$ sledi

$$\mathbf{P}sz \le \mathbf{PA}z = \mathbf{AP}z$$

torej je

$$L(\mathbf{P}z) \ge L(z)$$

Še več, če je $L(z)z \ne \mathbf{A}z$ sledi $L(z)\mathbf{A}z < \mathbf{AP}z$. Torej velja $L(\mathbf{P}z) \ge L(z)$, kjer enakost velja le v primeru, ko je z lastni vektor matrike $\mathbf{A}$ z lastno vrednostjo $L(z)$.

To nakazuje kako bo potekal dokaz. Iskali bomo pozitivni vektor, kateri maksimizira L, pokazali bomo da je to lastni vektor iz izreka in dokazali lastnosti, ki so navedene v izreku.

$\mathbf{P}(C)$ je kompaktna (slika kompaktne množice z zvezno funkcijo) in vsi elementi $\mathbf{P}(C)$ so strogo pozitivni (ker je $\mathbf{P}$ pozitivna). Ker je funkcija L zvezna funkcija na $\mathbf{P}(C)$, funkcija L doseže maksimalno vrednost, $L_{\max}$ na $\mathbf{P}(C)$. Ker je $L(z) \ge L(\mathbf{P}z)$, je to v resnici maksimalna vrednost funkcije L na celotnem območju K, in ker je $L(\mathbf{P}z) > L(z)$, razen če je z lastni vektor matrike $\mathbf{A}$, lahko zaključimo:

$L_{\max}$ je dosežen z lastnim vektorjem, označimo ga z x, $x > 0$, matrike $\mathbf{A}$, z lastno vrednostjo $L_{\max}$.

Ker je $\mathbf{A}x > 0$ in je $\mathbf{A}x = L_{\max}x$ sledi, da je $L_{\max} > 0$.

Tako smo dokazali, da obstaja pozitiven lastni vektor. Sedaj bomo pokazali, da je $L_{\max}$ največja lastna vrednost.

Naj bo y poljuben lastni vektor z lastno vrednostjo λ. Z $|y|$ označimo vektor, katerega komponente so $|y_i|$, absolutne vrednosti komponent lastnega vektorja y. Naj bo $|y| \in K$. Iz izraza

$$\mathbf{A}y = \lambda y,$$

ki ga "beremo" kot

$$\lambda y_i = \sum_j \mathbf{A}_{ij} y_j,\ \forall i$$

in iz dejstva, da so $\mathbf{A}_{ij} > 0$ lahko zaključimo, da

$$|\lambda||y| \le \sum_i \mathbf{A}_{ij} |y_j|$$

kar lahko krajše zapišemo kot

$$|\lambda||y| \le \mathbf{A}|y|.$$

Če se spomnimo kako smo definirali funkcijo L (45), opazimo da velja

$$|\lambda| \le L(|y|) \le L_{\max}.$$

Zato lahko uporabimo notacijo:

$$\lambda_{\max} := L_{\max}$$

saj smo dokazali, da je

$$|\lambda| \le \lambda_{\max}$$

Tako smo dokazali prvo točko Perron - Frobeniusovega izreka.

Še opomba. Opazimo, da ne more biti $\lambda_{\max} = 0$ saj bi to pomenilo, da so vse lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}$ enake 0, kar bi pomenilo da je matrika nilpotenta kar je pa v nasprotju z našo predpostavko da je matrika $\mathbf{A}$ ireducibilna. Sledi

$$\lambda_{\max} > 0$$

Naj bo $0 \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{A}$. Če je $z \in K$ tak vektor, da velja $sz \leq \mathbf{S}z$ in ker velja $\mathbf{S}z \leq \mathbf{A}z$ sledi $sz \leq \mathbf{A}z$. Torej za vsak z velja $L_S(z) \leq L_T(z)$, kar pomeni

$$0 \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{A} \;\Rightarrow\; L_{\max}(\mathbf{S}) \leq L_{\max}(\mathbf{A}).$$

Ali drugače

$$0 \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{A},\; \mathbf{S} \neq \mathbf{A} \;\Rightarrow\; \lambda_{\max}(\mathbf{S}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A})$$

Ta rezultat sedaj uporabimo na $\mathbf{A}^\intercal$, transponirani matriki matrike $\mathbf{A}$. Tako bomo pokazali, da ima transponirana matrika prav tako pozitivno maksimalno lastno vrednost, označimo jo s črko η. To pomeni, da obstaja tak vektor $w > 0$, da velja

$$w^\intercal \mathbf{A} = \eta w^\intercal.$$

Spomnimo se, da $x > 0$ označuje lastni vektor z največjo lastno vrednostjo $\lambda_{\max}$ matrike $\mathbf{A}$. Če zgornji izraz z desne pomnožimo z x, dobimo

$$w^\intercal \mathbf{A}x = \eta w^\intercal x = \lambda_{\max} w^\intercal x$$

kar nakazuje na $\eta = \lambda_{\max}$ saj je $w^\intercal x > 0$.

Naj bo $y \in K$ in $\mathbf{A}y \leq \mu y$. Od tod sledi

$$\lambda_{\max} w^\intercal y = w^\intercal \mathbf{A}y \leq \mu w^\intercal y$$

kar nakazuje da je $\lambda_{\max} \leq \mu$, pri upoštevanju dejstva, da so vse komponente vektorja w pozitivne in da je nekaj komponent vektorja y pozitivnih, tako da je $w^\intercal y > 0$. Še posebej, če je $\mathbf{A}y = \mu y$ potem velja $\mu = \lambda_{\max}$.

Še več, če je $y \in K$ in $\mathbf{A}y \leq \mu y$ potem je $\mu \geq 0$ in

$$0 < \mathbf{P}y = (\mathbf{I} + \mathbf{A})^{n-1} y \leq (1 + \mu)^{n-1} y$$

od tod sledi, da je

$$y > 0$$

Tako smo dokazali prvi dve trditvi točke (4).

Če je $\mu = \lambda_{\max}$ potem je $w^\intercal(\mathbf{A}y - \lambda_{\max} y) = 0$, ampak ker je $\mathbf{A}y - \lambda_{\max} y \leq 0$ in je zato $w^\intercal(\mathbf{A}y - \lambda_{\max} y) = 0$ implicira, da je $\mathbf{A}y = \lambda_{\max} y$. Tako bo zadnja trditev točke (4) (da je y večkratnik vektorja x) sledila po točki (2) (da ima $\lambda_{\max}$ večkratnost ena), saj smo pokazali, da je y lastni vektor z lastno vrednostjo $\lambda_{\max}$.

