UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Urban Ulrych

Pogosta vprašanja pri vrednotenju opcij

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Matjaž Omladič

Ljubljana, 2014

Kazalo

Pogosta vprašanja pri vrednotenju opcij

Povzetek

Današnja vrednost evra v dobrem razvoju trga ni enaka današnji vrednosti evra v slabem razvoju, zato opcijske vrednosti ne moremo izračunati kot diskontirano povprečje njenih izplačil. Naravne (oz. statistično pridobljene) verjetnosti pri vrednotenju v diskretnih modelih sploh niso pomembne, medtem ko je pomembna volatilnost delnice (u in d v binomskem modelu). V binomskem modelu za zaščitni portfelj potrebujemo dva instrumenta, v triomskem pa tri, ker imamo v naslednjem obdobju tri možne cene delnice. Brezarbitražna vrednost opcije je po zakonu ene cene enaka izvedbenemu portfelju pogojne terjatve ali pa jo brez poznavanja zaščitnega portfelja izračunamo s pomočjo do tveganja nevtralnih ekvivalentnih martingalskih verjetnosti. Za začetek področja finančne matematike velja izpeljava Black-Scholesove parcialne diferencialne enačbe. Zanimivo je, da v enačbi ne nastopa pričakovana stopnja donosa osnovnega instrumenta (delnice). Pri izpeljavi v zveznem času moramo biti pozorni na matematično korektnost in operacijo diferenciala zamenjati z ekonomsko utemeljeno operacijo dobička v infinitezimalno majhnem časovnem koraku. Black-Scholesov model vsebuje veliko nerealnih predpostavk, kot je recimo konstantna volatilnost. V praksi je zato modeliranje volatilnosti zelo pomembno za čim boljši približek k pravični vrednosti vrednotene opcije.

Frequently Asked Questions in Option Pricing Theory

Abstract

The present value of the euro in a good state of the market is not the same as its present value in a market that is in a poor state, which means that we cannot value options as the discounted average of their pay-out. Statistical probabilities in discrete models do not matter where volatility is important (u and d in a binomial model). We need two assets for hedging in a binomial model, while we need three in a trinomial model, as there are three possible prices for a stock in the subsequent period. The non-arbitrage value of the option is, by the law of one price, equal to the value of the hedging portfolio of the contingent claim, or is calculated with the help of risk-neutral probabilities. The Black-Scholes partial differential equation is considered to mark the start of mathematical finance. It is interesting that the expected rate of return of the underlying instrument (stock) does not appear in this differential equation. When deriving the equation, one must be careful about mathematical correctness and replace the operation of taking a total derivative with the financial operation of computing the gain on a portfolio. The Black-Scholes model includes many unreal assumptions, such as constant volatility. It is for this reason that modelling volatility for the best possible approximation of the option's fair value is in practice very important.

Math. Subj. Class. (2010):

Ključne besede: Binomski model, zaščitni portfelj, pogojna terjatev, do tveganja nevtralne verjetnosti, Black-Scholesova parcialna diferencialna enačba, volatilnost.

Keywords: Binomial model, hedging portfolio, contingent claim, risk-neutral probabilities, Black-Scholes partial diferential equation, volatility.

1. Uvod

Nobelova nagrada za ekonomijo, ki sta jo dobila matematika prof. Merton in prof. Scholes za svoj doprinos k področju vrednotenja izvedenih finančnih instrumentov, je k temu področju pritegnila veliko število interesentov in na nek način odprla povsem novo področje finančne matematike. Novinci na tem področju se velikokrat ukvarjamo s pogostimi vprašanji pri vrednotenju finančnih instrumentov (posebej opcij). Odgovori na nekatera morda na prvi pogled izgledajo popolnoma intuitivno, ampak v sebi skrivajo veliko matematičnega in finančnega ozadja.

V svojem delu diplomskega seminarja sem izbral nekaj takšnih pogostih vprašanj, na katera bom poskušal odgovoriti kolikor se da skrbno in razumljivo. Seveda s tem še zdaleč ne bom odgovoril na vse probleme, ki se porajajo na področju vrednotenja derivativov, ampak bom morda komu odprl drugačen pogled na probleme in se tudi sam naučil marsikaj novega na področju, ki me zelo zanima.

Začel bom z vprašanji v binomskem in trinomskem modelu, kjer bomo videli glavne ideje vrednotenja in ščitenja pogojnih terjatev v diskretnih modelih. Nato pa bom zavil še v zvezni čas, kjer bomo te ideje nadgradili, na dva načina izpeljali slavno Black-Scholesovo parcialno diferencialno enačbo, si ogledali njene morebitne izboljšave in primerjali vplive pričakovane stopnje donosa, volatilnosti, zaščitnega portfelja itd.

Poglejmo, na katera vprašanja bom v svojem delu diplomskega seminarja natančno odgovoril:

- Zakaj ni opcijska vrednost le diskontirano povprečje njenih izplačil?
- Zakaj naravne (oz. statistično pridobljene) verjetnosti pri vrednotenju niso pomembne?
- Ali se lahko ščitimo v trinomskem modelu?
- Zakaj se pričakovana stopnja donosa v Black-Scholesovi parcialni diferencialni enačbi ne pojavi?
- Ali je zaščitni portfelj v Black-Scholesovi diferencialni enačbi pravilno definiran?
- Ali se je bolje ščititi glede na zgodovinsko ali za prihodnost pričakovano volatilnost?

Odgovori na vprašanja se lahko seveda berejo posamično, čeprav se moramo zavedati, da nekateri uporabljajo ugotovitve iz že odgovorjenih vprašanj. Začeli bomo v najbolj splošnem modelu za simuliranje slučajnosti na trgu, v katerem lahko cena delnice v naslednjem obdobju samo zraste ali pade, to je seveda binomski model.

2. Zakaj ni opcijska vrednost le diskontirano povprečje njenih izplačil?

Predpostavimo binomski model, trenutno ceno delnice 1 € in enako verjetnost dobrega ali slabega stanja v naslednjem obdobju. Če bo nastopilo dobro stanje, se bo cena podvojila na 2 € in obratno, v slabem stanju, razpolovila na 0.5 €. Zaradi preprostosti predpostavimo, da delnica v naslednjem časovnem obdobju ne izplačuje dividend. Vrednotimo nakupno opcijo na meji.

Opomba 2.1. Nakupna opcija na meji je nakupna opcija z izvršilno ceno, ki je enaka trenutni ceni delnice.

Če je obrestna mera enaka 0, bi si lahko morda mislili, da bomo vrednost nakupne opcije na meji dobili po enačbi $1/2 \cdot 1€ + 1/2 \cdot 0€ = 0.5€$, kjer je $p = 1/2$ verjetnost dobrega in slabega razvoja trga ter 1 € izplačilo opcije v dobrem in 0 € v slabem stanju. Torej bo vrednost nakupne opcije na meji enaka 0.5 €. Problem je, da bi po enakem razmisleku morala biti trenutna cena delnice 1.25 €. Namreč, ker je delnica v dobrem stanju vredna 2 € in v slabem 0.5 €, bi morala biti trenutna cena delnice enaka $1/2 \cdot 2$ € $+ 1/2 \cdot 0.5$ € $= 1.25$ €. Po drugi strani pa lahko vidimo, da če je evro v dobrem stanju vreden pol delnice in evro v dobrem stanju vreden dve delnici, bi moral biti po identičnem razmisleku, $1/2 \cdot 1/2 + 1/2 \cdot 2 = 1.25$, 1 evro ekvivalenten 1.25 delnice, torej je delnica trenutno vredna 0.8 €, kar pa se ne ujema z našimi predpostavkami. Ali smo lahko prepričani, da je vrednost nakupne opcije na meji 0.5 €?

Recimo, da ta cena velja na trgu. Kupimo delnico in prodamo dve nakupni opciji na meji. To je portfelj dolge pozicije v delnici in dveh kratkih pozicij v opcijah in je v času 0 vreden -1 € $+ 1/2$ € $+ 1/2$ € $= 0$ €. V dobrem stanju trga prodamo delnico za 2 € in izplačamo 2 € iz nakupnih opcij, kar je denarni tok 2 € $-$ 1 € $-$ 1 € $=$ 0 €. V slabem stanju pa prodamo delnico za 0.5 € in nimamo obveznosti s strani nakupnih opcij, kar nam da 0.5 € $-$ 0 € $=$ 0.5 € netveganega zaslužka. Cena 0.5 € za nakupno opcijo na meji je torej arbitražna. Vidimo, da vrednotenje opcij glede na diskontirano vrednost njihovih pričakovanih izplačil ni ustrezno.

V primeru pozitivnih obrestnih mer je seveda pomembna tudi časovna vrednost denarja. Evro naslednje leto je vreden manj kot evro danes, zato uporabljamo tehniko diskontiranja prihodnjih finančnih tokov. Dobro pa se je zavedati, da je vrednost evra različna tudi glede na to, v katerem stanju trga se nahajamo. Evro dobljen v dobrem stanju trga je vreden manj, kot evro dobljen v slabem, tudi če sta stanji enako verjetni. Pri vrednotenju opcij moramo upoštevati tako časovno vrednost denarja kot vrednost denarja v različnih stanjih. Ker smo v našem primeru privzeli, da je obrestna mera enaka 0, želimo prikazati samo pomembnost vrednosti denarja v različnih stanjih.

Poglejmo si portfelj sestavljen iz dolge pozicije v 2/3 delnice in kratke pozicije 1/3 € (izposoja). Današnja vrednost tega portfelja je 1/3 €. Ta porfelj nam v primeru dobrega razvoja trga izplača 1 €, v primeru slabega pa 0 € (Arrow-Debreujeva pogojna terjatev). Od tu vidimo, da je vrednost evra v dobrem stanju 1/3 €. Ker je evro na banki vreden 1 € v obeh stanjih, je torej vrednost evra v slabem stanju enaka 2/3 €. Ker nam zgornji portfelj izenači izplačila nakupne opcije na meji, je zaradi zakona ene cene brezarbitražna vrednost nakupne opcije na meji enaka 1/3 € (in ne 0.5 € kot smo videli že zgoraj). Po paritetni enačbi

$$p_t^e + S_t - I(t,T) = c_t^e + KD(t,T) \tag{1}$$

pa je cena evropske prodajne opcije na meji tudi enaka 1/3 €. Vrednosti evra v dobrem in slabem stanju sta torej različni. Če pogledamo portfelj dveh prodajnih opcij, ki je vreden 2/3 €, nam v dobrem stanju izplača 0 € in v slabem 1 € (kar je prav vrednost evra v slabem stanju), medtem ko nam enako vreden portfelj dveh nakupnih opcij na meji v dobrem stanju izplača 2 € in v slabem 0 €. Torej z enako vrednim portfeljem v dobrem stanju dobimo več kot v slabem. Poudariti je potrebno tudi, da se v tem poglavju omejujemo izključno na vrednosti v različnih stanjih in predpostavljamo, da je obrestna mera enaka 0, torej časovne vrednosti denarja zaradi večje nazornosti ne upoštevamo.

