UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Nina Troha

Metoda Crank-Nicolson za vrednotenje opcij

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir

Ljubljana, 2014

Zahvala

Za strokovno vodenje in pomoč pri izdelavi dela diplomskega seminarja se zahvaljujem mentorju prof. dr. Tomažu Koširju. Posebej bi se mu rada zahvalila za čas in trud, ki ga je vložil zaradi otežene komunikacije, saj sem večino časa izdelave dela diplomskega seminarja preživela v tujini.

Iskreno bi se rada zahvalila mami in očetu, ki sta mi omogočila študij in mi nudila moralno podporo pri vseh izzivih, težkih trenutkih in se z mano veselila vseh uspehov. Posebna zahvala gre tudi bratu Mihu za mnogokateri bratski pa tudi strokovni nasvet tekom študija in mojim prijateljem ter sošolcem za pomoč in podporo. Hvala vam!

Kazalo

Metoda Crank-Nicolson za vrednotenje opcij

V delu diplomskega seminarja se bomo ukvarjali z določanjem premij evropskih opcij. Sprva bomo spoznali nekaj splošnih dejstev in zakonitosti o opcijah, ki jih bomo potrebovali za izračune v nadaljevanju. Nato bomo prešli na vrednotenje evropskih nakupnih in prodajnih opcij z Black-Scholesovim modelom, ki omogoča ekspliciten izračun opcijskih vrednosti tega tipa. Spoznali bomo osnove slučajnih procesov in Itovo lemo, ki je osrednje izhodišče za izpeljavo Black-Scholesove diferencialne enačbe, s katero potem izračunavamo opcijske premije. To enačbo bomo izpeljali, nato bomo definirali končne in robne pogoje za evropske opcije in ugotovili eksplicitno rešitev Black-Scholesove diferencialne enačbe za naš primer. Praktično bomo uporabili teoretične ugotovitve še za izračun implicirane volatilnost in naš model uporabili za izračune na dejanskih podatkih.

Opcijam v splošnem določamo vrednost prek reševanja parcialnih diferencialnih enačb in te največkrat niso eksplicitno rešljive. Naš primer je le izjema. V nadaljevanju bomo zato spoznali metode končnih razlik za numerično reševanje parcialnih diferencialnih enačb. V delu diplomskega seminarja bomo raziskali postopek numeričnega vrednotenja evropskih opcij s poudarkom na metodi Crank-Nicolson.

Crank-Nicolson Method for option pricing

In this Bachelor's seminar thesis we will be dealing with European option pricing. We will start with some general facts and claims about options, needed for further calculations, and then we will move to pricing of European call and put options with Black-Scholes model. It allows us to explicitly calculate prices of options of this type. We will learn the basics of stochastic processes and Ito's Lemma. It is the central starting point for derivation of Black-Scholes differential equation, with which we calculate the option premiums. We will derive this equation, then we will define final and boundary conditions for European options and determine the explicit solution of the Black-Scholes differential equation for our option type. Theoretical results will be used in practice for calculation of implicit volatility and our model for calculations based on real data.

We generally determine option prices through solving the partial differential equations. Since those are usually explicitly unsolvable, our example is just an exception. We will be dealing with finite difference methods for numerical solving of partial differential equations. The Bachelor's seminar thesis concludes with a discussion of numerical methods of European option pricing, emphasing Crank-Nicolson method.

Math. Subj. Class. (2010): 91G20, 91G60.

Ključne besede: evropske opcije, vrednotenje, Black-Scholesov model, metode končnih diferenc, metoda Crank-Nicolson

Keywords: European options, pricing, Black-Scholes model, finite difference methods, Crank-Nicolson method

1. Uvod

1.1. **Motivacija.** Opcije so danes eden izmed najpogosteje trgovanih izvedenih finančnih instrumentov. Z njimi se trguje tako na organiziranih trgih (borzah) kot tudi na prostih trgih. Za trgovanje z izvedenimi finančnimi instrumenti je ključnega pomena določanje njihovih vrednosti, saj je v nasprotnem primeru trgovanje z njimi brezpredmetno. V delu diplomskega seminarja se bomo ukvarjali z vrednotenjem evropskih nakupnih in prodajnih delniških opcij. Spoznali bomo Black-Scholesov model, ki je stopil v veljavo v začetku 70-ih let prejšnjega stoletja in povzročil, da so postale opcije v nekaj letih zelo pogosto trgovan finančni instrument, saj so tedaj znali opcijo natančno vrednotiti. Black-Scholesov model in njune predpostavke, proces izpeljave diferencialne enačbe za vrednotenje opcij in ugotavljanje pomanjkljivosti modela, so bazična znanja, ki jih moramo razumeti, če zelimo vrednotiti tudi zahtevnejše izvedene finančne instrumente, oz. v našem primeru, če želimo vrednotiti evropske opcije.

Ker pa pri vrednotenju opcij v praksi pogosto naletimo na problem, da parcialne diferencialne enačbe eksplicitno niso rešljive, želimo iskati približke rešitev numerično. Ene izmed numeričnih metod, s katerimi rešujemo takšne probleme, so metode končnih razlik, med njimi tudi metoda Crank-Nicolson. Te numerične metode so torej široko uporabne v praksi in pomembno je, da poznamo njihovo teoretično izhodišče, prednosti, pomanjkljivosti in druge lastnosti, kot je npr. stabilnost metod, saj lahko le tako z njihovo uporabo dobimo dobre numerične približke.

1.2. **Cilji.** V prvem delu diplomskega seminarja je naš cilj razumevanje Black-Scholesovega modela in izpeljave Black-Scholesove parcialne diferencialne enačbe (in vsega znanja, ki je za to izpeljavo potrebno) ter uporaba modela na dejanskih podatkih. Cilj drugega dela diplomskega seminarja pa je spoznavanje metod končnih razlik ter njihovih zakonitosti.

2. Opcije

Opcija je pogodbeno razmerje med kupcem in prodajalcem osnovnega premoženja, ki daje kupcu opcije v zameno za plačilo neke premije možnost, da se odloči, ali bo nakup oz. prodaja osnovnega premoženja izvedena ali ne. Pogodba natančno specificira kaj, kdaj, kje in za kakšno ceno bo dostavljeno, če se bo kupec opcije odločil, da opcijo izvrši. Določeno je torej, na kakšen osnovni finančni instrument oz. na kakšno osnovno premoženje je opcija vezana, datum izročitve, ročnost pogodbe in izvršilna cena. Kupca opcije imenujemo nosilec opcije in ta predstavlja dolgo stran. Prodajalec opcije pa je izdajatelj opcije in predstavlja kratko stran.

Opcija lahko daje nosilcu pravico do nakupa osnovnega premoženja. Takrat jo imenujemo nakupna opcija. če daje nosilcu pravico prodaje osnovnega premoženja, pa jo imenujemo prodajna opcija. Izvršitev opcije tj. odločitev, ali bo nosilec izvedel nakup oz. prodajo osnovnega premoženja, je torej njegova možnost, ne pa obveznost. Nasprotno je izdajatelj opcije dolžan spoštovati nosilčevo odločitev.

2.1. **Osnovni pojmi.**

2.1.1. *Ročnost.* Imenujemo jo tudi *zapadlost* in predstavlja obdobje, v katerem je opcija veljavna, oz. čas, v okviru katerega ima nosilec opcije še možnost, da se odloči za njeno izvršitev. Dejanski čas izvršitve je odvisen še od tipa opcije, ki je bila sklenjena.

2.1.2. *Izvršilna cena.* Izvršilna cena je tista, po kateri ima nosilec opcije možnost prodati osnovno premoženje.

2.1.3. *Tržna cena osnovnega premoženja.* Tržna cena osnovnega premoženja oz. instrumenta je tista, po kateri se ta osnovni instrument prodaja na trgu.

2.1.4. *Datum izročitve.* Je določen dan v prihodnosti, ko se poravna, kar je bilo v opcijski pogodbi določeno.

2.1.5. *Premija.* Premija je cena, ki jo bodoči nosilec opcije plača prodajalcu v zameno za pravico, ki mu jo opcija nudi. Plača jo vnaprej.

To je cena, ki jo bomo mi določali z Black-Scholesovim modelom oz. z numeričnim reševanjem diferencialnih enačb.

2.2. **Opcijski tipi.** Ločimo več vrst opcij, ki jih delimo glede na to, kdaj ima nosilec pravico do izvršitve.

2.2.1. *Evropske opcije.* Evropska opcija je najenostavnejša opcija, ki daje nosilcu pravico, da jo izvrši zgolj ob zapadlosti.

2.2.2. *Ameriške opcije.* Ameriška opcija daje nosilcu pravico, da jo izvrši v katerem koli trenutku od nakupa do zapadlosti opcije.

2.2.3. *Eksotični tipi opcij.* Poznamo tudi druge tipe opcij, ki jih skupno imenujemo eksotične opcije. Ene izmed najpogosteje uporabljenih eksotičnih opcij so npr. azijske opcije, katerih čas izvršitve je odvisen od gibanja cene osnovnega instrumeta. Poznamo tudi druge tipe, ki združujejo lastnosti osnovnih tipov opcij in se prilagajajo potrebam trga.

Opcije se lahko torej nanašajo na različne osnovne finančne instrumente, kot so delnice, terminske pogodbe itd., lahko pa se nanašajo tudi na blago. Na prostih trgih se pogosto trguje tudi z opcijami na obrestne mere in na devizne tečaje.

Mi se bomo posvetili opcijam, katerih vrednost je vezana na vrednost določene delnice, na kratko jih imenujemo delniške opcije.

2.3. **Trgovanje z opcijami.** Opcije so v družbi eden izmed najbolj poznanih finančnih instrumentov, kar je tudi razlog, da se z njimi veliko trguje tako na borzi, kot tudi na prostih trgih. Največkrat gre za trgovanje z delniškimi opcijami. Pomembno je poudariti, da se trgovanje z opcijami bistveno razlikuje od trgovanja z delnicami v lastništvu. Ob nakupu oz. prodaji delnice gre za takojšnjo zamenjavo lastništva podjetja, katerega delnica se je kupila oz. prodala. V nasprotju s tem pa se v primeru trgovanja z opcijami lastništvo prenese zgolj v primeru izvršitve opcije. Sam nakup oz. prodaja opcije kot finančnega inštrumenta na lastništvo nima vpliva.

2.4. **Izplačilo opcije.** Vpeljimo najprej nekaj oznak. Denimo, da opazujemo opcijo v času $t \in [0, T]$. Čas $t = 0$ predstavlja čas, ko je opcija izdana. Čas $t = T$ pa predstavlja čas zapadlosti. S_t naj bo tržna cena osnovnega premoženja v času t, K pa naj bo izvršilna cena opcije. V vsakem trenutku ima nosilec evropske opcije možnost, da opcijo proda, ali pa z njo ne naredi ničesar. Ob času zapadlosti jo lahko izvrši ali pa z njo ne naredi ničesar. Poglejmo si podrobneje primer evropske opcije. Vprašamo se, v kakšni situaciji jo bo nosilec izvršil. V primeru nakupne opcije se mu izvršitev splača, če je $S_T > K$. V primeru prodajne pa se mu izvršitev splača, če je $S_T < K$. Izplačilo ob zapadlosti je:

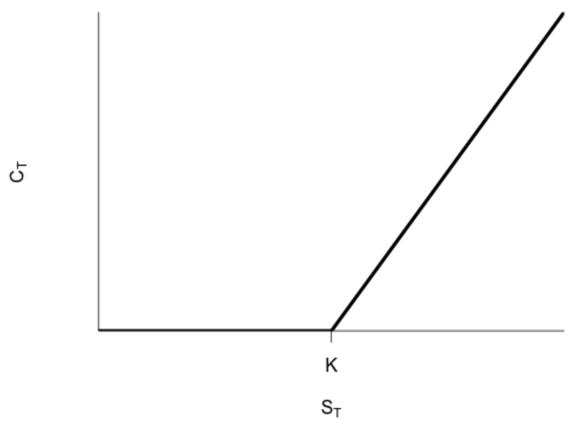
- za nakupno opcijo (angl. *call option*) $C_T = max\{S_T - K, 0\}$,
- za prodajno opcijo (angl. *put option*) $P_T = max\{0, K - S_T\}$.

Če ponazorimo izplačila opcije v odvisnosti od S_T pri konstantni izvršilni ceni K, dobimo grafa, prikazana na slikah 1 in 2.

