

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Maša Vinter

**Modeliranje sprememb cen delnic z uporabo teorije
učinkovitega in teorije fraktalnega trga**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Alen Orbanic
Somentor: izred. prof. dr. Janez Bernik

Ljubljana, 2016

KAZALO

1. Uvod	4
2. Brownovo gibanje	5
2.1. Standardno Brownovo gibanje	5
2.2. Aritmetično Brownovo gibanje	6
2.3. Geometrično Brownovo gibanje	7
2.4. Primerjava modelov z empiričnimi podatki	8
3. Teorija učinkovitega trga	10
3.1. Definicija učinkovitega trga	10
3.2. Racionalnost investorjev in vedenjska ekonomija	11
4. Fraktali	12
4.1. Samopodobni liki in oblike	12
4.2. Samopodobni procesi	15
5. Hurstov eksponent	17
5.1. R/S količnik	17
5.2. Procesni z dolgoročnim spominom	18
5.3. R/S analiza	19
6. Teorija fraktalnega trga	22
7. Zaključek	23
Literatura	24

Modeliranje sprememb cen delnic z uporabo teorije učinkovitega in teorije fraktalnega trga

POVZETEK

Diplomsko delo obravnava nekatere matematične in ekonomske modele za modeliranje gibanja cen vrednostnih papirjev. Osredotoča se predvsem na model Brownovega gibanja in predlaga nekaj možnih rešitev za slabosti tega modela. V uvodu je predstavljenih nekaj osnovnih definicij, ki so pomembne za razumevanje nadaljnjih poglavij. V drugem in tretjem poglavju sta predstavljena matematični model Brownovega gibanja oz. Wienerjev proces in teorija učinkovitega trga, ki je ekonomski temelj matematičnemu modelu. Na podlagi ugotovitev pri primerjavi simulacij Brownovega gibanja z empiričnimi podatki sta navedeni dve slabosti tega modela. Četrto, peto in šesto poglavje obravnavajo možnosti rešitve teh dveh problemov s pomočjo teorije fraktalov, samopodobnimi procesi in teorijo fraktalnega trga, ter predlagajo dva modela, ki bi lahko bila ustreznejša.

Modelling stock prices using efficient market hypothesis and fractal market hypothesis

ABSTRACT

In this thesis we deal with some mathematical and economic models for modelling security prices on stock markets. It focuses primarily on Brownian motion model and suggests possible solutions to the weaknesses of this model. Some basic definitions are given in the introduction for the purpose of understanding subsequent sections. Sections 2 and 3 present Brownian motion, called also Wiener process, and efficient market hypothesis which is the corresponding economic theory to the mathematical model. Two weaknesses of the Brownian motion are presented while comparing simulations to empirical data. Sections 4, 5 and 6 propose a solution to the problem through fractal theory, self-similar processes and fractal market hypothesis and suggest two mathematical models that could be more relevant.

Math. Subj. Class. (2010): 60J65, 28A80, 60G18

Ključne besede: Brownovo gibanje, teorija učinkovitega trga, fraktali, samopodobni procesi, Hurstov eksponent, procesi z dolgoročnim spominom, R/S analiza, teorija fraktalnega trga.

Keywords: Brownian motion, efficient market hypothesis, fractals, self-similar processes, Hurst exponent, long-memory processes, R/S analysis, fractal market hypothesis.

1. UVOD

Glavni cilj trgovanja z vrednostnimi papirji je pridobiti čim več informacij, ki bi trgovcem zagotovile več samozavesti pri napovedovanju prihodnjega stanja cen vrednostnih papirjev. Analiziranje finančnih časovnih vrst s pomočjo matematike, statistike in različnih računskih tehnik, ki pomaga trgovcem z vrednostnimi papirji razumeti dinamiko trga in jim daje neko mero zaupanja v prihodnje cene vrednostnih papirjev, je zato dobro uveljavljena praksa. Kot dobro orodje za tovrstne analize se je izkazalo modeliranje slučajnih procesov in uporaba nekaterih parcialnih diferencialnih enačb za opisovanje finančnih sistemov.

Poskusi, da bi finančne časovne vrste modelirali s slučajnimi procesi, so se začeli že v začetku dvajsetega stoletja, ko je Louis Bachelier predlagal, da bi na nihanja cen vrednostnih papirjev lahko gledali kot na slučajni sprehod, kjer je vsaka sprememba cene vrednostnega papirja povsem neodvisna od druge (naključna vrednost, dodana včerajšnji ceni nam da današnjo ceno vrednostnega papirja). Iz te teorije so se kasneje razvili še danes uporabljani matematični modeli, s katerimi poskušamo analizirati različne lastnosti finančnih časovnih vrst, uporabljajo pa se tudi na drugih področjih znanosti (npr. v fiziki in biologiji). Najpomembnejši med njimi je Brownovo gibanje, ki je osrednja tema tega diplomskega dela. Za namene boljšega razumevanja nadaljnjih poglavij definirajmo naslednje pojme:

Definicija 1.1. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ verjetnostni prostor, (E, \mathcal{E}) merljiv prostor (prostor stanj). Potem nabor slučajnih spremenljivk $X = \{X_t\}_t$, $X_t : \Omega \rightarrow E$, kjer je t element neke indeksne množice $\Lambda \neq \emptyset$, imenujemo *slučajni proces*.

Slučajni proces X je *diskreten*, če je $\Lambda = \mathbb{N}$, torej je $X = \{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ števna množica slučajnih spremenljivk, indeksirana z nenegativnimi celimi števili, ali *zvezen*, če je $\Lambda = [0, \infty)$, torej je $X = \{X_t, 0 \leq t < \infty\}$ neštevna množica slučajnih spremenljivk, indeksirana z nenegativnimi realnimi števili.

Definicija 1.2. Naraščajoče zaporedje σ -algeber $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}_n \subseteq \dots \subseteq \mathcal{F}$ imenujemo *diskretna filtracija*. Za zaporedje slučajnih spremenljivk $(X_n)_{n \geq 0}$ obstaja *naravna filtracija* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$, to je σ -algebra generirana z X_0, X_1, \dots, X_n , ki je najmanjša σ -algebra, glede na katero so X_0, X_1, \dots, X_n merljive slučajne spremenljivke. Družino σ -algeber $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ imenujemo *zvezna filtracija*, če velja za $s \leq t$, $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$. Za proces $(X_t)_{t \geq 0}$ je naravna filtracija dana tako, da je $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ najmanjša σ -podalgebra \mathcal{F} , glede na katero so merljive slučajne spremenljivke $X_s, \forall s \leq t$.

Definicija 1.3. Slučajni proces $\{X_t\}_{t \geq 0}$ z vrednostmi v merljivem prostoru (E, \mathcal{E}) in naravno filtracijo \mathcal{F}_t imenujemo *proces Markova*, če za poljubna $t, u \geq 0$ in $A \in \mathcal{E}$ skoraj gotovo velja

$$P(X_{t+u} \in A | \mathcal{F}_t) = P(X_{t+u} \in A | X_t).$$

Markovsko lastnost imenujemo tudi *lastnost nepomnjenja*, saj pove, da je prihodnje stanje slučajnega procesa odvisno le od trenutnega stanja, ne pa tudi od prejšnjih.

Definicija 1.4. Naj bo $\{X_i\}_{i \geq 0}$ slučajni proces, kjer so X_i neodvisne, enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Za vsak $n \in \mathbb{N}_0$ naj bo $S_n = X_0 + X_1 + \dots + X_n$. Zaporedje $\{S_n\}_{n \geq 0}$ imenujemo *slučajni sprehod*.

Primer 1.5. Enostavni simetrični slučajni sprehod. Slučajni sprehod, za katerega velja, da je $X_0 = 0$ in $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ imenujemo enostavni

simetrični slučajni sprehod. Pričakovana vrednost $E(X_i)$ je enaka 0, varianca $D(X_i)$ pa je enaka 1. V koordinatnem sistemu ga lahko predstavimo kot pot delca, ki začne v točki $(0, 0)$, nato pa se z vsakim korakom po x -osi dvigne ali spusti za 1 enoto na y -osi.

Lema 1.6. *Slučajni proces z neodvisnimi prirastki je proces Markova.*

Dokaz. Dovolj je pokazati, da velja:

$$E[f(X_{t+u})|\mathcal{F}_t] = E[f(X_{t+u})|X_t],$$

za vsako omejeno merljivo funkcijo f na merljivem prostoru (E, \mathcal{E}) . Naj bo f taka funkcija. Vemo tudi, da neodvisnost prirastkov pomeni, da je slučajna spremenljivka $X_{t+h} - X_t$, $t \geq 0$, $h > 0$, neodvisna od σ -algebre \mathcal{F}_t . Potem velja:

$$E[f(X_{t+h})|\mathcal{F}_t] = E[f(X_{t+h} - X_t + X_t)|\mathcal{F}_t] = E[f(X_{t+h} - X_t + X_t)|X_t].$$

□

2. BROWNOVO GIBANJE

Pojav je leta 1827 odkril botanik Robert Brown, ko je opazoval delčke peloda, ki so se z nenavadnimi gibi premikali v vodi. Ugotovil je, da se podobno giblje tudi neorganska snov, zato je izključil možnost, da delci premikajo zato ker so živi, vendar fenomena ni znal pojasniti. Kasneje ga je študiral in pojasnil Einstein, matematično korektno pa ga je konstruiral Wiener, zato se imenuje tudi Wienerjev proces. Pojavlja se v fiziki, teoretični in praktični matematiki, ekonomiji in kvantitativnih financah, najbolj pa izstopa kot pomemben del Black-Scholesovega modela za vrednotenje opcij. Eden izmed razlogov, zakaj je Wienerjev proces tako priljubljen pa je dejstvo, da je dovolj enostaven, s čimer omogoča veliko orodij za izračun statističnih lastnosti opazovanega pojava.

Brownovo gibanje lahko karakteriziramo kot limito slučajnega sprehoda. Naj bo $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ enostavni simetrični slučajni sprehod kot v primeru 1.5. Potem zaradi centralnega limitnega izreka velja:

$$\frac{S_n - nE(X_i)}{\sqrt{nD(X_i)}} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} N(0, 1).$$

Sedaj lahko definiramo tako funkcijo W_t^n za $t \in [0, \infty)$, da velja:

$$W_t^n = \frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}},$$

kjer je $[nt]$ največje celo število, ki je manjše od nt . Funkcijo lahko zapišemo tudi kot $W_t^n = W^n(t)$. Da se pokazati [35], da ko gre $n \rightarrow \infty$, $W^n(t)$ v porazdelitvi konvergira k slučajnemu procesu $W(t)$, imenovanemu Brownovo gibanje.