Vrednotenje s pomočjo diskontirane vrednosti pričakovanih opcijskih izplačil se ne izide, ker ne moremo sešteti evra pridobljenega v dobrem in evra pridobljenega v slabem stanju trga, kajti njuni današnji vrednosti nista enaki. Poleg tega, da poiščemo izvedbeni portfelj naše pogojne terjatve in tako ugotovimo brezarbitražno ceno, lahko vpeljemo tudi do tveganja nevtralne verjetnosti, ki so tehnični pripomoček za računanje pravične vrednosti pogojnih terjatev, ki jih lahko izračunamo, ne da bi poznali izvedbeni portfelj pogojne terjatve.

Izrek 2.2. *V binomskem modelu ni arbitraže natanko tedaj, ko velja*

$$0 < d < 1 + r < u.$$

Dokaz. Najprej dokažimo $\Rightarrow$. Če bi veljalo $u = d$, ne bi bilo nobene slučajnosti, zato lahko brez škode za splošnost trdimo $d < u$. Ker cena delnice ne more biti negativna, mora veljati tudi $0 < d < u$. Sedaj poglejmo, zakaj odsotnost arbitraže implicira $0 < d < 1 + r < u$.

Recimo, da velja $d \geq 1 + r$. Skonstruirajmo arbitražno strategijo. V času 0 si sposodimo X € in uporabimo ta denar za nakup nekega deleža delnice S. Denarni tok v času 0 je tako enak 0. V času 1 moramo vrniti $(1 + r)X$ dolga, ampak tudi če gre cena delnice navzdol, bo njena vrednost še vedno vsaj $(1 + r)X$, ker je $d \geq 1 + r$. Prodaja delnice bo tako omogočala odplačilo dolga in s pozitivno verjetnostjo netvegan zaslužek. Denarni tok v času 1 je tako večji ali enak 0. To je arbitraža. Veljati mora $d < 1 + r$.

Recimo, da velja $u \leq 1 + r$. V tem primeru v času 0 kratko prodamo delež delnic vreden X € in denar naložimo na banko. Denarni tok je enak 0. V času 1 imamo na banki $(1 + r)X$ € in ker bo cena kratko prodanih delnic v času 1 največ $uX \leq (1 + r)X$, jih lahko brez težav odkupimo nazaj. Če delnica pade na dX, zaslužimo netvegan dobiček. Denarni tok v času 1 je tako večji ali enak 0. To je seveda arbitraža, zato mora veljati $u > 1 + r$.

Dokažimo še $\Leftarrow$. Najprej si poglejmo razvoj vrednosti portelja, sestavljenega iz tveganega in netveganega finančnega instrumenta. Predpostavimo, da imamo v času 0 X_0 premoženja, s katerim kupimo Δ_0 delnic. Ostanek, torej $X_0 - \Delta_0 S_0$, naložimo na banko. V času 1 bo ta portfelj vreden

$$\begin{aligned} X_1 &= \Delta_0 S_1 + (1 + r)(X_0 - \Delta_0 S_0) = \\ &= (1 + r)X_0 + \Delta_0(S_1 - (1 + r)S_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Če je $X_0 = 0$, iz enačbe (2) sledi:

$$X_0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \quad \Delta_0 S_0(u - (1 + r)) > 0 \text{ v primeru dobrega razvoja trga} \\ \\ \searrow \quad \Delta_0 S_0(d - (1 + r)) < 0 \text{ v primeru slabega razvoja trga} \end{array} \tag{3}$$

Namesto S_1 smo pisali uS_0 v primeru dobrega in dS_0 v primeru slabega razvoja trga. Za vrednost X_0 smo predpostavili, da je enaka 0, vrednost X_1 pa je strogo pozitivna v dobrem oz. strogo negativna v slabem razvoju trga. Ker rezultat velja za poljubno vrednost Δ_0, tako ni arbitražnih priložnosti. Dokazali smo, da arbitraža, v primeru da velja $0 < d < 1 + r < u$, ne obstaja. $\square$

Izrek 2.3. *Za ekvivalentno martingalsko verjetnost v binomskem modelu velja:*

$$q = \frac{1+r-d}{u-d}.$$

Dokaz. Imejmo portfelj, sestavljen iz netveganega (bančni račun B) in tveganega (delnica S) finančnega instrumenta. Netvegana obrestna mera je enaka r, dober in slab razvoj trga pa označimo z u in d. Po predpostavki binomskega modela so r, u in d skozi čas konstantni. Zaradi odsotnosti arbitraže, po izreku (2.2), sledi $0 < d < 1 + r < u$. S c označimo vektor cen, z M pa matriko izplačil:

$$c = \begin{bmatrix} B_t \\ S_t \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} (1+r)B_t & uS_t \\ (1+r)B_t & dS_t \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Vektor diskontiranih cen $\tilde{c}$ in matrika diskontiranih izplačil $\tilde{M}$ sta tako enaka:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{S_t}{B_t} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{uS_t}{(1+r)B_t} \\ 1 & \frac{dS_t}{(1+r)B_t} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Dobimo dve enačbi z dvema neznankama:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= 1 \\ \frac{uS_t}{(1+r)B_t} \cdot q_1 + \frac{dS_t}{(1+r)B_t} \cdot q_2 &= \frac{S_t}{B_t}. \end{aligned} \tag{6}$$

Enolični rešitvi tega sistema sta:

$$q_1 = \frac{1+r-d}{u-d} \quad \text{in} \quad q_2 = \frac{u-(1+r)}{u-d} = 1 - q_1. \tag{7}$$

Vidimo, da sta q_1 in q_2 neodvisna od časa in od stanja.

□

Vrnimo se na naš primer nakupne opcije na meji. S pomočjo zgoraj izpeljane formule izračunajmo do tveganja nevtralno verjetnost dobrega stanja $\frac{1+0-1/2}{2-1/2} = 1/3$. To verjetnost uporabimo na pričakovanih izplačilih naše nakupne opcije na meji in dobimo njeno brezarbitražno vrednost, ne da bi poznali njen izvedbeni portfelj. $1/3 \cdot 1€ + 2/3 \cdot 0€ = 1/3€$, kar smo seveda izračunali tudi že v primeru vrednosti izvedbenega portfelja pogojne terjatve.

3. Zakaj naravne (oz. statistično pridobljene) verjetnosti pri vrednotenju niso pomembne?

Predpostavimo, da poznamo naravno verjetnost razvoja trga p. Pokažimo, zakaj naravna verjetnost p pri vrednotenju sploh ni pomembna. Naj bo S trenutna cena delnice, ki se lahko v naslednjem obdobju poveča za faktor u v dobrem stanju trga ali pa zmanjša za faktor d v slabem. Naravna verjetnost (za katero predpostavljamo, da jo poznamo) dobrega razvoja trga je p in slabega $1 - p$. To lahko prikažemo kot:

$$
\begin{array}{ccl}
 & & uS \text{ z verjetnostjo } p \\
 & \nearrow & \\
S & & \\
 & \searrow & \\
 & & dS \text{ z verjetnostjo } 1-p
\end{array}
\tag{8}
$$

Naj bo r netvegana obrestna mera, za katero zaradi neobstoja arbitraže velja $d < 1 + r < u$. Naj bo C izplačilo evropske nakupne opcije z izvršilno ceno K. Torej: $C = max\{0, S_T - K\}$. Veljati mora:

$$
\begin{array}{ccl}
 & & C_u = max\{0, uS - K\} \text{ z verjetnostjo } p \\
 & \nearrow & \\
C & & \\
 & \searrow & \\
 & & C_d = max\{0, dS - K\} \text{ z verjetnostjo } 1-p
\end{array}
\tag{9}
$$

Ustvarimo portfelj Δ delnic in B obveznic. Njegova trenutna vrednost je $\Delta S + B$, v naslednjem obdobju pa se lahko razvije v:

$$
\begin{array}{ccl}
 & & \Delta uS + (1+r)B \text{ z verjetnostjo } p \\
 & \nearrow & \\
\Delta S + B & & \\
 & \searrow & \\
 & & \Delta dS + (1+r)B \text{ z verjetnostjo } 1-p
\end{array}
\tag{10}
$$

Opcija ima seveda nelinearna izplačila (oblika hokejske palice), medtem ko imajo zamenjave, terminske pogodbe itd. linearna izplačila. Ampak ker sta v binomskem modelu možni samo dve izplačili, lahko lokalno izplačila naše opcije lineariziramo tako, da ustvarimo portfelj deleža v delnici in deleža v obveznici (oz. netveganem finančnem instrumentu). Ta portfelj se bo gibal linearno glede na skok cene delnice in obrestno mero r (na sliki 1 narišemo premico skozi možni izplačili naše nakupne opcije na meji). Zato mora v naslednjem obdobju veljati:

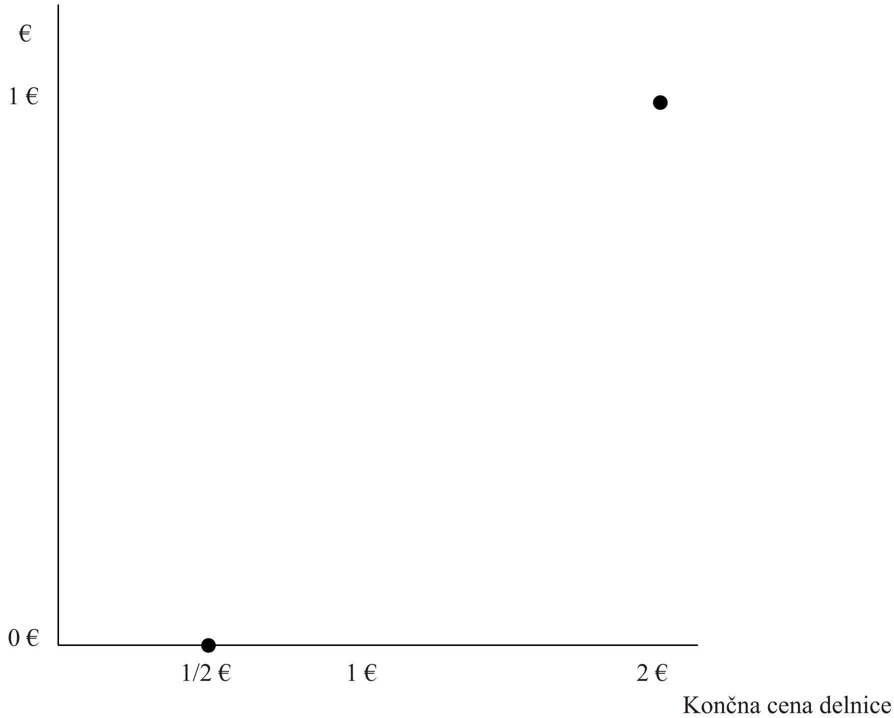
$$
\begin{aligned}
\Delta uS + (1+r)B &= C_u \\
\Delta dS + (1+r)B &= C_d.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Dobili smo dve enačbi z dvema neznankama. Njuni rešitvi sta:

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} \\
B &= \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Očitno lahko ne glede na naravno verjetnost p vedno najdemo tak portfelj, ki zadošča Δ delnicam in B obveznicam ter replicira izplačila naše nakupne opcije. To lahko storimo zaradi predpostavke o popolnosti trga. Če bi bil $C < \Delta S + B$, bi bila arbitražna strategija portfelj kratke pozicije v ΔS delnicah in B obveznicah ter dolga v opciji C in seveda obratno za $C > \Delta S + B$. Po zakonu ene cene je torej vrednost portfelja $\Delta S + B$ enaka brezarbitražni vrednosti opcije C.

Primer 3.1. Vrednotimo nakupno opcijo na meji, pri čemer je trenutna cena delnice 1 € in se lahko v naslednjem obdobju podvoji ali pa razpolovi.



SLIKA 1. Izplačila nakupne opcije na meji v binomskem modelu

Uporabimo enačbi, ki smo ju izpeljali zgoraj:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} = \frac{1-0}{1(2-1/2)} = 2/3$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)} = \frac{2 \cdot 0 - 1/2 \cdot 1}{(2-1/2)(1+0)} = -1/3.$$

Dolga pozicija v 2/3 delnice in kratka v 1/3 obveznice je portfelj, ki nam replicira izplačila evropske nakupne opcije na meji in je v času 0 vreden 1/3 €. To je seveda enak rezultat, ki smo ga dobili že v poglavju (2).

Čeprav je portfelj neodvisen od naravne verjetnosti za dobro oz. slabo stanje p, pa moramo poznati u in d, torej velikost gibanja cene delnice v naslednjem obdobju oz. njeno volatilnost. Investitorji se bodo tako strinjali glede nearbitražne cene nakupne opcije, tudi če naravno verjetnost p ne ocenjujejo enako, strinjajo pa se glede volatilnosti cene delnice (u in d).

Če se verjetnostne ocene za trg spremenijo, se bosta spremenili tudi trenutna cena delnice (če se pričakuje rast cene delnice, se poveča povpraševanje po delnici in njena cena zraste) in obveznice (spremeni se obrestna mera r). Zaradi tega se spremenita tudi deleža delnice in obveznice v portfelju, posledično pa se spremeni tudi cena opcije (vrednost portfelja). Ampak funkcijska povezava med deležem delnic in obveznic v portfelju (Δ in B) bo ostala enaka in neodvisna od ocenjene verjetnosti p. Le ta se skrije v trenutni ceni delnice (S) in obveznice (B, v odvisnosti od obrestne mere r), torej v reakciji trga. Vse kar moramo poznati oz. predpostavljamo kot znano, je sprememba vrednosti delnice v dobrem ali slabem razvoju trga (u in d), medtem ko so vrednosti S, B in r znane na trgu.

Brezarbitražno vrednost opcije lahko izrazimo kot

$$\begin{aligned} C = \Delta S + B &= \frac{C_u - C_d}{u-d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)} = \\ &= \frac{\frac{1+r-d}{u-d} max\{0, uS - K\} + \frac{u-(1+r)}{u-d} max\{0, dS - K\}}{1+r}, \end{aligned} \tag{13}$$

kar pa lahko zapišemo kot

$$C = \frac{1}{1+r}[qC_u + (1-q)C_d], \tag{14}$$

kjer je $q = \frac{1+r-d}{u-d}$ do tveganja nevtralna verjetnost v binomskem modelu.

Obravnavajmo še dvoobdobni binomski model. Gibanje cene delnice opišemo kot:

$$\begin{array}{ccccc} & & & & u^2S \\ & & & \nearrow & \\ & & uS & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ S & & & & duS \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & dS & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & d^2S \end{array} \tag{15}$$

gibanje vrednosti nakupne opcije pa kot

$$\begin{array}{ccccc} & & & & C_{uu} = max\{0, u^2S - K\} \\ & & & \nearrow & \\ & & C_u & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ C & & & & C_{du} = max\{0, duS - K\} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & C_d & & \\ & & & \searrow & \\ & & & & C_{dd} = max\{0, d^2S - K\} \end{array} \tag{16}$$

Čeprav ima nakupna opcija z zapadlostjo v drugem obdobju nelinearna izplačila, je njeno izplačilo v prvem obdobju lokalno linearno. Torej lahko s pomočjo končnih vrednosti in linearizacije izračunamo srednje vrednosti. Po enačbi (14) sta srednji vrednosti enaki:

$$C_u = \frac{qC_{uu} + (1-q)C_{du}}{1+r}$$
$$C_d = \frac{qC_{du} + (1-q)C_{dd}}{1+r}. \tag{17}$$

Če ti vrednosti proglasimo za pogojni terjatvi od časa 0 do časa 1, je to lokalno linearno in lahko izračunamo brezarbitražno vrednost naše nakupne opcije na meji z zapadlostjo v času 2. Le ta je enaka vrednosti portfelja $\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u-d)S}$ delnic in $B = \frac{uC_d - dC_u}{(u-d)(1+r)}$ obveznic. To lahko zapišemo tudi s pomočjo izpeljanih ekvivalentnih martingalskih verjetnosti:

$$\begin{aligned} C = \Delta S + B &= \frac{1}{1+r}[qC_u + (1-q)C_d] = \\ &= \frac{1}{(1+r)^2}(q^2C_{uu} + 2q(1-q)C_{ud} + (1-q)^2C_{dd}). \end{aligned} \tag{18}$$

Ta postopek lahko ponovimo za poljubno število obdobij do zapadlosti. Na ta način izpeljemo znano formulo za vrednotenje evropskih nakupnih opcij v binomskem modelu:

$$C = \frac{1}{(1+r)^n}\Big[\sum_{j=0}^{n}(\frac{n!}{j!(n-j)!})q^j(1-q)^{n-j}max\{0, u^jd^{n-j}S - K\}\Big]. \tag{19}$$

Premijo za evropsko prodajno opcijo dobimo iz paritetne enačbe (1). Binomski model je včasih uporabljen tudi v praksi kot možnost numeričnega vrednotenja kompleksnih opcij.

4. Ali se lahko ščitimo v trinomskem modelu?

Predpostavimo trinomski model, v katerem se cena delnice lahko poveča, zmanjša ali ostane enaka. V binomskem modelu smo za ščitenje potrebovali dva instrumenta (delnica in obveznica), v trinomskem modelu pa potrebujemo tri instrumente, ker imamo tri možna stanja. To je najbolj očitno v enoobdobnem trinomskem modelu.

Imejmo delnico, ki se lahko podvoji, prepolovi ali pa ostane enaka začetni vrednosti 2 €, torej $u = 2$, $m = 1$ in $d = 1/2$. Če hočemo replicirati izplačila evropske nakupne opcije z izvršilno ceno 3 €, uporabimo obveznico B (oz. netvegan finančni instrument), delnico S in nakupno opcijo na meji C (oz. poljubno opcijo, katere cena v času 0 je znana na trgu). Naj bodo N^b, N^s in N^o števila obveznic, delnic in opcij v zaščitnem portfelju. Zaradi poenostavitve predpostavimo, da je obrestna mera $r = 0$. Poznamo tri izplačila naše opcije v treh različnih stanjih, kar nam da tri enačbe s tremi neznankami:

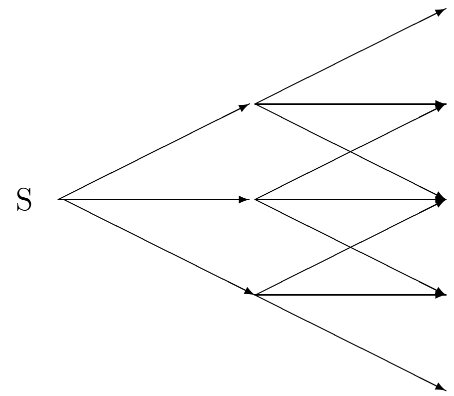
$$
(20) \qquad \begin{aligned}
N^b \cdot B + N^s \cdot uS + N^o \cdot C_u &= X_u \\
N^b \cdot B + N^s \cdot mS + N^o \cdot C_m &= X_m \\
N^b \cdot B + N^s \cdot dS + N^o \cdot C_d &= X_d
\end{aligned}
$$

oziroma če vstavimo spremenljivke, ki jih poznamo

$$
(21) \qquad \begin{aligned}
N^b \cdot 1€ + N^s \cdot 4€ + N^o \cdot 2€ &= 1€ \\
N^b \cdot 1€ + N^s \cdot 2€ + N^o \cdot 0€ &= 0€ \\
N^b \cdot 1€ + N^s \cdot 1€ + N^o \cdot 0€ &= 0€.
\end{aligned}
$$

Enolična rešitev tega sistema je $N^b = 0$, $N^s = 0$ in $N^o = 1/2$. Vrednost naše nakupne opcije z izvršilno ceno 3€ je torej odvisna od nakupne opcije na meji, za katero smo predpostavili, da poznamo njeno ceno v času 0. Torej, če je cena nakupne opcije na meji 2/3€, je brezarbitražna vrednost nakupne opcije z izvršilno ceno 3€ enaka 1/3€.