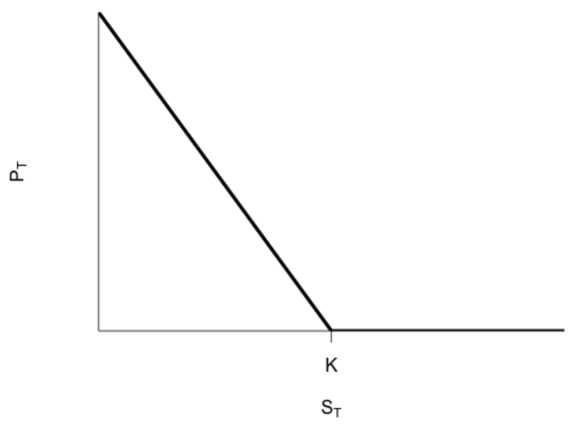
Opomba: Če želimo grafa za kratko nakupno oz. prodajno opcijo, graf dolgih samo preslikamo čez abscisno os.

Izplačilo opcije je torej vrednost, ki nosilca najbolj zanima. V vsakem trenutku lahko izračunamo, kakšno bi bilo izplačilo opcije, če bi bila cena na trgu ob zapadlosti takšna, kot jo predvidevamo.

V primeru, da je $C_t > 0$ (oz. $P_t > 0$), pravimo, da se *opcija splača* (angl. *option is in the money*). V primeru $S_t = K$ je *opcija na meji* (angl. *option is at the money*), v primeru $S_t < K$ za nakupno (oz. $S_t > K$ za prodajno) pa pravimo, da *se opcija ne splača* (angl. *option is out of the money*).



SLIKA 1. Dolga nakupna opcija



SLIKA 2. Dolga prodajna opcija

2.5. **Pariteta evropske nakupne in prodajne opcije.** C_t oziroma P_t imenujemo notranja vrednost opcije v času t. Naj bo c_t premija, ki jo moramo plačati za nakupno opcijo v času t, in p_t premija, ki jo moramo plačati za prodajno opcijo v času t.

Izrek 2.1. *Predpostavimo, da osnovno premoženje ne izplačuje dividend pred zapadlostjo opcije. Potem za vse $t \in [0, T]$ velja*

$$p_t + S_t = c_t + KD(t, T), \tag{1}$$

kjer je $D(t, T)$ diskontni faktor za obdobje od t do T.

Dokaz. Za dokaz enakosti (1) najdemo dva različna portfelja, oblikovana v času t, ki generirata enak denarni tok v času T. Prvi portfelj sestoji iz ene enote osnovnega premoženja in ene evropske prodajne opcije na to osnovno premoženje. Drugi portfelj pa sestoji iz nakupne evropske opcije in denarne vloge v znesku $KD(t, T)$.

Izplačilo obeh portfeljev v času T je enako $max(S_T, K)$, zato mora biti njuna cena v času t enaka, torej velja $p_t + S_t = c_t + KD(t, T)$.

□

2.6. **Vplivi na ceno delniške opcije.** Vprašanje, ki se zastavlja pri izdaji opcije je kolikšna naj bo pravična cena oz. premija, ki naj jo kupec opcije plača ob sklenitvi pogodbe. Omejimo se na evropske opcije.

Intuitivno nam je jasno, da mora premija odražati več dejavnikov. Pomembna so pričakovanja, ki so vezana na gibanje cene delnice, na katero je opcija napisana, pa tudi pričakovanja o trgu samem. Dejavniki, ki jih premija (evropske) opcije odraža, so naslednji:

(1) tržna cena delnice ob času zapadlosti (S_T),
(2) izvršilna cena (K),
(3) čas zapadlosti opcije (T),
(4) pričakovana volatilnost cene delnice,
(5) netvegana obrestna mera,
(6) morebitne dividende (njihova vrednost in čas izplačila).

2.6.1. *Tržna cena delnice ob času zapadlosti.* Tržna cena delnice na dan izvršitve opcije je dejavnik, ki odloča, kakšno izplačilo bo prejel nosilec opcije. Višina tržne cene delnice in premija nakupne opcije, napisane na to delnico, sta pozitivno korelirani. Premija prodajne opcije se v odvisnosti od S_T giblje ravno nasprotno od premije nakupne opcije. Povedano drugače, premija prodajne opcije in višina tržne cene delnice sta negativno korelirani.

2.6.2. *Izvršilna cena opcije.* Ob sklenitvi pogodbe med kupcem in prodajalcem opcije je določena fiksna izvršilna cena K. V primeru nakupne opcije bo premija nižja, če bo izvršilna cena višja. Jasno, ker je verjetnost, da bo S_T presegla K, v tem primeru manjša, torej je manjša verjetnost, da bo nosilec opcije prejel izplačilo. Poleg tega bo vrednost izplačila pri višji izvršilni ceni nižja. Obratno velja za premijo prodajne opcije.

2.6.3. *Čas zapadlosti opcije.* Čas zapadlosti opcije imenujemo tudi čas dospetja opcije ali ročnost. Tako nakupna kot prodajna opcija imata v primeru daljšega časa zapadlosti višjo premijo. Opozoriti pa je potrebno, da imajo pri tem delu pomembno vlogo tudi dividende. Trditev o višanju premije s časom zapadlosti velja ob predpostavki, da delnica ne izplačuje dividend. V splošnem primeru pa ni nujno, da bo vselej veljalo, da bo opcija z daljšim časom dospetja vredna več ali enako kot opcija s krajšim časom dospetja. Če opazujemo primer, ko delnica izplačuje dividende, je lahko cena opcije s krajšo zapadlostjo (če npr. zapade pred izplačilom dividend) višja od tiste z daljšo zapadlostjo. Ne smemo namreč pozabiti, da si vse do dospelosti opcije prodajalec še vedno lasti delnico, na katero je opcija napisana. Torej je on upravičen do dividend, če jih delnica izplača.

2.6.4. *Volatilnost cene delnice.* Volatilnost cene delnice v praksi povezujemo s tveganjem in jo ponavadi merimo statistično s standardnim odklonom (σ) oz. z varianco (σ^2). Gre za mero, ki opisuje negotovost gibanja cene delnice v prihodnosti. Je kritična spremenljivka in ni neposredno izmerljiva. V primeru večje volatilnosti ima nosilec opcije več možnosti za dobiček, a prav tako tudi več možnosti za izgubo.

Imetnik nakupne opcije pridobi, če tržna cena delnice zraste. Na drugi ima omejeno izgubo, saj lahko v primeru padca cene delnice izgubi največ vplačano premijo. Imetnik prodajne opcije pa podobno pridobi v primeru padca cen in ima omejeno izgubo v primeru rasti cene delnice. Nestanovitnost cene delnice torej tudi vpliva na ceno opcije. Če je volatilnost velika, bo cena delnice večkrat prečkala izvršilno ceno. Premije nakupnih in prodajnih opcij z naraščajočo nestanovitnostjo naraščajo.

2.6.5. *Netvegana obrestna mera.* Netvegana obrestna mera vpliva na ceno opcije z dvema učinkoma. Prvi je spreminjanje pričakovanega donosa na investicijo, ki se ob rasti netvegane obrestne mere poveča, drugi pa je sedanja vrednost denarnega toka, ki se ob rasti netvegane obrestne mere zmanjša. Skupen efekt je večja vrednost nakupnih opcij in manjša vrednost prodajnih opcij, če pri tem predpostavljamo, da so vse ostale spremenljivke konstantne. V realnosti lahko dvig obrestne mere povzroči padec cen delnice. Skupni učinek, če torej upoštevamo dvig obrestne mere in zraven še spremembo cene delnice, lahko v praksi pomeni tudi znižanje premije nakupne opcije ali povišanje premije prodajne opcije.

2.6.6. *Pričakovane dividende.* Načeloma velja, da je vrednost nakupne opcije negativno korelirana z velikostjo pričakovanih dividend, vrednost prodajne pa ravno obratno. Mi bomo pri določanju vrednosti evropskih opcij predpostavljali, da dividend ni.

3. Vrednotenje opcij: Black - Scholesov model

Pri trgovanju z opcijami bo prišlo do sklenitve pogodbe, če je postavljena cena pravična. To pomeni, da sta investitor in izdajatelj opcije oba prepričana, da ne bosta oškodovana. Premijo opcije določamo s pomočjo različnih modelov, razlag in teorij. V zadnjem času se uporabljajo ekonometrični, verjetnostni in računalniški modeli vrednotenja, pred časom pa so se uporabljale še precej bolj približne tehnike vrednotenja, ki se imenujejo relativne metode. Dajale so zelo približne ali celo nepravilne rezultate, danes pa večinoma služijo le kot opora natančnejšim, novejšim modelom. Z modeli skušamo opisati realno situacijo na trgu tako, da bodo odstopanja opazovanih spremenljivk v primerjavi z realnostjo čim manjša, še vedno pa model in izračuni ne bodo preveč kompleksni. Pri tem se jasno pojavljajo odstopanja. V nadaljevanju bomo npr. predpostavili, da je pričakovana stopnja donosa delnice normalno porazdeljena, kar pa v realnosti ni nujno res. Najbolj široko uporabljena modela za določanje vrednosti opcij sta Black-Scholesov model in binomski model Cox-Ross-Rubinstein. Modela prinašata približno enake rezultate, variacije v ceni so majhne in odsevajo zgolj natančnost obravnave problema. Mi se bomo ukvarjali le z Black-Scholesovim modelom.

3.1. **Uvod v Black-Scholesov model in predpostavke.** Leta 1973 sta Fischer Black in Myron Scholes predstavila model, ki je predstavljal revolucijo na področju določanja opcijskih premij. Danes ga imenujemo Black-Scholesov model, včasih pa tudi Black-Scholes-Mertonov model, saj je pri razvoju sodeloval tudi Robert Merton. Model temelji na ščitenju oz. na popolni odpravi tveganja. Če namreč investitor vzpostavi portfelj delnice in opcije, ki je nanjo napisana, dobi popolnoma soodvisen nerizični portfelj. Black-Scholesove predpostavke:

- model je izpeljan za evropsko različico opcije,
- kratkoročna obrestna mera je znana, konstantna in netvegana,
- obresti se pripisujejo zvezno,
- standardni odklon donosa delnice je konstanten,
- nestanovitnost delnice je konstantna,
- tržna cena delnice je modelirana z lognormalno porazdelitvijo,
- pričakovana stopnja donosa delnice je modelirana z normalno porazdelitvijo,
- dividend in drugih morebitnih ugodnosti ni,
- ni transakcijskih stroškov, provizij, davkov,
- v primeru obstoja davčnih dajatev so te enake za vse transakcije in vse tržne udeležence,
- ni arbitraže,
- trgovanje z delnicami je stalno,
- investitorji si lahko izposodijo denar ali pa ga posodijo - oboje po enaki netvegani kratkoročni obrestni meri, ki je znana.

3.2. **Osnove slučajnih procesov.**

Definicija 3.1. *Slučajni proces* $X = (X_t, t \in \mathbb{T})$ je družina slučajnih vektorjev z realnimi komponentami oz. v posebnem primeru družina realnih slučajnih spremenljivk, definiranih na verjetnostnem prostoru $(\Omega, F, \mathbb{P})$:

$$X : (\Omega \times \mathbb{T}) \to \mathbb{R}^n,$$
$$(\omega, t) \to X_t(\omega).$$

Indeksna množica $\mathbb{T}$ je ponavadi podmnožica $\mathbb{R}$ in jo interpretiramo kot časovno množico.

Diskretni slučajni procesi: $\mathbb{T} = \mathbb{N}, \mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ...
Zvezi slučajni procesi: $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{T} = \mathbb{R}^+$ ...

V diskretnem slučajnem procesu se lahko vrednost spremenljivke spremeni le na točno določene fiksne datume oz. čase, v zveznem slučajnem procesu pa ob kateremkoli času.

Tudi cena delnic oz. cena njihovih derivatov se s časom naključno spreminja. Pristop opazovanja finančnih trgov je osnovan na ideji, da se razvoji trga dogajajo počasi. To pomeni, da se evolucija zgodi dovolj počasi, da je opazovanje bližnjih preteklih dogodkov uporabno za napovedovanje bližnjih prihodnjih dogodkov. Preučevanje dinamike finančnih trgov je ključnega pomena pri izdelavi modelov za vrednotenje cen izvedenih finančnih inštrumentov.