Točka (5):

Naj bo $0 \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{A}$ in $\mathbf{S}z = \sigma z,\; z \neq 0$. Velja

$$\mathbf{A}|z| \geq \mathbf{S}|z| \geq |\sigma||z|$$

kot smo že pokazali sledi

$$|\sigma| \leq L_{\max}(\mathbf{A}) = \lambda_{\max}.$$

Ampak če je $|\sigma| = \lambda_{\max}(\mathbf{A})$ potem je $L_{\mathbf{A}}(|z|) = L_{\max}(\mathbf{A})$, torej je $|z| > 0$ in je $|z|$ prav tako lastni vektor matrike $\mathbf{A}$ z isto lastno vrednostjo. Ampak potem je $(\mathbf{A} - \mathbf{S})|z| = 0$, kar bi pomenila da je $\mathbf{S} = \mathbf{A}$ saj je $|z| > 0$ kar je v protislovju s predpostavko $0 \leq \mathbf{S} \leq \mathbf{A}$. Tako sledi $\sigma_{\max} < \lambda_{\max}$.

Če v matriki $\mathbf{A}$ i-to vrstico in stolpec nadomestimo s samimi ničlami dobimo $\mathbf{S} \geq 0$ s $\mathbf{S} < \mathbf{A}, \mathbf{S} \neq \mathbf{A}$, saj zaradi ireducibilnosti matrike $\mathbf{A}$ ne more imeti celotna vrstica same ničle. To dokazuje trditev, da so vse lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}_i$ po absolutni vrednosti manšje od $\lambda_{\max}$.

Trditev 2.16. *Naj bo $p(\lambda)$ karakteristični polinom nenegativne, ireducibilne matrike* $\mathbf{A}$. *Trdimo: $\lambda_{\max}$ je enostavna ničla $p(\lambda)$.*

Dokaz.

$$p(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

Matriko $\mathbf{A}$ zapišemo v Jordanovi kanonični formi. S $\mathbf{P}\Lambda_i\mathbf{P}^{-1}$ označujemo Jordanovo kanonično formo matrike $\mathbf{A}_{(i)}$. Uporabili bomo pravilo o odvajanju determinante, ki pravi

$$\frac{d}{d\lambda}\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \sum_i \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}_{(i)}),$$

torej

$$\begin{aligned}
p'(\lambda_{\max}) &= \frac{d}{d\lambda_{\max}}\det(\lambda_{\max}\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\
&= \sum_i \det(\lambda_{\max}\mathbf{I} - \mathbf{A}_{(i)}) \\
&= \sum_i \det(\lambda_{\max}\mathbf{I} - \mathbf{P}_i\Lambda_i\mathbf{P}_i^{-1}) \\
&= \sum_i \det(\mathbf{P}(\lambda_{\max}\mathbf{I} - \Lambda_i)\mathbf{P}^{-1}) \\
&= \sum_i \det(\lambda_{\max}\mathbf{I} - \Lambda_i)\det(\mathbf{P})\det(\mathbf{P}^{-1}) \\
&= \sum_i \det(\lambda_{\max}\mathbf{I} - \Lambda_i)
\end{aligned}$$

Očitno je $\lambda_{\max}\mathbf{I} - \Lambda_i$ pozitivna matrika. Od tod sledi, da je $\frac{d}{d\lambda_{\max}}p(\lambda_{\max}) > 0$. □

Točka (2):

Tako sledi, da ima vsaka od matrik $\lambda_{\max}\mathbf{I} - \mathbf{A}_{(i)}$ strogo pozitivno determinanto. To nam pove, da je odvod karakterističnega polinoma matrike $\mathbf{A}$ pri lastni vrednosti $\lambda_{\max}$ različen od nič. Kar nas pripelje do spoznanja, da je algebraična večkratnost in s tem tudi geometrična večkratnost $\lambda_{\max}$ enaka 1. □

Kot že rečemo, z naslednjimi stabilnostnimi pogoji preverjamo, če absolutne vrednosti lastnih vrednosti λ_i, naj bodo realne ali kompleksne, ležijo znotraj enotske krožnice v kompleksni ravnini. Dokazali bomo samo nekatere.

I. Naj bodo $a_{ij} \geq 0$ (koeficienti morajo biti nenegativni in vsaj en strogo pozitiven). Potreben in zadosten pogoj je, da so vsi glavni minorji matrike $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ pozitivni, t.j.

$$\begin{aligned}
1 - a_{11} &> 0, \\
\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} &= \\
= (1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21} &= \\
= 1 + a_{11}a_{22} - a_{11} - a_{22} - a_{12}a_{21} &> 0, \\
&..., \\
\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & ... & -a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -a_{n1} & -a_{n2} & ... & 1-a_{nn} \end{vmatrix} &> 0
\end{aligned} \tag{46}$$

Dokaz. Če je lastna vrednost matrike $\mathbf{A} < 1$, potem to velja tudi za matriko $\mathbf{A}_{(i)}$, zato je po točki 6 izreka (2.15) največja lastna vrednost matrike $\mathbf{A}_{(i)} < 1$.

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{I} - \mathbf{A}_{(i)}) &= \det(\mathbf{I} - \mathbf{P}_i \Lambda_i \mathbf{P}_i^{-1}) \\ &= \det(\mathbf{I} - \Lambda_i) > 0.\end{aligned}$$

ker so vsi elementi < 1. S tem dokažemo, da je pogoj potreben.

Še zadostnost: Trdimo, da če so vsi minorji pozitivni, so lastne vrednost pozitvne.

Naj bo $\mathbf{A}_\lambda = \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Za $\lambda_{\max}$ ima $\mathbf{A}_{\lambda_{\max}}$ vse minorje pozitivne. Označimo $\mathbf{B} = \lambda_{\max}\mathbf{I} - \mathbf{A}$ in naj bo $\mu > 0$ realno število, ki je malo večje od $\lambda_{\max}$.

$$\det((\lambda_{\max} + \mu)\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(\mathbf{B} + \mu \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} b_{11} + \mu & & \\ & \ddots & \\ & & b_{nn} + \mu \end{vmatrix} = \sum \mu^{n-k} S_k,$$

kjer je S_k vsota vseh glavnih $k \times k$ minorjev. Če so vsi pozitvni, je $\det((\lambda_{\max} + \mu)\mathbf{I} - \mathbf{A}) > 0$, zato $\lambda_{\max} + \mu$ ni lastna vrednost.

