UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Maruša Rizmal

Nenegativni posplošeni inverzi in njihova uporaba pri optimizaciji

Delo diplomskega seminarja

Mentor: dr. Ganna Kudryavtseva

Ljubljana, 2014

Kazalo

1. Uvod 4
2. Nenegativni posplošeni inverzi 5
2.1. Moore-Penroseov posplošeni inverz 5
2.2. Primer Moore-Penroseovega posplošenega inverza 8
2.3. Posplošeni inverz nenegativne matrike 9
2.4. Grupni inverz 11
2.5. Drazinov posplošeni inverz 12
2.6. Primer izračuna Drazinovega in grupnega inverza 14
2.7. Enostranska posplošena inverza 15
2.8. Primer levega in desnega inverza 15
3. Uporaba pri optimizaciji 17
3.1. Input-output tabela 17
3.2. Tehnični koeficienti 18
3.3. Statični model 18
3.4. Dinamični model 22
3.5. Predpogoji in matrične neenakosti 22
3.6. Pozitivne rešitve singularnih sistemov diferenčnih enačb 24
3.7. Pozitivne rešitve diskretnega dinamičnega Leontiefovega modela 27
3.8. Primer trisektorskega gospodarstva s singularno kapitalsko matriko 29
Literatura 30

Nenegativni posplošeni inverzi in njihova uporaba pri optimizaciji

POVZETEK

V tem delu diplomskega seminarja bom predstavila pojem posplošenega inverza matrike in opisala nekaj vrst posplošenih inverzov: Moore-Penroseov posplošeni inverz, Drazinov inverz, grupni inverz in enostranska inverza ter podala različne načine računanja teh inverzov. V povezavi z njihovo nenegativnostjo bom opisala Leontiefov input-output model, najprej statičnega in nato še dinamičnega, kjer je potreba po nenegativnosti posplošenega inverza nujna za zagotavljanje realnih rešitev. Pri statičnem modelu bom naprej opisala glavne predpostavke in predstavila različne zapise input-output tabel, pri dinamičnem pa bom s pomočjo Drazinovega inverza iskala nenegativne rešitve sistema s singularno kapitalsko matriko.

Nonnegative generalized inverses and their use in optimization

ABSTRACT

In this diploma thesis I am going to present the concept of a generalized inverse of a matrix and describe several types of generalized inverses: the Moore-Penrose generalized inverse, the Drazin inverse, the group inverse and the one-sided inverse and also some possible ways of computing this inverses. Related to their nonnegativity I am going to describe Leontief's input-output model, first the static version and then the dynamic one, where the requirement of nonnegativity is necessary for existence of real solutions of a given problem. In the static model I am going to describe some main prerequisits and different ways to write input-output tables. In the dynamic version of the model I will construct some nonnegative solutions for a singular capital matrix, using Drazin inverse.

Math. Subj. Class. (2010): 15B48

Ključne besede: posplošeni inverz, nenegativnost, input-output sistem, Leontiefov statičen model, Leontiefov dinamičen model

Keywords: generalized inverse, non-negativity, input-output sistem, Leontief static model, Leontief dynamic model

1. Uvod

Enačbe oblike

$$Ax = b, \tag{1}$$

kjer je A matrika velikosti $m \times n$ nad kompleksnimi števili ($A \in \mathbb{C}^{m\times n}$), $x \in \mathbb{C}^n$ *in* $b \in \mathbb{C}^m$, se pojavjajo v mnogih aplikativnih problemih. Če je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in je hkrati obrnjiva, potem je sistem enačb (1) zagotovo rešljiv. Enolična rešitev sistema je $x = A^{-1}b$. Če pa je A poljubna matrika iz $\mathbb{C}^{m\times n}$, potem je sistem iz (1) težje rešiti. V tem primeru je lahko sistem brez rešitev, ima eno samo ali pa neskončno število rešitev, odvisno od tega, ali je $b \in R(A)$, kjer je $R(A)$ slika matrike A. Potrebno je torej poiskati takšno matriko (ali matrike) C, da bo rešitev (1) oblike Cb. Toda v primeru, da $b \notin R(A)$, sistem iz (1) nima rešitve. Moja naloga bo torej spremeniti predstavo o rešitvi za (1), pri čemur je nujna definicija posplošenega inverza.
Posplošeni inverz oziroma psevdoinverz matrike A je matrika, ki ima podobne lastnosti kot inverz matrike A, pri čemer ni nujno da za posplošeni inverz veljajo prav vse lastnosti inverza. Kadar govorimo o psevdoinverzih imamo po navadi v mislih Moore-Penroseov posplošeni inverz. Poleg Moore-Penroseovega posplošenega inverza so pomembni še naslednji inverzi: Drazinov inverz, grupni inverz, ki je poseben primer Drazinovega inverza, ter enostranski inverz (levi ali desni enostranski posplošeni inverz).
Vse vrste posplošenih inverzov in računske primere bom predstavila v prvem delu diplomskega seminarja in jih nato uporabila v drugem delu, ko bom opisala statičen in dinamičen input-output model Wassilyja Leontiefa.
Wassily Leontief je bil ameriški ekonomist, rojen leta 1905 v St. Petersburgu, sin Wassilyja W. Lenotiefa in njegove žene Eugenije. Bil je odličen študent, na fakulteto v Leningradu se je vpisal pri petnajstih letih. Pogosto se je znašel v težavah, ker je kritiziral tedanji komunistični režim, ki naj bi posamezniku onemogočal intelektualno in osebno svobodo. Zaradi tega je bil tudi večkrat aretiran. Na Harvardu je začel razvijati teorijo in različne metode input-output analiz. Prav delo na teh analizah mu je leta 1973 prineslo Nobelovo nagrado na področju ekonomije. Njegove analitične metode so postale nepogrešljiv del pri načtovanju in napovedovanju proizvodnje v industrializiranih državah in zasebnih družbah po vsem svetu. Umrl je leta 1999.
Input-output analiza je metoda, kjer sistematično preučujemo kvantitativno soodvisnost med različnimi sektorji nekega ekonomskega sistema. Ekonomski sistem je lahko velik kot celotno državno ali svetovno gospodarstvo, ali majhen kot ekonomija metropolitanskega območja ali samostojnega podjetja.
Struktura procesa posameznega sektorja predstavlja ustrezno definiran vektor strukturnih koeficientov, ki opisuje kvantitativno razmere med inputi (vložki), ki jih absorbira in outputi (izhodi), ki jih proizvaja. Soodvisnost med posameznimi sektorji danega sistema lahko opišemo z nizom linearnih enačb, ki izražajo ravnovesja med celotnim inputom in skupno proizvodnjo posameznega blaga in storitev, ki se uporabljajo v sklopu enega ali več časovnih obdobij.

2. Nenegativni posplošeni inverzi

2.1. Moore-Penroseov posplošeni inverz. Najprej bom predstavila karakterizacijo običajnega inverza v primeru, ko je dana matrika nesingularna.

Trditev (lastnosti) 2.1. *Če je A nesingularna (obrnljiva) matrika, potem A in $X = A^{-1}$ zadoščata:*

$$AXA = A \tag{2}$$

$$XAX = X \tag{3}$$

$$AX = (AX)^* \tag{4}$$

$$XA = (XA)^* \tag{5}$$

$$AX = XA \tag{6}$$

$$A^k = XA^{k+1}, k = 0, 1, 2... \tag{7}$$

Če želimo analog inverza definirati tudi za poljubne, ne nujno kvadratne matrike, je potreben naslednji izrek, ki ga je leta 1954 predstavil ameriški matematik Roger Penrose. Definicijo posplošenega inverza je sicer že leta 1920 podal E. H. Moore, zato se inverz imenuje po obeh matematikih.
Moore-Penroseov posplošeni inverz se uporablja pri metodi najmanjših kvadratov, za izračun "najustreznejše" rešitve sistema linearnih enačb, ki nima enolične rešitve, pri iskanju minimuma (evklidske) norme linearnih enačb z več rešitvami, itd.
Pri definicij psevdoinverza si bom pomagala z naslednjimi lastnostmi konjugiranega transponiranja, kjer bom z A^* označila konjugirano transponiranko matrike A:

$$\begin{aligned} A^{**} &= A, \\ (A+B)^* &= A^* + B^*, \\ (\lambda A)^* &= \overline{\lambda} A^*, \\ (BA)^* &= A^* B^*, \\ AA^* &= 0 \textit{ implicira, da je } A = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Zadnja od lastnosti sledi iz dejstva, da je sled matrike A^*A vsota kvadratov modulov elementov matrike A. Iz zadnjih dveh lastnosti dobimo spodaj zapisana pravila:

$$\begin{aligned} &BAA^* = CAA^* \textit{ pomeni, da je } BA = CA, \textit{kar sledi iz} \\ &(BAA^* - CAA^*)(B-C)^* = (BA-CA)(BA-CA)^*. \end{aligned} \tag{9}$$

$$\textit{Podobno } BA^*A = CA^*A \textit{ implicira, da je } BA^* = CA^*. \tag{10}$$

Izrek 2.2. (Moore-Penrooseov posplošeni inverz) *Spodnje štiri enačbe*

$$AXA = A \tag{11}$$

$$XAX = X \tag{12}$$

$$(AX)^* = AX \tag{13}$$

$$(XA)^* = XA \tag{14}$$

imajo enolično rešitev za poljuben A.