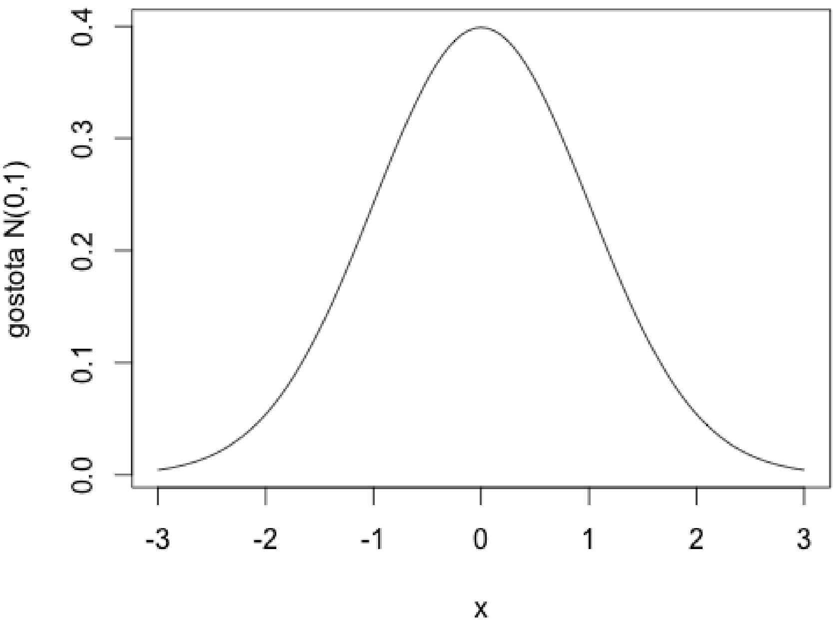
3.2.1. *Markovski procesi.* Pri opazovanju cen delnic opazimo, da se njihova vrednost v času naključno spreminja, torej je to gibanje slučajni proces. Za delnice bomo predpostavili, da sledijo procesu Markova, ki je poseben tip slučajnega procesa. Zanj velja, da je zgolj trenutna vrednost spremenljivke pomembna za napoved prihodnjih vrednosti. V trenutni ceni delnice, ki je edina relevantna, so torej zajete vse pretekle informacije o vrednosti delnice. Če je npr. cena delnice nekega podjetja danes 100$ in predpostavljamo, da delnica sledi markovskemu procesu, bo naša napoved za ceno neodvisna od cene delnice pred enim tednom, enim mesecem. Edina relevantna informacija je današnja cena. Napoved za prihodnost je negotova in jo izražamo s pomočjo verjetnostnih porazdelitev. Predpostavka, da zadnja cena vsebuje vse informacije o delnici in je edina relevantna za napoved prihodnosti, se zdi smiselna, saj bi v nasprotnem primeru veljalo, da lahko z upoštevanjem daljše zgodovine analitiki dosegajo nadpovprečne donose. Malo je primerov, ko bi se v praksi to potrdilo.

3.2.2. *Osnovni Wienerjev proces.*

Definicija 3.2. *Osnovni Wienerjev proces* je markovski proces z upanjem 0 in varianco 1. Diskretno ga zapišemo kot $\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t}$, kjer je Δz naključni prirastek spremenljivke z, Δt časovni korak, ε pa slučajna spremenljivka, porazdeljena standardno normalno.

Na sliki 3 je prikazana standardna normalna porazdelitev.

Primer 3.3. Imejmo osnovni Wienerjev proces, torej markovski proces z upanjem 0 in varianco 1. To pomeni, da se bo npr. v letu dni trenutna vrednost neke opazovane delnice spreminjala kot $\phi(0, 1)$, kjer $\phi(m, v)$ predstavlja normalno verjetnostno



SLIKA 3. Gostota normalne porazdelitve z upanjem 0 in varianco 1

porazdelitev s povprečjem m in varianco v. Zanima nas, kako se spreminja vrednost opazovane delnice v dveh letih. Ker je proces Markovski, sta porazdelitvi v prvem in drugem letu neodvisni. Če seštevamo dve neodvisni normalno porazdeljeni slučajni spremenljivki, je rezultat normalno porazdeljeno slučajna spremenljivka, katere upanje je vsota prejšnjih dveh, varianca pa je vsota varianc. Dobimo torej slučajno spremenljivko, porazdeljeno $\phi(0, 2)$. Upanje je torej še vedno 0, standardni odklon pa $\sqrt{2}$. Če bi opazovali obdobje šestih mesecev, bi bil standardni odklon $\sqrt{0.5}$, upanje pa še vedno 0.
Pomembna lastnost Wienerjevega procesa je torej, da sta Δz za katerakoli različna majhna intervala, Δt, neodvisna.

3.2.3. *Posplošeni Wienerjev proces.*

Definicija 3.4. *Posplošeni Wienerjev proces za spremenljivko x* definiramo z:

$$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z, \tag{2}$$
$$b\Delta z = b\varepsilon\sqrt{\Delta t},$$

kjer sta a in b konstanti.

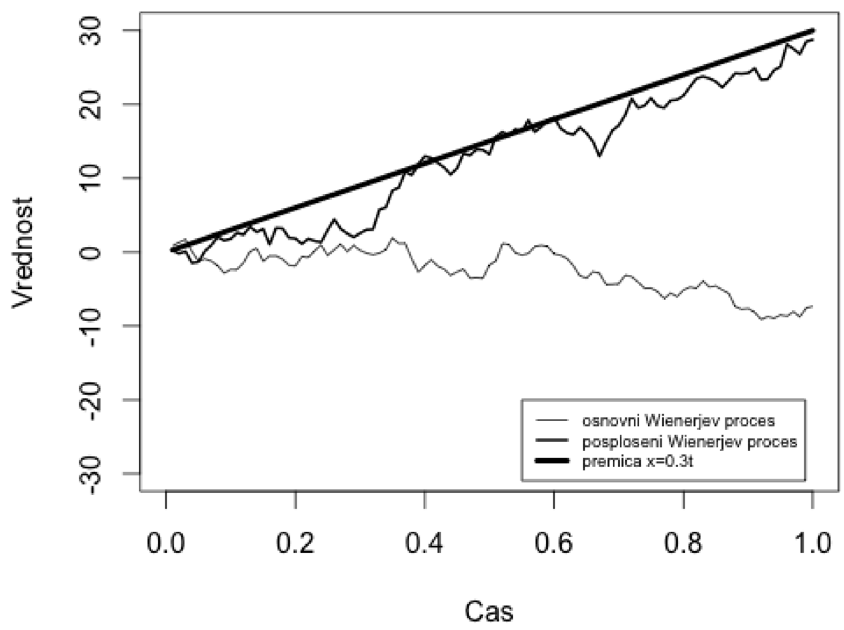
Izraz $a\Delta t$ predstavlja, da ima x pričakovano stopnjo rasti a na časovno enoto. Izraz $b\Delta z$ je dodan šum ali variabilnost spremenljivke x, kjer je Δz osnovni Wienerjev proces.

Tako je Δx porazdeljen normalno z upanjem $a\Delta t$ in varianco $b^2\Delta t$.

Primer 3.5. Denimo, da je $a = 0.3, b = 1, \Delta t = 0.01$. Želimo simulirati Wienerjev proces (npr. v programskem jeziku R). Primer kode:

```
x <- c(1:100) / 100
y <- rnorm (100, 0, 1)
y <- cumsum(y)
u <- c(1:100) / 100
v <- rnorm(100, 0.3, 1)
v <- cumsum(v)
a <- c(1:100) / 100
b <- 0.3 * c(1:100)
plot(x, y, type="l", xlab="Cas", ylab="Vrednost", xlim=c(0,1),
ylim=c(-30,30))
lines(u, v, lwd="2")
lines(a, b, lwd="4")
legend(0.55, -20, c("osnovni Wienerjev proces", "posploseni
Wienerjev proces", "premica x=0.3t"), lwd = c(1,2,4), cex = 0.6)
```

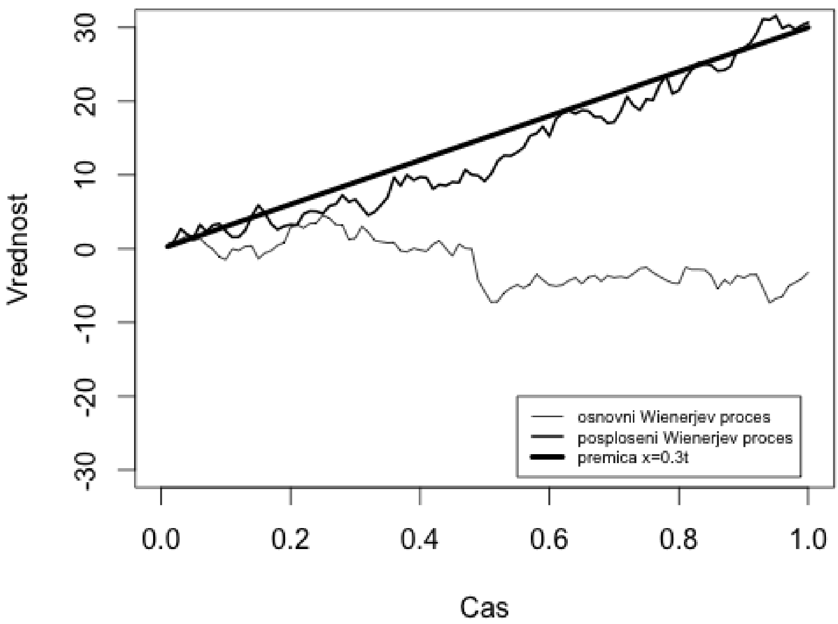
Dobimo simulacije Wienerjevega procesa, prikazane na slikah 4 in 5.



SLIKA 4. Simulacija 1

3.2.4. *Itov proces.* Itov proces je razširitev posplošenega Wienerjevega procesa. V Itovem procesu privzamemo, da a in b nista konstantni, pač pa odvisni od x in t:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz. \tag{3}$$



Slika 5. Simulacija 2

To pomeni, da privzamemo, da se bosta stopnja rasti in varianca v Itovem procesu spreminjali. Če na proces pogledamo kot na diskretnega, se bo v časovnem intervalu med t in $t + \Delta t$ vrednost spremenljivke spremenila iz x na $x + \Delta x$, kjer je

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}.$$

Pri tem pa smo privzeli, da sta v majhnem časovnem intervalu med t in $t + \Delta t$ rast in varianca kostantni, tj. enaki $a(x,t)$ in $b(x,t)^2$.

3.3. **Simulacija gibanja tečajnic.** Najprej bomo privzeli, da gibanje tečajnice sledi posplošenemu Wienerjevemu procesu. To pomeni, da ima konstantno rast in varianco, kar v resnici seveda ni res. Zavedajmo se, da je predpostavka napačna, a zadosti dobra za izpeljavo nekaj prvih korakov.

Naj bo S cena delnice v času t. Potem je pričakovana stopnja rasti μS za nek konstanten parameter μ. Ta predstavlja pričakovano stopnjo donosa delnice, izraženo v decimalni obliki. To pomeni, da je pričakovani prirastek k S v kratkem časovnem intervalu Δt enak $\mu S \Delta t$. Če je nestanovitnost cene delnice vedno nič, potem je naš model kar:

$$\Delta S = \mu S \Delta t. \tag{4}$$

Če pošljemo Δt proti 0, zapišemo enačbo (4) kot:

$$dS = \mu S dt$$

ali kot

$$\frac{dS}{S} = \mu dt.$$

Integral po času med 0 in T nam da

$$S_T = S_0 e^{\mu T},$$

kjer sta S_0 in S_T ceni delnice ob času 0 in T.

Prilagodimo zdaj model (4) in mu dodajmo nestanovitnost. Pri tem predpostavimo, da je variabilnost odstotnega donosa v kratkem časovnem obdobju enaka, ne glede na ceno delnice.
Standardni odklon spremembe v kratkem časovnem obdobju je sorazmeren s ceno delnice. Model (4) se spremeni v:

$$\frac{\Delta S}{S} = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t}. \tag{5}$$

Enačbo (5) bomo vzeli za model obnašanja tečajnic za delnice. μ je pričakovana stopnja donosa, σ pa predstavlja nestanovitnost cene. Leva stran predstavlja donos delnice v kratkem časovnem intervalu Δt. Vidimo, da je donos normalno porazdeljen z matematičnim upanjem $\mu \Delta t$ in standardnim odklonom $\sigma \sqrt{\Delta t}$

$$\frac{\Delta S}{S} \sim \phi(\mu \Delta t, \sigma \sqrt{\Delta t}).$$

Model je znan kot geometrijsko Brownovo gibanje.