Sedaj pa predpostavimo dvoobdobni trinomski model s spodnjim trinomskim drevesom:



Slika 2. Dvoobdobno trinomsko drevo

Kot v binomskem modelu predpostavimo, da so u, m in d konstantni v obeh obdobjih. Enako velja za obrestno mero r in dividendni donos y. To pomeni, da je investicija 1€ v netvegano naložbo vredna $(1 + r)$€ v obdobju 1 in $(1 + r)^2$€ v obdobju 2. Ekvivalentno je ena delnica v obdobju 1 vredna $(1+y)$ delnic in $(1+y)^2$ delnic v obdobju 2, če pridobljene dividende reinvestiramo.

Če hočemo opcijo v času 0 vrednotiti z metodo inverzne rekurzije, kot smo to storili v binomskem modelu, naletimo na oviro. Postavimo se recimo v zgornje vozlišče v obdobju 1. V obdobju 2 so možne samo tri vrednosti, kar izgleda zelo podobno kot v času 0. Ampak problem je, da smo v času 0 s trga poznali ceno opcije, s katero smo se ščitili, v obdobju 1 pa cene opcij niso znane. Po predpostavki sicer poznamo možne cene delnice, ampak iz tega ne moremo sklepati cen opcij. Če bi bilo to mogoče, problem vrednotenja opcij sploh ne bi obstajal. Torej, v dvoobdobnem trinomskem modelu nam zmanjka potrebna informacija za inverzno rekurzijo. Kako to razrešiti?

Obudimo princip linearnosti. Obravnavajmo malo zahtevnejši primer izvedenega finančnega instrumenta, da pokažemo, kako je lahko linearnost uporabljena za zaščito in posledično vrednotenje izvedenih finančnih instrumentov. Predpostavimo, da je izplačilo nekega izvedenega finančnega instrumenta ob koncu drugega obdobja linearno v ceni delnice:

$$D_2 = N_0 + N_1 S_2. \tag{22}$$

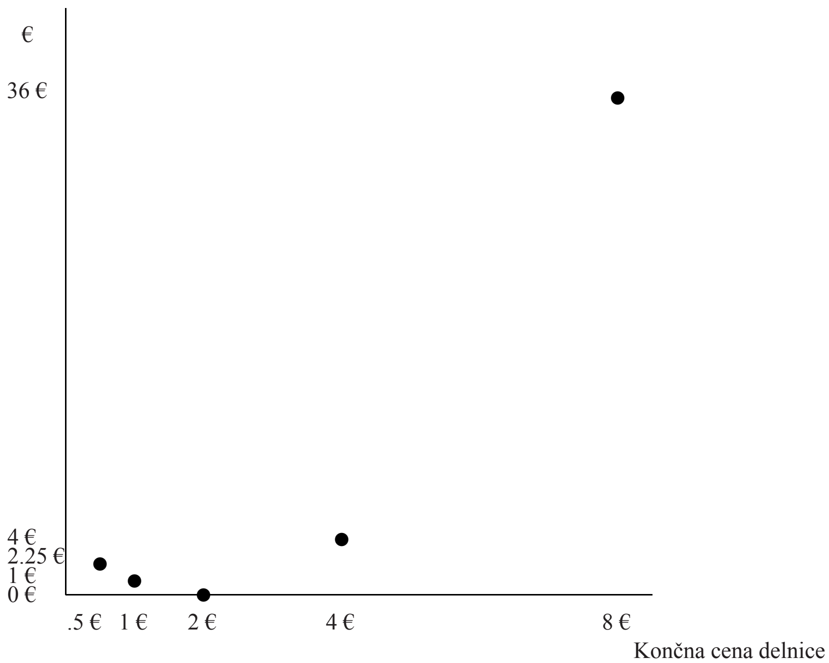
Potem mora biti tudi začetna vrednost tega instrumenta linearna v ceni delnice, da se izognemo arbitraži:

$$D_0 = N_0(1+r)^{-2} + N_1 S_0 (1+y)^{-2}. \tag{23}$$

Naj bo izplačilo določenega izvedenega finančnega instrumenta, ki ga želimo vrednotiti na koncu drugega obdobja nelinearno v ceni delnice. Na primer, naj bo izplačilo kvadratično:

$$Q_2(S_2) = (S_2 - 2)^2, \quad S_2 > 0. \tag{24}$$

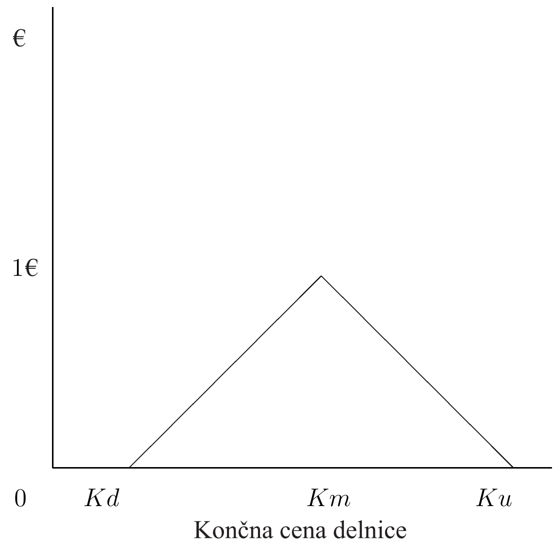
Spodnja slika prikazuje pet možnih izplačil, glede na to, da je začetna cena delnice 2 € in se lahko v vsakem obdobju podvoji, razpolovi ali pa ostane enaka.



Slika 3. Izplačila proučevanega izvedenega finančnega instrumenta

Linearizacijo bomo dosegli s pomočjo opcije metuljevega razkoraka. Čeprav bi lahko uporabili poljubno izvršilno ceno in izplačilo metuljevega razkoraka, se bomo zaradi poenostavitve omejili na metuljeve razkorake z izplačilom 1 € in izvršilnimi cenami, ki so enake možnim cenam delnice v obdobju 2.

Linearizacijo dosežemo tako, da narišemo premico skozi poljubni dve izmed petih točk, ki prikazujejo izplačilo našega izvedenega finančnega instrumenta, ki ga vrednotimo. Nato s statičnimi pozicijami v opcijah metuljevega razkoraka z izvršilno



SLIKA 4. Izplačila opcije metuljevega razkoraka

ceno v ostalih treh točkah na nek način povlečemo te točke na našo premico in tako globalno lineariziramo izplačilo.

Naj bosta kot prej N_0 in N_1 začetna vrednost in smerni koeficient lineariziranega izplačila:

$$L_2(S_2) = N_0 + N_1 S_2, \quad S_2 > 0. \tag{25}$$

Če izberemo drugo in tretjo točko z leve, gre premica skozi $(dmS, Q_{dm}) = (1, 1)$ in $(m^2S, Q_{mm}) = (2, 0)$ in je njena enačba enaka:

$$L_2(S_2) = 2 - S_2, \quad S_2 > 0, \tag{26}$$

pri čemer sta $N_0 = 2$ začetna vrednost in $N_1 = -1$ smerni koeficient. Sedaj izračunajmo še število metuljevih razkorakov z izvršilno ceno v ostalih treh možnih cenah delnice v obdobju 2.

Cena delnice	$L_2(S_2)$	$Q_2(S_2)$	# metuljevih razkorakov
$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$
4	-2	4	-6
8	- 6	36	-42

SLIKA 5. Izračunano število opcij metuljevega razkoraka potrebnih za globalno linearizacijo

Prvi stolpec slike 5 prikazuje tri možne cene delnic v obdobju 2 (skozi ostali dve smo narisali premico). V drugem stolpcu so linearizirana izplačila izračunana po enačbi (26). V tretjem pa so izplačila našega izvedenega finančnega instrumenta, ki ga vrednotimo, izračunana po enačbi (24). V četrtem stolpcu izračunamo število metuljevih razkorakov z izvršilno ceno enako možnim cenam delnice, kot razliko med drugim in tretjim stolpcem.

Linearizirano izplačilo iz drugega stolpca prikazje vrednost portfelja dolge pozicije v dveh obveznicah ($N_0 = 2$) in kratke v eni delnici ($N_1 = -1$). Torej je razlika med vrednostjo tega portfelja in izplačilom vrednotenega izvedenega instrumenta enaka vrednosti, ki jo potrebujemo, da v portfelju dosežemo enako izplačilo v vsakem razvoju trga, kot ga ima vrednoten instrument. Tako bo po zakonu ene cene vrednost portfelja enaka vrednosti izvedenega finančnega instrumenta, ki jo iščemo. Ker smo vzeli opcijo metuljevega razkoraka z izplačilom 1 €, je to število torej enako številu opcij metuljevega razkoraka, ki jih potrebujemo v izvedbenem portfelju. Namreč, metuljev razkorak nam izplača 1 € samo v primeru, da je cena delnice enaka izvršilni ceni opcije, v vseh ostalih primerih pa ne izplača nič. To je natančno to, kar potrebujemo.

Globalno smo linearizirali naš izvedeni finančni instrument. Sedaj izračunajmo njegovo brezarbitražno vrednost. Najprej izračunajmo vrednost linearizacijskega portfelja $L_0 = 2 - 1 \cdot 2 = 0$. Začetna vrednost v portfelju dolge pozicije v dveh obveznicah in kratke pozicije v delnici je enaka 0. Dodati moramo še premije metuljevih razkorakov. Vrednost našega instrumenta je tako enaka:

$$Q_0 = L_0 + 3/4MK_0(1/2) + 6MK_0(4) + 42MK_0(8), \tag{27}$$

pri čemer je $MK_0(1/2)$ cena metuljevega razkoraka z izvršilno ceno 1/2 € v času 0 in ekvivalentno $MK_0(4)$ ter $MK_0(8)$. Za te cene predpostavljamo, da so v času 0 znane na trgu. Torej lahko sedaj brez težav izračunamo brezarbitražno vrednost instrumenta Q_0. Recimo, da je cena vseh treh metuljevih razkorakov 1/9 €. Od tod sledi, da je iskana brezarbitražna vrednost kvadratičnega izvedenega finančnega instrumenta enaka:

$$Q_0 = 0\,€ + 1/9(3/4\,€ + 6\,€ + 42\,€) = 195/36\,€. \tag{28}$$

Opomba 4.1. Opcijo metuljevega razkoraka z izvršilno ceno 1/2 € oz. 8 €, si lahko predstavljamo tudi kot prodajno opcijo z izvršilno ceno 3/2 € oz. nakupno z izvršilno ceno 7 €. Namesto metuljevega razkoraka pa bi lahko uporabili tudi kakšno drugo primerno opcijo.