Dokaz. Najprej je potrebno pokazati, da sta enačbi (12) in (13) ekvivaletni spodnjemu zapisu,

$$XX^*A^* = X. \tag{15}$$

Enačba (15) sledi iz (12) in (13), saj (13) s pomočjo lastnosti konjugiranega transponiranja nadomestimo z (12). Nasprotno, (15) implicira $AXX^*A^* = AX$, kjer je leva stran hermitska. Tako (13) sledi, s substitucijo (13) in (15) pa dobimo (12). Podobno kot prej, lahko (11) in (14) nadomestimo s spodnjo enačbo,

$$XAA^* = A^*. \tag{16}$$

Tako je dovolj, da poiščemo nek X, ki zadostuje enačbama (15) in (16). Takšen X bo obstajal, če lahko najdemo B, ki bo zadoščal enačbi $BA^*AA^* = A^*$. Takrat bo $X = BA^*$ zadoščal (16). Poleg tega lahko vidimo, da (16) implicira $A^*X^*A^* = A^*$ in zato $BA^*X^*A^* = BA^*$. Torej X ustreza tudi enačbi (15).
Sedaj matrike $A^*A, (A^*A)^2, (A^*A)^3...$ niso linearno neodvisne, zato obstaja relacija

$$\lambda_1 A^*A + \lambda_2 (A^*A)^2 + ... + \lambda_k (A^*A)^k = 0, \tag{17}$$

kjer $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ niso vse enake nič. Naj bo λ_r prva, ki je neničelna med λ -mi in naj bo

$$B = -\lambda_r^{-1}\{\lambda_{r+1} + \lambda_{r+2}A^*A + ... + \lambda_k (A^*A)^{k-r-1}\}.$$

S pomočjo (17) dobimo $B(A^*A)^{r+1} = (A^*A)^r$ in z večkratno uporabo (9) in (10) nato pridobimo še $BA^*AA^* = A^*$, kot je bilo zahtevano.
Če želimo pokazati, da je X tudi enoličen, predpostavimo, da X zadošča (15) in (16) in Y zadošča enačbama $Y = A^*Y^*Y$ in $A^* = A^*AY$. Zadnji dve enačbi smo dobili z zaporedno substitucijo (14) in (12) ter nato (13) in (11). (Enačbi (15) in (16) sta namesto z Y napisani z X, spremenjen je tudi vrstni red množenja, ampak kjub temu morata zaradi simetrije zadoščati enačbam (11), (12), (13) in (14).) Sedaj lahko zapišemo

$$X = XX^*A^* = XX^*A^*AY = XAY = XAA^*Y^*Y = A^*Y^*Y = Y.$$

Definicija 2.3. *Enolično rešitev za* (11), (12), (13) *in* (14) *bomo poimenovali posplošeni inverz matrike A in ga zapisali kot* $X = A^\dagger$. *(A v tem primeru ni nujno kvadratna matrika in je lahko celo ničelna).*

Pri računanju $A^\dagger$ je potrebno rešiti dve unilateralni linearni enačbi, $XAA^* = A^*$ in $A^*AY = A^*$. Če zapišemo $A^\dagger = XAY$ in uporabimo dejstvo, da sta XA in AY hermitski ter zadoščata enačbi $AXA = A = AYA$, potem opazimo, da so vse štiri relacije (11), (12), (13) in (14) upravičene. Relaciji, kateri vsebujeta posplošeni inverz $A^\dagger$, sta tudi

$$A^\dagger A^{\dagger *} A^* = A^\dagger = A^* A^{\dagger *} A^\dagger$$

in

$$A^\dagger AA^* = A^* = A^*AA^\dagger,$$

kar pa sta natanko enačbi (15) in (16) ter njuna obrata. □

Definicija 2.4. *Matriko, ki zadošča pogojema* (11) *in* (12)*, imenujemo posplošeni inverz. Posplošeni inverz vedno obstaja, vendar v splošnem ni enoličen. Enoličnost bo zagotovoljena, če dodamo zadnja dva pogoja.*

V naslednji lemi bom predstavila še nekaj dodatnih lastnosti Moore-Penroseovega posplošenega inverza.

Lema 2.5.

– $A^{\dagger\dagger} = A$,

– $A^{*\dagger} = A^{\dagger *}$,

– $A^\dagger = A^{-1}$, *če je* A *nesingularna,*

– $(\lambda A)^\dagger = \lambda^\dagger A^\dagger$,

– $(A^* A^\dagger) = A^\dagger A^{\dagger *}$,

– $(UAV)^\dagger = V^* A^\dagger U^*$, *če sta* U *in* V *unitarni,*

– *Če je* $A = \sum A_i$, *kjer je* $A_i A_j^* = 0$ *in*

$A_i^* A_j = 0$, *kadarkoli* $i \neq j$, *potem je* $A^\dagger = \sum A_i^\dagger$,

– $A^\dagger A = AA^\dagger$ *in* $(A^n)^\dagger = (A^\dagger)^n$, *če je* A *normalna,*

– *Matrike* $A, A^*A, A^\dagger$ *in* $A^\dagger A$ *imajo vse rang, ki je enak sledi matrike* $A^\dagger A$.

Definicija 2.6. *Z* $r(A)$ *označimo rang matrike* A, *z* $\mathbb{C}_r^{m\times n}$ *pa nabor matrik z rangom* r *v* $\mathbb{C}^{m\times n}$. *Naj bo* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, *kjer je* $r > 0$. *Če lahko najdemo* $F \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ *in* $G \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$, *tako da je* $A = FG$, *pravimo da ima matrika* A *faktorizacijo polnega ranga.*

Izrek 2.7. *Če je* $A = LU$, *kjer je* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, L \in \mathbb{C}^{m\times r}, U \in \mathbb{C}^{r\times n}$ *in* $r = rang(A) = rang(L) = rang(U)$, *potem je*

$$A^\dagger = U^*(UU^*)^{-1}(L^*L)^{-1}L^*. \tag{18}$$

Dokaz. Matriki L^*L in U^*U sta obe ranga r in velikosti $\mathbb{C}^{r\times r}$, zato je smiselno uporabiti njuna običajna inverza. Naj bo

$$X = U^*(UU^*)^{-1}(L^*L)^{-1}L^*.$$

Pokazali bomo, da X zadošča definiciji Moore-Penroseovega posplošenega inverza. Takšen X smo si izbrali zato, ker izhajamo iz dejstva, da je definicija posplošenega inverza algebraična. To pomeni, da bolj kot je izraz zahteven, težje je delati z njim, predvsem v geometrijskem smislu.
Sedaj je

$$AX = LUU^*(UU^*)^{-1}(LL^*)^{-1}L^* = L(L^*L)^{-1}L^*$$

in $(AX)^* = AX$. Poleg tega lahko zapišemo tudi obratno,

$$XA = U^*(UU^*)^{-1}(L^*L)^{-1}L^*LU = U^*(UU^*)^{-1}U$$

in $(XA)^* = XA$. S tem smo pokazali, da veljata (13) in (14).
Da bi pokazali še točki (11) in (12) uporabimo $XA = U^*(UU^*)^{-1}U$, da bi dobili

$$A(XA) = LU(U^*(UU^*)^{-1}U) = LU = A \tag{19}$$

in

$$\begin{aligned}(XA)X &= U^*(UU^*)^{-1}UU^*(UU^*)^{-1}(L^*L)^{-1}L^* \\ &= (L^*L)^{-1}L^* = U^*(UU^*)^{-1}(L^*L)^{-1}L^* = X.\end{aligned}$$

Potem je $X = A^\dagger$. □

Lahko pa Moore-Penroseov posplošeni inverz definiramo tudi drugače.

Definicija 2.8. *Naj bo $\lambda \subseteq \{1,2,3,4\}$, ki vsebuje 1 in privzemimo, da je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Potem je λ-inverz matrike A, matrika X, ki zadostuje pogojem (i), v definiciji* (2.1)*, za vsak $i \in \lambda$, pri čemer je 1. pogoj v λ enakovreden pogoju* (2)*, 2. pogoj je enakovreden* (3)*, itd. Na primer, Moore-Penroseov posplošeni inverz je v tej notaciji $\{1,2,3,4\}$-inverz.*
Predpostavka, da je $1 \in \lambda$ zagotavlja, da je ničelna matrika λ-inverz matrike A, če in samo če A = 0. $\{1,2\}$-inverz imenujemo delni-inverz matrike A.

2.2. **Primer Moore-Penroseovega posplošenega inverza.** Izberemo matriko $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Posplošeni inverz izračunam tako, da A zapišem kot $A = LU$, pri čemur uporabim (18). Matriki L in U dobimo po naslednjem postopku:
1. korak: Z Gauss-Jordanovo eliminacijo A zreduciramo na obliko RREF(A). RREF(A) je matrika A, zreducirana na vrstično kanonično formo in ima naslednjo obliko:

- Vse neničelne vrstice (vrstice z vsaj enim neničelnim elementom) so nad vsemi vrsticami s samimi ničlami.
- Vodilni koeficient (pivot) neničelne vrstice je vedno na desni strani vodilnega koeficienta v zgornji vrstici.
- Vsi elementi v stolpcu, ki so pod pivotom, so enaki nič.
- Vsak vodilni koeficient je enak 1 in je edini neničeln element v stolpcu.

2. korak: Konstruiramo matriko L iz stolpcev matrike A , ki ustrezajo vodilnim stolpcem v RREF(A) in jih v L zapišemo v enakem vrstnem redu, kot so zapisani v A.
3. korak: Matriko U konstruiramo iz neničelnih vrstic RREF(A) in jih v U zapišemo v enakem vrstem redu, kot se pojavijo v RREF(A). Potem je A = LU faktorizacija polnega ranga matrike A. S pomočjo zgoraj zapisanih korakov dobimo matrike RREF(A), L in U:

$$RREF(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Potem lahko izračunamo

$$\begin{aligned} A^{\dagger} &= U^{*}(UU^{*})^{-1}(L^{*}L)^{-1}L^{*} \\ &= \begin{bmatrix} 1/3 & -1 & 1/6 \\ -1/6 & 0 & 1/6 \\ -2/3 & 1 & 1/6 \\ 3/2 & -1 & -1/2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

in dobimo

$$\begin{aligned} AA^{\dagger} &= I_3 \ in \\ A^{\dagger}A &= \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 & -1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/6 & 1/3 & 5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

kjer je I_3 identitetna matrika velikosti 3×3.

2.3. **Posplošeni inverz nenegativne matrike.** Naj bo matrika $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potem je enoličen Moore-Penroseov posplošeni inverz $A^{\dagger}$, kjer je $A^{\dagger} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ z vsemi lastnostmi navedenimi v (2.2). Glavna naloga posplošenega inverza tako konceptualna kot praktična je zagotovljanje rešitve problema najmanjših kvadratov, torej kateri x minimizira $\| b - Ax \|$ in ima hkrati najmanjšo $\| x \|^2$. Rešitev je $x = A^{\dagger}b$.
Če je A nenegativna ($A \geq 0$), kar pomeni, da so vsi elementi matrike A nenegativna realna števila, potem $A^{\dagger}$ ni nujno nenegativen. Kadar imamo kvadratno in nesingularno matriko $A \geq 0$, potem je $A^{\dagger} = A^{-1} \geq 0$, če in samo če lahko matriko A zapišemo kot produkt diagonalne matrike in permutacijske matrike, tako da velja $A^{-1} = DA^{T}$, kjer je D diagonalna matrika s pozitivnimi diagonalnimi elementi. Poiskati moramo dovolj nujnih in zadostnih pogojev, da lahko izračunamo posplošeni inverz matrike $A \geq 0$, ki bo nenegativen.
Za lažje razumevanje bom najprej predstavila kanonično formo nenegativne simetrične idempotentne matrike.