3.4. **Itova lema.** Cena opcije, napisane na delnico, je funkcija cene delnice in časa. Posplošeno lahko rečemo, da je cena kateregakoli izvedenega finančnega inštrumenta funkcija neke slučajne spremenljivke (tj. vrednosti osnovnega inštrumenta) in časa. Za izpeljavo Black-Scholesove enačbe je pomembno, da poznamo nekaj dejstev o obnašanju funkcij, ki kot argument vzamejo slučajno spremenljivko. Pomemben rezultat preučevanja tovrstnih funkcij je t.i. Itova lema.

Lema 3.6. *Predpostavimo, da vrednost slučajne spremenljivke sledi Itovemu procesu* (3)*:*

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz.$$

Tu je dz Wienerjev proces, a in b pa funkciji, odvisni od x in t. Spremenljivka ima torej rast a in varianco b^2. Zvezna in dvakrat odvedljiva skalarna funkcija $G(x,t)$ sledi procesu

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz,$$

kjer je dz Wienerjev proces. Torej G sledi Itovemu procesu s stopnjo rasti $(\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)$ *in varianco* $\frac{\partial G}{\partial x}b$.

3.4.1. *Izpeljava Itove leme.* Imejmo zvezno in odvedljivo funkcijo G spremenljivke x. Če predstavlja Δx majhno spremembo x in je ΔG sprememba G, ki jo povzroči Δx, vemo, da je

$$\Delta G \approx \frac{dG}{dx}\Delta x \tag{6}$$

Napaka, ki smo jo pri tej aproksimaciji zagrešili, je reda Δx^2. Točen zapis ΔG s Taylorjevim razvojem (v primeru neskončnokrat odvedljive funkcije) bi bil:

$$\Delta G = \frac{dG}{dx}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 G}{\partial x^3}\Delta x^3 + ...$$

Imejmo zvezno in odvedljivo funkcijo G spremenljivk x in y. Spet naredimo podobno aproksimacijo kot pri (6) in dobimo:

$$\Delta G \approx \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y,$$

za Taylorjev razvoj pa dobimo

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial y}\Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial y^2}\Delta y^2 + ... \tag{7}$$

Ko pošljemo Δx in Δy proti 0, se enačba (7) pretvori v:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy. \tag{8}$$

Zdaj pa privzemimo, da x sledi Itovemu procesu (3):

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz.$$

G je še vedno funkcija spremenljivk x in t. Velja:

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + ... \tag{9}$$

Opazovani proces lahko zapišemo tudi kot

$$\Delta x = a(x,t)\Delta t + b(x,t)\varepsilon\sqrt{\Delta t}.$$

Včasih izpuščamo argumente in pišemo:

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}. \tag{10}$$

Zadnja enačba (10) pa kaže pomembno razliko med enačbama (9) in (7). Na prehodu iz (7) v (8) smo zanemarili člene Δx^2 in višje. V enačbi (10) pa imamo pri členu $\Delta x^2 = b^2\varepsilon^2\Delta t + \textit{višje potence}\ \Delta t$. To pa pomeni, da v enačbi (8) člena Δx^2 ne bi smeli zanemariti.

Varianca standardne normalne porazdelitve je 1, kar pomeni:

$$E(\varepsilon^2) - (E(\varepsilon))^2 = 1,$$

če z E označimo upanje. Ker je $E(\varepsilon) = 0$, je $E(\varepsilon^2) = 1$.

Pričakovana vrednost $\varepsilon^2\Delta t$ je torej Δt, varianca pa je reda Δt^2. Zato bomo vzeli $\varepsilon^2\Delta t$ kot neslučajno spremenljivko, ki je enaka svoji pričakovani vrednosti, ko gre Δt proti 0.

V tem primeru dobimo iz (10), da je Δx^2 neslučajna spremenljivka, enaka $b^2 dt$.

Če ob upoštevanju zadnjega rezultata pošljemo Δx in Δt proti 0, dobimo:

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2 dt. \tag{11}$$

To je Itova lema. Če upoštevamo še enačbo (3), se (11) spremeni v

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial x}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b^2)dt + \frac{\partial G}{\partial x}bdz.$$

3.4.2. *Uporaba Itove leme.* Imejmo spet proces $dS = \mu S dt + \sigma S dz$. Po Itovi lemi za G, funkcijo spremenljivk S in t, velja:

$$dG = (\frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz. \tag{12}$$

Pomembno je poudariti, da tako na S kot tudi na G vpliva enak izvor negotovosti-osnovni finančni instrument.

Primer 3.7. Itova lema in terminska pogodba
Za ilustracijo Itove leme poglejmo terminsko pogodbo, napisano na delnico, ki ne izplačuje dividend. Predpostavimo, da obstaja neka netvegana obrestna mera r, ki je enaka za vse zapadlosti. Torej velja

$$F_0 = S_0 e^{rT},$$

kjer je F_0 izvršilna cena, določena ob času 0, S_0 trenutna cena delnice v času 0, T pa čas do zapadlosti terminske pogodbe.

Želimo izvedeti, kaj se dogaja z izvršilno ceno, ko čas teče. Če definiramo F kot izvršilno ceno pogodbe v času t, S pa vrednost delnice v času t, kjer $t < T$, dobimo naslednjo enačbo:

$$F = Se^{T-t}. \tag{13}$$

Če privzamemo, da S sledi procesu $dS = \mu S dt + \sigma S dz$, lahko uporabimo Itovo lemo za opis procesa gibanja F v času.

Z odvajanjem enačbe (13) dobimo:

$$\frac{\partial F}{\partial S} = e^{r(T-t)},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -rSe^{r(T-t)}.$$

Iz enačbe (12) dobimo proces, ki opisuje gibanje vrednosti F:

$$dF = (e^{r(T-t)}\mu S - rSe^{r(T-t)})dt + e^{r(T-t)}\sigma S dz. \tag{14}$$

Če v (14) upoštevamo še (13), dobimo

$$dF = (\mu - r)F dt + \sigma F dz.$$

F torej sledi Brownovemu gibanju s pričakovano konstantno rastjo $(\mu - r)$.

3.5. **Izpeljava Black - Scholesove diferencialne enačbe.** Predpostavke modela smo spoznali že v podpoglavju *Uvod v Black-Scholesov model in predpostavke*. Na tem mestu jih bolje razumemo. Ponovno omenimo zgolj to, da je model izpeljan za evropsko različico opcije in da cena delnice sledi geometrijskemu Brownovemu gibanju s konstantno stopnjo rasti donosa delnice. Naj bo S vrednost delnice in naj sledi slučajnemu procesu

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz. \tag{15}$$

Naj bo C cena nakupne opcije. Ta je odvisna od S in t. Spet uporabimo Itovo lemo in dobimo:

$$dC = (\frac{\partial C}{\partial S}\mu S + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt + \frac{\partial C}{\partial S}\sigma S dz. \tag{16}$$

V enačbi je izraz dz slučajen. Že v uvodu smo povedali, da Black-Scholesov model temelji na ščitenju oz. na popolni odpravi tveganja. Ideja je v tem, da s pomočjo delnice in opcije skonstruiramo portfelj, ki bo eliminiral slučajni izraz dz v diferencialni enačbi, saj bomo potem vedeli, kako se portfelj obnaša.

Denimo, da imamo portfelj (angl. *delta hedge portfolio*), sestavljen iz kratke pozicije v neki opciji (na tem mestu ni pomembno ali je nakupna ali prodajna, a za lažjo predstavo lahko privzamemo, da je nakupna) in dolge pozicije $\frac{\partial C}{\partial S}$ delnic.

Vrednost portfelja je torej

$$\Pi = -C + \frac{\partial C}{\partial S} S. \tag{17}$$

Trenutni profit ali izgubo $d\Pi$ (spremembo vrednosti portfelja) lahko zapišemo kot

$$d\Pi = -dC + \frac{\partial C}{\partial S} dS. \tag{18}$$

Če v enačbo (18) vstavimo enačbi (15) in (16), dobimo

$$d\Pi = (-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt. \tag{19}$$

Odstranili smo torej tveganje iz začetne enačbe.

Na tem mestu vpeljimo r, netvegano stopnjo donosa. Skličimo se na koncept neobstoja arbitraže in ponudbe ter povpraševanja pri predpostavki, da nimamo transakcijskih stroškov. Investirana količina Π v nek netvegani vrednostni papir bi pomenila donos $r\Pi dt$ v času dt.

Če bi bila desna stran enačbe (19) večja od te vrednosti, bi bilo mogoče ustvariti arbitražo z naslednjo strategijo: izposodili bi si Π enot in jih investirali v portfelj. Profit te netvegane strategije bi bil večji kot strošek izposoje.

Po drugi strani pa, če bi bila desna stran enačbe (19) manjša od vrednosti $r\Pi dt$, bi ustvarili arbitražo s kratko pozicijo v portfelju in z investicijo Π enot v banko.

V obeh primerih bi torej lahko skonstuirali neriziční portfelj, ki bi prinašal profit (brez vsakršnih stroškov). Zaradi predpostavke, da v našem modelu arbitraže ni, mora torej veljati, da je

$$r\Pi dt = (-\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2)dt \tag{20}$$

oz.

$$d\Pi = r\Pi dt.$$

Z upoštevanjem enačb (17) in (20), dobimo:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + rS\frac{\partial C}{\partial S} = rC. \tag{21}$$

To je Black-Scholesova diferencialna enačba. Kako jo rešujemo, bomo obravnavali v nadaljevanju.

Poudarimo dejstvo, da mora pod omenjenimi predpostavkami vsak izvedeni finančni instrument, čigar cena je odvisna zgolj od trenutne vrednosti S in od časa t ter zanj velja, da je plačan vnaprej, zadoščati Black-Scholesovi enačbi (oz. varianti, ki vključuje še dividende). Nekatere na videz komplicirane probleme vrednotenj opcij, npr. za nekatere eksotične opcije, lahko, če nanje pogledamo na ta način, rešujemo preprosto. Kadar pa imajo določene opcije (npr. ameriške) vrednosti, ki so odvisne od zgodovine cen osnovnega premoženja in tudi od trenutne vrednosti, se moramo problema lotiti drugače.

Opazimo še, da Black-Scholesova enačba ni odvisna od parametra μ, torej je neodvisna od rasti. Je pa odvisna od volatilnosti σ.

3.6. **Končni in robni pogoji.** Če želimo, da bo imela Black-Scholesova diferencialna enačba enolično rešitev, kar je za preprečevanje arbitraže nujno, moramo specificirati začetne in robne pogoje. Omejimo se na evropsko nakupno opcijo, katere vrednost označujemo s $C(S,t)$, K je izvršilna cena, T pa ročnost.

Za evropsko opcijo smo že na začetku ugotovili, da mora pri $t = T$ veljati

$$C(S,T) = max(S - K, 0).$$

To je končni pogoj za našo parcialno diferencialno enačbo.

Robne pogoje postavimo pri $S = 0$ in $S \to \infty$. Iz enačbe (5) vidimo, da je v primeru, ko je $S = 0$ tudi $dS = 0$ (oz. $\Delta S = 0$) in se torej S ne spreminja. To je edini deterministični primer slučajne diferencialne enačbe. Če je ob zapadlosti $S = 0$, potem je tudi plačilo enako 0. Zato je nakupna opcija brez vrednosti pri $S = 0$ ne glede na to, kako oddaljen je čas zapadlosti. Torej dobimo pogoj

$$C(0,t) = 0.$$

Če vrednost osnovnega premoženja naraste čez vse meje, je vse večja verjetnost, da bo opcija izvršena in višina izvršilne cene K je vse manj pomembna. Zato velja, da se s $S \to \infty$ cena opcije približuje S. Torej, ko $S \to \infty$, je

$$C(S,t) \sim S.$$

Za evropsko nakupno opcijo pa imamo pogoje

$$P(S,T) = max(K - S, 0),$$

Kot pri nakupni opciji velja, da če je $S = 0$, potem S ostane nič. V tem primeru bo končno izplačilo kar K. Za določitev $P(0,t)$ moramo preprosto izračunati sedanjo vrednost za K, ki ga prejmemo v času T. Če imamo konstantno obrestno mero r, dobimo za $S = 0$ robni pogoj

$$P(0,t) = Ke^{-r(T-t)}$$

oz. bolj splošno

$$P(0,t) = Ke^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}.$$

Ko gre $S \to \infty$, je vse manj verjetno, da bo opcija izvršena in torej gre s $S \to \infty$

$$P(S,t) \to 0.$$

3.7. **Eksplicitna rešitev Black-Scholesove parcialne diferencialne enačbe.** Za evropsko (nakupno ali prodajno) opcijo, ki ne izplačuje dividend, se da rešitev Black-Scholesove diferencialne enačbe (21) eksplicitno izračunati. To sta storila Black in Scholes v svojem modelu.