Druga metoda linearizacije pa uporablja dinamično trgovanje v delnici in obveznici in statične pozicije v opcijah. Izračunajmo ekvivalentne martingalske verjetnosti. Predpostavimo, da je trenutna vrednost nakupne opcije na meji z zapadlostjo v času 1 enaka 4/7 €, cena delnice 2 € in cena obveznice 6/7 €. Torej sta vektor diskontiranih cen in matrika diskontiranih izplačil enaka:

$$\tilde{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Do tveganja nevtralne verjetnosti q_u, q_m in q_d so rešitev sistema:

$$\begin{array}{lrcl} \text{obveznica} & q_u + q_m + q_d & = & 1 \\ \text{delnica} & q_u \cdot 4 + q_m \cdot 2 + q_d \cdot 1 & = & 7/3 \\ \text{opcija} & q_u \cdot 2 + q_m \cdot 0 + q_d \cdot 0 & = & 2/3. \end{array} \tag{30}$$

Rešitev sistema je enaka: $q_u = q_m = q_d = 1/3$.

Postavimo se v zgornje vozlišče v času 1 (stanje u). Če želimo izračunati do tveganja nevtralne verjetnosti poti, ki vodijo iz tega vozlišča, moramo poznati današnjo ceno opcije z izvršilno ceno 4 € in dospetjem v času 2. Naj bo le ta enaka $C = 16/49$ €. Ker se izplačilo te opcije zgodi le v primeru, ko cena delnice dvakrat zraste, vemo, da mora veljati

$$C = q_u \cdot q_{uu} \cdot (1+r)^{-2} \cdot C_{uu} = 1/3 \cdot q_{uu} \cdot (6/7)^2 \cdot 4\,€ = 16/49\,€. \tag{31}$$

Od tod sledi, da je $q_{uu} = 1/3$. Na enak način kot smo izračunali za prvo obdobje, bi izračunali še $q_{um} = q_{ud} = 1/3$. Če poznamo današnjo vrednost prodajne opcije z izvršilno ceno 1 € in zapadlostjo v času 2, lahko izračunamo q_{dd}, q_{dm} in q_{du}. Ekvivalentno, če v času 0 poznamo vrednost nakupne ali prodajne opcije na meji z zapadlostjo v času 2, izračunamo še ostale tri do tveganja nevtralne verjetnosti. Ker poznamo do tveganja nevtralne verjetnosti vseh možnih poti, lahko brez težav izračunamo brezarbitražno vrednost našega kvadratičnega izvedenega finančnega instrumenta, ne da bi poznali njegov izvedbeni portfelj.

Druga metoda linearizacije, ki vključuje dinamično trgovanje v delnici in obveznici (strategija samofinanciranja) in statične pozicije v opcijah, je lahko uporabna tudi za vrednotenje finančnih instrumentov, katerih izplačilo je odvisno od njihove poti in pogojnih terjatev ameriškega tipa. Zanimivo je, da smo za izračun do tveganja nevtralnih verjetnosti vsake poti potrebovali štiri evropske opcije, medtem ko smo za vrednotenje od poti neodvisnega kvadratičnega izvedenega finančnega instrumenta potrebovali cene le treh opcij. Pravimo, da je trg poln, ko v času 0 poznamo ceno štirih opcij. To pomeni, da je v takem trgu vsaka pogojna terjatev dosegljiva in lahko izračunamo njeno brezarbitražno vrednost. Ne glede na to, vidimo, da so lahko pogojne terjatve evropskega tipa vrednotene na nepolnem trgu s tremi znanimi opcijskimi cenami.

Problem pri obeh opisanih metodah v trinomskem modelu je, da z naraščanjem obdobij in posledično večjo natančnostjo pri vrednotenju, število opcij, ki jih moramo poznati v času 0, narašča eksponentno. Problematično je tudi morebitno pomanjkanje znanih cen opcij, ki dospejo v določenem obdobju. Zato bomo v naslednjem poglavju naredili miselni preskok, zapustili diskretne modele in pogledali, kaj vse nam pri vrednotenju opcij prinese zvezni čas.

5. Zakaj se pričakovana stopnja donosa v Black-Scholesovi parcialni diferencialni enačbi ne pojavi?

V literaturi zasledimo veliko različnih izpeljav Black-Scholesove parcialne diferencialne enačbe, ki pa praviloma ne razložijo, zakaj se pričakovana stopnja donosa v enačbi ne pojavi. V poglavju (3) smo pokazali, zakaj naravne verjetnosti v binomskem modelu pri vrednotenju niso pomembne. Sedaj pa bomo pokazali še, zakaj je pričakovana stopnja donosa (povezava z binomskimi p-ji) pri vrednotenju opcije v (zveznem) času $t \in [0, T]$ in pri dani ceni delnice S_t, nepomemben podatek. Zopet bomo obudili princip linearnosti, tokrat njegovo zvezno obliko. Naj bo izplačilo finančnega instrumenta v času T linearno v ceni delnice:

$$D_T = N_0 + N_1 S_T, \tag{32}$$

kjer sta N_0 in N_1 znana v času $t < T$. Zaradi poenostavitve predpostavimo še konstantno obrestno mero r in konstanten dividendni donos δ. Zaradi odsotnosti arbitraže mora biti cena tega instrumenta v času t enaka:

$$D_t = N_0 e^{-r(T-t)} + N_1 e^{-\delta(T-t)} S_t, \quad t < T. \tag{33}$$

Če bi v času t veljalo, da je $D_t > N_0 e^{-r(T-t)} + N_1 e^{-\delta(T-t)} S_t$, bi prodali instrument, si izposodili $N_0 e^{-r(T-t)}$ € in kupili $N_1 e^{-\delta(T-t)} S_t$ delnic. Denarni tok v času 0 je tako pozitiven. Na banki bi pustili obresti in dividende reinvestirali v delnico ter tako ob času T imeli N_0 € in N_1 delnic. Ker vemo, da velja enačba (32), je denarni tok v času T enak 0. To je arbitraža. Ekvivalentno bi pokazali, da je $D_t < N_0 e^{-r(T-t)} + N_1 e^{-\delta(T-t)} S_t$ arbitražna cena za D_t, torej enakost (33) mora veljati.

Black, Scholes in Merton so zgornjo idejo uporabili v situaciji, kjer D_T ni linearna v S_T (opcija ima seveda nelinearna izplačila). To so dosegli s časovno zveznostjo tako v ceni delnice kot v trgovanju. Namreč, gledano infinitezimalno majhen časovni korak, lahko nelinearne funkcije obravnavamo kot "lokalno linearne". Pokazali so tudi, da so v času t informacije S_t, N_0 in N_1 odvisne od volatilnosti slučajnega procesa (cena delnice), ne pa tudi od pričakovane stopnje donosa. Če se strinjamo glede volatilnosti delnice, se strinjamo tudi z brezarbitražno vrednostjo opcije, ne glede na to, če pričakujemo različno tendenco (angl. drift), kar je ekvivalentno ugotovitvi iz binomskega modela.

Predpostavimo, da cena delnice sledi geometrijskemu Brownovemu gibanju:

$$dS_t = (\mu(S_t, t) - \delta) S_t dt + \sigma(S_t, t) S_t dX_t, \tag{34}$$

kjer sta μ in σ funkciji pričakovane stopnje donosa in volatilnosti, δ pa je dividendni donos.

Označimo z $D_t = V(S_t, t)$ trenutno vrednost izvedenega finančnega instrumenta, ki ga vrednotimo. Vidimo, da je funkcija V odvisna le od S_t in t. Če se osredotočimo na neskončno majhen časovni korak dt, zaradi Itove leme velja:

$$dD_t = \frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t) dt + \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t) dS_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t, t)(dS_t)^2, \quad t \in [0, T]. \tag{35}$$

Če dS_t iz enačbe (34) vstavimo v enačbo (35), vidimo, da pričakovana stopnja donosa μ še vedno vpliva na dD_t. Izraz dD_t zapišimo v obliki $D_{t+dt} - D_t$:

$$D_{t+dt} - D_t = \frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t) dt + \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t)(S_{t+dt} - S_t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t, t)(S_{t+dt} - S_t)^2. \tag{36}$$

Po Itovi lemi lahko enačbo (34) kvadriramo in dobimo

$$(S_{t+dt} - S_t)^2 = \sigma^2(S_t, t) S_t^2 dt, \tag{37}$$

kar je deterministično in neodvisno od μ.

Če izraz iz (37) vstavimo v enačbo (36), dobimo:

$$D_{t+dt} = \underbrace{D_t + \Big[\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t)dt + \frac{\sigma^2(S_t,t)S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t)\Big]dt - \frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)S_t +}_{N_0} \tag{38}$$
$$+ \underbrace{\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)}_{N_1} S_{t+dt},$$

kjer sta N_0 in N_1 v času t deterministična in je zato enačba (38) oblike (32). Zaenkrat lahko μ še vedno nastopa v enačbi (38). To vidimo, če S_{t+dt} zamenjamo z $S_t + (\mu(S_t,t) - \delta)S_t dt + \sigma(S_t,t)S_t dX_t$ iz enačbe (34).

Sedaj pa uporabimo princip lokalne linearnosti in zapišimo enačbo (38) v obliki (33):

$$\begin{aligned} D_t = \Big\{ D_t + \Big[\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t) + \frac{\sigma^2(S_t,t)S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t)\Big]dt - \\ - \frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)S_t\Big\} e^{-rdt} + \frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)S_t e^{-\delta dt}. \end{aligned} \tag{39}$$

Če razvijemo e^{-rdt} in $e^{-\delta dt}$ v Taylorjevo vrsto in za člene, ki so manjši ali enaki $(dt)^2$ predpostavimo, da so enaki 0, dobimo: $e^{-rdt} = 1 - rdt$ in $e^{-\delta dt} = 1 - \delta dt$. Ta člena vstavimo v enačbo (39) in ostane nam Black-Scholesova parcialna diferencialna enačba:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t) + \frac{\sigma^2(S_t,t)S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t) + (r-\delta)S_t\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t) - rV(S_t,t) = 0. \tag{40}$$

Analitična rešitev te parcialne diferencialne enačbe glede na določen začetni pogoj (npr. $V(S_T,T) = max\{S_T - K, 0\}$ za evropsko nakupno opcijo), je brezarbitražna vrednost za $D_t = V(S_t,t)$, za vse $t \in [0,T]$. Ker se pričakovana stopnja donosa μ v parcialni diferencialni enačbi ali njenih začetnih pogojih ne pojavi, je vrednost D_t popolnoma neodvisna od μ, glede na informacije v času t, kot je recimo cena delnice S_t. Rešitev te diferencialne enačbe pa lahko poiščemo tudi z uporabo numeričnih metod, na primer z metodo končnih diferenc, kjer zaradi želje po čim večji natančnosti vzamemo čim manjši korak.