Izrek 2.9. *Naj bo I nenegativna idempotentna matrika z rangom r. Potem obstaja permutacijska matrika P, tako da velja*

$$PIP^{T} = \begin{bmatrix} J & JB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ AJ & AJB & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kjer sta A in B nenegativni matriki primernih velikosti in

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{bmatrix},$$

kjer je vsaka J_r nenegativna idempotentna matrika ranga 1.

Dokaz. Predpostavimo, da noben stolpec matrike I ni ničeln. Nadalje predpostavimo, da tudi nobena vrstica matrike I ni ničelna. To pomeni, da je $E_0 = ker(I) \cap E$, kjer je $E = \{e_0, e_1, \ldots e_n\}$ niz enotskih vektorjev iz $\mathbb{R}^n$, prazen. Potem sledi, da je $\cup E_j = E$. Naj bo K_j linearna ogrinjača E_j. Potem je $R^n = K_1 \oplus \ldots \oplus K_n$. Nadalje je IK_j vrstica čez a_j za vsak j, kjer je $a_j = b_j + c_j,\ b_j \in K_j,\ c_j \in M =$

$N \cap P$ in P predstavlja podmnožico vektorskega prostora, ki je zaprt za množenje s pozitivnim skalarjem v $\mathbb{R}^n$. Torej od I odštejemo K_j in vsaka omejitev I z nekim K_j ima rang enak 1. Če preuredimo koordinate tako, da vse enotske vektorje, ki pripadajo K_j razvrstimo skupaj, dobimo matriko

$$P^{-1}IP = J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & 0 & \\ 0 & & \ddots & J_k \end{bmatrix},$$

kjer so J_j idempotentne matrike z rangom 1. □

Lema 2.10. *Naj bo $I \geq 0$ simetrična idempotentna matrika ranga r s q nenegativnimi vrsticami. Potem obstajajo cela števila $\lambda_1, ..., \lambda_r$ in permutacijska matrika P, tako da je $q = \lambda_1 + ... + \lambda_r$ in ima PIP^T naslednjo obliko*

(20)
$$PIP^T = \left[\begin{array}{ccc|c} J_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & J_r & \\ \hline & 0 & & \end{array}\right],$$

kjer je vsaka J_i, $\lambda_i \times \lambda i$ pozitivna idempotentna matrika z rangom 1.
Z naslednjim izrekom bo karakterizirana takšna matrika $A \geq 0$, da bo tudi njen posplošeni inverz $A^\dagger$ nenegativen.

Izrek 2.11. *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ nenegativna matrika z rangom r. Potem so naslednje trditve ekvivaletne:*

- *Inverz $A^\dagger$ je nenegativen.*
- *Obstaja permutacijska matrika P, tako da ima PA obliko*

(21)
$$PA = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \\ 0 \end{bmatrix},$$

  kjer ima vsak B_i rang 1 in vrstice ortogonalne z vrsticami B_j, za $i \neq j$.
- *$A^\dagger = DA^T$, za neko diagonalno matriko D s pozitivnimi diagonalnimi elementi.*

Dokaz. Predpostavimo, da prva trditev zgornjega izreka drži in sta $A, A^\dagger$ nenegativni. Ker je $I = AA^\dagger$ simetrična in idempotentna matrika, obstaja permutacijska matrika P, tako da ima $K = PIP^T$ obliko iz (20). Naj bo $B = PA$ Potem je

$$B^\dagger = A^\dagger P^T, \quad BB^\dagger = K, \quad KB = B \text{ in } B^\dagger K = B^\dagger.$$

Sedaj lahko B zapišemo kot v (21), kjer je r rang matrike A in kjer je vsak B_i, $1 \leq i \neq j \leq r$, $\lambda_i \times n$ matrika brez ničelnih vrstic, saj imata A in B enako število neničelnih vrstic. Potrebno je še pokazati, da vsak B_i z rangom 1 in $B_i B_j^T = 0$, za vse $1 \leq i \neq j \leq r$.
Naj bo $C = B^\dagger$. Potem C lahko zapišemo kot

$$C = (C_1, \ldots, C_r,\ 0),$$

kjer je C_i za vse $1 \leq i \leq r$, $n \times \lambda_i$ matrika brez ničelnih elementov. Še več, ker je CB simetrična, je stolpec v B nenegativen, če in samo če je ustrezna vrstica matrike C nenegativna. Iz $KB = B$ sledi $J_i B_i = B_i$, tako da je B_i ranga 1 za vse $1 \leq i \leq r$.

Sedaj je le še potrebno dokazati, da so vrstice B_i ortogonalne z vrsticami B_j, za $i \neq j$. Ker ima BK obliko iz (20) je

$$\begin{aligned} B_i C_j &= J_i, \ \textit{če } i = j \ in \\ &= 0, \ \textit{če } i \neq j, \end{aligned}$$

za vse $1 \leq i, j \leq r$. Predpostavimo, da je l-ti stolpec matrike B_i nenegativen. Potem je $B_i C_k = 0$ za vse $k \neq i$, kar pomeni, da je l-ta vrstica matrike C_k ničelna. Če je l-ta vrstica matrike C neničelna, potem je l-ta vrstiva v C_i tudi nenegativna. V tem primeru je l-ti stolpec matrike B_k ničeln za vse $k \neq i$, saj je $B_k C_i = 0$. Torej je

$$B_i B_j^T = 0, \ za \ vse \quad \leq i \neq j \leq r.$$

Pri dokazu druge trditve naredimo podobno kot pri dokazu prve trditve in predpostavimo, da druga hipoteza drži, pri čemur naj ima $B = PA$ obliko iz (21). Potem za $1 \leq i \leq r$, obstajajo stolpični vektorji x_i in y_i, tako da je $B_i = x_i y_i^T$. Nadalje, $B_i^\dagger$ je nenegativna matrika $B_i^\dagger = (\| x_i \|^2 \| y_i \|^2)^{-1} B_i^T$ in $B^\dagger = (B^\dagger, \ldots, B_r^\dagger, 0)$, saj je $B_i B_j^T = 0$ za vse $i \neq j$. Sledi, da je $B^\dagger = DB^T$, kjer je D diagonalna matrika s pozitivnimi diagonalnimi elementi in $A^\dagger = DA^T$. Očitno zadnja trditev izhaja iz prve, tako da je s tem dokaz končan. □

2.4. **Grupni inverz.**

Definicija 2.12. *Matriko X imenujemo grupni inverz (kvadratne) matrike A, če zadošča naslednjim pogojem:*

$$\begin{aligned} AXA &= A \\ XAX &= X \\ AX &= XA. \end{aligned} \tag{22}$$

Izrek 2.13. *Če ima matrika A grupni inverz, potem je ta enoličen.*

Dokaz. Predpostavimo, da X in Y zadoščata zgornjim trem enačbam. Potem je

$$X = XAX = AXX = AYAXX = YAX = YYA = YAY = Y.$$

□

Izkaže se, da nima vsaka matrika grupnega inverza. Da to pokažem, bom uporabila faktorizacijo polnega ranga. Ko grupni inverz obstaja, ga označimo z $A^\sharp$. Grupnemu inverzu je dal ime I. Erdely in izhaja iz dejstva, da pozitivni in negativni eksponenti dane matrike A, skupaj s projektorjem $AA^\sharp$, tvorijo Abelovo grupo.

Izrek 2.14. *Naj bo kvadratna matrika*

$$A = FG \tag{23}$$

zapisana kot faktorizacija polnega ranga. Potem ima A grupni inverz, če in samo če je GF nesingularna. V tem primeru lahko zapišemo grupni inverz matrike A kot

$$A^\sharp = F(GF)^{-2}G. \tag{24}$$

Dokaz. Naj bo$r = rang(A)$. Potem je $GF \in \mathbb{C}^{r \times r}$. Sledi, da je

$$A^2 = FGFG$$

in

$$rang(A^2) = rang(GF).$$

(26) velja, če in samo če je GF nesingularna in s tem je prvi del izreka dokazan. Formula (24) sledi iz enoličnosti grupnega inverza. $\square$

Definicija 2.15. *Indeks kvadratne matrike A je najmanjše nenegativno celo število k, tako da zadostuje enačbi*

$$rang(A^{k+1}) = rang(A^k). \tag{25}$$

Posledica 2.16. *Kvadratna matrika A ima grupni inverz, če in samo če je $Ind(A) = 1$ oziroma*

$$rang(A) = rang(A^2). \tag{26}$$

2.5. **Drazinov posplošeni inverz.** V prejšnjem razdelku sem pokazala, da grupni inverz ne obstaja za vse kvadratne matrike, ampak samo za tiste z indeksom 1. V tem poglavju bom definirala, da ima vsaka kvadratna matrika enoličen $\{1^k, 2, 5\}$-inverz, kjer je k indeks matrike A. Drazinov inverz je prvi preučeval ameriški matematik Michael P. Drazin, toda v bolj splošnem kontekstu obsegov in polgrup, brez povezave z matrikami.
Najprej bom za ponovitev in lažje razumevanje Drazinovega inverza zapisala definicijo linearne preslikave ter njene slike in jedra (ničelnega prostora).

Definicija 2.17. *Preslikava $A : U \to V$ je linearna, če velja:*

$$\begin{aligned} &- aditivnost: \; A(u_1 + u_2) = Au_1 + Au_2, \; za \; vse \; u_1, u_2 \in U, \\ &- homogenost: \; A(\alpha u) = \alpha(Au) \; za \; vse \; \alpha \in \mathbb{R} \; in \; u \in U. \end{aligned}$$

Definicija 2.18. *Naj bo $A : U \to V$ linearna preslikava. Potem množico*

$$N(A) = ker(A) = \{u \in U; Au = 0\}$$

imenujemo jedro oziroma ničelni prostor linearne preslikave.

Definicija 2.19. *Množico*

$$im(A) = R(A) = \{v \in V; \exists\; u \in U, \; da \; je \; v = Au\}$$

imenujemo slika linearne preslikave.

Definicija 2.20. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Vektorska prostora $R(A)$ in $N(A)$ sta komplementarna, če velja $V = R(A) \oplus N(A)$. Matrika*

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & B \end{array}\right] \tag{27}$$

ima v primeru, ko sta bazi N(A) in R(A) komplementarni, zgornjo obliko in B ustreza omejitvi matrike A na $R(A)$. Matriko B imenujemo $A_{R(A)}$.