Torej: Če ima $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ vse minorje pozitivne, potem 1 (in vse vrednosti, večje od 1) ni lastna vrednost. $\square$

II. Naj bodo $a_{ij} \geq 0$. Tedaj je potreben in zadosten pogoj, da je matrika $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ strogo diagonalno dominantna matrika v širšem pomenu. To pomeni, da elementi diagonale strogo dominirajo tako po vrsticah kot po stolpcih, ter da obstajajo pozitivna števila $h_1, h_2, ..., h_m$, da velja

$$\begin{aligned} h_i(1 - a_{ii}) &> \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} h_j a_{ij} \\ h_i(1 - a_{ii}) &> \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} h_j a_{ji} \end{aligned} \tag{47}$$

Opomba 2.17. Ker sta pogoja **I** in **II** potrebna in zadostna, sta zato ekvivalentna.

III Naj bodo $a_{ij} > 0$. Definiramo n vsot

$$S_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}, j = 1, 2, ..., n \tag{48}$$

Zadostni stabilnostni pogoji so, da so vse vsote $S_j \leq 1$ ter, da je vsaj ena vsota $S_j < 1$.

IV Naj bodo $a_{ij} \geq 0$. Naslednji zadostni stabilnostni pogoji so, da so vse vsote (48) manjše od 1.

V. Naj bodo $a_{ij} \geq 0$ ter matrika $\mathbf{A}$ ireducibilna. Zadostni stabilnosti pogoji so enaki kot pri **III**. Še več **III** je podpogoj tega, saj je pozitivna matrika ireducibilna.

Dokaz. Ta dokaz velja tako za pogoj **V** kot za **III**.

Za ireducibilne nenegativne (za pozitivne pa še toliko bolj) matrike velja

$$\min S_j \leq \lambda_{\max} \leq \max S_j$$

kjer enakosti veljata le, če je $\min S_j = \max S_j$ (dokaz zgornjega izraza najdemo v Gantmacher, 1959, stran 76). Če je $\max S_j = 1$ potem je $\min S_j < 1$ zadostni pogoj, da je $\lambda_{\max} < 1$. $\square$

VI Naj bodo a_{ij} poljubni. Definiramo n vsot

$$|S_j| = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, j = 1, 2, ..., n \tag{49}$$

Sklop zadostnih pogojev je, da so vse vsote $|S_j|$ manjše od 1. Zaradi večje jasnosti sta pogoja **IV** in **VI** ločena, čeprav je **IV** podpogoj tega, saj če so $a_{ij} \geq 0$ tedaj velja $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$.

VII Naj bodo a_{ij} poljubne konstante in matrika $\mathbf{A}$ naj bo ponovno ireducibilna. Sklop zadostnih stabilnostnih pogojev je, da nobena vsota (49) ni večja od 1 ter da je vsaj ena strogo manjša od 1.

Pogoj **V** je podpogoj **VII**.

Notacija: Z $\mathbf{A}^+$ označujemo matrike, katere elementi so absolutne vrednosti. Naj bo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

Matriko $\mathbf{A}^+$ dobimo iz $\mathbf{A}$ tako, da zamenjamo istoležeče elemente z njihovimi absolutnimi vrednostimi, torej

$$\mathbf{A}^+ = \begin{bmatrix} |a_{11}| & |a_{12}| & ... & |a_{1n}| \\ |a_{21}| & |a_{22}| & ... & |a_{2n}| \\ ... & ... & ... & ... \\ |a_{m1}| & |a_{m2}| & ... & |a_{mn}| \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

VIII Naj bodo a_{ij} poljubne konstante. Pomagamo si z $\mathbf{A}^+$ matriko. Potem je zadosten pogoj za stabilnost sistema, da je matrika $[\mathbf{I} - \mathbf{A}^+]$ pozitivno diagonalno dominantna matrika oziroma, da so poddeterminante matrike $[\mathbf{I} - \mathbf{A}^+]$ vse pozitivne.

Dokaz. Opazimo, da je $\mathbf{A}^+$ nenegativna matrika, zato lahko uporabimo pogoja **I** in **II**. Pogoj **VIII** sledi iz izreka (Taussky, 1964, stran 127), da absolutna vrednost dominante lastne vrednosti poljubne matrike $\mathbf{A}$ ni večja od dominantne lastne vrednosti matrike $\mathbf{A}^+$. □

Opomba 2.18. Zgoraj omenjeni izrek dokazuje tudi pogoj **VII** pri pogoju **IV**, ter prav tako pogoj **VI** pri pogoju **IV**.

IX Potreben stabilnosti pogoj je, da

$$|\sum_{i=1}^{n} a_{ii}| < n. \tag{50}$$

Dokaz. Za vsako polinomsko enačbo

$$p_n(\lambda) = c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$$

velja

$$\sum_i x_i = \frac{c_{n-1}}{-c_n},$$

$$\frac{c_0}{c_n} = (-1)^n \prod_i x_i,$$

kjer z x_i označimo i-to ničlo polinoma $p_n(\lambda)$. Tako pridemo do $\sum a_{ii} = \sum \lambda_i$ oziroma, če dodamo absolutno vrednost $|\sum a_{ii}| = |\sum \lambda_i|$. Po trikotniški neenakosti velja $|\sum \lambda_i| \leq \sum |\lambda_i|$ in, če je $|\lambda_i| < 1$ sledi $\sum |\lambda_i| < n$. Če se sedaj vračamo po korakih pridemo do izraza $|\sum a_{ii}| < n$. □

X Potreben stabilnostni pogoj je, da je absolutna vrednost determinante matrike $\mathbf{A}$ manjša od 1.

Dokaz. Za determinanto matrike velja $\det \mathbf{A} = \Pi_i \lambda_i$, dodamo absolutne vrednosti in dobimo $|\det \mathbf{A}| = |\Pi_i \lambda_i|$. Ker je $|\Pi_i \lambda_i| = \Pi_i |\lambda_i|$ in, če je $|\lambda_i| < 1$ sledi $\Pi_i |\lambda_i| < 1$. Torej $|\lambda_i| < 1$ implicira $|\det \mathbf{A}| < 1$. □

XI Zadosten nestabilnostni pogoj je, da so vse vsote (48) večje od 1.