2.1. Standardno Brownovo gibanje.

Definicija 2.1. *Brownovo gibanje* je slučajni proces $W(t)$, kjer je $t \geq 0$, za katerega veljajo naslednje lastnosti:

- (1) $W(0) = x$,
- (2) prirastki $W(t_n) - W(t_{n-1}), \dots, W(t_2) - W(t_1)$ so neodvisne slučajne spremenljivke za vse $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$,
- (3) za vse $t \geq 0$ in $h > 0$ so prirastki $W(t+h) - W(t)$ normalno porazdeljeni s pričakovano vrednostjo 0 in varianco h ,

(4) funkcija $t \rightarrow W(t)$ je zvezna skoraj gotovo.

Če velja (1*) $W(0) = 0$, se tak proces imenuje *standardno Brownovo gibanje*.

Zaradi stacionarnosti in neodvisnosti prirastkov po lemi 1.6 sledi, da je Brownovo gibanje proces Markova in ima lastnost nepomnjenja. Videli bomo tudi, da je Brownovo gibanje samopodoben proces. Obe lastnosti sta pomembni za izpostavljanje slabosti modeliranja procesov s pomočjo Brownovega gibanja in iskanje boljših rešitev.

Iz točk (2) in (3) se da videti, da je Brownovo gibanje mogoče aproksimirati s kumulativnimi vsotami zaporedja normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Ker je taka aproksimacija diskretna, jo z manjšanjem velikosti koraka poskušamo bolj približati zvezni. S tako aproksimacijo lahko simuliramo korake standardnega Brownovega gibanja v programskem jeziku R (algoritem 1).

Korak z dolžino 1:

$$W(0) = 0$$

$$W(1) = W(0) + N(0, 1)$$

$$W(2) = W(1) + N(0, 1)$$

...

Korak z dolžino $\frac{1}{n}$:

$$W(0) = 0$$

$$W\left(\frac{1}{n}\right) = W(0) + N\left(0, \frac{1}{n}\right) = W(0) + \frac{1}{\sqrt{n}}N(0, 1)$$

$$W\left(\frac{2}{n}\right) = W\left(\frac{1}{n}\right) + N\left(0, \frac{1}{n}\right) = W\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{\sqrt{n}}N(0, 1)$$

...

Algoritem 1 Simulacija standardnega Brownovega gibanja za interval velikosti T in korak dolžine h

```
sbm <- function(T,h){  
  return(cumsum(sqrt(h)*rnorm(T/h,0,1)))  
}
```

Algoritem za simulacijo Brownovega gibanja vrne vektor kumulativnih vsot dolžine $\frac{1}{h}$. Če za majhen korak h simulirane vrednosti narišemo na graf in točke povežemo, dobimo približek zveznega gibanja (slika 1). Ta model lahko zavzame negativne vrednosti, zato za simulacijo gibanja cen vrednostnih papirjev ni primeren.

Alternativni model, ki naslavlja ta problem in je bolj uporaben za modeliranje finančnih in drugih procesov, ki so nenegativni z verjetnostjo 1, je geometrično Brownovo gibanje. Temelji na Itōvi integraciji in razširitvi standardnega Brownovega gibanja, imenovani Brownovo gibanje z zdrsom oz. aritmetično Brownovo gibanje. Le-to nam omogoča tudi, da v simulaciji upoštevamo trend (dolgoročno naraščanje oz. padanje) in razpršenost gibanja cene vrednostnega papirja.

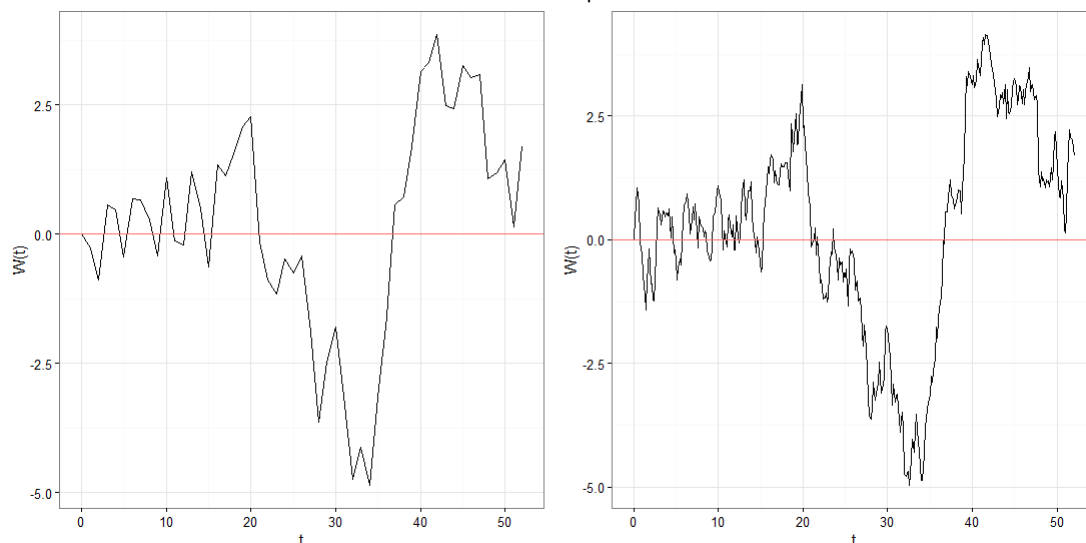
2.2. Aritmetično Brownovo gibanje.

Definicija 2.2. Naj bo $W(t)$ standardno Brownovo gibanje in μ in σ neki konstanti. Potem je

$$X(t) = \sigma W(t) + \mu t, \quad t \geq 0$$

aritmetično Brownovo gibanje s koeficientom zdrsa μ in koeficientom razpršenosti σ^2 .

SLIKA 1. Graf simulacije standardnega Brownovega gibanja za korak z dolžino 1 (levo) in korak z dolžino $\frac{1}{7}$ (desno)



2.3. Geometrično Brownovo gibanje. Namen tega razdelka je kratek opis geometričnega Brownovega gibanja, saj je z vidika simulacije gibanja cen vrednostnih papirjev primernejši od standardnega Brownovega gibanja. V finančni matematiki je pomemben predvsem zato, ker je osnovna predpostavka v Black-Scholesovem modelu vrednotenja opcij. V nadaljevanju tega diplomskega dela pa se bom bolj osredotočila na nekatere lastnosti standardnega Brownovega gibanja, ki jih geometrijsko Brownovo gibanje nima (porazdelitev ni normalna, prav tako to ni samopodoben proces).

Definicija 2.3. *Geometrično Brownovo gibanje* $S(t)$ s koeficientom zdrsa μ in koeficientom razpršenosti σ^2 je rešitev stohastične diferencialne enačbe

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \quad t \geq 0,$$

kjer je $W(t)$ standardno Brownovo gibanje, μ in σ , $\mu, \sigma > 0$, pa sta konstanti. Rešujemo z uporabo Itôve formule [1]

$$\begin{aligned} d(\log S(t)) &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW(t), \\ \log S(t) &= \log S(0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t). \end{aligned}$$

Z antilogaritmiranjem dobimo rešitev enačbe:

$$S(t) = S(0)e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)},$$

kjer je $S(0) > 0$ neka začetna vrednost.

Geometrično Brownovo gibanje je nenegativno za vsak $t \geq 0$, saj eksponentna funkcija lahko zavzame samo pozitivne vrednosti. Zaradi neodvisnosti prirastkov originalnega Brownovega gibanja pa velja, da je to proces Markova, zato nima dolgoročnega spomina.

Podobno kot v prejšnjem razdelku lahko v programskem jeziku R simuliramo korake geometričnega Brownovega gibanja (algoritem 2). Jasno je, da z vsakim novim zagonom algoritma dobimo drugačno trajektorijo gibanja, saj se vrednosti prirastkov generirajo naključno, v skladu z normalno porazdelitvijo. Kot se bo izkazalo kasneje, nam tak prikaz simulacije onemogoča odkrivanje morebitnih slabosti modela.

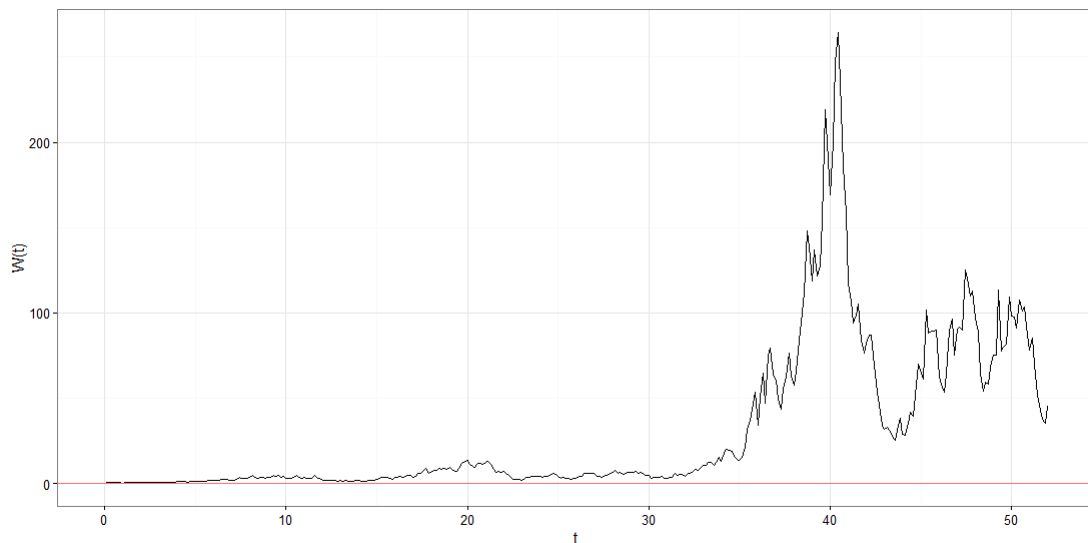
Algoritem 2 Simulacija geometričnega Brownovega gibanja s parametri T (velikost intervala), h (dolžina koraka), u (koeficient zdrsa), s (koeficient razpršenosti) in x (začetna vrednost)

```
gbm <- function(T,h,u,s,x){
  t <- (1:(T/h))/(T/h)
  W <- sbm(T,h)
  p1 <- (u-0.5*s^2)*t
  p2 <- s*W
  return(x*exp(p1+p2))
}
```

Opomba 2.4. V algoritmu 2 je čas t podan v deležu od celote števila vseh korakov. Običajno se pri simulacijah gibanja cen vrednostnih papirjev uporablja delež

$$t = \frac{\text{dan}}{\text{število vseh dni v letu}}.$$

SLIKA 2. Graf simulacije geometričnega Brownovega gibanja za $\mu = 0.8$, $\sigma = 0.5$, začetno vrednost 1 in korak z dolžino $\frac{1}{7}$