Definicija 2.21. (Drazinov inverz) *Naj bo A kvadratna matrika z indeksom k. Potem $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ imenujemo Drazinov inverz matrike A (krajše D-inverz), če zadostimo naslednjim pogojem:*

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= XA^k, \; k = 0, 1, 2... \\ XAX &= X \\ AX &= XA. \end{aligned} \tag{28}$$

Definicija 2.22. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ z $Ind(A) = k$. Potem obstaja natanko ena matrika $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, ki zadošča trem pogojem v definiciji (2.21). To enolično matriko označimo z A^D in jo imenujemo Drazinov inverz matrike A.*

Dokaz. Pri dokazu enoličnosti predpostavimo, da X in Y oba zadoščata vsem pogojem iz (2.21). Potem je $A^{q+1}X = A^k = A^{k+1}$ in $A^kAX = A^kAY$. Torej je $A^kXA = A^kYA$. Sledi $A^kXAX = A^kYAX$ in $A^kX = A^kYAX$. Sedaj je $A^{q-1}AX = = A^{q-1}AYAX$ in $A^{q-1}XA = A^{q-1}AYAX$, $A^{q-1}XAX = A^{q-1}AYAX^2$, $A^{q-1}X = A^{q-1}AYXAX = A^{q-1}AYX = A^{q-1}YAX$. Stopnjo A smo na levi znižali za 1 in dobili $A^{q-1} = A^{q-1}YAX$. Nadaljujemo s postopkom, dokler ne dobimo $X = YAX$. Zaradi simetričnosti je tudi $Y = XAY$. Nadalje, iz tretjega pogoja definicije (2.21) dobimo $A^q(AY - I) = 0$ in $XA^q(AY - I) = 0$, torej je $XA^qXA(Y - X) = 0$. Če uporabimo drugi pogoj (2.21), dobimo $A^{q-1}(XAX)A(Y-X) = 0$ in iz prvega pogoja sledi, da je $A^{q-1}(XA)(Y - X) = 0$ in $A^{q-1}(XAY - XAX) = A^{q-1}(XAY - X) = 0$. Ponovno vidimo, da lahko zmanjšamo stopnjo matriki A na levi in na koncu dobimo $XAY - X = 0$ in $X = XAY = Y$. Če želimo dokazati obstoj Drazinovega inverza, uporabimo faktorizacijo polnega ranga in zlahka preverimo vse tri pogoje iz (2.21). □

Drazinov inverz naravno dobimo iz naslednje definicije.

Definicija 2.23. *Naj bo $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definiran kot*

(29) $$Xu = \begin{cases} A^{-1}_{R(A^k)}u, \text{ če je } u \in R(A^k) \\ 0, \text{ če } u \in N(A^k). \end{cases}$$

Iz definicije sledi, da relacije

$$AXu = xAu \text{ in}$$
$$XAXu = Xu$$

veljajo za $u \in R(A^k)$ in $u \in N(A^k)$, torej v celotnem $\mathbb{C}^n$. Matrika X se imenuje $\{2, 5\}$-inverz matrike A. Definicija (2.23) nam pove, da je AX identiteta v $R(A^k)$ in zato velja

$$AXA^kX = A^kX,$$

za vse $x \in \mathbb{C}^{\ltimes}$. Matrika X je $\{1^k, 2, 5\}$-inverz, kar je natanko Drazinov inverz matrike A, ki je enoličen.

Izrek 2.24. *Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrika z indeksom k. Potem sta $R(A^k)$ in $N(A^k)$ komplementarna podprostora in $A_{R(A^k)}$ je obrnjiva matrika.*

Dokaz. Zgornji izrek se dokaže z uporabo elementarnih argumentov iz linearne algebre. □

Drazinov inverz ima enostavno reprezentacijo v smislu Jordanove forme.

Trditev 2.25. *Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Ind(A) = k$ in $rang(A^k) = r$. Jordanovo normalno formo matrike A potem zapišemo kot:*

(30) $$J = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},$$

$$A = P \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1},$$

kjer je P nesingularna matrika, D nesingularna matrika reda r in N nilpotentna matrika, kjer je $N^k = 0$. Potem lahko Drazinov inverz zapišemo kot:

$$A^D = P \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}. \tag{31}$$

Dokaz. Naj bo A singularna matrika z indeksom k (največji blok v podmatriki je velik $k \times k$). Potem je matrika podana v (31) Drazinov inverz matrike A. □

Trditev 2.26. *Naj bo $Ind(A) = 1$ in $D = I$. Potem je $D^{-1} = I$ in $A = A^\sharp$.*

2.6. **Primer izračuna Drazinovega in grupnega inverza. Primer 1:**
Naj bo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Lahko je preveriti, da je $rang(A) = rang(A^2) = 2$ in $Ind(A) = 1$. Lastni vrednosti matrike A sta $\lambda_1 = 0$ in $\lambda_2 = 1$, kjer je $\sigma(\lambda_1) = 1$, $\rho(\lambda_1) = 1$ in $\sigma(\lambda_2) = 2$, $\rho(\lambda_2) = 2$.

Jordanova normalna forma matrike A:

$$J = PAP^{-1} = \begin{bmatrix} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & [0] \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

P je nesingularna matrika. Dimenzija največjega bloka Jordanove forme je enaka 1 (za $\lambda_1 = 0$). Iz definicije (2.25) sledi:

$$A = P \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix},$$

kjer je $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ nesingularna matrika reda 2 in $N = 0$, nilpotentna matrika.
$A = A^D = A^\sharp$, ker je $Ind(A) = 1$ in D identiteta, je zgornji Drazinov inverz v bistvu kar grupni inverz matrike A.
Primer 2:
Naj bo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Računamo: $rang(B^3) = rang(B^4)$ in $Ind(B) = 3$. Matrika B ima lastne vrednosti $\lambda = 0$, z večkratnostjo $\sigma(\lambda) = 3$ in $\rho(\lambda) = 1$. Jordanova normalna forma je torej enaka:

$$J = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

kjer je P nesingularna.
Dimenzija največjega bloka Jordanove forme je enaka 3. $B^3 = 0$, $Ind(B) = 3$. Potem je: $B = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$.
Drazinov inverz matrike B je enak:

$$B^D = P^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P = 0.$$

$B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ je nilpotentna matrika z indeksom 3, torej je $B^D = 0$. V tem primeru grupni inverz ne obstaja, saj je indeks matrike B različen od 1.

2.7. **Enostranska posplošena inverza.**

Definicija 2.27. *Matrika A velikosti $\mathbb{R}^{n\times m}$ ima levi (desni) inverz Y, če velja:*

(32) $$YA = I_n (AY = I_m).$$

Definicija 2.28. *Matriko Y imenujemo posplošeni levi inverz (kvadratne) matrike A, če velja:*

(33) $$YAx = x, \text{ za vse } x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} R(A^m).$$

Matriko Z imenujemo posplošeni desni inverz (kvadratne) matrike A, če velja:

(34) $$x^T AZ = x^T \text{ za vse } x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} R[(A^T)^m].$$

2.8. **Primer levega in desnega inverza. Primer 1:**

Naj bo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrika velikosti $\mathbb{R}^{3\times 2}$. Ta matrika ima levi inverz

$$Y = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

ker velja $YA = I_3$.

Primer 2: Naj bo A $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrika velikosti $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Potem ima ta matrika desni inverz

$$Y = 1/2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ker velja $AY = I_2$.

V tem poglavju sem podrobneje predstavila različne vrste posplošenih inverzov ter z različnimi izreki pokazala njihov obstoj in enoličnost. Definirala sem tudi posplošeni inverz za nenegativne matrike s pomočjo kanonične forme nenegativne idempotentne matrike. V drugem delu diplomskega dela bom na podlagi definicij iz poglavja o Drazinovem inverzu in posplošenih inverzih nenegativnih matrik predstavila rezultate optimizacijskega problema iz področja ekonomije.

3. Uporaba pri optimizaciji

3.1. **Input-output tabela.** Input-output tabela opisuje pretok blaga in storitev med individualnimi sektorji državnega gospodarstva tekom določenega časovnega obdobja, recimo enega leta. To bom razložila na podlagi naslednjega zgleda.
Zgled: Tabela 1: Poenostavljena input-output tabela za trisektorsko gospodarstvo

Iz / v	Kmetijstvo	Tekstilna ind.	Gospodinjstva	Skupna proiz.
Kmetijstvo	25	20	55	100
Tekstilna indrustrija	14	6	30	50
Gospodinjstva	80	180	40	300

Poenostavljen primer v Tabeli 1 prikazuje trisektorsko gospodarstvo. Trije sektorji so kmetijstvo, katerega skupna letna proizvodnja znaša 100 mernikov pšenice, tekstilna industrija, kjer so izdelali 50 metrov blaga ter gospodinjstva, ki so doprinesla 300 človek leto dela. Izraz človek leto, ang. men-year, pomeni količino blaga, ki ga posameznik opravi v enem letu. Devet (3x3) vnosov v jedru tabele prikazuje medsektorske tokove. Od skupno 100 mernikov kmetijskih proizvodov je 25 mernikov porabilo kmetijstvo samo, 20 jih je bilo dostavljenih in porabljenih znotraj sektorja proizvodnje blaga, 55 pa so jih absorbirala gospodinjstva. Druga in tretja vrstica tabele opiše alokacijo dobrin preostalih dveh sektorjev.
Vnešeni podatki v vsakem stolpcu tabele tako opisujejo strukturo inputov ustreznega sektorja. Da bi proizvedli 100 mernikov pšenice, kmetijstvo absorbira 25 mernikov lastnih proizvodov, 14 metrov blaga, ki jih je proizvedla tekstilna industrija in 80 človek leto dela, ki jih je pridobilo iz gospodinjstev. Tekstilna industrija potrebuje za celotno proizvodnjo 20 mernikov kmetijskih dobrin, 6 metrov blaga iz lastne proizvodnje ter 180 človek leto dela, ki ga prinašajo gospodinjstva. Gospodinjstva so porabila svoje dohodke, ki so jih pridobila z doprinosom 300 človek leto dela gospodarstvu, za nabavo 55 mernikov kmetijskih proizvodov in 30 metrov blaga, izdelanih v tekstilni industriji ter 40 neposrednih človek leto storitev dela.
Vsi podatki v tabeli predstavljajo količine določenih dobrin ali storitev. Bolj izčrpna input-output tabela državnega gospodarstva bi namesto treh različnih sektorjev vsebovala podatke 50, 100 ali celo 1000 različnih sektorjev. Takšna tabela bi omogočala kvalitativno obravnavo vseh individualnih sektorjev državnega gospodarstva. V večji tabeli bi namesto tekstilne industrije obravnavali posamezne manjše sektorje, kjer bi imeli količine izražene v tonah bombažnega blaga, tonah lanu, itd.