Dokaz. Če pogledamo dokaz pogoja **IV** in dopustimo, da je $\min S_j > 1$ dobimo pogoj **XI**. □

Opomba 2.19. Iz dejstva, da imata matrika in njena transponiranka iste lastne vrednosti sledi da lahko pogoje **III**, **IV**, **V**, **VI**, **VII**, **XI** izrazimo z vsotami

$$S_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ j, i = 1, 2, ..., n$$

in bi prav tako veljali.

Kaj pa če imamo sistem, katerega so absolutne vrednosti lastnih vrednosti tako večje in manjše od 1. Tak sistem imenujemo *pogojno stabilen sistem.* Že če imamo le eno lastno vrednost, katere absolutna vrednost je večja od 1 bo, generalno gledano, gibanje sistema divergiralo in sistem označimo za nestabilen. Ampak, če lahko nekako določimo začetne pogoje, potem lahko poljubne konstante izberemo na način, da so nestabilne lastne vrednosti enake 0, tako da bo končna rešitev vsebovala le stabilne lastne vrednosti. Tako je stabilnost konkretne rešitve pogojena z začetnimi pogoji.

Poljubne konstante v $n \times n$ homogenih sistemih lahko določimo z

$$\sum_{i=1}^{n} A_i \alpha_j^{(i)} = y_j(0)\ j = 1, 2, ..., n \tag{51}$$

Recimo, da imamo k stabilnih in $n - k$ nestabilnih lastnih vrednosti (velja $0 < k < n$). Brez škode za splošnost jih lahko zložimo v vrstni red, tako da je prvih k lastnih vrednosti stabilnih. Z (51) določimo prvih k konstant $A_1, A_2, ..., A_k$, pri danih $y_1(0), y_2(0), ..., y_k(0)$, ostale konstante v (51) pa določimo da so enake 0, torej $A_{k+1} = A_{k+2} = ... = A_n = 0$. Konstante $A_1, A_2, ..., A_k$ nato s substitucijo vstavimo v zadnjih $n-k$ enačb v (51) in določimo potrebne vrednosti $y_{k+1}(0), y_{k+2}(0), ..., y_n(0)$.

Zdi se morda nenavadno, da bi se vnaprej omejili na določeno podmnožico začetnih pogojev, vendar to omejitev pogosto implicira narva ekonosmkega problema, npr. če imamo opravka z modelom racionalnih pričakovanj, modelom rasti ipd. V ekonomiji se lahko izkaže, da je pogojno stabilen sistem v resnici stabilen.

3. Sistemi diferenčnih enačb v ekonomskih modelih

3.1. **Cournotov model oligopola.** Cournotov model je najpreprostejši primer oligopola. Model predpostavlja, da si podjetja na trgu konkurirajo s količino, ne s ceno. Vsako podjetje opazuje proizvedene količine ostalih podjetij na trgu in na podlagi teh opažanj ter na podlagi povpraševanja podjetje določi svojo količino proizvodnje. Bolj natančno, na trgu imamo n podjetij. V časovnem intervalu t podjetje i,

$i = 1, 2, ..., n$ opazuje proizvodnjo ostalih podjetij na trgu in predvideva, da bodo le-te ostale nespremenjene v času $t + 1$. Nato to podjetje na podlagi krivulje povpraševanja določi maksimum konstantne proizvodnje.

Posebnost modela je, da ko formaliziramo to dinamično obnašanje tedaj določanje proizvodnje ni več stabilno, ko je število podjetij večje od 2.

Recimo, da imamo trg z n oligopolističnimi podjetiji s homogeno proizvodnjo in krivuljo povpraševanja

$$p_t = a - b\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{52}$$

kjer so $a > 0$, $b > 0$, x_i pa je dejanski proizvod podjetja i v času t. Predpostavimo še, da imajo vsa podjetja linearne krivulje stroškov c_i, od koder sledi, da so marginalni stroški c_i konstante.

Po zgornjih predpostavkah obnašanja podjetij, ima vsako podjetje določeno ceno kot

$$p^i_{t+1} = a - b(x_{i,(t+1)} + \sum_{j\neq i}^{n} x_{j,t}) \tag{53}$$

tako, da vsako podjetje i določi $x_{i,(t+1)}$, pri katerem pričakujejo, da bodo maksimizirali pričakovan dobiček

$$\pi^i_{t+1} = p^i_{t+1}x_{i,(t+1)} - c_i = ax_{i,(t+1)} - bx^2_{i,(t+1)} - bx_{i,(t+1)}\sum_{j\neq i}^{n} x_{j,t} - c_i. \tag{54}$$

Želimo, da ima funkcija π^i_{t+1} kot funkcija $x_{i,(t+1)}$ globalni maksimum v stacionarni točki, sledi,

$$x_{i,(t+1)} = -\frac{1}{2}\sum_{j\neq i}^{n} x_{j,t} + \frac{a-c}{2b}. \tag{55}$$

Ker je na glavo obrnjena parabola, je to res. Torej je enačba (55) rešitev. Če pogledamo primer duopola, da pogoj prvega reda nehomogeni sistem diferenčnih enačb

$$\begin{aligned} x_{1,(t+1)} &= -\frac{1}{2}x_{2,t} + \frac{a-c_1}{2b} \\ x_{2,(t+1)} &= -\frac{1}{2}x_{1,t} + \frac{a-c_2}{2b} \end{aligned} \tag{56}$$

Karakteristična enačba homogenega dela sistema (56) je

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0. \tag{57}$$

Očitno sta ničli $\lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Rešitev torej konvergira proti ravnotežju, ki jo dobimo če v sistemu (56) vzamemo $x_{1,(t+1)} = x_{1,t} = x_1$ in $x_{2,(t+1)} = x_{2,t} = x_2$. Sledi $x_1 = \frac{a-2c_1+c_2}{3b}$, $x_2 = \frac{a-2c_2+c_1}{3b}$.