Opomba 5.1. Pokažimo glavno idejo pri numeričnem reševanju te parcialne diferencialne enačbe z metodo končnih diferenc.

Black-Scholesova parcialna diferencialna enačba je povezava med opcijsko vrednostjo, njenim naklonom v smereh S in t in naklonom naklona v smeri S. Predstavljajmo si, da smo v času dospetja evropske nakupne opcije. Vemo, da je vrednost opcije enaka $max\{S_T - K, 0\}$. Torej poznamo že zadnji člen v enačbi (40). Zaradi poenostavitve predpostavimo, da je dividendni donos $\delta = 0$. Ali poznamo naklon opcijske vrednosti v smeri S v času dospetja T? Ker je V funkcija maksimuma, je ta naklon enak 0 za $S_T < K$ in 1 za $S_T > K$ (z malo zahtevnejšim primerom $S_T = K$ se ne bomo ukvarjali, ker hočemo prikazati le osnovno idejo v ozadju te numerične metode). Ker poznamo naklon v smeri S, tako poznamo tudi predzadnji člen enačbe (40). Ta naklon lahko zapišemo s pomočjo indikatorske funkcije, ki je enaka 1 v primeru, da je njen pogoj izpolnjen in 0 sicer: $\frac{\partial V}{\partial S}(S_T,T) = \mathbb{1}(S_T - K)$. Kaj pa je z drugim parcialnim odvodom, torej naklonom naklona v smeri S? Glede na to, da je naklon v smeri S lahko enak 0 ali 1, je naklon naklona enak 0. Poznamo torej še drugi člen enačbe (40): $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0$. Če povzamemo, imamo torej: $\frac{\partial V}{\partial t} + 0 + rS_T \mathbb{1}(S_T - K) - rmax\{S_T - K, 0\} = 0$. To pa je enačba za $\frac{\partial V}{\partial t}$. Če velja $S_T < K$ je njena rešitev $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ in če je $S_T > K$, dobimo: $\frac{\partial V}{\partial t} = -rS_T + rS_T - rK = -rK$. Kakšen je pomen tega? Če poznamo $\frac{\partial V}{\partial t}$, poznamo naklon opcijske vrednosti v smeri t. Torej lahko poiščemo vrednost opcije trenutek pred zapadlostjo. Če smo v času $T - \gamma t$, kjer je γt dovolj majhen, je opcijska vrednost enaka približno $V = 0$ za $S_T < K$ in $V = S_T - K + rK\gamma t$ za $S_T > K$. Na takšen način smo dobili opcijsko vrednost en časovni korak pred zapadlostjo. Ta postopek ponavljamo, dokler ne pridemo do sedanjosti, kjer dobimo približek za sedanjo vrednost opcije, ki jo vrednotimo. Manjši kot je časovni korak γt, natančnejša je aproksimacija.

Vprašajmo se še samo, kako lahko opcijska vrednost postane neničelna za $S_t < K$. Odgovor na to se skriva v primeru $S_t = K$, ki smo ga zaradi poenostavitve izpustili. Pokazali smo le najosnovnejšo idejo tega numeričnega reševanja, sedaj pa se vrnimo na razlago izpeljave Black-Scholesove linearne parabolične parcialne diferencialne enačbe.

Iz enačbe (38) vidimo, da je število delnic v zaščitnem portfelju, ki ga držimo na infinitezimalno majhnem koraku od t do $t+dt$, enako $N_1(S_t, t) = \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t), t \in [0, T]$. Enak zaščitni portfelj pa bomo na drug način izpeljali tudi v naslednjem poglavju.

Zanimivo je, da μ, ki se pojavi v členu dS_t enačbe (35), izgine iz popolnoma drugačnega razloga, kot μ iz $(dS_t)^2$ ter višjih potenc. Tendenca (oz. pričakovana stopnja donosa) μ iz dS_t izgine zaradi principa linearnosti. Ker je vrednost instrumenta v času $t+dt$ lokalno linearna v bodoči ceni delnice S_{t+dt} ($dS_t = S_{t+dt} - S_t$), μ očitno izgine, kakor izgine tudi volatilnost. Medtem ko μ iz $(dS_t)^2$ izgine zaradi stohastičnega računa in Itove leme: $(dS_t)^2 = ((\mu(S_t, t) - \delta)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dX_t)^2 = \sigma^2(S_t, t)S_t^2 dt$. Od tu vidimo, da je volatilnost pomembna izključno zaradi uporabe stohastičnega računa. Členi $(dS_t)^3$ in višjih potenc pa so zanemarljivo majhni.

Kaj pa povezava z ekvivalentnimi martingalskimi verjetnostmi? Ker se v Black-Scholesovi parcialni diferencialni enačbi nikjer ne pojavi tendenca μ, je vseeno, ali se pričakuje, da bo cena delnice na dolgi rok rastla ali padala (kar je seveda nekoliko neintuitivno), podobno kot v binomskem modelu naravne verjetnosti p za vrednotenje izvedenih finančnih instrumentov niso bile pomembne. Kot smo v diskretnih modelih za vrednotenje vpeljali do tveganja nevtralne verjetnosti, v zveznem času vpeljemo do tveganja nevtralen slučajni sprehod. Podobno kot ekvivalentne martingalske verjetnosti niso imele nobene zveze s pravimi verjetnostmi, tako do tveganja nevtralen slučajni sprehod nima nobene zveze z dejansko slučajno potjo cene delnice. Ker smo z zaščitnim portfeljem odstranili vso tveganje, lahko za vrednotenje uporabimo do tveganja nevtralen slučajni sprehod. Zanj velja, da je tendenca μ enaka netvegani obrestni meri r, torej: $dS = rSdt + \sigma SdW$, volatilnost σ pa je enaka tisti, ki nastopa v Black-Scholesovi diferencialni enačbi. Ker za zapadlost T velja $V(S_T, T) = f(S_T)$, mora za poljuben $t \in [0, T]$ veljati: $V(S_t, t) = e^{-r(T-t)} E^Q[f(S_T)]$. Torej, brezarbitražna vrednost opcije je diskontirana vrednost izplačila, glede na do tveganja nevtralen naključni sprehod osnovnega finančnega instrumenta (delnice). V praksi lahko tako s pomočjo Monte Carlo metod simuliramo do tveganja nevtralne slučajne sprehode in na tak način izračunamo vrednost opcije.

6. Ali je zaščitni portfelj v Black-Scholesovi diferencialni enačbi pravilno definiran?

V literaturi lahko zasledimo kar nekaj člankov, ki utemeljujejo, zakaj je izpeljava Black-Scholesove parcialne diferencialne enačbe napačna. Dvomov o pravilnosti končnega rezultat sicer ni, vprašljiva pa je matematična korektnost same izpeljave. V tem poglavju bomo pokazali, da lahko naredimo izpeljavo matematično korektno, če namesto diferenciala uporabimo ekonomsko operacijo dobička (angl. gain) portfelja v infinitezimalno majhnem časovnem koraku.

V originalnem dokazu je v zaščitnem portfelju fiksirano število delnic in se zvezno spreminja število izdanih opcij. Ena od predpostavk modela je, da pri trgovanju ni stroškov, ampak v realnosti seveda ni tako. Ker je dinamično trgovanje z opcijami veliko dražje kot z delnicami, v naši izpeljavi fiksirajmo število izdanih opcij in spreminjajmo število delnic v dolgi poziciji. Matematično gledano smo samo zamenjali minuse in pluse. To je prva izboljšava glede na izvirno izpeljavo, ki smo jo storili.

S Π označimo vrednost portfelja dolge pozicije v nekem številu (Δ) delnic (delta ščitenje) in kratko pozicijo v opciji, ki jo vrednotimo:

$$\Pi(S_t, t) = \Delta S_t - V(S_t, t). \tag{41}$$

Predpostavimo, da cena delnice sledi geometrijskemu Brownovemu gibanju $dS_t = \mu(S_t, t)S_t dt + \sigma(S_t, t)S_t dX_t$, kar je seveda enako kot v enačbi (34), le da tu zaradi poenostavitve vzmamemo, da je dividendni donos $\delta = 0$.

V originalni izpeljavi je v naslednjem koraku izračunan diferencial vrednosti portfelja Π kot:

$$d\Pi(S_t, t) = \Delta dS_t - dV(S_t, t). \tag{42}$$

Načeloma bi morali izračunati tudi diferencial funkcije Δ. Razlaga, zakaj tega ne storimo je, da je število delnic v portfelju v vsakem času "trenutno konstantno". Matematično je to slabo definirana izjava, saj je število sprememb portfelja v vsakem končnem časovnem intervalu neskončno (predpostavka zveznega dinamičnega trgovanja). Zaradi tega tudi uporabljamo stohastičen račun.