Tabela 2: Poenostavljena input-output tabela izražena z vrednostmi

Iz / v	Kmetijstvo	Tekstilna ind.	Gospodinjstva	Skupna proiz.
Kmetijstvo	50	40	110	200
Tekstilna industrija	70	30	150	250
Gospodinjstva	80	180	40	300
Skupni vnos	200	250	300	

Načeloma so medsektorski tokovi predstavljeni v fizičnih enotah kot v tabeli zgoraj, v praksi pa je bolj v uporabi input-output tabela, izražena z vrednostmi posameznih dobrin. Tabela 2 je torej le translacija Tabele 1, kjer posamezne dobrine namesto s količinami predstavimo z vrednostmi.
Predpostavimo, da je mernik v kmetijskem sektorju vreden 2 dolarja, cena dobrin v tekstilni industriji znaša 5 dolarjev na meter blaga in v gospodinjstvih je cena 1 dolar

glede na pridelane storitve v človek-leto enotah. Vse vnose v Tabeli 1 pomnožimo s cenami dobrin oziroma storitev in dobimo obliko tabele, ki je prikazana v Tabeli 2. V tabeli izraženi s cenami lahko dodamo še vrstico, ki predstavlja skupni vnos, kar pa v prejšnji tabeli ni bilo mogoče, saj posameznih količin različnih sektorjev ne moremo seštevati.

3.2. **Tehnični koeficienti.** Oglejmo si model, v katerem je državno gospodarstvo razdeljeno na $n+1$ sektorjev, n industrij oziroma proizvodnih sektorjev, zadnji sektor pa naj bo sektor končnega povpraševanja, ki je v Tabeli 1 in 2 predstavljen v sektorju gospodijstev.
Fizični output sektorja i označimo z x_i, medtem ko x_{ij} pomeni količino produkta, ki ga sektor i absorbira kot input sektorja j. Količina produktov, ki jih proizvede sektor i in prispeva h končnemu povpraševanju, označimo z x_{in+1} ali skrajšano kar z y_i.
Količina outputa sektorja i, ki jo za svojo lastno prozivodnjo porabi sektor j, glede na enoto celotne njegove proizvodnje, zapišemo s simbolom t_{ij}. Koeficient t_{ij} imenujemo input (vhodni) koeficient proizvoda sektorja i, ki ga prispeva sektorju j,

$$t_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_i}. \tag{35}$$

Celoten nabor vhodnih koeficientov vseh sektorjev obravnavanega gospodarstva lahko predstavimo v pravokotni tabeli, ki jo imenujemo strukturna matrika.

Tabela 3: Poenostavljena strukturna matrika koeficientov treh sektorjev

Iz / v	Kmetijstvo	Tekstilna ind.	Gospodinjstva
Kmetijstvo	0,25	0,40	0,133
Tekstilna industrija	0,14	0,12	0,100
Gospodinjstva	0,80	3,60	0,133

Tabela 3 predstavlja strukturno matriko trisektorskega gospodarstva katerega tokovi so opisani v Tabeli 1. Elementi v Tabeli 3 so izračuani po formuli (16) glede na podatke prikazane v Tabeli 2.
Primera izračuna:

$$t_{12} = \frac{20}{50} = 0,40$$

$$t_{32} = \frac{180}{50} = 3,60$$

3.3. **Statični model.** Statični model preučuje kvantitativno soodvisnost med medsebojno povezanimi gospodarskimi dejavnostmi. Ločimo odprt in zaprt model, odvisno od tega ali je končno povpraševanje znotraj sistema oziroma izvzeto iz sistema. V odprtem modelu je končno povpraševanje zunaj danega sistema. Podatke predstavljene v input-output tabelah bom pozneje uporabila kot primer odprtega sistema gospodarstva.
V Leontiefovem modelu so proizvodnje aktivnosti nekega gospodarstva razčlenjene na n različnih sektorjev in n različnih proizvodov.
Glavne predpostavke modela so:

- Vsak od n sektorjev proizvede samo eno vrsto proizvoda, kar pomeni, da imamo n sektorjev in n različnih proizvodov. Sektor, ki proizvaja i-to dobrino, označimo z i.

- V vsakem sektorju gospodarstva, proizvodnja pomeni transformacijo različnih vrst blaga v nekih količinah, v eno vrsto blaga, z nekim določenim zneskom.

Če želimo proizvesti eno enoto j-te dobrine, potrebujemo t_{ij} enot i-te dobrine, za $i = 0, 1, ..., n$ v sektorju j in za λ enot outputa j-te dobrine potrebujemo λt_{ij} enot i-te dobrine.
Magnitude t_{ij} imenujemo input koeficienti in so v statičnem modelu konstantni.
Z x_i označujemo output i-te dobrine glede na fiksirano časovno enoto. Del te bruto proizvodnje se potem absorbira kot input, ki je potreben za proizvodnje aktivnosti n sektorjev. Torej je potrebnih

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$$

enot i-te dobrine za proizvodnje aktivnosti, pri čemer ostane

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} t_i j x_j$$

enot i-te dobrine, kar nam predstavlja neto proizvodnjo oz. z drugimi besedami končno povpraševanje po i-ti dobrini. Naj bosta x in y vektorja velikosti n. Potem lahko zapišemo naslednji sistem linearnih enačb:

$$(36) \qquad \begin{array}{ccccc} (x_1 - x_{11}) & -x_{12} & - \dots & -x_{1n} & = y_1 \\ -x_{21} & +(x_2 - x_{22}) & - \dots & -x_{2n} & = y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & = \dots \\ -x_{n1} & -x_{n2} & - \dots & +(x_n - x_{nn}) & = y_n. \end{array}$$

S substitucijo enačb (35) in (36) dobimo n razmerij med končnimi proizvodi $x_1, x_2, \dots x_n$ in končnim povpraševanjem $y_1, y_2, \dots y_n$ gospodinjstev, države in ostalih končnih potrošnikov:

$$(37) \qquad \begin{array}{ccccc} (1 - t_{11})x_1 & -t_{12}x_2 & - \dots & -t_{1n}x_n & = y_1 \\ -t_{21}x_1 & +(1 - t_{22})x_2 & - \dots & -t_{2n}x_n & = y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & = \dots \\ t_{n1}x_1 & -t_{n2}x_2 & - \dots & +(1 - t_{nn})x_n & = y_n \end{array}$$

Če so $y_1, y_2, \dots y_n$ dani, splošno rešitev za neznane x-e zapišemo v naslednji obliki:

$$(38) \qquad \begin{aligned} x_1 &= T_{11}y_1 + T_{12}y_2 + \dots + T_{1n}y_n \\ x_2 &= T_{21}y_1 + T_{22}y_2 + \dots + T_{2n}y_n \\ \dots &= \dots + \dots + \dots + \dots \\ x_n &= T_{n1}y_1 + T_{n2}y_2 + \dots + T_{nn}y_n. \end{aligned}$$

Konstanta T_{ij} nam pove, za koliko bi se output x_i i-tega sektorja povečal, če bi y_j (količina dobrine j, ki jo absorbirajo gospodinjstva ali kakšen drug končen potrošnik) povečali za eno enoto. Matrika

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix},$$

ki se pojavi na desni strani sistema (38) je inverz matrike

$$\begin{bmatrix} (1-t_{11}) & -t_{12} & \dots & -t1n \\ -t_{21} & (1-t_{22}) & \dots & -t2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -t_{n1} & -t_{n2} & \dots & -(1-t_{nn}) \end{bmatrix}, \tag{39}$$

ki se pojavi na levi strani sistema (37).
Matrika (39) je v bistvu razlika identitetne matrike I in matrike

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

krajše zapisano z $I - T$. Naj bo

$$I - T = A.$$

Matriko A imenujemo koeficietna matrika. Sistem iz (37) lahko krajše zapišemo kot

$$Ax = y$$

in rešitev sistema (38) lahko poenostavimo v zapis

$$x = A^{-1}y = (I - T)^{-1}y.$$

Samo če so vsi elementi T_{ij} inverzne matrike nenegativni, bo za vsak niz vektorjev $y_1, y_2, \dots y_n$ obstajala kombinacija pozitivnih outputov $x_1, x_2, \dots x_n$.
Zadosten pogoj zato je, da so determinante matrike T in vseh glavnih podmatrik

$$1 - t_{11} > 0, \dots, \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & ... & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & ... & t_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ t_{n1} & t_{n2} & ... & t_{nn} \end{bmatrix} > 0$$

pozitivne. Ta pogoj lahko na primeru državnega gospodarstva razumemo na naslednji način: Če ekonomski sistem v katerem vsak sektor deluje tako, da absorbira produkte ostalih sektorjev, diretno in indirektno, lahko vzdržuje lastno proizvodnjo in izdelke prodaja končnemu potrošniku, potem morajo podobno delovati tudi vsi ostali manjši podsistemi. V primeru, da eden od sektorjev ne zmore vzdževati zadostne količine proizvodov, poruši ravnovesje celotnega sistema.
Nekoliko manj zahteven pogoj za trajnost gospodarstva je, da mora biti vsota elementov vsakega stolpca v koeficientni matriki manjša ali enaka ena, pri čemur mora biti vsaj en stolpec z vsoto elementov striktno manjšo od ena.
V našem zgledu trisektorskega gospodarstva sta matriki T in A naslednje oblike:

$$T = \begin{bmatrix} 0,25 & 0,40 \\ 0,14 & 0,12 \end{bmatrix}$$

in

$$\begin{aligned} A = I - T &= \begin{bmatrix} (1-0,25) & -0,40 \\ -0,14 & (1-0,12) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0,75 & -0,40 \\ -0,14 & 0,88 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sedaj izračunamo inverz matrike A in dobimo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1,4570 & 0,6623 \\ 0,2318 & 1,2417 \end{bmatrix}.$$

Če to vstavimo v $x = A^{-1}y$ dobimo spodnji dve enačbi:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,457y_1 + 0,6623y_2, \\ x_2 &= 0,2318y_1 + 1,2417y_2, \end{aligned} \tag{40}$$

na podlagi katerih lahko določimo koliko končnih izdelkov (x_1 in x_2) sektorjev kmetijstva in tekstilne industrije zadošča, glede na poljubne kombinacije povpraševanja gospodinjskega sektorja po dobrinah iz obeh sektorjev, ki ga označimo z y_1 in y_2. Če bi želeli, da gospodinjstva na primer prejmejo $y_1 = 55$ in $y_2 = 35$ dobrin iz obeh sektorjev, bi morala kmetijstvo in tekstilna industrija proizvesti $x_1 = 100$ in $x_2 = 50$, da bi popolnoma ustrezali sistemu.