To dokazuje Cournotovo intuicijo, da je ravnotežna rešitev stabilna. Prav tako pa kaže na nevarnost mišlenja, da če nekaj velja za dvodimenzionalen problem, da to prav tako velja za n - dimenzionalen sistem. če si pogledamo matriko sistema (55)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & ... & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & ... & -\frac{1}{2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & ... & 0 \end{bmatrix} \tag{58}$$

tedaj je karakteristična enačba

$$\det|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & ... & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda & -\frac{1}{2} & ... & -\frac{1}{2} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & ... & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{59}$$

Tako je ničla karakteristične enačbe $\lambda = -\frac{n-1}{2}$. To preverimo, če prvih $n-1$ vrstic prištejemo zadnji vrstici, kar po lastnosti determinante ne spremeni njene vrednosti. Tako bodo vsi elementi zadnje vrstice enaki $-\lambda - \frac{n-1}{2}$. Torej je $\lambda = -\frac{n-1}{2}$ ničla karakterističnega polinoma.

Za $n = 3$ ima sistem ničlo enako -1, ko je pa $n > 3$ pa bo to stopnjevanje eksplozivno. Torej je sistem stabilen le za $n = 2$.

3.2. **Multiplikator efektov v odprti ekonomiji.** Velja, da sta izvoz in uvoz države posredno odvisna od nacionalnega prihodka. Npr. če v državi 1 pride do nihanja prihodkov, potem se uvoz spremeni. Ta sprememba povzroči spremembo pri državah, ki izvažajo v državo 1. Za lažje razumevanje se poleg države 1 osredotočimo le še na eno, državo 2. Ker se spremeni izvoz države 2 se prav tako spremenijo prihodki države in posledično povzroči spremembo uvoza države 2 iz države 1. Podobno velja za državo 1.

Ta verižna reakcija je znana kot *tuje posledice*, multiplikator, ki spada zraven, pa kot *multiplikator s tujimi posledicami*.

Začnimo s statičnim modelom, ki je sestavljen z naslednjimi enačbami:

$$\begin{array}{rr} \text{Država 1} & \text{Država 2} \\ C_1 = b_1 Y_1 & C_2 = b_2 Y_2 \\ I_1 = I_{01} + h_1 Y_1 & I_2 = I_{02} + h_2 Y_2 \\ M_1 = M_{01} + m_1 Y_1 & M_2 = M_{02} + m_2 Y_2 \\ X_1 = M_2 & X_2 = M_1 \\ Y_1 = C_1 + I_1 + X_1 - M_1 & Y_2 = C_2 + I_2 + X_2 - M_2 \end{array}$$

kjer so C funkcije potrošnje, I investicijska funkcija, M funkcija uvoza, X funkcija izvoza. Upoštevamo, da je izvoz ene države enak uvozu druge, Y je nacionalni prihodek v odprti ekonomiji, I_0 in M_0 sta avtonomni komponenti, indeksa 1 in 2 pa označujeta državo 1 in državo 2. V nadaljevanju, ko bodo konstante b, h in m brez indeksov, pomeni, da na njih gledamo generalno za obe državi.

Po substituciji prvih štirih enačb v zadnjo enačbo in po ureditvi dobimo

$$\begin{aligned} Y_1 &= (b_1 Y_1) + (I_{01} + h_1 Y_1) + M_2 - (M_{01} + m_1 Y_1) \\ Y_1 &= (b_1 + h_1 - m_1) Y_1 + I_{01} + (M_{02} + m_2 Y_2) - M_{01} \\ (1 - b_1 - h_1 + m_1) Y_1 - m_2 Y_2 &= I_{01} + M_{02} - M_{01}, \end{aligned} \tag{60}$$

podobno še za drugo državo

$$(1 - b_2 - h_2 + m_2)Y_2 - m_1 Y_1 = I_{02} + M_{01} - M_{02}. \tag{61}$$

Izrazimo nacionalna prihodka v odprti ekonomiji

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{(1 - b_2 - h_2)(I_{01} + M_{02} - M_{01}) + m_2(I_{01} + I_{02})}{(1 - b_1 - h_1 + m_1)(1 - b_2 - h_2 + m_2) - m_1 m_2} \\ Y_2 &= \frac{(1 - b_1 - h_1)(I_{02} + M_{01} - M_{02}) + m_1(I_{01} + I_{02})}{(1 - b_1 - h_1 + m_1)(1 - b_2 - h_2 + m_2) - m_1 m_2} \end{aligned} \tag{62}$$

Spremembe prihodkov so

$$\begin{aligned} \Delta Y_1 &= \frac{(1 - b_2 - h_2)(\Delta I_{01} + \Delta M_{02} - \Delta M_{01}) + m_2(\Delta I_{01} + \Delta I_{02})}{(1 - b_1 - h_1 + m_1)(1 - b_2 - h_2 + m_2) - m_1 m_2} \\ \Delta Y_2 &= \frac{(1 - b_1 - h_1)(\Delta I_{02} + \Delta M_{01} - \Delta M_{02}) + m_1(\Delta I_{01} + \Delta I_{02})}{(1 - b_1 - h_1 + m_1)(1 - b_2 - h_2 + m_2) - m_1 m_2} \end{aligned} \tag{63}$$

Predpostavimo, da so v obeh državah C_t, I_t in M_t odvisne od Y_{t-1}. Če zapišemo dinamični sistem, dobimo

$$\begin{array}{rr} \text{Država 1} & \text{Država 2} \\ C_{1,t} = b_1 Y_{1,(t-1)} & C_{2,t} = b_2 Y_{2,(t-1)} \\ I_{1,t} = I_{01} + h_1 Y_{1,(t-1)} & I_{2,t} = I_{02} + h_2 Y_{2,(t-1)} \\ M_{1,t} = M_{01} + m_1 Y_{1,(t-1)} & M_{2,t} = M_{02} + m_2 Y_{2,(t-1)} \\ X_{1,t} = M_{2,t} & X_{2,t} = M_{1,t} \\ Y_{1,t} = C_{1,t} + I_{1,t} + X_{1,t} - M_{1,t} & Y_{2,t} = C_{2,t} + I_{2,t} + X_{2,t} - M_{2,t} \end{array}$$