Ta problem rešimo tako, da namesto diferenciala izračunamo dobiček portfelja v infinitezimalno majhnem časovnem koraku. To je naša glavna izboljšava glede na originalno izpeljavo. Torej, dobiček (angl. gain) portfelja definiramo kot:

$$g\Pi(S_t, t) = \Delta dS_t - dV(S_t, t). \tag{43}$$

Ker je funkcija V funkcija časa t in vrednosti delnice S_t, za katero vemo, da se giba po geometrijskem Brownovem gibanju, po Itovi lemi velja:

$$dV(S_t, t) = \frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t)dt + \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t)dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2(S_t, t)S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t, t)dt. \tag{44}$$

Enačbo (44) vstavimo v enačbo (43) in dobimo dobiček portfelja (ki je lahko tudi negativen) v neskončno majhnem časovnem intervalu:

$$g\Pi(S_t, t) = \Delta dS_t - \frac{\partial V}{\partial t}(S_t, t)dt - \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t)dS_t - \frac{1}{2}\sigma^2(S_t, t)S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t, t)dt. \tag{45}$$

Zaenkrat je ta enačba še stohastična, saj v njej nastopanjo členi dS_t. Ta slučajnost v dobičku portfelja seveda prinaša tveganje. Ampak tega tveganja se lahko s primerno izbiro Δ (vsaj v teoriji) popolnoma znebimo. Ker je edini stohastičen člen v enačbi (45) enak $(\Delta - \frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t))dS_t$, lahko z izbiro $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)$ iz portfelja odstranimo celotno tveganje. Vsakemu zmanjšanju tveganja pravimo ščitenje, ker pa smo iz portfelja izločili celotno tveganje, se tej strategiji reče delta ščitenje (angl. delta hedging) in je primer dinamičnega ščitenja. V vsakem trenutku se vrednost $\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)$ spremeni, saj je funkcija spreminjajočih se parametrov S_t in t. Zato moramo zaščitni portfelj zvezno spreminjati. Vidimo tudi, da je izpeljani zaščitni portfelj seveda enak zaščitnemu portfelju N_1 iz enačbe (38), le izpeljan je bil na drugačen način.

Čeprav je zaradi ustrezne izbire Δ enačba (45) postala deterministična, nas do izpeljave Black-Scholesove parcialne diferencialne enačbe loči še en pomemben korak, in sicer apliciranje odsotnosti arbitraže. Z izbiro števila delnic Δ v zaščitnem portfelju se vrednost portfelja Π v vsakem koraku spremeni za:

$$g\Pi(S_t,t) = \Big[-\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t) - \frac{1}{2}\sigma^2(S_t,t)S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t)\Big]dt. \tag{46}$$

To je deterministična sprememba in je zato netvegana. Torej mora biti zaradi odsotnosti arbitraže enaka dobičku, če vrednost portfelja Π po netvegani obrestni meri r naložimo na banko:

$$g\Pi(S_t,t) = r\Pi(S_t,t)dt. \tag{47}$$

Če bi v delta zaščitenem portfelju dobili donos večji kot r, bi si lahko iz banke izposodili denar po obrestni meri r, investirali v netvegan (zaščiten) portfelj delnic in opcije Π in tako zaslužili netvegan dobiček, kar bi pomenilo arbitražo. Ekvivalentno pokažemo, če je donos manjši od r. Ker sta dobička (46) in (47) deterministična in enaka za vsak t, jih zaradi odsotnosti arbitraže izenačimo:

$$\Big[-\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t) - \frac{1}{2}\sigma^2(S_t,t)S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t)\Big]dt = r\Big[\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)S_t - V(S_t,t)\Big]dt. \tag{48}$$

To pa nam da že znano Black-Scholesovo parcialno diferencialno enačbo:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2(S_t,t)S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t) + r\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)S_t - rV(S_t,t) = 0. \tag{49}$$

Seveda je enačba (49) identična enačbi (40), ker smo zaradi poenostavitve predpostavili, da je dividendni donos $\delta = 0$. Omenimo še, da portfelj delnic in opcije Π ne zadošča strategiji samofinanciranja. Zato je potrebno še zvezno izposojanje, ampak več o tem v naslednjem poglavju. Pomembna pa je ideja, da kljub temu, da to ni bila strategija samofinanciranja, morata imeti dva netvegana portfelja v odsotnosti arbitraže vedno enako vrednost.

Opomba 6.1. Navedimo nekaj glavnih predpostavk, ki se pojavijo v Black-Scholesovem modelu:

- Osnovni finančni instrument (delnica) sledi geometrijskemu Brownovemu gibanju: gotovo je ta predpostavka neprimerno boljša od predpostavk diskretnih modelov, kjer lahko delnica v naslednjem obdobju zavzame le končno število možnih vrednosti. Še vedno pa to, da je donos delnice v naslednjem

obdobju porazdeljen normalno, ni popolnoma realno. Kljub temu, da tendenca μ v diferencialni enačbi ne nastopa, pa v njej nastopa volatilnost σ. Volatilnosti delnice v prihodnosti ne moremo gotovo poznati in tako uporabimo ocenjeno volatilnost delnice za naslednje obdobje. Tudi če za σ vzamemo funkcijo časa, smo problem malo omilili, ne moremo ga pa popolnoma razrešiti, ker prihodnosti ne moremo poznati. Zato je problem ocenjevanja volatilnosti pomemben in mu bomo namenili več časa v naslednjem poglavju.
- Netvegana obrestna mera je znana funkcija časa: ta problem je podoben zgornjemu problemu volatilnosti. Tudi bodoče obrestne mere seveda ne moremo poznati, ampak jo lahko le ocenjujemo in v modelu jemljemo kot vnaprej znano. Kot zanimivost pa povejmo, da obstajajo tudi modeli, kjer obrestne mere jemljemo kot stohastične.
- Stroški izposojanja in nalaganja denarja so enaki: to je seveda nerealna predpostavka, pomembna pa je zato, ker zaščitni portfelj ni portfelj samofinanciranja.
- Ščitenje je izvedeno zvezno: v realnosti je to seveda nemogoče in tako ščitenje poteka v diskretnem času. Dobro je, da je čas med spremembama zaščitnega portfelja čim krajši, to je pa seveda odvisno tudi od transakcijskih stroškov, manjši kot so, pogostejše so spremembe zaščitnega portfelja.
- Ni transakcijskih stroškov: to je zopet ena izmed predpostavk, ki v realnosti niso izvedljive. Poleg tega pa se moramo zavedati tudi, da so na trgu prisotne razlike med prodajnimi in nakupnimi cenami finančnih instrumentov.
- Likvidnost: predpostavljamo, da so trgi popolnoma likvidni, kar pomeni, da lahko v vsakem trenutku kupimo in prodamo poljubno količino delnic in si izposodimo oz. naložimo poljubno količino denarja, kar seveda zopet ni realna predpostavka.
- Ni arbitražnih priložnosti: znotraj našega modela ta predpostavka seveda velja, ampak pod pogojem, da so izpolnjene vse zgornje predpostavke. Ker pa vemo, da to v realnosti ni mogoče, se lahko pojavijo tudi arbitražne priložnosti, ki jih na primer izkoriščajo investicijske banke in skladi tveganega kapitala. Bolj pomembno pa je, da smo glede na zgornje predpostavke, v našem modelu izločili možnost arbitražnih priložnosti.

Predpostavk je seveda še več, zgoraj smo našteli in na kratko opisali le najpomembnejše.

7. Ali se je bolje ščititi glede na zgodovinsko ali za prihodnost pričakovano volatilnost?

V praksi je modeliranje volatilnosti težek problem, ki se mu nameni veliko časa in pozornosti, zato bomo na to vprašanje zelo težko odgovorili v popolnosti in bomo poizkusili nanj odgovoriti v mejah našega Black-Scholesovega modela. Predpostavimo vse standardne predpostavke Black-Scholesovega modela, kot so trg brez trenja, odsotnost arbitraže, konstantna netvegana obrestna mera r in konstantnen dividendni donos $\delta \geq 0$ na časovnem intervalu $[0, T]$. V predpostavki trga brez trenja se skriva tudi močno napadena predpostavka, da si lahko izposojamo denar in izvajamo kratke prodaje delnic v neomejenih količinah, kljub realni možnosti prevelikih izgub in nezmožnosti vračanja denarja. Cena delnice sledi geometrijskemu Brownovemu gibanju

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad t \in [0, T],$$

kjer je S_t trenutna cena delnice, μ in σ pa sta tendenca in volatilnost tega slučajnega procesa. Naj bo za vsako pozitivno konstanto σ funkcija $V(S_t,t;\sigma)$ rešitev Black-Scholesove parcialne diferencialne enačbe:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t;\sigma)+\frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t;\sigma)+(r-\delta)S_t\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma)-rV(S_t,t;\sigma)=0, \tag{50}$$

glede na začetni pogoj

$$\lim_{t\to T} V(S_t,t;\sigma_t)=f(S_T), \tag{51}$$

kjer je f funkcija končnega izplačila instrumenta V.

V času 0 prodamo instrument evropskega tipa s končnim izplačilom $f(S_T)$, kjer je vrednost $V(S_0,0;\sigma_i)$ izračunana iz Black-Scholesovega modela in σ_i začetna za prihodnost pričakovana (angl. implied) volatilnost. Z N_t označimo število delnic, ki jih držimo v zaščitnem portfelju v času $t\in[0,T]$ in s σ_h konstnatno volatilnost zaščitnega portfelja. Po zaščitnem portfelju iz Black-Scholesovega modela na začetku kupimo $N_0=\frac{\partial V}{\partial S}(S_0,0;\sigma_h)$ delnic, vsako po ceni S_0. Z $\beta_t\geq 0$ označimo kumulativno izposojanje v času $t\in[0,T]$. Začetno izposojanje je razlika med stroški za vzpostavitev zaščitnega portfelja in izkupičkom iz prodaje našega instrumenta V:

$$\beta_0=\frac{\partial V}{\partial S}(S_0,0;\sigma_h)S_0-V(S_0,0;\sigma_i),$$

kar pa zaradi nadaljnje izpeljave zapišimo kot:

$$\beta_0=\Big[\frac{\partial V}{\partial S}(S_0,0;\sigma_h)S_0-V(S_0,0;\sigma_h)\Big]+[V(S_0,0;\sigma_h)-V(S_0,0;\sigma_i)]. \tag{52}$$

Predpostavimo, da so vsi nakupi delnic financirani z izposojanjem in vse prodaje uporabljene za zmanjševanje kumulativnega izposojanja. Vrednost kumulativnega izposojanja bo rastla z netvegano obrestno mero r, dividende iz delnic pa bodo zmanjševale stroške izposojanja. Zapišimo enačbo spremembe kumulativnega izposojanja v času t:

$$d\beta_t=d(N_tS_t)-N_tdS_t-N_t\delta S_tdt+r\beta_tdt, \tag{53}$$

pri čemer so $d(N_tS_t)$ sprememba v € glede na to, koliko novih delnic kupimo oz. prodamo, N_tdS_t sprememba vrednosti delnic, ki jih že imamo (kapitalski dobiček), $N_t\delta S_tdt$ prejete dividende in $r\beta_tdt$ obresti za izposojanje.