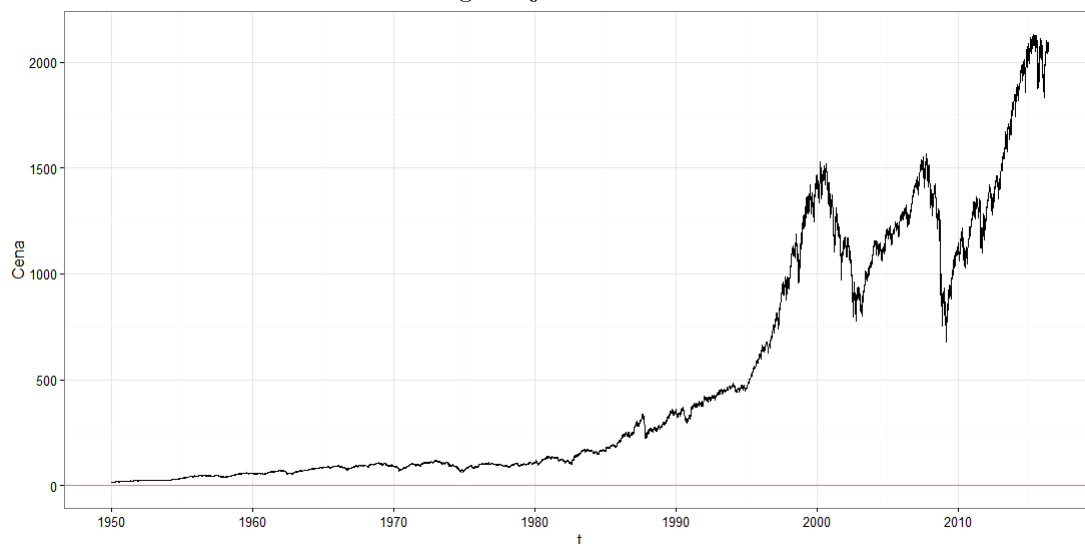
2.4. Primerjava modelov z empiričnimi podatki. Da bi ugotovili, ali je model Brownovega gibanja ustrezen za simuliranje gibanja cen vrednostnih papirjev in izpostavili njegove morebitne šibkosti, ga primerjajmo s podatki o gibanju cen pravih vrednostnih papirjev.

Za primerjavo sem izbrala indeks Standard & Poor 500, krajše S&P 500. Ta indeks sestoji iz uteženih cen petstotih vrednostnih papirjev, ki jih izbere odbor družbe Standard & Poor glede na različne kriterije (delež na trgu, likvidnost, industrijska panoga ipd.) tako, da čim natančneje odražajo stanje celotnega trga vrednostnih papirjev v ZDA. Graf gibanja cen indeksa S&P 500 (slika 3) prikazuje dnevne podatke o vrednosti tega indeksa za časovno obdobje od leta 1950 do 2016. Podatki so pridobljeni iz [27].

Kot je bilo omenjeno v razdelku 2.3, nam primerjava grafov s trajektorijami gibanja cen (sliki 2 in 3) ne omogoča, da bi ocenili ustreznost modela, saj je realizacija

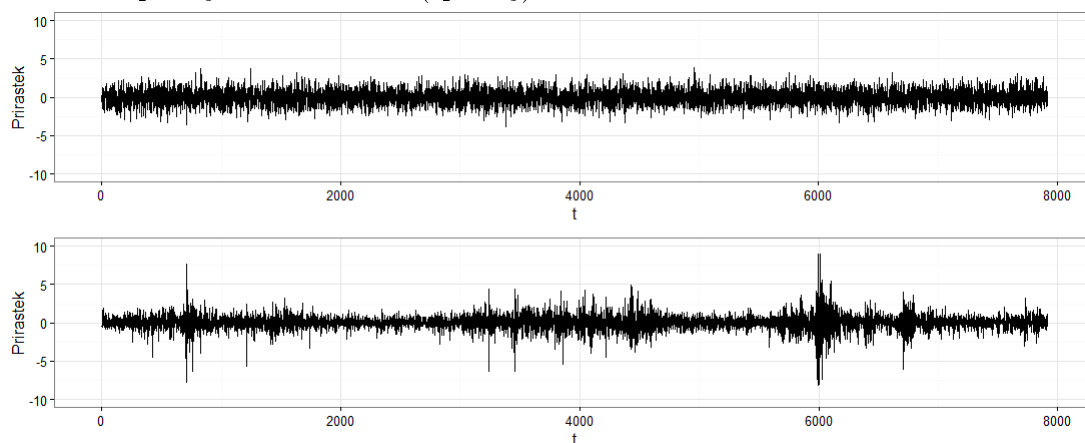
simulacije lahko ob vsakem zagonu algoritma drugačna. Boljšo primerjavo dobimo z izrisom logaritmiranih vrednosti grafov prirastkov indeksa S&P 500 z odpravljenim trendom (slika 4). Za primerjavo grafov prirastkov ni več nujno zahtevati, da ima trajektorija simulacije Brownovega gibanja pozitivno vrednost na celotnem intervalu, zato se v nadaljevanju osredotočimo na model standardnega Brownovega gibanja, ki ima lepše lastnosti kot geometrično in ga zato lahko lažje analiziramo.

SLIKA 3. Graf gibanja cen indeksa S&P 500



Prirastke indeksa S&P 500 lahko primerjamo s prirastki standardnega Brownovega gibanja namesto s prirastki geometričnega Brownovega gibanja zato, ker smo odpravili trend in vrednosti logaritmirali. Prirastki so v vsaki realizaciji simulacije standardnega Brownovega gibanja porazdeljeni normalno, zato so si grafi zelo podobni in primernejši za primerjavo z dejanskimi podatki o gibanju cen vrednostnih papirjev. Zaradi boljše preglednosti so na grafu prirastkov za indeks S&P 500 prikazani podatki od leta 1985 dalje.

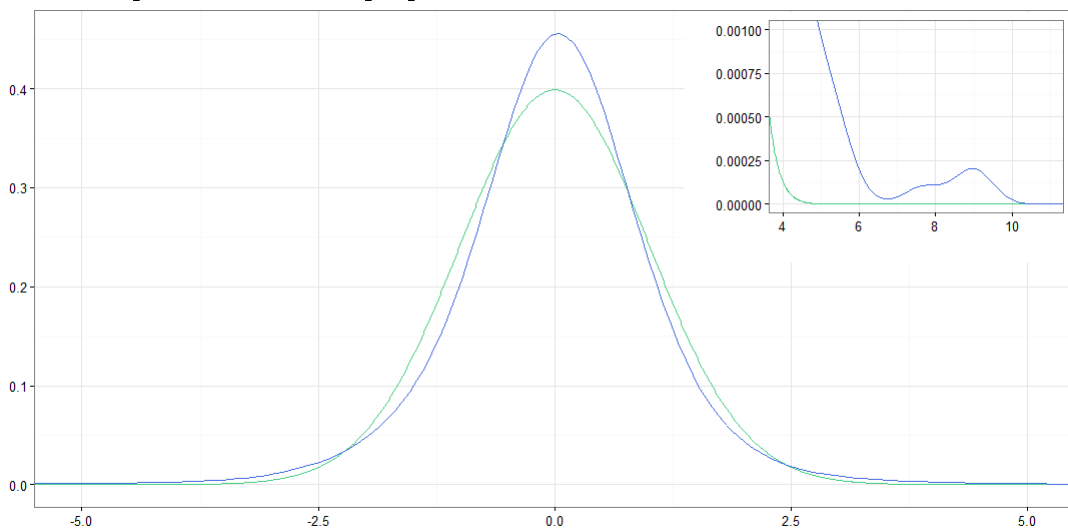
SLIKA 4. Graf prirastkov pri simulaciji standardnega Brownovega gibanja (zgoraj) in graf prirastkov logaritmiranih cen indeksa S&P 500 z odpravljenim trendom (spodaj)



Grafa prirastkov (slika 4) se razlikujeta predvsem po največjih absolutnih višinah prirastkov. Na grafu s prirastki indeksa S&P 500 lahko opazimo nekaj primerov, ki po velikosti močno izstopajo, medtem ko graf prirastkov Brownovega gibanja takih izjem nima. Zaradi predpostavke, da so prirastki normalno porazdeljeni, s standardnim Brownovim gibanjem namreč ni mogoče modelirati ekstremnih vrednosti.

Porazdelitve, ki dopuščajo možnost pojava ekstremne vrednosti, imenujemo *porazdelitve z dolgim repom*. Verjetnost ekstremnega dogodka je sicer majhna, a znatno višja kot pri normalni porazdelitvi, kjer je verjetnost takega dogodka praktično ničelna (slika 5).

SLIKA 5. Graf porazdelitve prirastkov cen indeksu S&P 500 (modra) in standardne normalne porazdelitve (zeleni). Zgoraj desno je prikazana povečana slika repa porazdelitev.



V naslednjem poglavju bomo s pogledom na model Brownovega gibanja z ekonomskega stališča pokazali še eno njegovo slabost.

3. TEORIJA UČINKOVITEGA TRGA

Teorija učinkovitega trga (angl. efficient market hypothesis) je ekonomska teorija, ki podpira predpostavke Brownovega gibanja. Prvi jo je definirala Eugene Fama leta 1965 v svoji doktorski disertaciji *The Behaviour of Stock Market Prices* [10], kjer je preučeval gibanje cen vrednostnih papirjev in zaključil, da se le-te gibajo naključno, v skladu s slučajnim sprehodom. Paul Samuelson je istega leta prišel do podobnih zaključkov v članku *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly* [29] po predpostavki, da je trg vrednostnih papirjev martingal, tj. model poštene igre.

3.1. Definicija učinkovitega trga. Teorija učinkovitega trga pravi, da cena vrednostnega papirja na trgu odraža vse informacije, ki so dosegljive v tistem trenutku, zato se spremeni zgolj takrat, ko se pojavi kakšna nova informacija in je vedno enaka svoji notranji vrednosti. Da bi to držalo, mora veljati, da so vsi investitorji na takem trgu racionalni, tj. da vsako novo informacijo pravilno ovrednotijo in se nanjo takoj odzovejo. Na učinkovitem trgu si z nobeno strategijo trgovanja ne moremo povečati donosnosti. Večji zaslužki so mogoči le, če investitor sprejme večje tveganje. Zaslužek je enak, kot če bi vrednostne papirje v svoj portfelj izbrali naključno.

Ker predpostavljamo, da so vse informacije na trgu znane vsem investitorjem, to pomeni, da je vsaka nova informacija neodvisna od preteklih informacij in zato nasključna. Namreč, če bi bile informacije odvisne od preteklih informacij, bi se jih dalo predvideti že prej in ne bi bile nove. Temu pravimo, da trg nima spomina.

Teorija učinkovitega trga torej predpostavlja, da se cene vrednostnih papirjev gibajo v skladu s slučajnim sprehodom in se zato ujema z matematičnim modelom Brownovega gibanja.