Imejmo časovni interval $[0,T]$ in razdelimo ga na N enakih podintervalov ter predpostavimo, da je trgovanje možno le ob časih $0, \frac{T}{N}, \frac{2T}{N}, ..., \frac{(N-1)T}{N}, T$.

Želimo torej izračunati vrednost nakupne evropske opcije, ki zadošča parcialni diferencialni Black-Scholesovi enačbi (21) in zraven še izpolnjuje zgoraj navedene začetne in robne pogoje.

Izrek 3.8. *Cena evropske prodajne opcije je v limiti $N \to \infty$ enaka*

$$C(S,t) = SN(d_1) - KN(d_2)e^{-r(T-t)},$$

kjer sta $N(d_1)$ in $N(d_2)$ vrednosti, ki podajata verjetnosti, da spremenljivki d_1 in d_2 pri normalni porazdelitvi zavzameta vrednost med $-\infty$ in d_1 oz. d_2:

$$N(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

$$N(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Spremenljivki d_1 in d_2 pa sta enaki

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}(\ln\frac{S}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)),$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}(\ln\frac{S}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)) = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Velja tudi enakost

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Vrednost evropske prodajne opcije (upoštevajoč začetne in robne pogoje zanjo) $P(S,t)$ je torej

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1),$$

kar sledi iz paritete evropske nakupne in prodajne opcije (1).

Znane količine so trenutna cena delnice S, izvršilna cena opcije K in čas do zapadlosti T. Netvegano obrestno mero r je možno oceniti, varianco σ^2 pa se izračuna iz pretekle spremenljivosti cene delnice oziroma njene donosnosti ali na podlagi trenutne tržne cene opcije (vgrajena nestanovitnost).

Preko primerjav med izračunanimi vrednostmi opcij in cenami opcij na trgu tudi ugotavljamo, katere opcije so precenjene in katere podcenjene.

3.8. **Slabosti Black-Scholesovega modela.** V modelu, ki smo ga opisali, moramo za potrebo vrednotenja opcije poznati veliko količin. Predpostavljena je konstantna nestanovitnost delnice, izračunana na podlagi predhodnega nihanja cene. Slednje se v resničnosti ponavadi ne pokaže kot resnično. Poleg tega je precej nerealna tudi predpostavka o neizplačevanju dividend, a spoznali smo zgolj najbolj osnoven model, ki se ga da še nadgraditi.

3.9. **Implicirana volatilnost.** Pri obravnavi problema vrednotenja opcij smo v Black-Scholesovem modelu vseskozi dojemali volatilnost cene delnice kot poznano in konstantno vrednost, ki jo ocenimo iz preteklih podatkov o gibanju cene delnice, na katero je opcija, ki jo vrednotimo, napisana. To vrednost naj bi potem uporabili v enačbi in izračunali premijo opcije. Dejstvo pa je, da se volatilnost na dolgi rok ne izkaže kot konstantna. Poleg tega tudi ni nujno, da je pretekla volatilnost delnice dobra ocena za prihodnjo. Zaradi omenjenih razlogov metoda ocenjevanja volatilnosti na podlagi preteklih podatkov ni najpogosteje uporabljena metoda.

Jasno pa je, da poznamo cene opcij, ki kotirajo na borzi. To pomeni, da četudi mi ne poznamo volatilnosti, jo trg pozna oz. jo sugestira. Če vzamemo torej formulo za eksplicitne izračun evropske opcijske premije iz Black-Scholesovega modela, vstavimo vanjo netvegano obrestno mero, ceno delnice, izvršilno ceno in ročnost (to so vse izmerljive količine oz. so določene v pogodbi), nam ostaneta le še dve neznani količini - volatilnost in premija opcije. Poglejmo npr. nakupno opcijo. Potem vemo, da cena narašča monotono z naraščanjem volatilnosti (to vidimo neposredno iz eksplicitne formule), torej med njima obstaja bijekcija.

Iz tega sledi, da bi lahko vzeli opcijsko ceno s trga in izračunali neko mnenje trga o volatilnosti v določenem obdobju (to je seveda do zapadlost opcije). Ta volatilnost, izračunana iz ene same vrednosti opcije, ki je na trgu, se imenuje implicirana volatilnost (angl. *implied volatility*).

Obstajajo še bolj izpopolnjeni načini izračunavanja volatilnosti (oz. mnenja trga o volatilnosti). Z uporabo večih cen opcij za različne zapadlosti lahko izračunamo mnenje trga o strukturi prihodnjih vrednosti volatilnosti (angl. *term structure of volatility*).

3.9.1. *Implicirana volatilnost v praksi.* V praksi se pri uporabi opisane metode pojavljajo zanimivi rezultati. Implicirana volatilnost namreč ni konstantna za različne izvršilne cene. Tukaj torej najdemo pomankljivost modela. Tudi pri primerjavi izračunane volatilnosti za nakupne in prodajne opcije se izkaže, da izračuni podajo različne volatilnosti. Kateri del modela je napačen, je pomembna tema akademskih raziskav.

3.9.2. *Tehnična volatilnost.* Tehnično se volatilnost ne izkaže kot konstantna, niti ne kot napovedljiva za čase večje od nekaj mesecev. To torej omejuje vsak model, ki trdi nasprotno. Implicirana volatilnost ta problem reši.

Naprednejši modeli obravnavajo volatilnost kot slučajno spremenljivko, ki sama spet zadošča neki slučajni diferencialni enačbi. Takšni modeli so dvofaktorski modeli (angl. *two-factor model*), saj če modeliramo volatilnost kot slučajno spremenljivko, ni več mogoče ustvariti netveganega portfelja (angl. *perfect hedge*), kot smo to storili pri Black-Scholesovem modelu.

3.9.3. *Koda za izračunavanje implicirane volatilnosti.* V programskem jeziku R sprogramirajmo funkcijo, ki nam, če vstavimo:

- ceno delnice S,
- izvršilno ceno K,
- ročnost T,
- netvegano obrestno mero r,
- ceno delnice na trgu $trzna$ in
- opcijski tip (t.j. nakupna oz. prodajna opcija) *opcijski.tip*,

vrne implicirano volatilnost σ.

Sprva potrebujemo funkcijo, ki ob znanih parametrih S, K, T, r, σ in *opcijski.tip* vrne vrednost opcije, ki jo želimo ovrednotiti.

```
vrednost.BS <- function(S,K,T,r,sigma,opcijski.tip){
  d1 <- 1/(sigma*sqrt(T))*(log(S/K)+(r+sigma^2/2)*T)
  d2 <- d1-sigma*sqrt(T)
  if(opcijski.tip=="nakupna"){
    vrednost <- S*pnorm(d1)-K*pnorm(d2)*exp(-r*T)
  }
  if(opcijski.tip=="prodajna"){
    vrednost <- K*exp(-r*T)*pnorm(-d2)-S*pnorm(-d1)
  }
  return(vrednost)
}
```

Nato s pomočjo bisekcije izračunajmo implicirano volatilnost. Računamo torej volatilnost σ_i, pri čemer predpostavljamo, da poznamo tržno ceno opcije $trzna$ in ostale že zgoraj omenjene parametre (razen seveda σ).

```
implicirana.volatilnost <- function(S,K,T,r,trzna,opcijski.tip){
  sigma <- 0.5
  zgornja.meja <- 1
  spodnja.meja <- 0
  i <- 0
  napaka <- vrednost.BS(S,K,T,r,sigma,opcijski.tip)-trzna
  eps <- 0.0001

  while(abs(napaka)>eps && i<1000){
    if(napaka < 0){
      spodnja.meja <- sigma
      sigma <- (zgornja.meja+sigma)/2
    }
    else{
      zgornja.meja <- sigma
```

```
      sigma <- (spodnja.meja+sigma)/2
    }
    napaka <- vrednost.BS(S,K,T,r,sigma,opcijski.tip)-trzna
    i <- i+1
  }
  if(i==1000){
    return(NA)
  }
  else{
    return(sigma)
  }
}
```

Primer 3.9. Denimo, da imamo nakupno opcijo, katere izvršilna cena je 50$ in zapade v 32 dneh. Netvegana obrestna mera je 5 %, delnica trenutno kotira pri 51.25$, trenutna cena opcije na trgu pa je 2$. Imamo torej naslednje podatke: $S = 51.25$, $K = 50$, $T = 32/365$, $r = 0.05$, $trzna = 2$, $opcijski.tip = "nakupna"$. Pokličemo funkcijo z ukazom

```
implicirana.volatilnost(51.25,50,30/365,0.05,2,"nakupna")
```

in dobimo rezultat

```
0.1949158;
```

torej je implicirana volatilnost približno $19,5$ %.

Naredimo še preizkus. Vstavimo dobljeno vrednost $19,5$ % za σ v funkcijo, ki nam izračuna opcijsko premijo po Black-Scholesovem modelu. Pokličemo funkcijo *vrednost.BS* z ukazom

```
vrednost.BS(51.25,50,30/365,0.05,0.195,"nakupna")
```

in dobimo rezultat

```
2.000425;
```

kar potrjuje naš izračun implicirane volatilnosti.

To pomeni, da trgovci z opcijami na tole delnico, pričakujejo letno spremembo cene delnice v višini $19,5$ %. Če bi naš izračun pretvorili na mesečno raven, bi lahko rekli, da trg pričakuje, da se bo vrednost delnice, na katero je opcija napisana, v prihodnjih 30 dneh spremenila (ali v pozitivno ali negativno smer) za $5,6$ odstotka ($19,5\ \%/\sqrt{12} = 5,6\ \%$).

Pogosto pa nas zanima gibanje delniškega trga kot celote, zato računamo implicirano volatilnost trga na podlagi skupine delnic (ne na podlagi ene same delnice), saj tako dobimo mero gibanja večjega dela borznega trga. Za te izračune lahko uporabimo podatke o opcijah, napisanih na borzne indekse. Dow Jones je na primer cenovno uteženi indeks, ki ga sestavlja 30 najpomembnejših ameriških korporacij, indeks $S\&P$ 500 pa je po tržni kapitalizaciji utežen indeks 500 največjih ameriških podjetij iz vseh industrij. Zanj velja, da najbolje odraža dogajanje v realni ekonomiji.

Generično zbrane podatke o opcijah na najpogosteje uporabljene indekse na trgu lahko najdemo npr. na `http://www.cboe.com/` ali na `http://finance.yahoo.com/`.

Primer 3.10. Vzemimo za primer trgovanje z opcijami na indeks $S\&P$ 500. Na dan 10. avgusta 2014 je njegova vrednost 1916.23. Denimo, da nas zanima implicirana volatilnost trga za obdobje do 20. septembra 2014. Opazujmo nakupne opcije, ki se splačajo (angl. *in the money*). Shranimo podatke, ki jih najdemo na spletni strani Yahoo Finance in so prikazani na sliki 6, v .csv datoteko.

