

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Blaž Koroša

**Dvodimenzionalni zleпки**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Gašper Jaklič

Ljubljana, 2013

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Polinomi dveh spremenljivk</b>	<b>7</b>
2.1	Interpolacija . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Bernstein-Bézierjeve metode za dvorazsežne polinome</b>	<b>10</b>
3.1	Baricentrične koordinate . . . . .	10
3.2	Bernsteinovi bazni polinomi . . . . .	13
3.3	de Casteljaujev algoritem . . . . .	16
3.4	Smerni odvod . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Dvodimenzionalni zleпки</b>	<b>24</b>
<b>5</b>	<b>Lastnosti dvodimenzionalnih polinomov in zlepkov</b>	<b>28</b>
5.1	Pozitivnost . . . . .	28
5.2	Monotonost . . . . .	29
5.3	Konveksnost . . . . .	30

## Slike

1	Primeri polinomov v dveh spremenljivkah . . . . .	8
2	Primer poljubnega trikotnika v $\mathbb{R}^2$ . . . . .	10
3	Trikotnik z oglišči $v_1 = (5, 5)$ , $v_2 = (2, 3)$ in $v_3 = (8, 1)$ . . . . .	12
4	Predznaki baricentričnih koordinat glede na območje izbrane točke . .	13
5	Primeri Bernsteinovih baznih polinomov stopnje 3 . . . . .	16
6	Grafični prikaz de Casteljaujevega algoritma . . . . .	20
7	Nabor trikotnikov, ki predstavlja triangulacijo in nabor, ki ne predstavlja triangulacije . . . . .	24
8	Trikotnik $T$ in pripadajoča triangulacija za $d = 2$ . . . . .	25
9	Primer dveh trikotnikov, s skupnim robom . . . . .	26
10	Primer $B$ -krpe in pripadajoče kontrolne mreže . . . . .	27

## Dvodimenzionalni zleпки

### POVZETEK

Polinomi dveh spremenljivk so oblike

$$p(x, y) := \sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Enostavno jih je integrirati in odvajati, poleg tega pa so zelo uporabni pri interpolaciji. Rešitev interpolacijskega problema ne obstaja vedno, kadar pa, pa to še ne pomeni, da je enolična. Obstoj rešitve je odvisen od lokacije točk, ki jih želimo interpolirati.

Polinomi, s katerimi se običajno srečujemo, so zapisani v standardni bazi  $1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots$ , vendar pa obstajajo še nekatere druge baze in ena izmed takih je Bernsteinova. Bernsteinovi polinomi, ki sestavljajo to bazo, so definirani preko bari-centričnih koordinat na trikotnikih. Baricentrične koordinate posamezne točke so enolično določene in so linearni polinomi v dveh spremenljivkah. Zapis polinoma v tej bazi imenujemo B-forma, koeficiente pa B-koeficienti. Polinomski ploskvi, ki je definirana na trikotniku, običajno rečemo B-krpa. Za izračun vrednosti polinoma v točki uporabljamo stabilen in zelo učinkovit algoritem, imenovan de Casteljauev algoritem, ki temelji na preprosti rekurzivni zvezi.

Dvodimenzionalni zleпки so odsekoma polinomske ploskve. Pri interpolaciji se uporabljajo predvsem zato, da bi se izognili problemom povezanimi s prevelikim osciliranjem polinoma.

Lastnosti, kot so pozitivnost, monotonost in konveksnost, se med dvodimenzionalnimi zleпки in polinomi povezujejo, saj so polinomske ploskve posebni primeri zlepkov. Vse tri lastnosti je načeloma zelo težko računsko preveriti. Obstajajo nekateri pogoji, ki nam to povedo, vendar pa so ti le zadostni ne pa tudi potrebni.

**Math. Subj. Class. (2012):** 65D17, 65D07, 65D05

**Ključne besede:** dvorazsežni polinomi, interpolacija, baricentrične koordinate, Bernsteinova baza, B-forma, de Casteljauev algoritem, smerni odvod, dvodimenzionalni zleпки, pozitivnost, monotonost, konveksnost

## Bivariate splines

### ABSTRACT

Bivariate polynomials are of the form

$$p(x, y) := \sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

They are easily integrated and their derivatives are also easy to get. Polynomials are often used for interpolation. The main problem in bivariate interpolation is that solution does not always exist, but when it does it is not always unique. The existence of the solution depends on the location of the points we want to interpolate.