Veljavnost teorije učinkovitega trga so preverjali mnogi. Obstajajo empirične raziskave, ki teorijo potrjujejo in takšne, ki jo zavračajo. V nadaljevanju bom eno izmed njenih predpostavk preverila s stališča vedenjske ekonomije. Videli bomo, da imata teorija učinkovitega trga in model Brownovega gibanja poleg neustreznih porazdelitev prirastkov še eno slabost.

3.2. Racionalnost investitorjev in vedenjska ekonomija. *Vedenjska ekonomija* je veja ekonomije, ki preučuje vedenje človeka s pomočjo psihologije, sociologije in nevroznanosti, da bi pojasnila njegove ekonomske odločitve. Osredotoča se predvsem na človeško neracionalnost pri odločanju in ugotavlja, kako ta vpliva na ekonomske modele.

Teorija učinkovitega trga lahko drži le ob predpostavki, da so investitorji racionalni, saj s tem kolektivno določijo pravo vrednost delnice. Racionalnost lahko definiramo kot zmožnost pravilnega in takojšnjega ovrednotenja vrednostnih papirjev v skladu z vsemi dosegljivimi informacijami. Peters ([25], [26]) racionalnost opisuje tudi kot investitorjevo nenaklonjenost tveganju. V nadaljevanju so predstavljene nekatere ugotovitve vedenjske ekonomije glede racionalnosti posameznika pri vrednotenju dobljenih informacij. Izkaže se, da investitorji niso vedno racionalni.

Nenaklonjenost izgubi. Če gre za minimiziranje izgub, bo investitor verjetno bolj naklonjen tveganju. V primeru, da ima investitor možnost, da zagotovo dobi 85.000 evrov ali pa z verjetnostjo 85% dobi 100.000 evrov in z verjetnostjo 15% ne dobi nič, bo najverjetneje izbral prvo možnost, čeprav sta pričakova dobička enaka, torej bo nenaklonjen tveganju. Če pa ima investitor možnost, da zagotovo izgubi 85.000 evrov ali pa z verjetnostjo 85% izgubi 100.000 evrov in z verjetnostjo 15% ne izgubi nič, bo najverjetneje izbral drugo možnost, čeprav sta pričakovani izgubi enaki, torej bo bolj naklonjen tveganju.

Strah pred obžalovanjem. Teorija obžalovanja (angl. regret theory) pravi, da lahko investitorji reagirajo neracionalno, če ugotovijo, da so storili napako. Zaradi strahu pred obžalovanjem, da je kupil vrednostni papir, ki mu je cena kasneje močno padla, se bo investitor izognil prodaji tega vrednostnega papirja. Strah pred obžalovanjem lahko povzroči, da investitorji postanejo bolj naklonjeni tveganju.

Miselno računovodstvo. Ljudje smo nagnjeni k temu, da dobljene informacije v mislih razporedimo. Razlike med razporeditvijo informacij imajo lahko večji vpliv na naše obnašanje kot pa razlike med informacijami samimi. To lahko razložimo na naslednjem primeru. Odpravimo se v gledališče, kjer vstopnica stane 20€. Ko pridemo do gledališča, ugotovimo, da smo izgubili 20€. Ugotovitve vedenjske ekonomije kažejo, da bi kljub izgubi denarja večina ljudi vseeno kupila vstopnico. V primeru ko pa bi vstopnico kupili vnaprej, a jo pozabili doma, pa se večina ljudi za nakup nove vstopnice ne bi odločila, čeprav v obeh primerih izgubimo 40€. Zaradi razporejanja informacij se lahko investitor obotavlja pri prodaji vrednostnega papirja, ki je bil

v preteklosti veliko bolj dobičkonosen kot pa je v tem trenutku, saj upošteva zgolj dejstvo, da vrednostni papir prinaša dobiček, ne pa višine dobička.

Sidranje. Pogosto se ob odsotnosti novih ali boljših informacij zgodi, da investitorji pri vrednotenju vrednostnih papirjev upoštevajo informacijo, ki jo sicer imajo, a sploh ni pomembna. Običajno kot pomemben pokazatelj prave vrednosti cene vrednostnega papirja upoštevajo ceno, ki jo ima ta vrednostni papir trenutno na trgu, tj. sidrišče.

Prevelika ali premajhna odzivnost. V obdobjih rasti cen investitorji velikokrat postanejo preveč optimistični, saj pričakujejo, da bodo cene še naprej rasle. Po drugi strani pa postanejo pesimistični, ko cene padajo, saj pričakujejo, da bodo padale še naprej. Na novo informacijo se odzovejo premočno ali pa se ne odzovejo dovolj. Posledično lahko pride lahko do panike in zloma trga vrednostnih papirjev.

Pretirana samozavest. Investitorji so nagnjeni k preveč samozavestnim napovedim dogajanja na trgu, saj precenijo svoje zmožnosti vrednotenja informacij. Posledica pretirane samozavesti je prekomerno trgovanje, zaradi katerega nastanejo visoki transakcijski stroški, ki zmanjšujejo dobiček.

Čredno obnašanje. Investitorji so nagnjeni k mimetičnemu obnašanju. To pomeni, da bodo pogosto kupovali delnice, ki jih kupujejo tudi drugi, čeprav za to ne bodo imeli dobrega razloga.

Zaradi neracionalnosti investitorjev se lahko zgodi, da cena vrednostnega papirja še ne odraža vseh informacij, ki so v tistem trenutku na voljo na trgu. Na nekatere informacije se lahko odzovejo z zamikom.

Obstajajo tudi druge raziskave, ki ugotavljajo povezanost nekaterih karakteristik vrednostnega papirja s prihodnjim gibanjem cene. Primera takšne povezanosti sta na primer t.i. *efekt velikosti*, ki pravi, da bo cena vrednostnih papirjev manjših podjetij rasla z večjo verjetnostjo kot pa cena vrednostnih papirjev večjih podjetij, ter primer *cenovno ugodnih vrednostnih papirjev* (angl. value stock), ki naj bi prinašali višje donose od vrednostnih papirjev, ki imajo višje razmerje med ceno in dobičkom podjetja (angl. growth stock).

Vse našteje anomalije teorije učinkovitega trga nam omogočajo nekaj predvidevanja glede prihodnjega gibanja cen vrednostnih papirjev, kar pa kaže na to, da ni nujno res, da trg nima spomina, zato prirastki cen niso nujno neodvisni. Iz razdelka 2.4 pa vemo tudi, da prirastki niso porazdeljeni normalno, temveč empirični podatki kažejo, da imajo njihove porazdelitve dolge repe. V naslednjih poglavjih bomo ugotavljali, ali obstajajo kakšni drugi modeli, s katerimi bi lahko ti dve šibkosti modela Brownovega gibanja oziroma teorije učinkovitega trga bolje modelirali. Kot bomo videli, je to do neke mere mogoče z uporabo teorije fraktalov.

4. FRAKTALI

4.1. Samopodobni liki in oblike. Naravne pojave in oblike običajno poskušamo matematično opisati s pomočjo Evklidske geometrije. Gora ima na primer obliko stožca, kamen je podoben krogli, drevesno deblo pa valju. Takšni opisi pa so zgolj abstraktni približki realnosti. Da bi zahtevnejše geometrične oblike matematično lahko natančneje opredelili, uporabljamo drugačno obliko geometrije, ki jo imenujemo *fraktalna geometrija*. Pojem fraktalnosti je prvi predstavil Benoit Mandelbrot

leta 1983 v svoji knjigi *The Fractal Geometry of Nature* [20], zato ga mnogi imenujejo kar oče fraktalne geometrije. Svoje definicije fraktalov je večkrat popravljaj, pa tudi kasneje so svoje drugačne poglede na fraktalnost opisovali drugi matematiki in znanstveniki.

Točna, vsesplošno sprejeta definicija fraktalnosti torej ne obstaja. Za potrebe tega diplomskega dela bom navedla dve, ki se največkrat pojavita v literaturi.

Definicija 4.1. *Fraktal* je geometrična oblika, katere manjši deli so v nekem smislu podobni celoti. Rečemo, da so fraktali *samopodobni*.

Primer fraktalnega lika je trikotnik Sierpinskega (slika 6). Vsaka izmed iteracij trikotnika se v pomanjšani obliki pojavi v naslednji iteraciji.

SLIKA 6. Trikotnik Sierpinskega [31]



Fraktali imajo lastnost, imenovano fraktalna dimenzija oz. dimenzija samopodbnosti. Z njo opišemo, kako fraktalen lik zapolni prostor v katerem se nahaja. Karakterizacija fraktalne dimenzije omogoča tudi natančnejšo opredelitev pojma fraktala (definicija 4.5).

Definicija 4.2. *Fraktalna dimenzija* D pove, koliko manjših kopij lika se bo prilegalo v večji lik. Izračunamo jo z naslednjo formulo:

$$\text{št. manjših kopij} = \text{povečava kopije}^D$$

Primer 4.3. Izračunajmo fraktalno dimenzijo trikotnika Sierpinskega. Vidimo lahko (slika 6), da so znotraj trikotnika iz druge iteracije tri manjše kopije trikotnika iz prve iteracije. Vsaka je pomanjšana za faktor 2, saj je dolžina stranice vsakega izmed manjših trikotnikov enaka polovici dolžine stranice večjega trikotnika. Po zgornji enačbi torej velja:

$$3 = 2^D.$$

Z logaritmiranjem dobimo:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585.$$

Opomba 4.4. V literaturi se pojavljajo tudi druge definicije fraktalne dimenzije. To so na primer kapacitetna dimenzija (angl. capacity dimension), Hausdorffova dimenzija in dimenzija štetja škatel (angl. box-counting dimension). Vse na podoben način kot definicija 4.2 opisujejo lastnosti fraktalnega lika na različnih skalah [12].

Fraktalna dimenzija D je mera samopodbnosti, saj njena vrednost ostaja enaka ne glede na skalo, s katere gledamo na fraktalni lik, pove pa tudi, da ima fraktal tako lastnosti $[D]$ -dimenzionalnih kot tudi $[D]$ -dimenzionalnih objektov, ki jih intuitivno bolje razumemo. Da bi definirali fraktal s pomočjo fraktalne dimenzije, pa razložimo še pojem topološke dimenzije. Topološka dimenzija je enaka našemu intuitivnemu pojmovanju dimenzije. Topološka dimenzija točke je enaka 0, črte 1, ravnine 2, kocke pa 3. Karakterizaciji fraktalne in topološke dimenzije lahko zdaj uporabimo za natančnejšo definicijo fraktala.

Definicija 4.5. *Fraktal* je geometrična oblika, katere fraktalna dimenzija je večja od njene topološke dimenzije.