Po substituciji dobimo diferenčne enačbe

$$\begin{aligned} Y_{1,t} &= (b_1 Y_{1,(t-1)}) + (I_{01} + h_1 Y_{1,(t-1)}) + M_{2,t} - (M_{01} + m_1 Y_{1,(t-1)}) \\ Y_{1,t} &= (b_1 + h_1 - m_1)Y_{1,(t-1)} + I_{01} + (M_{02} + m_2 Y_{2,t}) - M_{01} \\ Y_{1,t} &= (b_1 + h_1 - m_1)Y_{1,(t-1)} + m_2 Y_{2,(t-1)} + I_{01} + M_{02} - M_{01}, \end{aligned} \tag{64}$$

podobno še za drugo državo

$$Y_{2,t} = (b_2 + h_2 - m_2)Y_{2,(t-1)} + m_1 Y_{1,(t-1)} + I_{02} + M_{01} - M_{02}. \tag{65}$$

Partikularno rešitev sistema (64) dobimo z ugibanjem, kjer določimo $Y_{1,t} = Y_{1,(t-1)} = \bar{Y}_1$ in $Y_{2,t} = Y_{2,(t-1)} = \bar{Y}_2$, da sta $\bar{Y}_1$ in $\bar{Y}_2$ konstanti. Dobljeni vrednosti sta enaki ravnotežnima vrednostima statičnega modela (62).

Karakteristična enačba homogenega dela sistema (64) je

$$\begin{vmatrix} (b_1 + h_1 - m_1) - \lambda & m_2 \\ m_1 & (b_2 + h_2 - m_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{66}$$

Koeficienti b, h, m so pozitivni, saj je $b + h > m$ (več o tem v Gandolfo, Economic dynamics, Springer 2010, poglavje 4.2), zato lahko apliciramo stabilnostne pogoje (glej (2.6)).

Pogoj **I** nam da naslednja potrebna in zadostna pogoja:

$$\begin{aligned} 1 - b_1 - h_1 + m_1 &> 0 \\ (1 - b_1 - h_1 + m_1)(1 - b_1 - h_1 + m_2) - m_1 m_2 &> 0 \end{aligned} \tag{67}$$

Če želimo le zadostne pogoje, uporabimo pogoj **IV**, tako dobimo:

$$\begin{aligned} b_1 + h_1 &< 1 \\ b_2 + h_2 &< 1 \end{aligned} \tag{68}$$

Iz (67) in (68) pridemo do naslednjih zaključkov:

(1) Potreben (a nezadosten) stabilnosti pogoj je, da sta $1 - b_1 - h_1 + m_1$ in $1 - b_2 - h_2 + m_2$ oba pozitivna;
(2) Zadosten (a nenujen) stabilnostni pogoj je, da sta $b_1 + h_1$ in $b_2 + h_2$ oba manjša od 1;
(3) Če sta $b_1 + h_1 > 1$ in $b_2 + h_2 > 1$, potem je model nestabilen (sledi iz pogoja **XI**);
(4) Če je ena izmed količin $b_1 + h_1$ ali $b_2 + h_2$ manjša od 1 in druga večja, potem je lahko model stabilen ali pa nestabilen, odvisno od 'moči' m_1 in m_2.

Na podlagi teh zaključkov lahko pridemo do naslednjih ekonomskih zaključkov. Poudariti je potrebno, da je $b+h-m < 1$ stabilnostni pogoj za multiplikator zunanje trgovine brez posledic in da je $b + h < 1$ stabilnosti pogoj za multiplikator zaprte ekonomije (več o tem v Gandolfo, Economic dynamics, Springer 2010, poglavje 4.2). Če zgornje štiri trditve povemo še z besedami:

(1) Potreben (a nezadosten) stabilnostni pogoj za multiplikator je, da je v obeh državah multiplikator zunanje trgovine brez posledic stabilen;
(2) Zadosten (a nenujen) stabilnosti pogoj za multiplikator je, da je v obeh državah v izolaciji multiplikator zaprte ekonomije stabilen;
(3) Če je v obeh državah v izolaciji multiplikator zaprte ekonomije nestabilen, potem je tudi multiplikator zunanje trgovine s posledicami nestabilen;
(4) Obe državi obravnavamo, da sta v izolaciji. Če je v eni izmed držav multiplikator zaprte ekonomije ne zadostuje stabilnostnim pogojem medtem, ko je v drugi državi ta multiplikator zadostuje stabilnostnim pogojem, potem je lahko multiplikator zunanje trgovine s posledicami stabilen ali pa nestabilen.

Model multiplikatorja s tujimi posledicami lahko razširimo na poljubno število držav. Z $m_{j,i}, i \neq j$ označimo (delno) nagnjenost uvoza države i iz države j,

$$m_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} m_{j,i} \tag{69}$$

kjer je m_i (celotna) nagnjenost do uvoza države i. Podobno,

$$M_{0i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} M_{0(j,i)} \tag{70}$$

kjer je $m_{0(j,i)}$ neodvisen uvoz države i iz države j. Potem imamo za vsako državo $i = 1, 2, ..., n$,

$$\begin{aligned} Y_{i,t} &= C_{i,t} + I_{i,t} + X_{i,t} - M_{i,t} = \\ &= (b_i + h_i - m_i)Y_{i,(t-1)} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} m_{i,k}Y_{k,(t-1)} + I_{0i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} M_{0(i,k)} - M_{0i} \end{aligned} \tag{71}$$

Karakteristična enačba homogenega dela enačbe (71) je

$$\begin{vmatrix} (b_1+h_1-m_1)-\lambda & m_{12} & ... & m_{1n} \\ m_{21} & (b_2+h_2-m_2)-\lambda & ... & m_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ m_{n1} & m_{n2} & ... & (b_n+h_n-m_n)-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{72}$$

Ko apliciramo stabilnostne pogoje pridemo do podobnih zaključkov kot prej. Na primer, $b_i+h_i < 1, i = 1, 2, ..., n$, je zadosten pogoj, če pa je $b_i+h_i > 1, i = 1, 2, ..., n$, potem je pa model nestabilen. Poleg tega nujni in zadostni pogoji zagotavljajo, da je statično ravnotežje za nehomogene modele obstaja in je ekonomsko gledano nepomembno. Partikularna rešitev sistema (71) $\bar{\mathbf{Y}} = [\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{v}$, kjer je $\mathbf{v}$ vektor avtonimnih pogojev in nenegativna matrika $\mathbf{A}$ matrika koeficientov diferenčnega sistema. Pozitivnost glavnih minorjev matrike $[\mathbf{I} - \mathbf{A}]$ zagotavlja stabilnost.