Call Options — Expire at close Saturday, September 20, 2014

Strike	Symbol	Last	Chg	Bid	Ask	Vol	Open Int
200.00	SPXPM140920C00200000	1,607.10	0.00	1,711.00	1,735.00	0	50
1,600.00	SPXPM140920C01600000	235.80	0.00	313.00	337.00	0	5
1,625.00	SPXPM140920C01625000	249.00	0.00	288.00	312.00	5	10
1,650.00	SPXPM140920C01650000	225.60	0.00	263.50	287.50	5	10
1,660.00	SPXPM140920C01660000	258.58	0.00	254.00	278.00	3	3
1,680.00	SPXPM140920C01680000	254.00	0.00	234.60	258.50	25	25
1,690.00	SPXPM140920C01690000	229.13	0.00	224.90	248.50	3	3
1,775.00	SPXPM140920C01775000	115.90	0.00	155.00	157.30	10	10
1,800.00	SPXPM140920C01800000	121.10	↑38.60	132.30	134.50	31	5
1,825.00	SPXPM140920C01825000	141.90	0.00	110.30	112.50	43	43
1,850.00	SPXPM140920C01850000	79.20	↑4.30	89.50	91.30	10	41
1,875.00	SPXPM140920C01875000	70.40	↑8.00	69.70	71.20	40	11
1,890.00	SPXPM140920C01890000	50.40	0.00	58.60	59.90	11	11
1,900.00	SPXPM140920C01900000	45.10	↑2.92	51.40	52.90	1	7
1,910.00	SPXPM140920C01910000	44.00	↑5.20	44.70	45.70	20	31
1,915.00	SPXPM140920C01915000	37.70	0.00	41.20	42.60	10	13
1,920.00	SPXPM140920C01920000	38.10	↑0.40	38.40	39.10	30	66
1,925.00	SPXPM140920C01925000	28.50	0.00	35.30	36.20	5	22
1,930.00	SPXPM140920C01930000	26.65	0.00	32.10	33.40	5	95

SLIKA 6. Podatki za nakupno opcijo na $S\&P$ 500

Datoteko s podatki uvozimo in zraven še upoštevamo trenutno vrednost indeksa $S = 1916.23$, ročnost opcij $T = 41/365$ (saj je od 10. avgusta 2014 do 20. septembra 2014 41 dni), zadnje podatke za netvegano obrestno mero $r = 0,07$ % (podatke lahko najdemo na spletni strani `http://www.federalreserve.gov/releases/h15/current/default.htm`.)

```
podatki <- read.csv("call-sept20.csv")
S <- 1916.23
K <- podatki$Strike
T <- 41/365
r <- 0.0007
trzna.ask <- podatki$Ask
trzna.bid <- podatki$Bid
opcijski.tip <- "nakupna"
n <- length(podatki$Ask)
sigma.ask <- rep(1, n)
```

```
sigma.bid <- rep(1, n)

for (i in 1:n){
  sigma.ask[i] <- implicirana.volatilnost(S,K[i],T,r,
      trzna.ask[i],opcijski.tip)
  sigma.bid[i] <- implicirana.volatilnost(S,K[i],T,r,
      trzna.bid[i],opcijski.tip)
}

#izracun povprecja (odrezemo vrednosti NA iz vektorjev
#sigma.ask oziroma sigma.bid)
rezultat.ask <- sum((sigma.ask*podatki$Vol)[3:19])/sum(
  podatki$Vol[3:19])
rezultat.bid <- sum((sigma.bid*podatki$Vol)[8:19])/sum(
  podatki$Vol[8:19])
```

Rezultat, ki ga dobimo kot povprečno implicirano volatilnost iz *ask* vrednosti, je 0.2321541, torej približno $23,2$ %. Z upoštevanjem *bid* vrednosti pa dobimo rezultat 0.1886728, torej približno $18,9$ %. To pomeni, da igralci na trgu pričakujejo različne letne spremembe delnic, zajetih v indeksu. Tisti, ki opcije kupujejo, pričakujejo v povprečju višjo volatilnost, kot pa tisti, ki jih prodajajo.

Pretvorjeno na prihodnjih 41 dni, bi pomenilo, da kupci pričakujejo približno $7,8$ % spremembo $(23.2/\sqrt{356/41})$, prodajalci pa približno $6,4$ % spremembo vrednosti delnic, zajetih v indeksu $(18.9/\sqrt{356/41})$.

4. Metode končnih razlik

Reševanje parcialnih diferencialnih enačb je v splošnem zelo zapleteno in največkrat eksplicitne rešitve ne znamo poiskati. Na ta problem naletimo tudi pri reševanju Black-Scholesove parcialne diferencialne enačbe v splošnem, torej ko želimo računati ceno opcije, ki ni nujno evropska. Na tem mestu nastane potreba po iskanju numeričnih aproksimacij. Metode končnih razlik so ena izmed vrst numeričnih metod, s pomočjo katerih rešujemo parcialne diferencialne enačbe. So zelo učinkovite in prilagodljive. Če jih pravilno uporabljamo, nam zgenerirajo natančne rešitve. Uporabne so za reševanje različnih vrst diferencialnih enačb, med drugim tudi za reševanje našega problema. Naš cilj je reševanje Black-Scholesove parcialne diferencialne enačbe, torej iskanje funkcije $C(S,t)$, ki opisuje vrednost opcije v odvisnosti od cene delnice in časa. Aproksimativno numerično rešitev predstavlja množica izračunov, s pomočjo katerih potem skonstruiramo $C(S,t)$. Pri metodah končnih razlik to množico tvorijo vrednosti v točkah znotraj izbranega računskega območja. Metode končnih razlik temeljijo na interpolacijskem postopku oz. na pretvorbi diferencialne enačbe na množico diferenčnih enačb, slednje pa potem rešujejo iterativno. Denimo, da imamo diferencialno enačbo, ki opisuje ceno neke opcije z zapadlostjo T. Metode končnih razlik razdelijo interval od časa 0 do časa T na N enakih časovnih intervalov dolžine $\Delta t = \frac{T}{N}$ oz. na čase $0, \Delta t, \Delta 2t, ..., T$. Značilno za metode končnih razlik je, da nadomeščajo odvode, ki nastopajo v diferencialni enačbi, z ustreznimi razlikami.

4.1. **Aproksimacije pri metodah končnih razlik.** Osnovna ideja metod končnih razlik je zamenjava parcialnih odvodov v parcialni diferencialni enačbi z aproksimacijami, ki bazirajo na Taylorjevem razvoju. Parcialni odvod funkcije u dveh spremenljivk x in τ je definiran kot

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{u(x,\tau+\delta\tau) - u(x,\tau)}{\delta\tau}.$$

4.1.1. *Aproksimacija tangente vnaprej.* Če namesto limite $\delta\tau \to 0$ privzamemo, da $\delta\tau$ ni ničelna, pač pa majhna, dobimo aproksimacijo

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) \approx \frac{u(x,\tau+\delta\tau) - u(x,\tau)}{\delta\tau} + O(\delta\tau).$$

Takšno aproksimacijo imenujemo aproksimacija $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ z metodo končnih razlik, saj vključuje majhno, a ne neznatno spremembo odvisne spremenljivke u. Manjši ko je $\delta\tau$, boljšo aproksimacijo dobimo. V tem primeru smo naredili aproksimacijo tangente vnaprej, ker smo aproksimirali na intervalu τ in $\tau + \delta\tau$, torej smo se za majhen korak pomaknili v pozitivno smer od τ.

4.1.2. *Aproksimacija tangente nazaj.* Podobno aproksimacijo naredimo še za negativno smer oz. nazaj. Najprej pogledamo definicijo:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{u(x,\tau) - u(x,\tau-\delta\tau)}{\delta\tau},$$

potem pa aproksimiramo na podoben način kot prej:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) \approx \frac{u(x,\tau) - u(x,\tau-\delta\tau)}{\delta\tau} + O(\delta\tau).$$

4.1.3. *Centralna aproksimacija.* Poleg omenjenih dveh načinov aproksimacije poznamo še centralno aproksimacijo. Definiramo:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) = \lim_{\delta\tau \to 0} \frac{u(x,\tau+\delta\tau) - u(x,\tau-\delta\tau)}{2\delta\tau},$$

kar nam da aproksimacijo

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x,\tau) \approx \frac{u(x,\tau+\delta\tau) - u(x,\tau-\delta\tau)}{2\delta\tau} + O((\delta\tau)^2).$$

Za majhne intervale je najbolj točna zadnja, centralna aproksimacija. Če apliciramo aproksimacijo tangente vnaprej in nazaj na difuzijski enačbi (ki jo bomo spoznali v nadaljevanju kot variacijo Black-Scholesove enačbe), dobimo eksplicitne ali pa popolnoma implicitne (angl. *fully implicit*) metode za reševanje. Centralna aproksimacija se v praksi redko uporablja, saj njena uporaba največkrat pripelje do numeričnih metod, ki niso stabilne. Idejno pa se pojavlja v Crank-Nicolsonovi metodi. Na tem mestu definirajmo še aproksimacijo s končno razliko za parcialni odvod funkcije po spremenljivki x. Aproksimacija poteka podobno kot v prejšnjih primerih in rezultat je naslednji:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau) \approx \frac{u(x+\delta x,\tau) - u(x-\delta x,\tau)}{2\delta x} + O((\delta x)^2).$$

Zdaj potrebujemo še aproksimacijo drugih parcialnih odvodov. Definiramo simetrično aproksimacijo z metodo končnih razlik kot aproksimacijo vnaprej z aproksimacijo prvega odvoda nazaj ali pa aproksimacijo nazaj z aproksimacijo prvega odvoda vnaprej. V obeh primerih dobimo simetrično centralno aproksimacijo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau) \approx \frac{u(x+\delta x,\tau) - 2u(x,\tau) + u(x-\delta x,\tau)}{(\delta x)^2} + O((\delta x)^2).$$

Obstajajo tudi drugi načini aproksimiranja, vendar pa je zgoraj opisani najpogosteje uporabljen in najnatančnejši.

4.2. **Mreža končnih razlik.** V nadaljevanju poteka proces aproksimacije za reševanje difuzijske enačbe preko končnih razlik z uporabo t.i. mreže končnih razlik z ekvidistantnimi vozli dolžine δx na x-osi in $\delta\tau$ na τ-osi. Tako razdelimo prostor (x,τ) na mrežo, kjer so vozli oblike $(n\delta x, m\delta\tau)$. Zanimale nas bodo vrednosti funkcije $u(x,\tau)$ le v teh točkah, t.j. $(n\delta x, m\delta\tau)$. Definirajmo oznako $u_n^m := u(n\delta x, m\delta\tau)$, za vrednost funkcije $u(x,\tau)$ v točki $(n\delta x, m\delta\tau)$ na mreži.

4.3. **Pretvorba Black-Scholesove diferencialne enačbe na difuzijsko.** Reševanje Black-Scholesove diferencialne enačbe je, če jo rešujemo direktno, precej zapleteno. Pogosto zato pretvarjamo enačbo na - tudi z numeričnega vidika - lažje rešljivo difuzijsko enačbo. Sprva bomo zato pretvorili Black-Scholesovo diferencialno enačbo na lažje rešljivo obliko, šele nato pa se bomo lotili reševanja s pomočjo metod končnih razlik. V prejšnjem poglavju izpeljana Black-Scholesova diferencialna enačba (21) je:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + rS\frac{\partial C}{\partial S} = rC.$$

Imejmo nakupno opcijo za katero velja $C = C(S,t), 0 < S < \infty, 0 \leq t \leq T$ in

- $C(0,t) = 0$,
- $C(S,t) \sim S$ ko $S \to \infty$ in
- $C(S,T) = max(S - K, 0)$.

Z vpeljavo novih neodvisnih spremenljivk

$$S = Ke^x, t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}$$

in odvisne spremenljivke

$$C(S,t) = K\nu(x,\tau)$$

dobimo naslednje vmesne rezultate:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K\frac{\partial \nu}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\sigma^2}{2}K\frac{\partial \nu}{\partial \tau},$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = K\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{K}{S}\frac{\partial \nu}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}(\frac{\partial C}{\partial S}) = \frac{K}{S^2}(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\partial \nu}{\partial x}).$$

Z vstavljanjem odvodov v Black-Scholesovo diferencialno enačbo (21) se slednja pretvori v enačbo s konstantnimi koeficienti

$$\frac{\partial \nu}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial \nu}{\partial x} - (k+l)\nu,$$

kjer sta $k = \frac{r-\delta}{\sigma^2/2}$ in $l = \frac{\delta}{\sigma^2/2}$. Končni pogoj se spremeni v $\nu(x,0) = max(e^x - 1, 0)$.

Da dobimo difuzijsko enačbo, potrebujemo še eno vpeljavo nove spremenljivke:

$$\nu = e^{\alpha x + \beta \tau}u(x,\tau)$$

za neke konstante α, β, ki jih želimo izbrati tako, da eliminiramo izraz $\frac{\partial u}{\partial x}$ iz diferencialne enačbe. Izkaže se, da je ustrezna izbira

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \beta = -\frac{1}{4}(k+1)^2.$$

Dobimo

$$\nu = e^{-\frac{1}{2}(k-1)x - \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}u(x,\tau),$$

iz česar sledi, da je

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{22}$$

za $-\infty < x < \infty, \tau > 0$, s pogoji $u(x,0) = u_0(x) = max(e^{\frac{1}{2}(k+1)x} - e^{\frac{1}{2}(k-1)x}, 0)$.

4.4. **Metoda Crank-Nicolson.** Metoda Crank-Nicolson je ena izmed implicitnih metod za reševanje parcialnih diferencialnih enačb. Bazira na izračunu povprečja med rezultati, ki jih prinašata eksplicitna in implicitna metoda končnih razlik. Najprej zato spoznajmo ti dve osnovnejši metodi.