Polynomials that we usually work with are written in the standard basis  $1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots$ , but there also exist some other bases like Bernstein basis. Bernstein polynomials that are forming Bernstein base are defined through barycentric coordinates on triangles. Barycentric coordinates of the point are uniquely defined and they are actually bivariate linear polynomials. Polynomials written in Bernstein basis are uniquely written in form that is called B-form and the coefficients are called B-coefficients. Polynomial surface, which is defined on a triangle is commonly referred as B-patch. For evaluating polynomial at a given point we use stable and very efficient algorithm called de Casteljau algorithm. The algorithm is based on a simple recurrence relation.

Bivariate splines are piecewise polynomial surfaces. They are often used for interpolation in order to avoid problems associated with excessive oscillation of polynomials.

Properties, such as positivity, monotonicity and convexity are for bivariate splines and polynomials associated, as polynomials are special cases of spline surfaces. All three properties is very difficult to check but there are some conditions, which can tell us that, but these are only sufficient and not necessary.

**Keywords:** bivariate polynomials, interpolation, barycentric coordinates, Bernstein basis, B-form, de Casteljau algorithm, directional derivatives, bivariate splines, positivity, monotonicity, convexity

# 1 Uvod

Dvodimenzionalni zleпки so odsekoma polinomske ploskve, ki se v veliki meri uporabljajo v računalniški grafiki in geometrijskem modeliranju. Za predstavitev le-teh je zelo pomemben zapis polinoma, ki je nekoliko drugačen od tistega, ki ga običajno srečujemo. To pa predvsem zato, ker je zapisan v drugačni bazi. Imenujemo jo baza Bernsteinovih baznih polinomov. Najprej je potrebno definirati baricentrične koordinate, ki jih je leta 1827 predstavil nemški matematik A. F. Möbius. Na področju, ki se ukvarja z dvodimenzionalnimi zleпки je bilo narejeno že kar precej, predvsem pa se v povezavi s tem omenjajo imena kot so Bernstein, de Casteljau, Bézier in de Boor, iz novejših generacij pa Farin in Schumaker.

V svojem delu diplomskega seminarja se bom ukvarjal predvsem s predstavitvijo dvorazsežnih polinomov in pa dvodimenzionalnih zlepkov. V grobem je moje delo razdeljeno na štiri dele, kjer bom v prvem delu opisal dvorazsežne polinome v običajni standardni bazi in pa interpolacijo.

Drugi del bo namenjen drugačnemu, nekoliko posebnemu načinu zapisa polinomov. V okviru tega bom definiral Bernsteinove bazne polinome in dokazal, da je to baza, še prej pa bom definiral baricentrične koordinate in povedal kako je z njihovo enoličnostjo. Navedel bom še nekaj o de Casteljaujevem algoritmu, saj je ta zelo uporaben pri smernih odvodih, ki jih bom definiral za poznejše potrebe.

V tretjem delu se bom posvetil predvsem dvodimenzionalnim zlepkom, dotaknil se bom tudi uporabe le-teh. Zadnji, četrti del svojega dela, bom namenil lastnostim dvodimenzionalnih zlepkov in posledično tudi polinomov, saj so polinomi posebni primeri zlepkov. Na tem mestu bodo v veliki meri prišli v poštev smerni odvodi in pa de Casteljaujev algoritem.

## 2 Polinomi dveh spremenljivk

Polinom v dveh spremenljivkah je definiran z

$$p(x, y) := \sum_{0 \leq i+j \leq d} a_{ij} x^i y^j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

**Trditev 2.1.** Množica polinomov  $\mathcal{P}_d = \{x^i y^j\}_{0 \leq i+j \leq d}$  sestavlja standardno bazo prostora dvorazsežnih polinomov totalne stopnje  $\leq d$ .

*Dokaz.* Trdimo, da je množica  $\mathcal{P}_d$  baza prostora dvorazsežnih polinomov stopnje največ  $d$ , ki ga označimo z  $\mathbb{R}_d[x, y]$ . Velikost množice  $\mathcal{P}_d$ , ki je  $\binom{d+2}{2}$ , bom označil z  $n$ .

### 1. Linearna neodvisnost

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \cdots + \alpha_{n-1} x y^{n-1} + \alpha_n y^n = 0 \quad \text{za } \forall x, y \in \mathbb{R}$$

To pomeni, da ima polinom  $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \cdots + \alpha_{n-1} x y^{n-1} + \alpha_n y^n$  neskončno mnogo ničel, kar pa je možno

$$\alpha_0 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = \alpha_n = 0.$$

Torej so polinomi iz  $\mathcal{P}_d$  linearno neodvisni.

### 2. $\mathcal{L}\{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^d, x^{d-1}y, \dots, xy^{d-1}, y^d\} = \mathbb{R}_d[x, y]$

Vzemimo poljuben polinom iz  $\mathbb{R}_d[x, y]$ ,

$$p(x) = \underbrace{a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} x + \cdots + a_2 y + a_1 x + a_0}_{\text{linearna kombinacija polinomov } \{x^i y^j\}_{0 \leq i+j \leq d}}.$$

Torej je  $p(x) \in \mathcal{L}\{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^d, x^{d-1}y, \dots, xy^{d-1}, y^d\}$ .