Primer 4.6. Topološka dimenzija trikotnika Sierpinskega je 1, saj v limiti iteriranja trikotnika dobimo strukturo iz črt, topološka dimenzija le-teh pa je 1. Iz primera 4.3 sledi:

$$D = 1,585 > 1,$$

torej je trikotnik Sierpinskega fraktal.

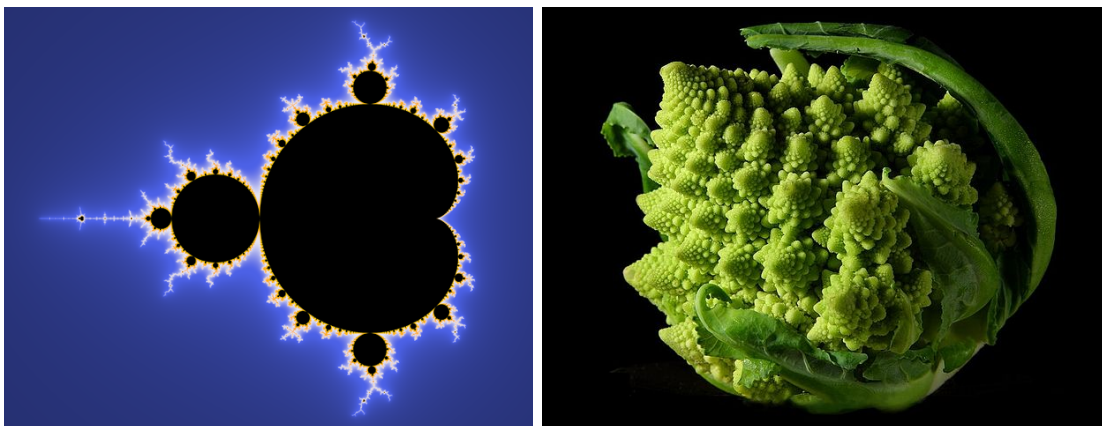
Poznamo tri vrste samopodobnosti, ki jih bom predstavila v nadaljevanju:

- popolna samopodobnost (angl. exact self-similarity),
- delna samopodobnost (angl. irregular self-similarity) in
- statistična samopodobnost.

Liki, kot je trikotnik Sierpinskega, so *popolnoma samopodobni*, obstajajo pa tudi fraktali, ki so *deloma samopodobni*. Ti imajo na različnih skalah podobne vzorce, vendar so ti lahko popačeni in nepravilnih oblik. Primera takega fraktala sta Mandelbrotova in Juliajeva množica. Deloma samopodobni fraktali se pojavljajo tudi v naravi. Naravni fraktali so na primer drevesa. Vsaka veja se razcepi v več manjših vej, te pa v še manjše. Če bi eno razvejano vejo odžagali, bi bila ta na pogled podobna drevesu samemu, le manjša.

Tretja oblika samopodobnosti je *statistična samopodobnost*. Fraktali, ki so si statistično samopodobni, niso zgrajeni iz manjših, popolnoma enakih kopij samih sebe, ampak so manjši deli le statistično podobni celoti. To pomeni, da imajo na različnih skalah podobne statistične značilnosti. Take fraktale imenujemo *naključni fraktali*. Primer takega fraktala je na primer oblika obale kontinenta, ki jo opazujemo z letala. Z visoke višine se obala zdi kot gladka krivulja, ko pa letimo nižje, je vedno bolj nazobčana. Statistična samopodobnost je samopodobnost, ki jo lahko opazimo tudi pri časovnih vrstah, na primer pri trajektorijah gibanja cen vrednostnega papirja. Če trajektorijo povečamo, tako da prirastki v času vedno manjši, vidimo bolj podrobno sliko.

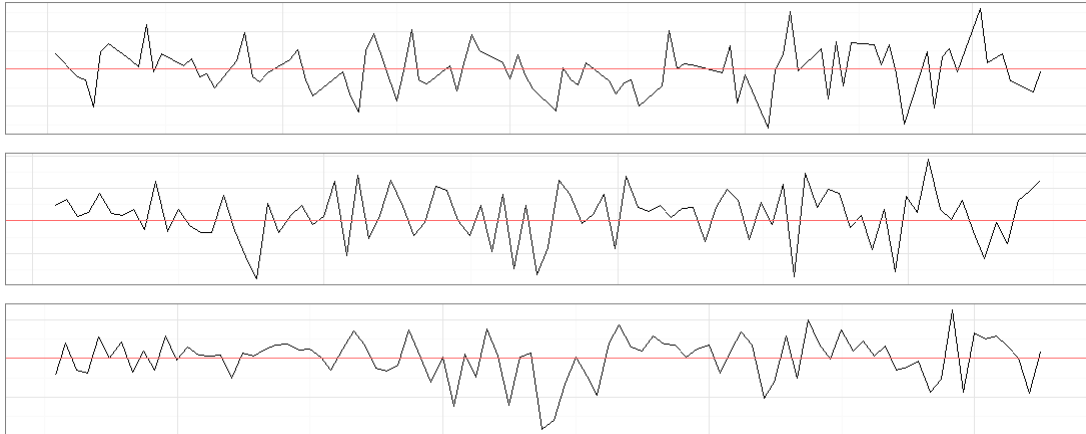
SLIKA 7. Mandelbrotova množica (levo) [21] in primer naravnega fraktala (desno) [13]



Fraktalni liki so si samopodobni glede na prostor, fraktalne časovne vrste pa glede na čas in prostor. Lastnosti samopodobnih časovnih vrst si bomo pogledali v naslednjem razdelku.

4.2. Samopodobni procesi. Samopodobni procesi so slučajni procesi, ki imajo na različnih skalah v času in prostoru vedno enako porazdelitev prirastkov. Kot s primerjavo slik različnih iteracij fraktalnih likov, lahko samopodobnost opazimo tudi pri fraktalnih časovnih vrstah s pomočjo grafov prirastkov (slika 8). Vidimo, da je brez skale na grafih nemogoče določiti, ali gre za dnevne, tedenske ali mesečne prirastke cen, saj so si grafi zelo podobni.

SLIKA 8. Grafi dnevnih, tedenskih in mesečnih donosnosti indeksa S&P 500



Definicija 4.7. Slučajni proces $\{X_t\}_{t \geq 0}$ je *samopodoben* (angl. self-similar), če obstaja tak $H > 0$, da za poljuben $a > 0$ velja:

$$\{X(at)\} \stackrel{(d)}{=} \{a^H X(t)\}, \quad t \geq 0,$$

kjer H imenujemo *samopodobnostni eksponent* procesa X .

Realizacija slučajnega procesa, ki ga opazujemo v diskretnih časovnih točkah je *časovna vrsta*. Obratno, dano časovno vrsto lahko gledamo kot na realizacijo nekega slučajnega procesa, ki ga opazujemo v diskretnih časovnih točkah.

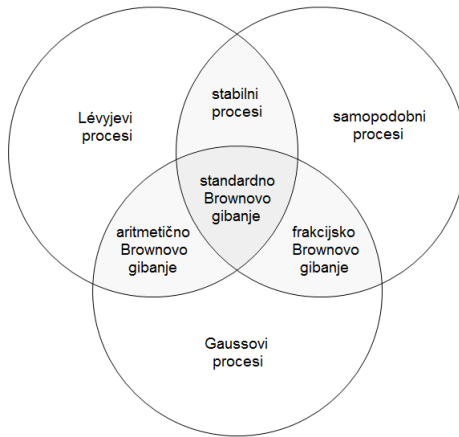
Izkaže se, da za dano časovno vrsto obstaja edinstven eksponent H , za katerega zgornja enačba velja. Samopodobnostni eksponent H imenujemo tudi *Hurstov eksponent*, ki ni le mera samopodobnosti, ampak tudi mera dolgoročnega spomina časovne vrste, vlogo pa ima tudi pri modeliranju procesov z neodvisnimi prirastki, ki imajo porazdelitve z dolgimi repi. Mandelbrot je ta dva, nasprotujoča si načina uporabe samopodobnosti poimenoval *Josephov* in *Noahov efekt*.

Noahov efekt. Opisuje pojav ekstremnih dogodkov oz. visoke variabilnosti v procesu, ki ga opazujemo. Modeliramo ga lahko s procesi, ki imajo neodvisne prirastke in porazdelitve z dolgimi repi. Takšni procesi so na primer α -stabilni Lévyjevi procesi.

Josephov efekt. Z njim poimenujemo obstoj trendov v opazovanem procesu. O takšnem pojavu govorimo na primer, ko zdravi ljudje še naprej ostajajo zdravi ali pa ko zmagovalna ekipa še naprej zmaga. Modeliramo ga lahko s procesi, katerih prirastki so korelirani, na primer s *frakcijskim Brownovim gibanjem* (angl. fractional Brownian motion).

Povezava med samopodobnimi procesi je pojasnjena na sliki 9. Stabilni Lévyjevi procesi, standardno Brownovo gibanje in frakcijsko Brownovo gibanje so vsi samopodobni procesi s pripadajočim samopodobnostnim eksponentom H , se pa razlikujejo v nekaterih pomembnih lastnostih. Stabilni Lévyjevi procesi imajo prirastke porazdeljene s porazdelitvami z dolgimi repi, vendar pa zaradi predpostavke o neodvisnosti prirastkov z njimi ne moremo modelirati dolgoročnega spomina. S frakcijskim Brownovim gibanjem lahko modeliramo dolgoročen spomin, a so njegovi prirastki porazdeljeni normalno, zato z njim ni mogoče modelirati procesov, kjer imajo prirastki težke repe. V nadaljevanju bomo torej morali sprejeti kompromis; problema z dolgoročnim spominom in problema s porazdelitvami z dolgimi repi ne bomo mogli nasloviti v istem modelu.

SLIKA 9. Samopodobni procesi in njihova povezava z Lévyjevimi in Gaussovimi procesi [5, str. 239]



Lema 4.8. Naj bo $W(t)$, $t \geq 0$, standardno Brownovo gibanje. Potem je proces

$$X(t) := \frac{1}{\sqrt{a}}W(at), \quad t \geq 0, \quad a > 0,$$

tudi Brownovo gibanje.

Po definiciji 4.7 je torej standardno Brownovo gibanje samopodoben proces, za katerega je eksponent samopodobnosti oz. Hurstov eksponent enak $H = \frac{1}{2}$. Samopodobnost Brownovega gibanja se da videti, če graf trajektorije gledamo na različnih skalah. Graf, ki je na x -osi povečan za konstanto c in na y -osi povečan za konstanto \sqrt{c} , izleda enako kot prvotni graf.