3.4. **Dinamični model.** Dinamična input-output teorija se je razvila iz statične, saj so začeli pri analizi medsektorske povezanosti upoštevati tudi spremembe skozi čas.
Dinamični Leontiefov model multisektorskega gospodarstva ima naslednjo obliko:

$$x_n = Lx_n + C(x_{n+1} - x_n) + d_n, \tag{41}$$

kjer je L Leontiefova input-output matrika, C kapitalska matrika, x_n vektor izhodnih vrednosti in d_n vektor končnega povpraševanja. Matriki L in C sta znani in neodvisni od časa, kar pomeni, da sta trg in tehnologija neodvisna v določenem časovnem obdobju, r je dimenzija vektorja x_n in sistem prikazuje gospodarstvo v $n = 0, 1, ..., N - 1$ časovnih obdobjih. Torej imamo rN enačb in $r(N + 1)$ neznank. Rešitev sistema se imenuje trajektorija Leontiefovega sistema. Če je matrika C obrnljiva, potem rešitev takšnega sistema dobimo, če s pomočjo rekurzije rešimo:

$$x_{n+1} = C^{-1}((I - L + C)x_n + d_n), \tag{42}$$

pri čemur mora biti x_0 znan. Predpostavka, da je C nesingularna matrika, žal ne velja v vseh primerih. Element matrike c_{ij} predstavlja količino zaloge blaga i, ki ga mora sektor j imeti na voljo kot kapitalsko dobrino za vsako enoto proizvodnje te dobrine. Včasih določen sektor ne proizvede dovolj kapitalskih dobrin (tipičen tak sektor je v večini primerov kmetijstvo), zato se v matriki C lahko pojavi vrstica s samimi ničelnimi elementi. Torej sama struktura kapitalskih zahtev diktira, da je C singularna matrika. Včasih je rang matrike C celo veliko manjši od r-ja, ki prikazuje število sektorjev.

3.5. **Predpogoji in matrične neenakosti.** Preden lahko poiščemo rešitev sistema (42), moramo zapisati nekaj splošnih definicij, ki se navezujejo na singularne sisteme in diferenčne enačbe.
Za reševanje diferenčnih enačb s singularnimi koeficientnimi matrikami je najbolj primeren Drazinov inverz, ki sem ga že opisala v poglavju 2.5. Vse nadaljnje definicije torej temeljijo na izrekih iz tega poglavja.

Definicija 3.1. *Naj bo $P, Q \in \mathbb{C}^{r\times r}$, $f_k \in \mathbb{C}^r$, vektor $c \in \mathbb{C}^r$ imenujemo konsistentni začetni vektor diferenčne enačbe*

$$Px_{k+1} = Qx_k + f_k, \tag{43}$$

če ima začetni problem

$$Px_{k+1} = Qx_k + f_k, \quad x_0 = c, \; k = 1, 2, ... \tag{44}$$

rešitev za x_k.

Diferenčna enačba (43) je rešljiva, če ima začetni problem (44) enolično rešitev za vsak konsistentni začetni vektor c. Eden glavnih ciljev je, da zagotovimo pozitivne rešitve Leontiefovega sistema, saj le v tem primeru dobimo rešitve, ki so realistične.
Ponovimo: Naj bo $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{r\times r}$. Če je $a_{ij} \geq 0$ za vse $1 \leq i, j \leq n$, potem je A nenegativna. Matrika A je negativna, $A < 0$, če je $a_{ij} < 0$ za vse $1 \leq i, j \leq n$. Če je a realno število, je $A \leq a$, če so vsi elementi matrike A manjši ali enaki a.
Če sta A in B kvadratni nenegativni matriki velikosti r in velja

$$A \leq a, \;\; B \leq b,$$

potem iz definicije produkta dveh matrik dobimo, da je

$$(45) \qquad AB \ \leq \ rA_{max}B_{max}, \ kjer \ je$$
$$A_{max} = max\{a_{ij}; 1 \leq i, j \leq r\}; B_{max} = max\{b_{ij}; 1 \leq i, j \leq r\}.$$

Če sta $A, B \in \mathbb{R}^{r \times r}$, potem zapis $A > B$ pomeni, da je $(A - B) > 0$.
Iz definicije matričnega produkta sledijo naslednje trditve:

- Če je $A > 0$, $B > 0$, potem $C = AB > 0$,
- Če je $A > 0$, $B < 0$, potem $C = AB < 0$,
- Če je $A < 0$, $B > 0$, potem $C = AB > 0$.

Vektor $x \in \mathbb{R}^r$ je nenegativen, če je $x_i \geq 0$, za vse $1 \leq i \leq n$ kar zapišemo kot $x \geq 0$. Zapis $x \geq y$ je ekvivalenten zapisu $x - y \geq 0$. Če je $x \geq y$ in $A \geq 0$, potem velja, da je $Ax \geq Ay$. V splošnem, če je $x \geq 0$ in $A \geq 0$, potem je tudi $Ax \geq 0$.
Naj bo $A \in \mathbb{R}^{r \times r}$, potem lahko označimo

$$d_{min}(A) = min\{a_{ij}; 1 \leq i \leq n\}; \quad d_{max}(A) = max\{a_{ij}; 1 \leq i \leq n\}.$$

Iz [1] je naslednji izrek:

Izrek 3.2. *Naj bosta A, B matriki iz $\mathbb{R}^{r \times r}$. Potem velja:*

- *če $A \leq 0$ in $B \geq 0$, potem je $AB \leq d_{max}(A)B$,*
- *če $A \geq 0$ in $B \geq 0$, potem je $AB \geq d_{min}(A)B$ in*
- *če $A \leq 0$ in $B \leq 0$, potem je $AB \geq d_{max}(A)B$.*

Dokaz. Element (i, j) matrike AB ima obliko

$$(46) \qquad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + ... + a_{ii}b_{ij} + ... + a_{in}b_{nj}.$$

Glede na prvo hipotezo v 3.2 je

$$c_{ij} \leq a_{ii}b_{ij}, 1 \leq i, j \leq n.$$

Torej prva hipoteza v 3.2 drži. Za dokaz druge trditve iz 3.2 vzamemo enačbo iz (46) in dobimo $c_{ij} \geq a_{ii}b_ij$. S tem smo dokazali drugo trditev.
Ker vemo, da je $AB = (-A)(-B)$, dobimo $(-A) \geq 0$ in $(-B) \geq 0$. Iz dokaza druge trditve sledi, da je

$$(47) \qquad AB = (-A)(-B) \geq d_{min}(-A)(-B)$$

Če upoštevamo, da velja $d_{min}(-A)(-B) = (-d_{min}(-A))B = d_{max}(A)B$, potem iz (47) sledi, da je

$$AB \geq d_{max}(A)B.$$

□

Definicija 3.3. *Naj bosta A in B nenegativni matriki iz $\mathbb{R}^{r \times r}$. Potem velja naslednja nenenačba:*

$$(48) \qquad (AB)^h \ \leq \ r^{h+1}(A_{max}B_{max})^h, \ h < 0, \ kjer \ je \ h \ celo \ število.$$

Dokaz. Če uporabimo (45), dobimo:

$$\begin{aligned}(AB)^2 &= (AB)(AB) \\ &\leq \ r(rA_{max}B_{max})(rA_{max}B_{max}) \\ &= \ r^3(A_{max}B_{max})^2.\end{aligned}$$

Induktivno potem pridemo do

$$(AB)^h \leq r^{h+1}(A_{max}B_{max})^h.$$

□

Trditev 3.4. *Naj bosta A in B nepozitivni matriki v* $\mathbb{R}^{r\times r}$. *Potem za vsako pozitivno celo število j velja*

$$(AB)^{j+1} \;\geq\; (d_{max}(A))^{j+1}(d_{max}(B))^{j+1}I. \tag{49}$$

Dokaz. (49) bomo dokazali s pomočjo indukcije.
Za $j = 0$ uporabimo zadnjo trditev iz 3.2 in dobimo

$$AB \;\geq\; d_{max}(A)B. \tag{50}$$

Če upoštevamo prvo trditev v 3.2 dobimo

$$B = BI \;\leq\; d_{max}(B)I. \tag{51}$$

Ker je $d_{max}(A) \leq 0$, iz (51) sledi neenačba

$$Bd_{max}(A) \;\geq\; d_{max}(B)d_{max}(A)I. \tag{52}$$

Iz (50) in (52) za $j = 0$ dobimo (49).

Sedaj želimo na podlagi indukcijske predpostavke dokazati, da (49) velja tudi za $j - 1, ...$ in zapišemo

$$(AB)^{j} \;\geq\; (d_{max}(A))^{j}(d_{max}(B))^{j}I. \tag{53}$$

Ker je matrika $(AB)^j \geq 0$ iz prve trditve v 3.2 sledi, da je

$$B(AB)^{j} \;\leq\; d_{max}(B)(AB)^{j}. \tag{54}$$

Zaradi zadnje trditve v (3.2) vemo, da je $B(AB)^j \leq 0$ in lahko zapišemo

$$A(B(AB)^{j}) \;\geq d_{max}(A)(B(AB)^{j}). \tag{55}$$

Ker je $d_{max}(A) \leq 0$, iz (54) in (55) sledi

$$(AB)^{j+1} = A(B(AB))^{j} \;\geq\; d_{max}(A)d_{max}(B)(AB)^{j}. \tag{56}$$

Ker je $d_{max}(A)d_{max}(B) \geq 0$ iz (53) in (56) dobimo (49) in s tem je izrek dokazan. □

3.6. **Pozitivne rešitve singularnih sistemov diferenčnih enačb.** Naj bo

$$Ax_{n+1} = Bx_n + f_n \tag{57}$$

nehomogen sistem diferenčnih enačb, kjer sta matriki $A, B \in \mathbb{R}^{r\times r}$ in f_n-ji so vektorji iz $\mathbb{R}^r$. Predpostavimo, da je homogen sistem rešljiv, torej obstaja $\lambda \in \mathbb{C}$, tako da $(\lambda A - B)^{-1}$ obstaja in naj bo $k = Ind(\widehat{A})$, kjer je $\widehat{A} = (\lambda A - B)^{-1}A$.
Naj bosta $\widehat{B} = (\lambda A - B)^{-1}B$ in $\widehat{f_i} = (\lambda A - B)^{-1}f_i$. Potem je splošna rešitev (57) podana z

$$x_n = (\widehat{A^D}\widehat{B})^n\widehat{A}\widehat{A^D}q + \widehat{A^D}\sum_{i=0}^{n-1}(\widehat{A^D}\widehat{B})^{n-i-1}\widehat{f_i} - (I - \widehat{A}\widehat{A^D})\sum_{i=0}^{k-1}(\widehat{A}\widehat{B^D})^i\widehat{B^D}\widehat{f}_{n+i},$$

kjer je vektor $q \in \mathbb{R}^r$ konsistentni začetni vektor, če in samo če q leži v $\{\widehat{\omega} + R(\widehat{A^k})\}$ in

$$\widehat{\omega} = -(I - \widehat{A}\widehat{A^D})\sum_{i=0}^{k-1}(\widehat{A}\widehat{B^D})^i\widehat{B^D}\widehat{f_i}.$$

Sedaj lahko ocenimo normo vektorja $z_k(n)$, ki je definiran kot

$$z_k(n) = -(I - \widehat{A}\widehat{A^D}) \sum_{i=0}^{k-1} (\widehat{A}\widehat{B^D})^i \widehat{B^D} \widehat{f}_{n+i},$$

$$\| z_k(n) \| \leq \| (I - \widehat{A}\widehat{A^D}) \| \sum_{i=0}^{k-1} \| \widehat{A}\widehat{B^D} \|^i \| \widehat{B^D} \| \| \widehat{f}_{n+i} \|$$

in

$$z_k(n) \ \leq \| (I - \widehat{A}\widehat{A^D}) \| \sum_{i=0}^{k-1} \| \widehat{A}\widehat{B^D} \|^i \| \widehat{B^D} \| \| \widehat{f}_{n+i} \| \ . \tag{58}$$

Naslednji izrek je prav tako iz [1].