4.4.1. *Eksplicitna metoda končnih razlik.* Poglejmo najprej transformirano Black-Scholesovo diferencialno enačbo (22):

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

in zapišimo splošne robne in končnimi pogoje na sledeči način:

$$u(x,\tau) \sim u_\infty(x,\tau), u(x,\tau) \sim u_{-\infty}(x,\tau), x \to \pm\infty,$$
$$u(x,0) = u_0(x).$$

Pri tem poudarimo, da so pogoji zapisani v splošnem, tako da zadoščajo tako nakupnim kot tudi prodajnim opcijam. Če omejimo naše zanimanje na vozlišča iz mreže končnih razlik in uporabimo za prve parcialne odvode aproksimacijo vnaprej, za druge parcialne odvode pa simetrično centralno aproksimacijo, se difuzijska enačba prevede na

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\delta\tau} + O(\delta\tau) = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\delta x)^2} + O((\delta x)^2).$$

Če zanemarimo člena $O(\delta\tau)$ in $O((\delta x)^2)$ in definiramo $\alpha = \frac{\delta\tau}{(\delta x)^2}$, s preoblikovanjem dobimo naslednjo enačbo:

$$u_n^{m+1} = \alpha u_{n+1}^m + (1-2\alpha)u_n^m + u_{n-1}^m.$$

To je diferenčna enačba. Če pri danem m poznamo u_n^m za vse vrednosti n, lahko eksplicitno izračunamo u_n^{m+1}. Zato to metodo imenujemo *eksplicitna metoda.* V resnici potrebujemo samo vrednosti u_{n+1}^m, u_n^m in u_{n-1}^m. Diferenčno enačbo lahko interpretiramo tudi kot slučajen sprehod po mreži, kjer u_n^m predstavlja verjetnost, da se pojavimo na poziciji n v času m, α pomeni verjetnost, da se premaknemo desno oz. levo za eno enoto, $(1-2\alpha)$ pa verjetnost, da ostanemo na isti poziciji. Ob izbiri konstantnega koraka δx, ne moremo rešiti enačbe za vse $-\infty < x < \infty$, saj nimamo neskončnega števila korakov. Zato ponovno napravimo aproksimiramacijo z izbiro končnega, a dovolj velikega števila korakov. Omejimo se na nek interval

$$N^-\delta x \leq x \leq N^+\delta x,$$

kjer sta N^- in N^+ veliki pozitivni števili. Za $\delta\tau$ vzamemo korak $\frac{1}{2}\sigma^2\frac{T}{M}$, če želimo imeti M enako velikih intervalov. Potem rešimo diferenčno enačbo za $N^- \leq n \leq N^+$, in $0 \leq m \leq M$ z upoštevanjem robnih pogojev, ki nam dajo vrednosti za $u_{N^-}^m$ in $u_{N^+}^m$:

$$\begin{aligned} u_{N^-}^m &= u_{-\infty}(N^-\delta x, m\delta\tau), 0 < m \leq M, \\ u_{N^+}^m &= u_{\infty}(N^+\delta x, m\delta\tau), 0 < m \leq M. \end{aligned}$$

Iterativni proces pa začnemo z začetnim pogojem

$$u_n^0 = u_0(n\delta x), N^- \leq n \leq N^+.$$

Iterativni postopek je računalniško preprosto rešljiv, saj imamo za izračun približka u_n^{m+1} podano eksplicitno enačbo.

Po končanem izračunu pretvorimo rezultate spet nazaj v finančne spremenljivke, kot smo jih uporabili pri transformaciji Black-Scholesove enačbe v difuzijsko:

$$S = Ke^x, t = T - \frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2}, C = K\nu(x,\tau).$$

4.4.2. *Stabilnost.* Stabilnost je odvisna od koeficienta α. Ker računamo v aritmetiki s končno natančnostjo, ki na določenih decimalnih mestih zaokrožuje števila, se da pokazati, da velja:

- pogoj za stabilnost: $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$,
- pogoj za nestabilnost: $\alpha > \frac{1}{2}$.

Omenimo, da se nestabilnost potrjuje tudi v interpretaciji diferenčnih enačb z naključnim sprehodom. V primeru $\alpha > \frac{1}{2}$ postane verjetnost $(1-2\alpha)$, da ostanemo na isti poziciji, negativna.

Pogoj za stabilnost lahko zapišemo tudi v obliki

$$0 < \frac{\delta\tau}{(\delta x)^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Intuitivno to pomeni, da če začnemo s stabilno rešitvijo na mreži, potem pa podvojimo število vozlov na x-osi, moramo razdeliti časovne intervale na četrtine, če želimo ohraniti stabilnost. Pokazati se da tudi, da numerična rešitev z metodo končnih razlik konvergira k analitični rešitvi difuzijske enačbe ko $\delta x \to 0$ in $\delta\tau \to 0$ v smislu $u_n^m \to u(n\delta x, m\delta\tau)$ natanko tedaj, ko je izpolnjen pogoj za stabilnost. Omeniti velja še, da je eksplicitna metoda zaradi neodvisnosti od končnih in robnih pogojev lahko prilagodljiva za različne, bolj splošne, vrste opcij.

4.4.3. *Implicitne metode končnih razlik.* Namen implicitnih metod je, da odpravimo nestabilnost v primerih: $\alpha > \frac{1}{2}$. Implicitna metoda omogoča, da vzamemo veliko število intervalov na x-osi, pri tem pa ni potrebno jemati zelo majnih časovnih intervalov. Implicitne metode vključujejo reševanje sistemov enačb. S tem problemom se v delu diplomskega seminarja ne bomo ukvarjali, pač pa bomo privzeli, da poznamo LU razcep in SOR metodo za numerično reševanje sistemov. Z uporabo teh metod postanejo implicitne metode skoraj tako efektivne kot eksplicitne, če efektivnost ocenjujemo s številom aritmetičnih operacij na časovni interval.

4.4.4. *Popolnoma implicitna metoda končnih razlik.* Tovrstne metode uporabljajo t.i. aproksimacijo razlik nazaj za prve parcialne odvode in simetrično centralno aproksimacijo za druge parcialne odvode. S tem načinom aproksimacije se difuzijska enačba spremeni v

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\delta\tau} + O(\delta\tau) = \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{(\delta x)^2} + O((\delta x)^2).$$

Podobno kot pri eksplicitni metodi zanemarimo člena $O(\delta\tau)$ in $O((\delta x)^2)$. Spet vzamemo $\alpha = \frac{\delta\tau}{(\delta x)^2}$ in s preoblikovanjem zgornje enačbe dobimo:

$$-\alpha u_{n-1}^{m+1} + (1 + 2\alpha)u_n^{m+1} - \alpha u_{n+1}^{m+1} = u_n^m.$$

Dobili smo implicitno obliko diferenčne enačbe, kjer so u_{n+1}^{m+1}, u_n^{m+1} in u_{n-1}^{m+1} vse odvisne od u_n^m in jih ne moremo kar preprosto eksplicitno izračunati. Podobno kot v primeru eksplicitne metode odrežemo neskončno mrežo pri $x = N^-\delta x$ in pri $x = N^+\delta x$, kjer sta N^- in N^+ neki zelo veliki števili. Spet vzamemo

$$\begin{aligned} u_{N^-}^{m+1} &= u_{-\infty}(N^-\delta x, m\delta\tau), 0 \le m \le M, \\ u_{N^+}^{m+1} &= u_{\infty}(N^+\delta x, m\delta\tau), 0 \le m \le M, \\ u_n^0 &= u_0(n\delta x), N^- < n < N^+. \end{aligned}$$

Želimo torej najti u_n^{m+1} za $0 \le m$ in $N^- < n < N^+$.

To naredimo tako, da enačbe zapišemo v linearni sistem:

$$\begin{bmatrix} \beta & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha & \beta & -\alpha & \cdots & 0 \\ 0 & -\alpha & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\alpha \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{N^-+1}^{m+1} \\ \vdots \\ u_0^{m+1} \\ \vdots \\ u_{N^+-1}^{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{N^-+1}^m \\ \vdots \\ b_0^m \\ \vdots \\ b_{N^+-1}^m \end{bmatrix},$$

$\beta = 1 + 2\alpha$.

Zapis v kompaktni obliki:

$$\mathbf{M}\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{b}^m,$$

kjer sta $\mathbf{u}^{m+1}$ in $\mathbf{b}^m$ $(N^+ - N^- - 1)$ - dimenzionalna vektorja.

$$\mathbf{b}^m = \mathbf{u}^m + \alpha(u_{N^-}^{m+1}, 0, 0, ..., 0, u_{N^+}^{m+1}),$$

in $\mathbf{M}$ kvadratna $(N^+ - N^- - 1)$ - dimenzionalna simetrična matrika. Pokazati je mogoče, da je $\mathbf{M}$ za $\alpha \geq 0$ obrnljiva, torej je

$$\mathbf{u^{m+1}} = \mathbf{M^{-1}b^m}.$$

$\mathbf{u^{m+1}}$ lahko najdemo, če imamo podan $\mathbf{b^m}$. Slednjega poznamo zaradi podanih robnih pogojev in prejšnjega koraka iterativne metode, ko smo izračunali $\mathbf{u^m}$. (Poznamo pa $\mathbf{u^0}$, ki ga potrebujemo za začetek iterativnega postopka.)

V praksi seveda obstajajo veliko bolj efektivni algoritmi od iskanja inverza. Posebno še zato, ker je matrika $\mathbf{M}$ tridiagonalna, kar zelo zmanjša število operacij pri reševanju sistema. Rešitev se da poiskati v $O(N)$ aritmetičnih operacijah. Efektivna algoritma za reševanje sta naprimer LU razcep in SOR. SOR je iterativna metoda, ki izvira iz Gauss-Seidlove metode, deluje pa tako, da najprej ugane nek približek rešitve, slednjega pa potem v vsakem koraku izboljšuje.

4.4.5. *Stabilnost.* Implicitna shema je za razliko od eksplicitne stabilna za vse α (t.j. tudi za $\alpha > \frac{1}{2}$). Da se pokazati, da je implicitna metoda končnih razlik stabilna za vsak $\alpha > 0$. Posledično lahko rešimo difuzijsko enačbo z večjimi časovnimi koraki kot z eksplicitno. Čeprav izvedba posameznega koraka iteracije vzame več časa, pa to skompenziramo z manjšim številov časovnih intervalov. Pokazati je mogoče, da implicitna metoda končnih razlik konvergira k rešitvi parcialne diferencialne enačbe.

4.4.6. *Crank-Nicolson.* Tudi metodo Crank-Nicolson, podobno kot implicitno, uporabljamo za reševanje težav s stabilnostjo, ki se pojavljajo pri eksplicitni metodi končnih razlik.

V primerjavi z implicitno metodo pa je metoda Crank-Nicolson boljša v smislu hitrejše konvergence k rešitvi. Z uporabo Crank-Nicolsonove metode dobimo stopnjo konvergence $O((\delta\tau)^2)$, medtem ko z implicitno in eksplicitno metodo dosežemo stopnjo konvergence $O(\delta\tau)$, če konvergenca sploh je. Metoda Crank-Nicolson je pravzaprav neke vrste povprečje implicitne in eksplicitne metode. Ideja je, da uporabimo aproksimacijo vnaprej in potem še aproksimacijo nazaj, potem pa vzamemo povprečje aproksimacij. Z aproksimacijo vnaprej dobimo shemo eksplicitne metode:

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\delta\tau} + O(\delta\tau) = \frac{u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m}{(\delta x)^2} + O((\delta x)^2).$$

Z aproksimacijo nazaj pa:

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m}{\delta\tau} + O(\delta\tau) = \frac{u_{n+1}^{m+1} - 2u_n^{m+1} + u_{n-1}^{m+1}}{(\delta x)^2} + O((\delta x)^2).$$

Če vzamemo povprečje, dobimo:

$$\frac{u_n^{m+1}-u_n^m}{\delta\tau}+O(\delta\tau)=\frac{1}{2}(\frac{u_{n+1}^m-2u_n^m+u_{n-1}^m}{(\delta x)^2}+\frac{u_{n+1}^{m+1}-2u_n^{m+1}+u_{n-1}^{m+1}}{(\delta x)^2})+O((\delta x)^2).$$

Če zanemarimo napake in spet vpeljemo $\alpha=\frac{\delta\tau}{(\delta x)^2}$, dobimo metodo Crank-Nicolson:

$$u_n^{m+1}-\frac{1}{2}\alpha(u_{n+1}^{m+1}-2u_n^{m+1}+u_{n-1}^{m+1})=u_n^m+\frac{1}{2}\alpha(u_{n+1}^m-2u_n^m+u_{n-1}^m).$$

Opazimo, da so v tem primeru $u_{n+1}^{m+1}, u_n^{m+1}, u_{n-1}^{m+1}$ implicitno določeni z vrednostmi $u_{n+1}^m, u_n^m, u_{n-1}^m$.