Dokaz. Očitno velja $X(0) = W(0) = 0$. Naj bo zdaj $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$. Potem velja tudi $0 \leq at_1 \leq at_2 \leq \dots \leq at_n$. Po definiciji standardnega Brownovega gibanja so prirastki

$$W(at_n) - W(at_{n-1}), W(at_{n-1}) - W(at_{n-2}), \dots, W(at_2) - W(at_1)$$

neodvisni in enako porazdeljeni, zato sledi, da so tudi prirastki

$$\frac{1}{\sqrt{a}}W(at_n) - \frac{1}{\sqrt{a}}W(at_{n-1}), \frac{1}{\sqrt{a}}W(at_{n-1}) - \frac{1}{\sqrt{a}}W(at_{n-2}), \dots, \frac{1}{\sqrt{a}}W(at_2) - \frac{1}{\sqrt{a}}W(at_1)$$

neodvisni in enako porazdeljeni, s čimer smo dokazali, da ima proces $X(t)$ neodvisne enako porazdeljene prirastke.

Vemo, da so $W(at+ah) - W(at)$ normalno porazdeljeni, zato so tudi $X(t+h) - X(t)$ normalno porazdeljeni za vsak $t \geq 0$ in $h > 0$. Velja tudi:

$$\begin{aligned} E[X(t+h) - X(t)] &= E\left[\frac{1}{\sqrt{a}}W(at+ah) - \frac{1}{\sqrt{a}}W(at)\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}E[W(at+ah) - W(at)] = 0. \end{aligned}$$

Zadnja enakost velja po definiciji Brownovega gibanja.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X(t+h) - X(t)) &= \text{Var}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}W(at+ah) - \frac{1}{\sqrt{a}}W(at)\right) \\ &= \frac{1}{a}\text{Var}(W(at+ah) - W(at)) \\ &= \frac{1}{a}ah = h. \end{aligned}$$

Ker je skoraj gotovo funkcija $t \rightarrow W(t)$ zvezna, velja, da je skoraj gotovo funkcija $t \rightarrow X(t)$ kompozitum zveznih funkcij, torej je tudi skoraj gotovo zvezna. \square

5. HURSTOV EKSPONENT

Hurstov eksponent je leta 1951 odkril Harold Edwin Hurst, ki je kot hidrolog sodeloval pri preučevanju vodotokov reke Nil. Opazil je, da se količine voda gibljejo v ciklih različnih dolžin: velikim pritokom vode so sledili veliki pritoki vode, nena doma pa se je tok zmanjšal in majhnim pritokom so sledili majhni pritoki. To je nakazovalo, da imajo vodotoki dolgoročen spomin in da niso naključni.

5.1. R/S količnik. Na podlagi meritev ravni vode v zbiralnikih na jezu reke Nil je Hurst ugotovil, da le-te v času nihajo okoli povprečne vrednosti, razpon teh nihanj pa se je spreminjal glede na opazovan časovni interval. Pri časovnih vrstah, kot je na primer standardno Brownovo gibanje, kjer se prirastki gibajo naključno, se razpon nihanj R večja sorazmerno s korenem časa, tj.

$$(1) \quad R \propto \sqrt{t} \text{ oz. } R = Ct^{\frac{1}{2}},$$

saj je standardna deviacija takega procesa enaka $\sigma = \sqrt{t}$. To pomeni, da se bomo na y -osi za korak z velikostjo t na x -osi v povprečju premaknili za \sqrt{t} . Vidimo lahko (slika 10), da so trajektorije simulacij standardnega Brownovega gibanja najbolj zgoščene v predelu, ki je omejen s funkcijo korena časa (zeleno črta).

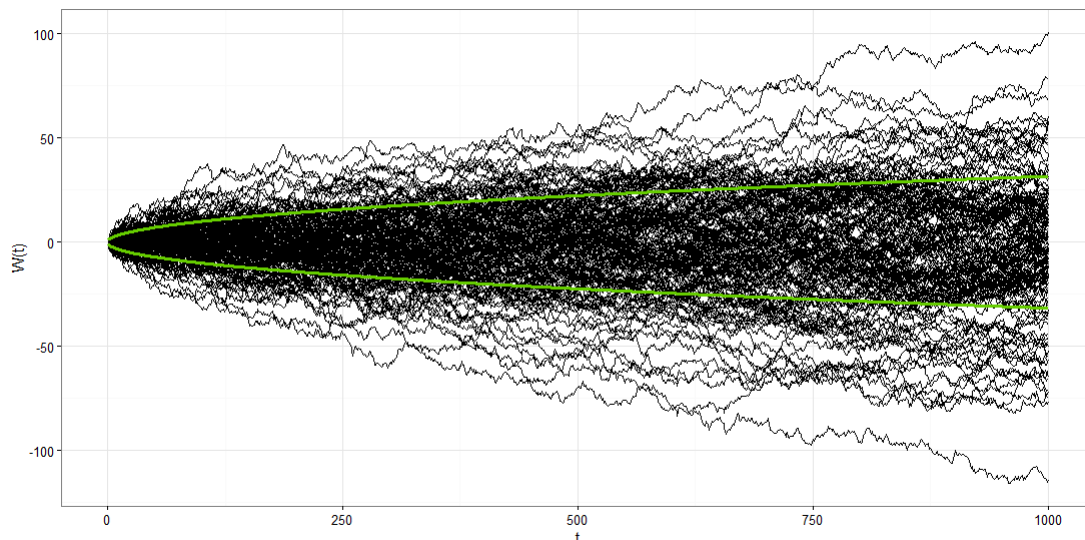
Da bi standardiziral podatke z izbranih časovnih intervalov, jih je Hurst zapisal kot količnik med razponom nihanj in njihovo standardno deviacijo, imenovan tudi *R/S količnik* (angl. rescaled range), ta pa se ni vedno večal sorazmerno s korenem časa, ampak je bila njegova velikost odvisna od tega, ali so se podatki na izbranem časovnem intervalu gibali v skladu s trendi in od moči vpliva le-teh. V skladu s temi ugotovitvami je zgornjo enačbo preoblikoval tako, da je njo mogoče bolje modelirati razpone nihanj pritokov rek v odvisnosti od časa.

Definicija 5.1. *Hurstov eksponent* H , $0 < H < 1$, je dan v enačbi

$$(2) \quad (R/S)_n = Cn^H,$$

kjer je n število točk v časovni vrsti, C neka konstanta, R/S pa količnik med razponom nihanj vseh opazovanj v časovni vrsti in njihovo standardno deviacijo.

SLIKA 10. Graf povprečja simulacij standardnega Brownovega gibanja



Primer 5.2. Videti se da, da se enačba (2) ujema z enačbo (1), če gledamo standardno Brownovo gibanje. Standardna deviacija prirastkov standardnega Brownovega gibanja je namreč enaka $\sigma = 1$, H pa je po lemi 4.8 enak $\frac{1}{2}$.

Pri analiziranju cen vrednostnih papirjev nam količnik R/S omogoča, da primerjamo cene v različnih časovnih obdobjih kljub inflaciji. Zaradi inflacije so današnje cene oz. prirastki cen vrednostnih papirjev občutno večji, kot so bili v preteklosti, zato je večja tudi volatilitnost cen. Problem zato lahko minimiziramo s primerjavo relativnih cen, zapisanih z enotami standardne deviacije, ki je mera za volatilitnost.

5.2. Procesi z dolgoročnim spominom. Matematična definicija stacionarnega procesa z dolgoročnim spominom je podana s pomočjo avtokorelacije. Avtokorelirana časovna vrsta je taka časovna vrsta, kjer je njena vrednost x_i v času t_i korelirana z vrednostjo x_{i+k} v času t_{i+k} , kjer je $k \geq 0$ prirastek časa. Funkcijo avtokoreliranosti stacionarnega procesa $\{X_t\}_{t \geq 0}$ za prirastek časa k zapišemo:

$$\rho(k) = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t+k})}{\sigma(X_t)\sigma(X_{t+k})}.$$

Izkaže se [2, str. 1-6], da ima proces $\{X_t\}_{t \geq 0}$ dolgoročen spomin, če vrednosti korelacij med prirastki padajo proti 0 tako počasi, da njihova vsota ne konvergira:

$$(3) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{k=-i}^i \rho(k) = \infty.$$

Formulo (3) lahko intuiitivno razložimo na primeru nekega zaporedja dogodkov. Pove nam, da se odvisnost dogodkov, ki so daleč narazen na časovnem intervalu, zmanjšuje počasneje glede na časovno razdaljo kot pa se zmanjšuje odvisnost dogodkov, ki niso korelirani oz. so le kratkoročno korelirani. Izkaže se [2], da za nek stacionaren proces $\{X_t\}_{t \geq 0}$ formula (3) drži, če se njegova funkcija avtokoreliranosti v času zmanjšuje v skladu s potenčnim zakonom (angl. power law):

$$(4) \quad \rho(k) \cong Ck^{-\alpha}, \quad k > 0,$$

kjer sta C in α neki konstanti, $0 < \alpha < 1$, k pa prirastek časa.

Če zahtevamo, da je stacionaren proces $\{X_t\}_{t \geq 0}$ samopodoben, je mogoče s pomočjo definicije frakcijskega Brownovega gibanja pokazati [2, str. 41-52], da je dolgoročni spomin časovne vrste neposredno povezan s Hurstovim eksponentom in velja:

$$(5) \quad H = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

Hurstov eksponent zato imenujemo tudi mera dolgoročnega spomina. Zaradi zahteve, da je $0 < \alpha < 1$, bo enačba (4) veljala, če bo $0.5 < H < 1$. Izkaže se [2]:

- za $H = 0.5$ časovna vrsta nima spomina,
- za $0.5 < H < 1$ je korelirana oz. ima dolgoročen spomin,
- za $0 < H < 0.5$ pa je obratno-korelirana.

Opomba 5.3. Hurstov eksponent je neposredno povezan tudi s fraktalno dimenzijo, saj velja [20]:

$$D = 2 - H.$$

Obstajajo različni postopki, s katerimi je mogoče oceniti vrednost Hurstovega eksponenta dane časovne vrste. Eden od teh postopkov je t.i. *R/S analiza*, ki si ga bomo pogledali v nadaljevanju.

5.3. R/S analiza. R/S analiza je statistična tehnika, s katero ugotavljamo variabilnost podatkov v času. V finančni matematiki se uporablja za ocenjevanje vpliva trendov, naključnega gibanja in povprečne vrednosti opazovane časovne vrste. Poznavanje teh podatkov namreč omogoča nekaj predvidevanja glede gibanja prihodnjih cen vrednostnih papirjev, s katerimi si investitorji lahko pomagajo pri izdelavi strategij trgovanja. Je poseben postopek izračuna količnika R/S, ki ga potrebujemo za ocenjevanje vrednosti Hurstovega eksponenta. To se da videti, če logaritmujemo enačbo (2):

$$\begin{aligned} \log (R/S)_n &= \log C + H \log n \\ H &\sim \frac{\log (R/S)_n}{\log n} \end{aligned}$$

Nagnjenost premice, ki se najbolj prilega narisnemu grafu logaritmiranih vrednosti količnika R/S za različne dolžine časovnih intervalov, nam da Hurstov eksponent. V nadaljevanju je podan natančnejši opis omenjenega postopka.