Izrek 3.5. *Naj bosta matriki $A, B \in \mathbb{R}^{r\times r}$ takšni, da velja:*

– *vsi diagonalni elementi matrik $\widehat{A}$, $\widehat{A^D}$ in $\widehat{B}$ nenegativni,*

– $\widehat{A} \leq 0$, $\widehat{B} \leq 0$ *in* $\widehat{A^D} \leq 0$,

– *vektor* $\widehat{f}_i \geq 0$ *in* $q \geq 0$.

Potem je vektorski izraz

$$x_n = L_n(q) + z_k(n), \ \ kjer \ je \tag{59}$$

$$L_n(q) = (\widehat{A^D}\widehat{B})^n \widehat{A}\widehat{A^D} q + \widehat{A^D} \sum_{i=0}^{n-1} (\widehat{A^D}\widehat{B})^{n-i-1} \widehat{f}_i \tag{60}$$

in $z_k(n)$ podan v (58) *nenegativen, če za $1 \leq n \leq N$ vektor q zadostuje*

$$q \ \geq \ \frac{\| I - \widehat{A}\widehat{A^D} \| \sum_{i=0}^{k-1} \| \widehat{A}(\widehat{B^D}) \|^i \| \widehat{B}^D \| \| \widehat{f}_{n+i} \|}{(d_{max}(A^D))^{n+1}(d_{max}(\widehat{B}))^n d_{max}(\widehat{A})} - \\ - \ \frac{\sum_{i=0}^{n-1} ((\widehat{A^D})_{min})^{n-i}((\widehat{B})_{min})^{n-i-1} r^{n-1+1} \widehat{f}_i}{(d_{max}(A^D))^{n+1}(d_{max}(\widehat{B}))^n d_{max}(\widehat{A})}. \tag{61}$$

Dokaz. Iz (59) in (60) sledi, da je $x_n \geq 0$, če in samo če,

$$(\widehat{A^D}\widehat{B})^n \widehat{A}\widehat{A^D} q \ \leq \ -\widehat{A^D} \sum_{i=0}^{k-1} (\widehat{A^D}\widehat{B})^{n-i-1} \widehat{f}_i - z_k(n). \tag{62}$$

Ker je $\widehat{A} \leq 0$ in $\widehat{A^D} \leq 0$ iz 3.2 sledi, da je

$$\widehat{A}\widehat{A^D} \ \geq \ d_{max}(\widehat{A}) d_{max}(\widehat{A^D}) I \tag{63}$$

in, ker je $q \geq 0$ iz (63) sledi, da je

$$\widehat{A}\widehat{A^D} q \ \geq \ d_{max}(\widehat{A}) d_{max}(\widehat{A^D}) q. \tag{64}$$

Iz 3.2 dobimo

$$(\widehat{A^D}\widehat{B})^n \ \geq \ (d_{max}(\widehat{A^D}))^n (d_{max}(\widehat{B}))^n I, \tag{65}$$

in iz (64) in (65) sledi, da je

$$(66) \qquad (\widehat{A^D}\widehat{B})^n\widehat{A}\widehat{A^D}q \;\geq\; d_{max}(\widehat{A^D})^{n+1}(d_{max}(\widehat{B}))^n d_{max}(\widehat{A})q.$$

Glede na definicijo 3.4 dobimo naslednjo neenačbe:

$$(67) \qquad \begin{aligned} 0 \;&\leq\; (\widehat{A^D}\widehat{B})^{n-i-1} \\ &\leq\; ((-\widehat{A^D})(-\widehat{B}))^{n-i-1} \\ &\leq\; ((-\widehat{A^D})_{max}(-\widehat{B})_{max})^{n-i-1}r^{n-i} \end{aligned}$$

Ker je $-\widehat{A^D} \geq 0$ iz 3.4 in (67) dobimo

$$(68) \qquad \begin{aligned} (-\widehat{A^D})(\widehat{A^D}\widehat{B})^{n-i-1} \;&\leq\; r(-\widehat{A^D})_{max}(\widehat{A^D}\widehat{B})^{n-i-1} \\ &\leq\; r(-\widehat{A^D})_{max}((-\widehat{A^D})_{max}(-\widehat{B})_{max})^{n-i-1}r^{n-i} \\ &\leq\; ((-\widehat{A^D})_{max})^{n-i}((-\widehat{B})_{max})^{n-i-1}r^{n-i+1}. \end{aligned}$$

Ker je $\widehat{f_i} \geq 0$ iz (68) sledi

$$(69) \qquad (-\widehat{A^D})(\widehat{A^D}\widehat{B})^{n-i-1}\widehat{f_i} \;\leq\; ((-\widehat{A^D})_{max})^{n-i}((-\widehat{B})_{max})^{n-i-1}r^{n-i+1}\widehat{f_i},$$

zato je

$$(70) \qquad (-\widehat{A^D})\sum_{i=0}^{n-1}(\widehat{A^D}\widehat{B})^{n-i-1}\widehat{f_i} \;\leq\; \sum_{i=0}^{n-1}((-\widehat{A^D})_{max})^{n-i}((-\widehat{B})_{max})^{n-i-1}r^{n-i+1}\widehat{f_i}.$$

Glede na to, da velja $(-\widehat{A^D})_{max} = -(\widehat{A^D})_{min}$ in $(-\widehat{B})_{max} = -(\widehat{B})_{min}$, enačbo (70) preoblikujemo v

$$(71) \qquad (-\widehat{A^D})\sum_{i=0}^{n-1}(\widehat{A^D}\widehat{B})^{n-i-1}\widehat{f_i} \;\leq\; -\sum_{i=0}^{n-1}((\widehat{A^D})_{min})^{n-i}((\widehat{B})_{min})^{n-i-1}r^{n-i+1}\widehat{f_i}.$$

Iz predpostavk (68) (71) in (58) neenačba (62) velja, če q zadošča

(72)

$$\begin{aligned} (d_{max}(\widehat{A^D}))^{n+1}(d_{max}(\widehat{B}))^n d_{max}(\widehat{A})q \;&\geq\; -\sum_{i=0}^{n-1}(\widehat{A^D})_{min}(\widehat{B})_{min}^{n-i-1}\widehat{f_i}r^{n-i+1} \\ &+ \parallel I - \widehat{A}\widehat{A^D} \parallel \sum_{i=0}^{k-1} \parallel \widehat{A}(\widehat{B^D}) \parallel^i \parallel \widehat{B}^D \parallel\parallel \widehat{f}_{n+i} \parallel, \end{aligned}$$

oziroma ekvivaletno, če q zadošča (61). □

Dokazani izrek 3.5 bom uporabila v naslednjem razdelku na konkretnem primeru, pri iskanju pozitivne rešitve v diskretnem dinamičnem Leontiefovem input-output modelu.

3.7. **Pozitivne rešitve diskretnega dinamičnega Leontiefovega modela.** Naj bo dinamični model zapisan v (41) podan v naslednji obliki:

$$Cx_{n+1} = (I - L + C)x_n - d_n,\ 0 \leq n \leq N-1, \tag{73}$$

kjer sta C in L matriki v $\mathbb{R}^{r \times r}$ in $d_n \in \mathbb{R}^n$.
Predpostavimo, da matrika L zadošča naslednjim pogojem:

$$\begin{aligned} &0 \leq l_{ij},\ 1 \leq i,\ j \leq r, \\ &\sum_{i=1}^{r} l_{ij} \leq 1,\ 1 \leq j \leq r, \\ &\sum_{i=1}^{r} l_{ij_0} < 1,\ za\ nek\ j_0,\ kjer\ je\ 1 \leq j_0 \leq r. \end{aligned} \tag{74}$$

Glede na pogoje zapisane v (74) je matrika $I - L$ obrnjiva in $(I-L)^{-1} > 0$.
Naj bo $\lambda = 1$. Potem je glede na hipoteze predstavljene v (74) sistem

$$Cx_{n+1} = (I - L + C)x_n$$

rešljiv, saj je

$$\lambda C - (C + l - L) = (\lambda - 1)C + L - I = L - I.$$

Glede na oznake iz prejšnjega podpoglavja lahko sedaj zapišemo

$$\begin{aligned} \widehat{C} &= (L-I)^{-1} = -(I-L)^{-1}C, \\ \widehat{I - L + C} &= -(I-L)^{-1}(I - L + C) = -I - (I-L)^{-1}C = \widehat{C} - I. \end{aligned} \tag{75}$$

Naj bo $k = Ind(\widehat{C})$ in

$$\widehat{\omega} = (I - \widehat{C}\widehat{C^D}) \sum_{i=0}^{k-1} (\widehat{C}(\widehat{C} - I)^D)^i (\widehat{C} - I)^D (L-I)^{-1} d_i.$$

Vektor $q \in \mathbb{R}^r$ je konsistentni začetni vektor za (73), če in samo če q leži v $\{\widehat{\omega} + R(\widehat{C^k})\}$ in je splošna rešitev (73) za $n \geq 1$ podana kot

$$\begin{aligned} x_n &= (\widehat{C}^D(\widehat{C} - I))^n \widehat{C}\widehat{C^D} q - \widehat{C^D} \sum_{j=0}^{n-1} (\widehat{C^D}(\widehat{C} - I))^{n-j-1} (I-L)^{-1} d_j \\ &+ (I - \widehat{C}\widehat{C^D}) \sum_{i=0}^{k-1} (\widehat{C}(\widehat{C} - I)^D)^i (\widehat{C} - I)^D (L-I)^{-1} d_{n+1},\ n \geq 1. \end{aligned} \tag{76}$$

Ko je rešitev sistema (73) podana z (76), je potrebno najti pogoje pri katerih bo x_n nenegativen, za $n = 1, 2, ..., N$. Glede na hipoteze postavljene v (74) in glede na to, da je $C \geq 0$, je $\widehat{C} \leq 0$. Posledično je tudi $(\widehat{I - L + C}) = -I + C \leq 0$. Dodatno predpostavimo, da so

(77) $\quad$ *– vsi diagonalni elementi* $\widehat{c_{ii}}$ *matrike* $\widehat{C}$ *nenegativni in različni od* 1,

– vsi diagonalni elementi $\widehat{C^D}$ *so nenegativni in*

– $C^D \leq 0$.