V času t držimo v zaščitnem portfelju

$$N_t=\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h) \tag{54}$$

delnic.

Po Itovi lemi izrazimo dV_t:

$$dV_t=\Big[\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t;\sigma_h)+\frac{1}{2}\sigma_t^2S_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t;\sigma_h)\Big]dt+\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h)dS_t. \tag{55}$$

Če $\frac{\partial V}{\partial t}(S_t,t;\sigma_h)$ iz enačbe (55) izrazimo z Black-Scholesovo parcialno diferencialno enačbo (50), dobimo:

$$
(56) \qquad \begin{aligned} dV_t = (\sigma_t^2 - \sigma_h^2)\frac{S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t;\sigma_h)dt + r\Big[V(S_t,t;\sigma_h) - S_t\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h)\Big]dt+ \\ +\delta S_t\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h)dt + \frac{\partial}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h)dS_t. \end{aligned}
$$

Enačbi (54) in (56) izrazimo v enačbo spremembe kumulativnega izposojanja (53):

$$
(57) \qquad \begin{aligned} d\beta_t = d\Big[S_t\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h)\Big] - dV(S_t,t;\sigma_h) + r\beta_t dt+ \\ +r\Big[V(S_t,t;\sigma_h) - S_t\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h)\Big]dt + (\sigma_t^2 - \sigma_h^2)\frac{S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t;\sigma_h)dt. \end{aligned}
$$

Če enačbo (57) delimo z dt, dobimo diferencialno enačbo.

Rešimo dano diferencialno enačbo. Zapišimo jo v analitični obliki kot:

$$
\beta_t' = r\beta_t + F'(t) - rF(t) + G(t),
$$

kjer sta $F(t) = S_t\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h)$ in $G(t) = (\sigma_t^2 - \sigma_h^2)\frac{S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t;\sigma_h)$. Homogeni del je enak $\beta_t' = r\beta_t$, njegova rešitev pa je

$$
\beta_h = e^{rt}C.
$$

Partikularni del je enak $\beta_p = e^{rt}C(t)$, od koder z metodo variacije konstante izrazimo $C'(t) = e^{-rt}H(t)$, pri čemer je $H(t) = F'(t) - rF(t) + G(t)$. Izračunajmo $C(t)$: $C(t) = \int_0^t e^{-rs}H(s)ds = \int_0^t e^{-rs}F'(s)ds - r\int_0^t e^{-rs}F(s)ds + \int_0^t e^{-rs}G(s)ds =$ [prvi člen rešimo na način per partes, pri čemer vzamemo $u = e^{-rs}$ in $dv = F'(s)ds$] $= (e^{-rs}F(s))\big|_0^t + r\int_0^t e^{-rs}F(s)ds - r\int_0^t e^{-rs}F(s)ds + \int_0^t e^{-rs}G(s)ds = e^{-rt}F(t) - e^0F(0) + \int_0^t e^{-rs}G(s)ds$. Torej je partikularna rešitev enaka:

$$
\beta_p = F(t) - e^{rt}F(0) + e^{rt}\int_0^t e^{-rs}G(s)ds.
$$

Ko združimo homogeno in partikularno rešitev, dobimo končno rešitev naše diferencialne enačbe: $\beta_t = \beta_h + \beta_p$.

Rešili smo diferencialno enačbo, sedaj pa vanjo vstavimo $F(t) = S_t\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h)$ in $G(t) = (\sigma_t^2 - \sigma_h^2)\frac{S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t;\sigma_h)$. Tako dobimo enačbo kumulativnega izposojanja v času t:

$$
(58) \qquad \begin{aligned} \beta_t = \beta_0 e^{rt} + S_t\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h) - V(S_t,t;\sigma_h) - \\ -e^{rt}[S_0\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t;\sigma_h) - V(S_0,0;\sigma_h)] + e^{rt}\int_0^t e^{-rs}(\sigma_s^2 - \sigma_h^2)\frac{S_s^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t;\sigma_h)ds, \end{aligned}
$$

kjer smo za začetni pogoj diferencialne enačbe vzeli $C(0) = \beta_0$, da sta v času $t = 0$ leva in desna stran enačbe (58) enaki ($\beta_0 = \beta_0$).

V enačbi (58) se postavimo v trenutek zapadlosti T, upoštevajmo enačbo (51) in namesto β_0 uporabimo enačbo začetnega izposojanja (52). Tako je vrednost kumulativnega izposojanja v času zapadlosti T enaka:

$$\beta_T = [V(S_0,0;\sigma_h) - V(S_0,0;\sigma_i)]e^{rT} + S_T f'(S_T) - f(S_T) + \tag{59}$$
$$+ \int_0^T e^{r(T-t)}(\sigma_t^2 - \sigma_h^2)\frac{S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t;\sigma_h)dt.$$

Enačbi (54) in (51) implicirata, da je končno število delnic v zaščitnem portfelju enako:

$$N_T = f'(S_T), \tag{60}$$

kjer ima vsaka delnica vrednost S_T. Torej je končna vrednost dobička oz. izgub:

$$P\&L_T = N_T S_T - \beta_T - f(S_T) = \tag{61}$$
$$= [V(S_0,0;\sigma_i) - V(S_0,0;\sigma_h)]e^{rT} + \int_0^T e^{r(T-t)}(\sigma_h^2 - \sigma_t^2)\frac{S_t^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t;\sigma_h)dt.$$

Vidimo, da če je $\sigma_t = \sigma_h$ za vsak $t \in [0,T]$, potem je končna vrednost dobička oz. izgub iz enačbe (61) enaka $P\&L_T = [V(S_0,0;\sigma_i) - V(S_0,0;\sigma_h)]e^{rT}$. To pomeni, da če je dejanska volatilnost na trgu pri vsakem t enaka volatilnosti zaščitnega portfelja, je končen dobiček oz. izguba enak obrestovani razliki med začetnima cenama opcij glede na σ_i in σ_h. Ker je opcija konveksen finančni instrument in zanjo velja $f'' \geq 0$, je funkcija V naraščajoča v σ in bomo v primeru $\sigma_t = \sigma_h$ zaslužili, če na začetku prodamo opcijo po višji, za prihodnost pričakovani volatilnosti (σ_i), kot se nato dejansko zgodi (σ_t). Ker vemo, da velja $f'' \geq 0$, iz tega sledi tudi $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(S_t,t;\sigma_h) \geq 0$ za vsak $t \in [0,T]$. Torej, če je $\sigma_t > \sigma_h = \sigma_i$ za vse $t \in [0,T]$, iz enačbe (61) sledi, da je končen dobiček oz. izguba $P\&L_T \leq 0$, ne glede na gibanje σ_t. Obratno pa seveda velja, da če je $\sigma_t < \sigma_h = \sigma_i$ za vse $t \in [0,T]$, je $P\&L_T \geq 0$, ne glede na gibanje σ_t. Torej, če uspemo opcijo prodati po višji volatilnosti, kot se nato dejansko zgodi, imamo dobiček, če pa opcijo prodamo po nižji od prihodnje dejanske volatilnosti, naredimo izgubo.

Opomba 7.1. Izraz za prihodnost pričakovana volatilnost (angl. implied volatility) pomeni volatilnost, pri kateri iz Black-Scholesove parcialne diferencialne enačbe dobimo tržno vrednost opcije. To pomeni, da jo lahko izračunamo tako, da s trga vzamemo podatek o vrednosti opcije, ga vstavimo v Black-Scholesovo diferencialno enačbo in tako iz obratne smeri izračunamo volatilnost, ki nastopa v tej enačbi. Pogosto jo opisujemo kot tržno pričakovano volatilnost, ki bo veljala v času do opcijskega dospetja. Zavedati pa se moramo, da to ni nujno pravilna napoved bodoče dejanske volatilnosti, ker na ceno na trgu vplivata povpraševanje in ponudba.

V tem poglavju smo spoznali, da je ukvarjanje z modeliranjem volatilnosti zelo pomembno in težko. Eanko pa velja tudi za modeliranje obrestnih mer. Finančni matematiki tako veliko časa posvetijo tema problemoma, ki sta lahko odločilnega pomena, ali bomo s prodajo opcije ustvarili dobiček ali pa izgubo.

8. Zaključek

Odgovorili smo na nekaj pogostih vprašanj, ki se pojavljajo na področju vrednotenja izvedenih finančnih instrumentov. Najprej smo osvojili osnove v diskretnih modelih trga, nato pa še v zveznem času izpeljali slavno Black-Scholsovo parcialno diferencialno enačbo in preučili njene glavne sestavine. Čeprav izpeljava te enačbe velja za velik premik na področju finančne matematike, pa se moramo vseeno zavedati, da v sebi skriva veliko pomanjkljivosti. Zaradi takšnih nepredvidljivosti in neraziskanosti je to področje še posebej zanimivo. Seveda obstaja še veliko pogostih vprašanj, na katera poznamo le delne odgovore ali pa odgovorov sploh ne poznamo. Veliko matematikov se preusmerja v modeliranje financ in tako bo to področje v naslednjih letih še zelo napredovalo. Upam, da bodo odgovori na nekatera pogosta vprašanja pri vrednotenju opcij v pomoč pri razumevanju osnovnih konceptov vrednotenja derivativov in bodo mogoče sprožili nova vprašanja, kajti le na takšen način lahko napredujemo in najdemo nove, boljše modele, ki gotovo obstajajo, ampak jih še nismo odkrili.

Literatura

[1] P. Carr, *FAQ's in Option Pricing Theory*, verzija 2. 7. 2002, [ogled 11. 8. 2014], dostopno na `http://www.math.nyu.edu/research/carrp/papers/pdf/faq2.pdf`.

[2] S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance II*, Springer, New York, 2004.

[3] P. Wilmott, *Paul Wilmott Introduces Quantitative Finance*, John Wiley & Sons Ltd, London, 2007.

[4] A. Penati in G. Pennacchi, *The Cox-Ross-Rubinstein Option Pricing Model*, [ogled 12. 8. 2014], dostopno na `http://home.cerge-ei.cz/petrz/FM/f400n10.pdf`.

[5] R. Stockbridge, *The Discrete Binomial Model for Option Pricing*, verzija 14. 5. 2008, [ogled 12. 8. 2014], dostopno na `http://math.arizona.edu/~flaschka/Topmatter/527files/termpapers/Stockbridge.pdf`.