- (1) *Izračun prirastkov časovne vrste.* Za časovno vrsto cen vrednostnega papirja Z_i , kjer je N število vseh opazovanj, izračunamo velikosti prirastkov, da dobimo novo vrsto dolžine $M = N - 1$:

$$X_{i+1} = Z_{i+1} - Z_i, \quad 0 < i \leq N - 1.$$

- (2) *Izbira intervalov.* Izberemo A , $A > 0$, intervalov dolžine n , $n \leq M$, take, da je $A \cdot n = M$, ki jih označimo z I_j , $j = 1, 2, \dots, A$. Časovno vrsto lahko na primer razpolovimo, tako da je dolžina enega intervala I_j ena polovica celotne dolžine časovne vrste X_i . Lahko se zgodi, da je dolžina časovne vrste X_i nedeljiva, v tem primeru se dolžine intervalov n lahko med seboj razlikujejo za 1. Elemente časovne vrste X_i z intervala I_j dolžine n označimo z $X_{j,k}$, kjer je $k = 1, 2, \dots, n$.
- (3) *Izračun povprečnih vrednosti časovne vrste.* Izračunamo povprečje e_j časovne vrste X_i na vsakem intervalu I_j . Izračunamo toliko povprečij, kolikor imamo intervalov:

$$e_j = \frac{\sum_{k=1}^n X_{j,k}}{n}.$$

- (4) *Izračun časovne vrste odstopanj od povprečja.* Za vsak interval I_j naredimo novo časovno vrsto z elementi $Y_{j,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$ predstavljajo odstopanja prirastkov $X_{j,k}$ od povprečja e_j . Dobljena časovna vrsta ima povprečno vrednost 0:

$$Y_{j,k} = X_{j,k} - e_j, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

- (5) *Izračun vrste kumulativnih vrednosti.* Za vsak interval I_k izračunamo kumulativno vsoto elementov časovne vrste $Y_{j,k}$:

$$T_{j,k} = \sum_{k=1}^n Y_{j,k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

- (6) *Izračun največje razlike med odstopanji prirastkov.* Za vsak interval I_j izračunamo razliko med maksimalnim in minimalnim elementom vrste kumulativnih odstopanj $T_{j,k}$:

$$R_j = \max T_{j,k} - \min T_{j,k}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

- (7) *Izračun standardne deviacije in količnika R/S.* Dobljeno razliko R_j delimo s standardnim odklonom σ_j časovne vrste $X_{j,k}$ na intervalu I_j , da dobimo R/S količnik izbranega intervala:

$$\sigma_j = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n X_{j,k} - e_j^2}{n}}$$

Dobimo:

$$(R/S)_j = \frac{R_j}{\sigma_j}$$

- (8) *Izračun povprečne vrednosti količnika R/S.* Izračunamo povprečno vrednost količnika R/S na vseh izbranih intervalih I_j :

$$(R/S)_n = \frac{\sum_{j=1}^A (R/S)_j}{A}$$

- (9) *Izračun logaritemskih vrednosti.* Logaritmiramo vrednosti količnika $(R/S)_n$ in velikost intervala n , da dobimo $x = \log n$ in $y = \log (R/S)_n$, ter točko (x, y) narišemo na graf.
- (10) Izberemo še drugačne velikosti intervalov in ponovljamo postopek, dokler ne dobimo dovolj točk v grafu, da lahko nanj dovolj dobro aproksimiramo linearno funkcijo. Običajno se za aproksimacijo uporablja metoda najmanjših kvadratov. Iz naklona te premice lahko potem izračunamo Hurstov eksponent H .

V nadaljevanju je podan algoritem omenjenega postopka v programskem jeziku R (algoritem 3), ki vrne tabelo z vrednostmi $\log n$ in $\log (R/S)_n$. Z njim lahko analiziramo empirične podatke o gibanju cen indeksa S&P 500. Slika 11 prikazuje graf z izračunanimi točkami in prilegajočo se premico, katere naklon je enak 0,55. Ker je ta vrednost zelo blizu vrednosti 0,5, to pomeni, da so prirastki zelo malo korelirani in je proces gibanja cen indeksa S&P 500 naključen proces.

Algoritem 3 Algoritem R/S analize in funkcija za izračun Hurstovega eksponenta, kjer je Z dana časovna vrsta, m pa željeno število logaritmiranih vrednosti

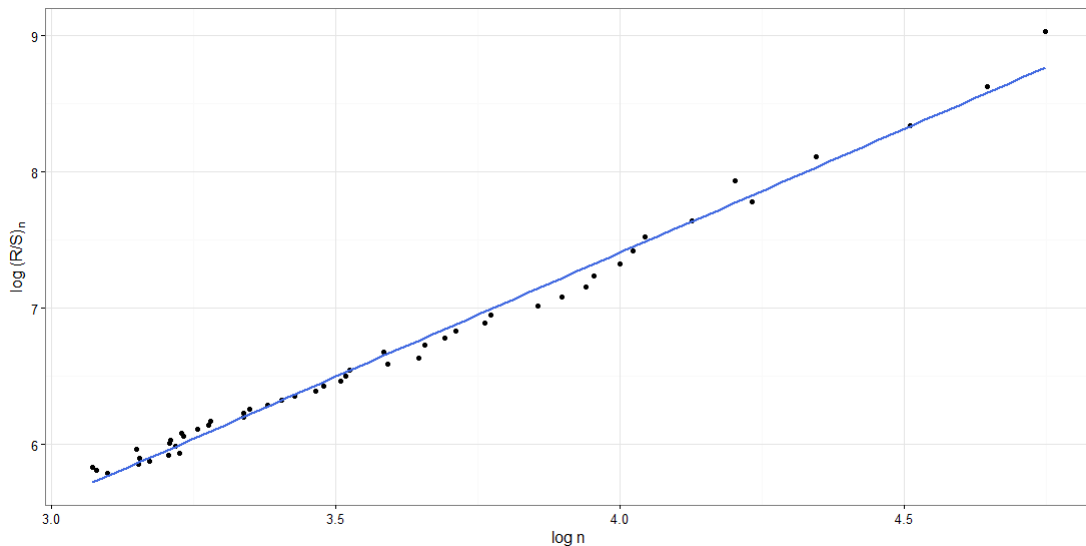
```

RS <- function(m,Z){
  RSmj <- matrix(ncol=m+1,nrow=m)
  x <- c()
  for(i in 1:m){
    Xjk <- split(diff(Z),cut(seq(length(diff(Z))),breaks=i+1))
    for(j in 1:(i+1)){
      Ij <- unlist(Xjk[j],use.names=FALSE)
      Tjk <- cumsum(Ij-mean(Ij))
      RSmj[i,j] <- (max(Tjk)-min(Tjk))/sd(Ij)
    }
    x[i] <- log(length(Ij))
  }
  y <- log(rowMeans(RSmj,na.rm=TRUE))
  return(data.frame(y,x))
}

Hurst <- function(m,Z){
  H <- coef(lm(RS(m,Z)[,1] ~ RS(m,Z)[,2]))[2]
  return(H)
}

```

SLIKA 11. Graf Hurstovega eksponenta indeksa S&P 500



V opisanem algoritmu se izbrani intervali časovne vrste ne prekrivajo, v drugih različicah R/S analize pa je mogoče izbrati intervale tudi tako, da se le-ti prekrivajo, kar omogoča večjo fleksibilnost pri izbiri velikosti intervala. Ta določa koordinato x točke na grafu, zato bi s pazljivejšo izbiro lahko dosegli, da bi bile točke na grafu med sabo bolj enakomerno razporejene in bi lahko dobil boljše aproksimacijo prilagajoče se premice. Na sliki 11 vidimo, da je večina točk zgoščenih v spodnjem levem kotu grafa, medtem ko je v zgornjem desnem kotu točk zelo malo. Izračuni

točk za nadaljnje delitve intervalov so zato praktično nesmiselni, saj natančnosti aproksimirane premice ne bi kaj dosti izboljšali.

6. TEORIJA FRAKTALNEGA TRGA

Namen tega poglavja je predstaviti teorijo trga, ki bi obnašanje investitorjev in gibanje cen vrednostnih papirjev opisala v skladu z našimi opažanji. Ugotovili smo, da Brownovo gibanje ni najbolj primerno za modeliranje cen vrednostnih papirjev, saj izključuje možnost pojava ekstremnih dogodkov, ki pa se na trgih dogajajo. Taki kolapsi se zgodijo, ko povpraševanje in ponudba nista v ravnotežju, posledica pa je manjša likvidnost na trgu, saj vrednostnega papirja ne moremo kupiti oz. prodati v trenutku, ko to želimo. Investitorji zato prodajajo in kupujejo po cenah, ki niso nujno enake notranji vrednosti vrednostnega papirja. V nadaljevanju bom opisala, kaj lahko pojasni takšno dogajanje na trgu, videli pa bomo tudi, da lahko hkrati naslovimo tudi problem z naključnostjo prirastkov cen vrednostnih papirjev.

Teorija fraktalnega trga (angl. fractal market hypothesis) pravi, da bo trg stabilen, če imajo investitorji različne preference glede ročnosti naložb, saj to zagotavlja likvidnost na trgu. Taki investitorji namreč informacije vrednotijo glede na preferirano ročnost. Informacija, ki bi povzročila, da bi investitor z naložbami kratke ročnosti prodal vrednostni papir, bi po drugi strani lahko k nakupu spodbudila investitorja, ki preferira daljše ročnosti. To pomeni, da vsi investitorji sprejemajo enaka tveganja, vendar so le-ta odvisna od preferirane ročnosti naložb, kar pa pojasni, zakaj so porazdelitve donosnosti enake na različnih skalah. Zaradi samopodobnosti te statistične lastnosti to teorijo trga povezujemo s fraktali.

Da se videti, da zaradi investitorjev, ki preferirajo različne ročnosti, cena vrednostnega papirja morda ne bo v vsakem trenutku odražala vseh dosegljivih informacij, ampak le informacije, ki so pomembne za dano ročnost, to pa kaže, da gibanje cen vrednostnih papirjev ne bo naključno, saj bodo v cenah upoštewane tudi informacije, ki ne bodo nujno nove.