Označimo

$$\widehat{d_i} = -(I-L)^{-1}d_i, \ 0 \leq i \leq N, \tag{78}$$

in naj bo α_n definirana kot

$$\alpha_n = \frac{\| I - \widehat{C}\widehat{C^D} \| \sum_{i=0}^{k-1} \| \widehat{C}(\widehat{C}-I)^D \|^i \| (\widehat{C}-I)^D \| \| \widehat{d_{n+i}} \|}{(d_{max}(\widehat{C^D}))^{n+1}(d_{max}(\widehat{C}-I)^n)d_{max}(\widehat{C})} + \tag{79}$$
$$+ \frac{\sum_{i=0}^{n-1}((\widehat{C^D})_{min})^{n-i}((\widehat{C}-I)_{min})^{n-i-1}r^{n-i+1}\widehat{d_i}}{(d_{max}(\widehat{C^D}))^{n+1}(d_{max}(\widehat{C}-I))^n d_{max}(\widehat{C})},$$

kjer je α podan kot

$$\alpha = max\{\alpha_i; \ 0 \leq i \leq N\}. \tag{80}$$

Če afini podprostor $\{\widehat{\omega} + R(\widehat{C^k})\}$ vsebuje vektor $q \in \mathbb{R}^r$, katerega komponente so $q_i \geq \alpha$, potem je pri pogojih (74), (77) in (78), izraz (76) nenegativen. Takšen vektor q lahko vedno poiščemo. Še več, naj bo k indeks matrike $\widehat{C}$. Če je k liho število, potem je $\widehat{C^k} < 0$, ker je $\widehat{C} < 0$. Naj bo υ_0 stolpec v matriki $\widehat{C^k}$ in naj bo α_0 negativno realno število z $|\alpha_0|$ dovolj veliko, da je

$$\alpha_0\upsilon_0 > \alpha - \widehat{\omega},$$

potem $q = \alpha_0\upsilon_0 + \widehat{\omega}$ zadošča $q > \alpha$.
Če je k sodo število, potem je $\widehat{C^k} > 0$. Naj bo υ_1 stolpec v matriki $\widehat{C^k}$ in β_1 dovolj veliko pozitivno realno število, tako da je

$$\beta_1\upsilon_1 > \alpha - \widehat{\omega},$$

potem $q = \beta_1\upsilon_1 + \widehat{\omega}$ zadošča $q > \alpha$.
Na podlagi tega pridemo do naslednjih rezultatov:

Izrek 3.6. *Glede na hipoteze postavljene v* (74), (77) *in* (78) *ter na podlagi prejšnjih definicij, obstaja vektor* $q \in \mathbb{R}^r$ *s komponentami* $q_i \geq \alpha$, *kjer je* α *definirana z* (79) (80). *Ustrezna Leontiefova trajektorija* x_n, *podana v* (76), *je nenegativna za vse* $0 \leq i \leq N$.

Zgornji izrek je iz [1].

3.8. **Primer trisektorskega gospodarstva s singularno kapitalsko matriko.** Imamo trisektorsko gospodarstvo z naslednjimi podatki:

$$L = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,3 \\ 0,4 & 0,1 & 0,5 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,45 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0,9 \end{bmatrix},$$

$$N = 8,$$

$$d_n = \begin{bmatrix} 18+2n \\ 32+3n \\ 57+n \end{bmatrix}, 0 \leq n \leq 8.$$

V tem primeru brez težav lahko preverimo, da je hipotezam (74) (77) in (78) zadoščeno. Za izračun x_n-jev uporabimo enačbo zapisano v (76). Poglejmo si rešitve Leontiefovega dinamičnega sistema za različne n-je, na primer za $n = 0$, $n = 2$, $n = 5$ *in* $n = 8$:

$$- n = 0: \ x_0^1 = 392999,32, \ x_0^2 = 422999,27 \ in \ x_0^3 = 446999,23,$$
$$- n = 2: \ x_2^1 = 132615,22, \ x_2^2 = 153688,54 \ in \ x_2^3 = 171597,17,$$
$$- n = 5: \ x_5^1 = 5112,76, \ x_5^2 = 7486,83 \ in \ x_5^3 = 9867,1,$$
$$- n = 8: \ x_8^1 = 86,80, \ x_8^2 = 304,81 \ in \ x_8^3 = 498,93.$$

Zgornji rezultati so iz članka v [1]. Kot vidimo je input-output sistem s singularno kapitalsko matriko težko rešljiv sistem in zahteva veliko znanja iz področja linearne algebre in analize. Poleg težavnosti same uporabe poslošenega inverza v takšnem ekonomskem sistemu pa je velik problem tudi zagotavljanje nenegativnih rešitev. Veliko raziskav glede Leontiefovega dinamičnega input-output sistema s singularno matriko je bilo narejenih predvsem v zadnjih letih, tako da je to področje še dokaj neraziskano. Pojavljajo se vedno nove metode za iskanje rešitev sistema, zgoraj opisana z uporabo Drazinovega inverza, je le ena izmed njih.

Literatura

[1] L. Jodar in P. Merello, *Positive solutions of discrete dynamic Leontief input-output model with possibly singular capital matrix*, Mathematical and Computer Modeling **52** (2010) 1081-1087.

[2] D. G. Luenberger in A. Barel, *Notes and Comments, Singular Dynamic Leontief Model*, Econometrica **4** (1977) 991-995.

[3] D. Mishra in K.C. Sivakumar, *Nonegative generalized inverse and least elements of polyhedral sets*, Linear Algebra and its App. **434** (2011) 2448-2455.

[4] K.C. Sivakumar, *Nonnegative Generalized Inverses*, Indian J. pure appl. Math. **28** (1997) 939-942.

[5] M. Nikuie, M.K. Mirnia in Y. Mahmoudi, *Some results about the index of matrix and Drazin inverse*, Mathematical Sciences **4** (2010) 283-294.

[6] A.P. Schinnar, *The Leontief Dynamic Generalized Inverse*, The Quarterly Journal of Economics **4** (1978) 641-652.

[7] R.J. Plemmons in R.E. Cline *The Generalized inverse of a Nonnegative matrix*, American Math. Society **31** (1972) 46-50.

[8] F. Duchin in A.E. Steenge, *Mathematical Models in Input-Output Economics*, Rensselear **703** (2007) 1-31.

[9] P. Flor, *On groups of nonnegative matrices*, Compositio Math. **21** (1969) 376-382.

[10] R. Piziak in P. L. Odel, *Full Rank Factorization of Matrices*, Mathematics Magazine, **72** (1999) 193-201.

[11] W. Leontief, *Input-output Economics*, Second Editrion, Oxford University Press, New York, 1968.

[12] A. Ben-Israel in T.N.E. Greville, *Generalized Inverses*, Theory and Applications, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 2003.

[13] R.B. Bapat in T.E.S. Raghavan, *Nonnegative matrices and applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[14] A. Berman in R.J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Academic Prees, New York, 1979.

[15] Rao, R.C. Mitra in K. Sujit, *Generalized inverse of matrices and its applications*, J. Wiley, New York, 1971.

[16] S. L. Campbell in C. D. Meyer, *Generalized Inverses of Linear Transformations*, SIAM, Philadelphia, 2009.

[17] G. V. Milovanovic in P. S. Stanimirovic, *Full rank factorization and Moore-Penrose Inverse*, [ogled 4. 9. 2014], dostopno na http://www.mi.sanu.ac.rs/ gvm/radovi/blokprim.pdf.

[18] T. Košir, *Linearne preslikave*, [ogled 30. 8. 2014], dostopno na `http://www.fmf.uni-lj.si/~kosir/poucevanje/skripta/preslikave.pdf`.

[19] N. Kallem, *Input-output analysis with Leontief Models*, [ogled 12. 4. 2014], dostopno na `http://home2.fvcc.edu/~dhicketh/LinearAlgebra/studentprojects/spring2006/nicholaskallem/Leontief%20project.htm`

[20] *Drazin inverse (matrices)*, [ogled 14. 5. 2014], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Drazin_inverse`.

[21] *Wassily Leontief-Biographical (biography)*, [ogled 14. 8. 2014], dostopno na `http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic-sciences/laureates/1973/leontief-bio.html`.

[22] *Wassily Leontief(Russian economists)*, [ogled 14. 8. 2014], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Wassily_Leontief`.

[23] R. Penrose, *A generalized Inverse for Matrices*, [ogled 13. 5. 2014], dostopno na `http://faculty.kfupm.edu.sa/MATH/jaafarm/lec-notes/Moore-Pinrose.pdf`.

[24] M. Kim, *Leontief Input-Output model (Application of Linear Algebra to Economics)*, [ogled 12. 8. 2014], dostopno na `http://www.unc.edu/~marzuola/Math547_S13/Math547_S13_Projects/M_Kim_Section001_Leontief_IO_Model.pdf`.

[25] I.N. Tcheremnykh, *Input-Output models*, [ogled 19. 8. 2014], dostopno na `http://www.eolss.net/sample-chapters/c15/E1-26-06-03.pdf`

[26] *Moore-Penrose generalized inverse*, [ogled 12. 4. 2013], dostopno na `http://mathworld.wolfram.com/Moore-PenroseMatrixInverse.html`.

[27] *Reduced row echelon form*, [ogled 5. 9. 2014], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Row_echelon_form.

[28] *Reduced row echelon form*, [ogled 5. 9. 2014], dostopno na http://www.math.fsu.edu/~bellenot/class/s08/lalab/other/rref.pdf.