3.3. **Oligopol in mednarodna trgovina.** Če izpustimo eno ali obe nujni predpostavki navadne teorije trgovanja, in sicer homogenost potrošnih dobrin prek držav in popolno konkurenco na vseh trgih, potem govorimo o novih teorijah mednarodnega trgovanja.

Brander (Brander, J.A., 1981, Intra - industry Trade in Identical Commodities) je preučeval mednarodno trgovanje s homogenimi potrošnimi dobrinami kjer je predpostavljal, da gre za oligopol z naraščajočimi donosi. Poglejmo si preprost primer duopola: v državi 1 imamo podjetje 1 in v državi 2 imamo podjetje 2. Obe proizvajata iste homogene potrošne dobrine. Predpostavljamo, da se odločajo o količini. Torej, oba podjetje se morata odločiti koliko svojih proizvodov bo prodala doma in koliko v tujini, pri čemer je celotna proizvodnja narejena doma. Stroški transporta so modelirani po *iceberg razporeditvi*, to pomeni, da transportne stroške upoštevamo kot del proizvodnje (spodaj je še razloženo s simboli). Stroške transporta nosi proizvajalec in so simetrični, torej je strošek transporta ene enote proizvoda podjetja 1 na trg države 2 je enak strošku transporta proizvoda podjetja 2 na trg države 1. Da model poenostavimo, predpostavimo, da sta razčlenjena tako, da podjetje i lahko prodaja produkte na domačen in tujem trgu po različnih cenah. Ker so produkti homogeni, bo na danem trgu cena enaka za domače in uvožene produkte.

Strateška interakcija med podjetjema je modelirana po Cournotovi hipotezi. Torej, obe podjetji maksimizirata svoj dobiček, kjer določata količino proizvoda na podlagi predpostavke, da se količina drugega podjetja v naslednjem času ne spremeni. Edina (dodana) razlika med navadnim Cournotovim in tem duopolom je ta, da podjetja delujeta na dveh trgih in na obeh trgih je uporabljena Cournotova strategija. Bolj natančno, če z $q_{ij}, i, j = 1, 2$ označimo ponujeno količino podjetja i na trgu j, potem podjetje 1 določi q_{11} in q_{12} tako da maksimizira dobiček pri čemer predpostavlja, da q_{21} in q_{22} ostaneta nespremenjena. Podobno velja za podjetje 2. Ko računamo dobiček je potrebno na q_{12} in q_{21} upoštevati še stroške transporta.

Bolj formalno, Brander je modeliral naraščajoče donose na zelo preprost način, predpostavljal je, da je stroškovna funkcija, ki je enaka za obe državi, enaka

$$C(q) = F + cq \tag{73}$$

kjer s F označimo fiksne stroške in s c marginalne stroške, ki so konstantni. Transportne stroške modeliramo po iceberg razporeditvi, to pomeni, da če x izvozimo iz države 1 v drugo, potem v državo prispe gx, kjer je $0 \leq g \leq 1$. Večji kot je g nižji so transportni stroški.

Funkciji povpraševanja sta identični v obeh državah. Predpostavimo, da sta normalni in linearni, torej

$$p_1 = a - b(q_{11} + q_{21}) \tag{74}$$

$$p_2 = a - b(q_{21} + q_{22}) \tag{75}$$

kjer sta $a, b > 0$. Sedaj lahko določimo še funkcijo dobička, najprej za podjetje 1

$$\pi_1 = [a - b(q_{11} + q_{21})]q_{11} + [1 - b(q_{12} + q_{22})]q_{12} - F - c(q_{11} + \frac{1}{g}q_{12}) \tag{76}$$

Opazimo, da če je količina ponujena na trgu 2, mora zaradi stroškov transporta proizvesti $\frac{1}{g}q_{12}$. Podobno definiramo še za drugo podjetje

$$\pi_2 = [a - b(q_{11} + q_{21})]q_{21} + [a - b(q_{12} + q_{22})]q_{22} - F - c(q_{22} + \frac{1}{g}q_{21}) \tag{77}$$

3.3.1. *Ravnotežje.* Cournotovo obnašanje pomeni, da vsako podjetje maksimizira dobiček pri že znanih količinah ostalih ponudnikov. Želimo, da ima funkcija π_i kot funkcija q_{ij} globalni maksimum v stacionarni točki

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial q_{11}} &= -2bq_{11} - bq_{21} + a - c = 0, \\
\frac{\partial \pi_1}{\partial q_{12}} &= -2bq_{12} - bq_{22} + a - \frac{c}{g} = 0, \\
\frac{\partial \pi_2}{\partial q_{21}} &= -2bq_{21} - bq_{11} + a - \frac{c}{g} = 0, \\
\frac{\partial \pi_2}{\partial q_{22}} &= -2bq_{22} - bq_{12} + a - c = 0
\end{aligned} \tag{78}$$

katerih rešitev bo dala maksimalne količine q_{ij}, pod pogojem, da so izpolnjeni pogoji drugega reda. To se da hitro preverit s Hessovo matriko. Poglejmo si Hessovo matriko funkcije π_1

$$\mathbf{H}(\pi_1) = \begin{bmatrix} -2b & 0 \\ 0 & -2b \end{bmatrix}. \tag{79}$$

Ta ima dve negativni lastni vrednosti, zato je v stacionarni točki maksimum.

Opomniti je potrebno, da so marginalni stroški, in tako posledično marginalni prihodki, za izvožene dobrine (c/g) višji v primerjavi z izdelki, ki so prodani na domačem trgu (c), kar gre pripisati transportnim stroškom.