V principu je reševanje sistema podobno kot v primeru s popolnoma implicitno metodo. Celotno desno stran lahko eksplicitno izračunamo, če poznamo vse u_n^m, zato definiramo novo oznako:

$$Z_n^m=(1-\alpha)u_n^m+\frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^m+u_{n+1}^m),$$

ki je eksplicitna formula za Z_n^m. Z upoštevanjem te oznake dobimo preoblikovan problem:

$$(1+\alpha)u_n^{m+1}-\frac{1}{2}\alpha(u_{n+1}^{m+1}+u_{n-1}^{m+1})=Z_n^m.$$

Predpostavljamo, da sta N^+ in N^- izbrana tako, da se večje napake ne pojavljajo in kot na začetku izračunamo

$$\begin{aligned}u_{N^-}^{m+1}&=u_{-\infty}(N^-\delta x, m\delta\tau), 0\le m\le M,\\ u_{N^+}^{m+1}&=u_{\infty}(N^+\delta x, m\delta\tau), 0\le m\le M,\\ u_n^0&=u_0(n\delta x), N^-\le n\le N^+,\end{aligned}$$

kot nam to podajajo končni in robni pogoji. Ta problem je linearen, spet ga zapišemo v matrični obliki

$$\mathbf{C}\mathbf{u^{m+1}}=\mathbf{b^m},$$

kjer je $\mathbf{C}$ matrika, podana s

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1+\alpha & -\frac{1}{2}\alpha & 0 & \cdots & 0\\ -\frac{1}{2}\alpha & 1+\alpha & -\frac{1}{2}\alpha & \cdots & \vdots\\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2}\alpha\\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2}\alpha & 1+\alpha\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{u^{m+1}}=\begin{bmatrix}u_{N^-+1}^{m+1}\\ \vdots\\ u_0^{m+1}\\ \vdots\\ u_{N^+-1}^{m+1}\end{bmatrix}, \mathbf{b^m}=\begin{bmatrix}Z_{N^-+1}^m\\ \vdots\\ Z_0^m\\ \vdots\\ Z_{N^+-1}^m\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\alpha\begin{bmatrix}u_{N^-}^{m+1}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ u_{N^+}^{m+1}\end{bmatrix}.$$

Reševanje z metodo Crank-Nicolson poteka tako, da najprej izračunamo vektor b^m iz znanih količin. Potem uporabimo LU razcep oz. metodo SOR za reševanje sistema. Gre za reševanje skoraj enakega sistema kot pri popolnoma implicitni metodi, le da povsod, kjer je prej nastopala α, zdaj uporabimo $\frac{1}{2}\alpha$.

Metoda Crank-Nicolson je stabilna tudi za tiste $\alpha > \frac{1}{2}$, za katere eksplicitna metoda ni. Natančnost metode pa je še večja kot pri popolnoma implicitni metodi. Pokazati se da, da je metoda Crank-Nicolson stabilna in konvergentna za vsak $\alpha > 0$.

Spoznali smo le en način izpeljave metode Crank-Nicolson, obstajajo pa še drugi. Zgoraj opisani način temelji na diskretizaciji difuzijske enačbe z uporabo povprečja eksplicitne in implicitne metode.

Lahko se problema lotimo tudi drugače in diskretiziramo kar Black-Scholesovo parcialno diferencialno enačbo. Uporabimo vmesni korak in sprva aproksimiramo vrednost funkcije v točki $j, i-1/2$. Vemo, da ta vrednost na koncu ne sme nastopati v diferenčnih enačbah, saj računamo samo vrednosti v točkah iz mreže razlik.

Za aproksimacijo $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ in $\frac{\partial u}{\partial S}$ uporabimo centralno aproksimacijo, torej dobimo

$$\frac{\partial u_j^{i-1/2}}{\partial \tau} = \frac{u_j^i - u_j^{i-1}}{\partial \tau} + O((\delta\tau)^2),$$

$$\frac{\partial u_j^{i-1/2}}{\partial S} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_j^{i-1}}{\partial S} + \frac{\partial u_j^i}{\partial S}) = \frac{1}{2}(\frac{u_{j+1}^{i-1} - u_{j-1}^{i-1}}{2\delta S} + \frac{u_{j+1}^i - u_{j-1}^i}{2\delta S}) + O((\delta S)^2).$$

Za aproksimacijo $\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$ uporabimo simetrično centralno aproksimacijo

$$\frac{\partial^2 u_j^{i-1/2}}{\partial S^2} = \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 u_j^{i-1}}{\partial S^2} + \frac{\partial^2 u_j^i}{\partial S^2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_j^{i-1} + u_{j-1}^{i-1}}{\partial S^2} + \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{\partial S^2}) + O((\delta S)^2).$$

Če vstavimo te aproksimacije v Black-Scholesovo parcialno diferencialno enačbo, dobimo

$$-a_j u_{j-1}^{i-1} + (1-b_j)u_j^{i-1} - c_j u_{j+1}^{i-1} = a_j u_{j-1}^i + (1+b_j)u_j^i + c_j u_{j+1}^i, \tag{23}$$

kjer

$$a_j = \frac{\delta\tau}{4}(\sigma^2 j^2 - rj),$$

$$b_j = -\frac{\delta\tau}{2}(\sigma^2 j^2 + r),$$

$$c_j = \frac{\delta\tau}{4}(\sigma^2 j^2 + rj).$$

Če zapišemo enačbo (23) za vse vrednosti i in j, dobimo $M-1$ enačb in $M-1$ neznank, torej smo z diskretizacijo spet pridobili sistem diferenčnih enačb.

Z rešitvijo tega sistema dobimo vrednosti funkcije u v vseh vozlih iz mreže razlik. Lepše lahko problem zapišemo v matrični obliki in ga nato razrešimo npr. s programom Matlab.

Matrična oblika sistema:

$$CU_{i-1} = DU_i + K_{i-1} + K_i, i = N, ..., 1,$$

kjer

$$U_i = \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{M-1}^i \end{bmatrix},$$

$$K_i = \begin{bmatrix} a_1 u_0^i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{M-1} u_M^i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1-b_1 & -c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_2 & 1-b_2 & -c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & 1-b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{M-1} & 1-b_{M-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1+b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & 1+b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 1+b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{M-1} & 1+b_{M-1} \end{bmatrix}.$$

Primer 4.1. Zapišimo zdaj to v obliki Matlabove kode. Definiramo funkcijo

```
function cena = CR_NL(K,S0,r,sigma,vektor_vrednosti_delnice,
vektor_casov,opcijski_tip),
```

kjer so oznake enake, kot smo jih uporabljali doslej. Izračunamo velikost mreže razlik in dolžino med ekvidistantnimi vozli:

```
M = length(vektor_vrednosti_delnice)-1;
N = length(vektor_casov)-1;
dt = vektor_casov(2)-vektor_casov(1);
```

Potem lahko izračunamo koeficiente

```
j = 0:M;
sigma2 = sigma*sigma;
aj = (dt/4)*(sigma2*(j.^2) - r*j);
bj = -(dt/2)*(sigma2*(j.^2) + r);
cj = (dt/4)*(sigma2*(j.^2) + r*j);
```

Prestavimo izpis

```
cena(1:M+1,1:N+1) = nan;
```

in definiramo še končne in robne pogoje

```
switch opcijski_tip
    case 'NAKUPNA'
        cena(:,end) = max(vektor_vrednosti_delnice-K,0);
        cena(1,:) = 0;

        cena(end,:) = (vektor_vrednosti_delnice(end)-K)
        *exp(-r*vektor_casov(end:-1:1));
    case 'PRODAJNA'
        cena(:,end) = max(K-vektor_vrednosti_delnice,0);
        cena(1,:) = (K-vektor_vrednosti_delnice(1))
        *exp(-r*vektor_casov(end:-1:1));
        cena(end,:) = 0;
end
```

Zdaj lahko zapišemo tridiagonalno matriko

```
C = -diag(aj(3:M),-1) + diag(1-bj(2:M)) - diag(cj(2:M-1),1);
[L,U] = lu(C);
D = diag(aj(3:M),-1) + diag(1+bj(2:M)) + diag(cj(2:M-1),1);
```

in razrešimo problem za vrednost v vsakem vozlu

```
odmik = zeros(size(D,2),1);
for i = N:-1:1
    if length(odmik)==1
        odmik = aj(2)*(cena(1,i)+cena(1,i+1)) + ...
            cj(end)*(cena(end,i)+cena(end,i+1));
    else
        odmik(1) = aj(2)*(cena(1,i)+cena(1,i+1));
        odmik(end) = cj(end)*(cena(end,i)+cena(end,i+1));
    end
    cena(2:M,i) = U\(L\(D*cena(2:M,i+1) + odmik));
end
```

Zdaj lahko izračunamo še opcijsko premijo

```
premija = interp1(vektor_vrednosti_delnice,cena(:,1),S0);
```

in tako zaključimo naš zgled implementacije metode Crank-Nicolson v Matlabu za izračun evropske opcijske premije. Izračun premije za dejanske vrednosti parametrov pokličemo v konzoli npr. z ukazom

```
CR_NL(60,81,0.007,0.1,0:1:100,0:0.01:1,'NAKUPNA'),
```

in v tem primeru dobimo rezultat 21.4441.

Literatura

[1] R. White, *Solving PDE Problems in Finance Using Finite-Difference Methods, Featured Article*, MathFinance Newsletter **Issue 280** (19. april 2013) strani 1–12.

[2] P. Wilmott, S. Howison in J. Dewynne, *The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction*, Cambridge University Press, New York, 2009.

[3] S. Higham, *An Introduction to Financial Option Valuation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[4] T. Košir, *Zapiski iz predmeta Finančna matematika 1*, štud. leto 2012/13.

[5] M. Tovšak, *Diskretni matematični modeli in algoritmi za vrednotenje delniških opcij, diplomsko delo*, 2011, [ogled 5. junij 2014], dostopno na `http://goo.gl/BBef3J`.

[6] V. Nose, *Eksotične opcije in strukturirani finančni instrumenti, diplomsko delo*, junij 2009, [ogled 5. november 2013], dostopno na `http://www.cek.ef.uni-lj.si/UPES/nose161.pdf`.

[7] K. Jager, *Vrednotenje opcij in aplikacija metode Monte Carlo, magistrsko delo*, 22. junij 2006, [ogled 5. november 2013], dostopno na `http://goo.gl/SgBuxA`.

[8] A. Borko, *Opcijska volatilnost kot instrument ugotavljanja negotovosti na finančnih trgih, magistrsko delo*, 30. januar 2009, [ogled 5. junij 2014], dostopno na `http://goo.gl/ryGSdz`.

[9] A. Zidanšek, *Proces gibanja tečajnic in Black-Scholesov model vrednotenja opcij*, verzija 2010, [ogled 5. november 2013], dostopno na `http://goo.gl/LMo2lu`.

[10] P. Forsyth, *An Introduction to Computational Finance Without Agonizing Pain*, verzija 6. december 2013, [ogled 15. december 2014], dostopno na `http://goo.gl/QsaFMg`.

[11] S. Sobolev, *Implicit Methods: the Crank-Nicolson Algorithm*, verzija 8. april 2011, [ogled 14. december 2013], dostopno na `http://goo.gl/wUBlcY`.

[12] *The Black-Scholes Equation*, verzija 1. februar 2013, [ogled 1. februar 2014], dostopno na `http://disi.unal.edu.co/~gjhernandezp/HeterParallComp/OptionsGPU/`.

[13] *Black-Scholes Formulae for European Options*, verzija 5. marec 2005, [ogled 1. februar 2014], dostopno na `http://goo.gl/O4qWnZ`.

[14] *Black-Scholes model*, [ogled 6. november 2013], dostopno na `http://goo.gl/cc2RIf`.

[15] *The only thing smiling today is Volatility*, [ogled 4. avgust 2014], dostopno na `http://goo.gl/9SRswB`.

[16] *Selected interest rates*, [ogled 8. avgust 2013], dostopno na `http://goo.gl/u4f8Zr`.

[17] *S&P 500 pm settled index*, [ogled 8. avgust 2013], dostopno na `http://goo.gl/7kCPhe`.

[18] G. Celar, *Finančni trgi: Opis z metodami iz kvantne mehanike*, verzija november 2012, [ogled 5. junij 2014], dostopno na `http://mafija.fmf.uni-lj.si/seminar/files/2012_2013/`.

[19] *Transformation from the Black-Scholes differential equation to the diffusion equation - and back*, [ogled 5. november 2013], dostopno na `http://bit.ly/1p6MB6U`.

[20] *Option Pricing Using The Crank-Nicolson Finite Difference Method*, [ogled 18. avgust 2014], dostopno na `http://goo.gl/9uAu9W`.