Nestabilnost se pojavi, ko se podre fraktalna struktura trga, to je takrat, ko dolgoročni investitorji nehajo sodelovati na trgu ali pa začnejo vlagati v kratkoročne naložbe. To se lahko zgodi zaradi različnih razlogov. Tak kolaps trga se je zgodil kot posledica reakcije investitorjev na umor ameriškega predsednika Kennedyja 22. novembra 1963. Zaradi nejasnosti glede dolgoročnega vpliva tega dogodka na prihodnost države je mnogo dolgoročnih investitorjev prenehalo trgovati oz. so začeli trgovati z naložbami s krajšimi ročnostmi. To je povzročilo paniko na trgu, ki so ga nato zaprli, odprt pa je bil spet šele po koncu predsednikovega pogreba, ko so bili investitorji spet zmožni oceniti, kakšen vpliv bo imel dogodek na gospodarstvo na dolgi rok in trg se je stabiliziral.

Teorija fraktalnega trga ima naslednje lastnosti:

- trg bo stabilen, če bodo investitorji vlagali v naložbe z različnimi ročnostmi, saj to zagotavlja likvidnost za trgovalce,
- informacije o razpoloženju na trgu in tehnične informacije vplivajo na kratkoročne investicije, na dolgi rok pa bolj vplivajo fundamentalne informacije,
- če je veljavnost fundamentalnih informacij vprašljiva, dolgoročni investitorji začnejo vlagati kratkoročno ali pa nehajo investirati. Če se to zgodi, se trg skrči na enotno ročnost in ni več stabilen.

- Cene na trgu so kombinacija kratkoročnih tehničnih informacij in dolgoročnih fundamentalnih informacij, zato so kratkoročna gibanja cen bolj volatilna in večja je možnost, da so rezultat mimetičnega obnašanja.

Vidimo lahko:

- pri teoriji fraktalnega trga so nestabilnosti oz. ekstremni dogodki na trgu mogoči,
- ker ima tak trg fundamentalne informacije, ki vplivajo dolgoročno, pravimo, da ima trg spomin, zato je nekaj predvidevanja mogočega,
- trg ima ponavljajoče se vzorce na različnih skalah.

Teorija fraktalnega trga morda lahko malo bolje opiše dogajanje na trgu kot teorija učinkovitega trga, saj naslavlja tako problem dolgoročnega spomina kot tudi problem dolgih repov. Omogoča dobre ekonomske temelje za modele, kot sta frakcijsko Brownovo gibanje in Lévyjevi procesi.

7. ZAKLJUČEK

Na začetku tega diplomskega dela smo spoznali model Brownovega gibanja, ki je zaradi svoje enostavnosti in statističnih lastnosti eden izmed najbolj uporabljenih modelov v finančni matematiki, zavarovalništvu in drugih vejah znanosti. Na podlagi primerjave z empiričnimi podatki pa smo videli, da model ne uspe razložiti nekaterih kompleksnejših pojavov na trgu vrednostnih papirjev. Spoznali smo, da je ekonomski temelj našega matematičnega modela t.i. teorija učinkovitega trga, ki prav tako s poenostavljanjem naravnih zakonitosti finančnih trgov ne pojasni nekaterih naših opažanj. Izpostavili smo torej dve šibkosti modela Brownovega gibanja:

- porazdelitve prirastkov nimajo dolgih repov, s čimer ne omogočajo modeliranja ekstremnih dogodkov, ki se na trgih dogajajo,
- prirastki so neodvisni, s čimer ne omogočajo modeliranja pojava dolgoročne koreliranosti oz. dolgoročnega spomina časovne vrste.

Videli smo, da je mogoče s pomočjo teorije fraktalov nasloviti oba problema. Spoznali smo samopodobne procese in koeficient samopodobnosti oz. Hurstov eksponent, ki je tako mera samopodobnosti kot tudi dolgoročnega spomina, nakazali pa smo tudi, da obstajajo modeli, ki Hurstov eksponent uporabljajo pri modeliranju procesov s porazdelitvami z dolgimi repi. Izkaže se, da zaradi nasprotujočih si lastnosti navedenih dveh problemov ni mogoče nasloviti zgolj z enim samim modelom, lahko pa se ju modelira vsakega posebej:

- z α -stabilnimi Lévyjevimi procesi,
- s frakcijskim Brownovim gibanjem.

V zadnjem delu smo predstavili še ekonomski model, ki upošteva vse predlagane izboljšave modela Brownovega gibanja, t.i. teorijo fraktalnega trga, ki sloni na predpostavki, da imajo investitorji na finančnih trgih različne preference glede ročnosti naložb.

Kljub priljubljenosti Brownovega gibanja nam je uspelo pokazati, da bi bilo mogoče z drugačnim pristopom k razumevanju dogajanja na trgu nekatere njegove pomanjkljivosti modelirati bolje, vendar bi bilo potrebno opisane modele preučiti in primerjati z empiričnimi podatki, da bi lahko potrdili njihovo ustreznost.

LITERATURA

- [1] F.E. Benth, *Option Theory with Stochastic Analysis*, Springer, Berlin, 2004.
- [2] J. Beran, *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall, New York, 1959.
- [3] J. Blackledge in K. Murphy, *Currency Trading using the Fractal Market Hypothesis*, [ogled 28. 5. 2016], dostopno na <http://www.intechopen.com/books/risk-management-trends/currency-trading-using-the-fractal-market-hypothesis>.
- [4] E. Cinlar, *Probability and Stochastics*, Springer-Verlag, New York, 2011.
- [5] R. Cont in P. Tankov, *Financial Modelling With Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.
- [6] A. Dembo, *Stochastic Processes*, verzija 21.8.2013, [ogled 28. 5. 2016], dostopno na <http://statweb.stanford.edu/~adembo/math-136/nnotes.pdf>.
- [7] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [8] P. Embrechts, C. Kluppelberg in T. Mikosch, *Modelling Extremal Events*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [9] P. Embrechts in M. Maejima, *An introduction to the theory od selfsimilar stochastic processes*, [ogled 14.7.2016], dostopno na <https://people.math.ethz.ch/~embrecht/ftp/phys3feb.pdf>.
- [10] E. Fama, *The Behaviour of Stock Market Prices*, v: The Journal of Business **38-1**, The University of Chicago Press, Chicago, 1965, 34-105.
- [11] J. Farmer in J. Geanakoplos, *Power laws in economics and elsewhere*, verzija 14.5.2008, [ogled 14.7.2016], dostopno na <http://tuvalu.santafe.edu/~jdf/papers/powerlaw3.pdf>.
- [12] D.P. Feldman, *Chaos and Fractals: An Elementary Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2012.
- [13] *Fractal Broccoli*, [ogled 28.6.2016], dostopno na https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fractal_Broccoli.jpg.
- [14] C. Grinstead in L. Snell, *Introduction to Probability*, [ogled 28. 5. 2016], dostopno na http://www.dartmouth.edu/~chance/teaching_aids/books_articles/probability_book/amsbook.mac.pdf.
- [15] P. Hajdinjak, *Pomanjkljivosti teorije učinkovitega trga in njena uporabnost*, magistrsko delo, Ekonomska fakulteta, Univerza v Ljubljani, 2010.
- [16] *Joseph Effect*, [ogled 14.6.2016], dostopno na <http://financial-dictionary.thefreedictionary.com/Joseph+Effect>.
- [17] I. Kaplan, *Estimating the Hurst Exponent*, maj 2003, [ogled 14.7.2016], dostopno na http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/wavelets/hurst/index.html.
- [18] M. Kozdron, *Introduction to Stochastic Processes Notes*, verzija 6.4.2006, [ogled 28. 5. 2016], dostopno na http://stat.math.uregina.ca/~kozdron/Teaching/Regina/862Winter06/Handouts/revised_lecture1.pdf.
- [19] B.G. Malkiel, *The Efficient Market Hypothesis ind Its Critics*, Journal of Economic Perspectives **17-1** (2003) 59–82.
- [20] B. Mandelbrot, *The fractal geometry of nature*, W.H. Freeman & Co, New York, 1983.
- [21] *Mandelbrot set*, [ogled 28.6.2016], dostopno na https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mandelbrot_set_2500px.png.
- [22] *Noah Effect*, [ogled 14.6.2016], dostopno na <http://financial-dictionary.thefreedictionary.com/Noah+Effect>.
- [23] C. Pacati, *Brownian Motion and Geometric Brownian Motion*, [ogled 29.5.2016], dostopno na <http://www.math.umn.edu/~grayx004/pdf/FM5002/BMandGBMdoc.pdf>.
- [24] C. Pareto, *Understanding Investor Behavior*, verzija 13.9.2014, [ogled 28.5.2016], dostopno na <http://www.investopedia.com/articles/05/032905.asp>.
- [25] E. Peters, *Chaos and Order in the Capital Markets*, John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [26] E. Peters, *Fractal Market Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1994.
- [27] *S&P 500 Index*, [ogled 28.6.2016], dostopno na https://www.quandl.com/data/YAH00/INDEX_GSPC-S-P-500-Index.
- [28] K. Ross, *Notes on Markov Processes*, [ogled 16. 6. 2016], dostopno na http://statweb.stanford.edu/~adembo/math-136/Markov_note.pdf.
- [29] P. Samuelson, *Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly*, Industrial Manegement Review **6-2** (1965) 41-49.

- [30] M. Sewell, *History of the Efficient Market Hypothesis*, verzija 20.1.2011, [ogled 3.6.2016], dostopno na http://www.cs.ucl.ac.uk/fileadmin/UCL-CS/images/Research_Student_Information/RN_11_04.pdf.
- [31] *Sierpinski triangle evolution*, [ogled 28.6.2016], dostopno na https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sierpinski_triangle_evolution.svg.
- [32] *Standard & Poor's 500 Index*, [ogled 28.5.2016], dostopno na <http://www.investopedia.com/terms/s/sp500.asp>.
- [33] M. Stolarski, *Brownian Motion*, [ogled 16.6.2016], dostopno na <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/Stolarski.pdf>.
- [34] H. Taylor in S. Karlin, *An Introduction to Stochastic Modeling*, Academic Press, San Diego, 1998.
- [35] E. Vanden-Eijnden, *Wiener Process*, [ogled 28. 5. 2016], dostopno na <https://www.whoi.edu/filesserver.do?id=21268&pt=10&p=17232>.
- [36] J. Voss, *Rescaled Range Analysis: A Method for Detecting Persistence, Randomness, or Mean Reversion in Financial Markets*, verzija 30.1.2013, [ogled 16.6.2016], dostopno na <https://blogs.cfainstitute.org/investor/2013/01/30/rescaled-range-analysis-a-method-for-detecting-persistence-randomness-or-mean-reversion-in-financial-markets/>.
- [37] Z. Yang in D. Aldous, *Brownian Motion Simulation Project in R*, [ogled 28. 5. 2016], dostopno na <https://www.stat.berkeley.edu/~aldous/Research/Ugrad/ZY1.pdf>.
- [38] G. Žitković, *Introduction to Stochastic Processes - Lecture Notes*, verzija 24.12.2010, [ogled 28. 5. 2016], dostopno na https://www.ma.utexas.edu/users/gordanz/notes/introduction_to_stochastic_processes.pdf.