Enačbe (78) prav tako definirajo implicitno funkcijo reakcij. Npr., če rešimo prvo enačbo za q_{11} dobimo optimalno količino ponujeno s strani podjetja 1 na trgu 1 glede na količino, ki jo ponuja podjetje 2 na istem trgu. Ta reakcijska krivulja je

$$q_{11} = -\frac{1}{2}q_{21} + \frac{c - a}{2b} \tag{80}$$

Opazimo, da je sistem štirih pogojev prvega reda ločljiv: prva in tretja enačba vsebujeta le dve spremenljivki, q_{11} ter q_{21}, in ju lahko rešimo neodvisno od drugih dveh enačb. Podobno velja za drugi dve enačbi. Ta lastnost ločljivosti je odvisna od predpostavke o konstantnih marginalnih stroških, saj če bi bili marginalni stroški funkcija proizvodnje, q_{12} vstopila v prvo enačbo, q_{11} v drugo in tako naprej. Torej bi bile vse štiri enačbe med seboj povezane. Opazimo tudi, da sta ta dva podsistema popolnoma simetrična, kar pomeni da je rešitev prvega podsistema tudi rešitev drugega, torej $q_{11} = q_{22}$ in $q_{12} = q_{21}$. Zato je dovolj, da bližje pogledamo le en podsistem. če pogledamo prvi podsistem opazimo, da je preprost linearen sistem, katerega rešitev je

$$q_{11}^R = \frac{a + \frac{c}{g} - 2c}{3b} \tag{81}$$

$$q_{21}^R = \frac{a + c - \frac{2c}{g}}{3b} \tag{82}$$

Zanima nas le pozitivna rešitev za q_{21}^R, saj v primeru $q_{21}^R = 0$ bi pomenilo, da ni mednarodnega trgovanja. Očitno je, da če želimo pozitvno rešitev, mora biti

$$g > \frac{2c}{a + c} \tag{83}$$

kar pomeni, da morajo biti transportni stroški pod določeno kritično mejo preden pride do vsiljivosti na tujem trgu (spomnimo, transportni stroški so inverzno odvisni od g). Ko grejo transportni stroški proti 0 ($g \to 1$), se bo rešitev približevala Cournotovi rešitvi

$$q_{11}^R = q_{21}^R = \frac{a - c}{3b}. \tag{84}$$

Očitno velja $q_{21}^R < q_{11}^R$ ((81) - (82)). Poleg tega se vidi vpliv g-ja na q_{11}^R in q_{21}^R, namreč, ko g narašča, torej transportni stroški padajo, q_{11}^R pada q_{21}^R pa raste. To pomeni, ko transportni stroški padajo se delež tujega podjetja na domačem trgu povečuje in delež domačga zmanjšuje in se približujeta $\frac{1}{2}$. Ter obratno, ko g pada.

Ker imata podjetji manjše deleže na tujih trgih kot na domačih, so marginalni prihodki na tujem trgu višji kot na domačem trgu. Zaradi simetričnosti pogojev je skupna količina proizvodov enaka na obeh trgih, posledično je tudi cena enaka na obeh trgih. Če se spomnimo, je pribitek podjetja na stroške definiran kot $\frac{p-MC}{p}$, kjer je p prodajna cena, MC pa marginalni stroški. Od tod sledi, da je pribitek podjetja na stroške manjši na tujem trgu kot na domačem. še več, zaradi transportnih stroškov velja $\frac{p-\frac{c}{g}}{p} < \frac{p-c}{p}$.

3.3.2. *Stabilnost.* Običajna pot modeliranja dinamičnega procesa, na katerem temeljijo reakcije, je z uvedbo zamika. Glede na to, da je dana količina ponujena v časovnem intervalu t s strani podjetja 2 na gledanem trgu, bo podjetje 1 uporabila svojo krivuljo reakcij za določitev kolikšno količino bodo ponudili v naslednjem časovnem intervalu. Podjetje 2 bo reagirala podobno. To pomeni, da upoštevamo naslednji sistem diferenčnih enačb

$$\begin{aligned} q_{11,t+1} &= -\frac{1}{2} q_{21,t} + \frac{c - a}{2b} \\ q_{21,t+1} &= -\frac{1}{2} q_{11,t} + \frac{\frac{c}{g} - a}{2b} \end{aligned} \tag{85}$$

Partikularno rešitev hitro najdemo, če določimo $q_{11,t+1} = q_{11,t} = q_{11}^P$ in $q_{21,t+1} = q_{21,t} = q_{21}^P$. Ko uredimo dobimo

$$\begin{aligned} q_{11}^P &= \frac{a + \frac{c}{g} - 2c}{3b} \\ q_{21}^P &= \frac{a + c - \frac{2c}{g}}{3b} \end{aligned} \tag{86}$$

kar sovpada z (85).

Karakteristična enačba homogenega dela sistema (85) je

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \tag{87}$$

katere ničli sta $\pm\frac{1}{2}$. Ker sta absolutno manjši od 1 je rešitev dinamično stabilna.

Literatura

[1] A. Vadnal, *Osnove diferenčnega računa*, DMFA - SRS, Ljubljana, 1988.

[2] Gandolfo, *Economic dynamics*, Springer 2010, poglavji 9 in 10.

[3] *Lastne vrednosti, lastni vektroji, korenski vektorji*, [ogled 24. 4. 2014], dostopno na `http://ucilnica1112.fmf.uni-lj.si/file.php/137/KorenskiVektorji.pdf`

[4] Bor Plestenjak, *Numerična linearna algebra*, verzija 22. 9. 2009, [ogled 5. 3. 2014], dostopno na `http://www-lp.fmf.uni-lj.si/plestenjak/vaje/NlaBol/NLABol.pdf`.

[5] *The Perron-Frobenius theorem*, [ogled 25. 8. 2015], dostopno na `http://www.math.miami.edu/~armstrong/685fa12/sternberg_perron_frobenius.pdf`.

[6] Mike Boyle, *Notes on the Perron-Frobenius theory of nonnegative matrices*, [ogled 26. 8. 2015], dostopno na `http://www2.math.umd.edu/~mboyle/courses/475sp05/spec.pdf`.

[7] *Metode za analizo družbenih procesov*, [ogled 20. 4. 2015], dostopno na `www.ljudmila.org/~ziva/pred.doc`.

[8] *Matrix (mathematics)*, [ogled 26. 8. 2015], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Matrix_(mathematics)`.

[9] *Positive-definite matrix*, [ogled 26. 8. 2015], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Positive-definite_matrix`.

[10] *Diferencialna enčba*, [ogled 20. 4. 2015], dostopno na `http://sl.wikipedia.org/wiki/Diferencialna_ena%C4%8Dba`.

[11] *Diagonalno dominantna matrika*, [ogled 22. 2. 2014], dostopno na `http://sl.wikipedia.org/wiki/Diagonalno_dominantna_matrika`.

[12] *Perron–Frobenius theorem*, [ogled 25. 8. 2015], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Perron%E2%80%93Frobenius_theorem`.

[13] *Spectrum of a matrix*, [ogled 25. 8. 2015], dostopno na `https://en.wikipedia.org/wiki/Spectrum_of_a_matrix`.