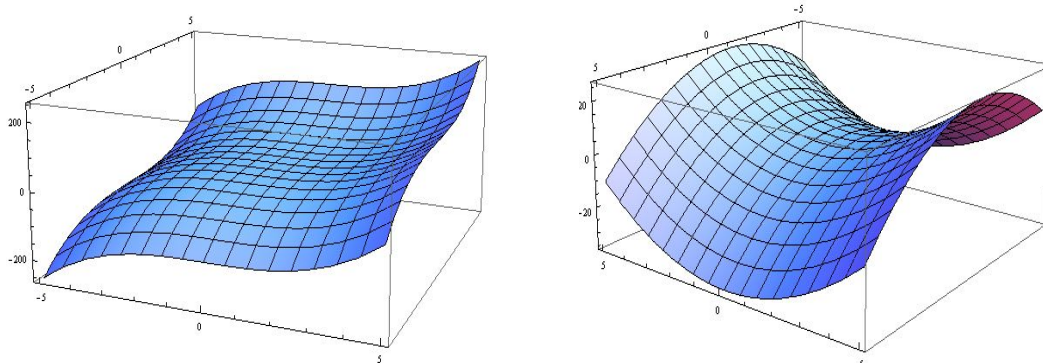
□

Torej lahko vsak polinom dveh spremenljivk zapišemo kot linearno kombinacijo baznih funkcij,

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^d, x^{d-1}y, \dots, xy^{d-1}, y^d. \quad (2.2)$$

Za dvodimenzionalne polinome obstajajo tudi druge baze, kot je na primer *Bernsteinova*, katero bom v nadaljevanju večkrat omenjal, saj je bolj uporabna.

**Primer 2.2.** Sliki prikazujeta dva polinoma dveh spremenljivk.



(a)  $x^3 - y^3 - 5$

(b)  $x^2 - y^2 - 2y$

Slika 1: Primera polinomov v dveh spremenljivkah

## 2.1 Interpolacija

Podobno kot za enorazsežni primer, kjer za  $n + 1$  točk iščemo polinom stopnje  $\leq n$ , ki poteka skozi te točke, je interpolacijski problem definiran tudi za dvorazsežen primer. V tem primeru iščemo polinomske ploskev, ki poteka skozi dane točke.

Recimo, da imamo danih  $n$  točk  $A := \{v_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^2$  in realne vrednosti  $\{z_i\}_{i=1}^n$ , ki so predpisane danim točkam. Naloga je najti tako polinomske ploskev stopnje  $d$  ali manj v  $\mathbb{R}^3$ , da bo potekala skozi dane točke.

Problem, ki lahko nastane pri interpolaciji, je v tem, da ne moremo interpolirati poljubnega števila točk tako kot v enodimenzionalnem primeru.

V primeru, ko je število točk enako  $n = \binom{d+2}{2}$  in  $d \in \mathbb{N}$  lahko pri interpolaciji uporabimo bazne funkcije prostora  $\mathcal{P}_d$ , ki jih bom na tem mestu označil z  $g_j$ .

Interpolacijski problem je potem oblike:

$$p(v_i) = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Naloga je najti take koeficiente  $\{a_j\}_{j=1}^n$ , ki rešijo sistem enačb

$$\sum_{j=1}^n a_j g_j(v_i) = z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Sistem je enolično rešljiv natanko takrat, ko je matrika

$$S := \begin{bmatrix} g_1(v_1) & g_2(v_1) & \dots & g_n(v_1) \\ g_1(v_2) & g_2(v_2) & \dots & g_n(v_2) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ g_1(v_n) & g_2(v_n) & \dots & g_n(v_n) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

nesingularna. V enorazsežnem primeru rešitev interpolacijskega problema vedno obstaja in je enolično določena za vsako začetno množico različnih točk. V dvorazsežnem primeru to ni vedno res, tudi če so točke med seboj različne. Obstoj in enoličnost rešitve je odvisen od *lokacije* točk iz množice  $A$ . Naslednji primer je lep prikaz tega.



**Primer 2.3.** Naj bo  $d = 1$  in  $n = \binom{d+2}{2} = 3$  število točk množice  $A$ , ki ležijo na neki premici  $y = ax + b$  in so med seboj različne,  $A = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)\}$ . Ker je  $d = 1$ , so bazne funkcije, ki jih rabimo  $\mathcal{P}_1 = \{1, x, y\}$ . Se pravi, da je

$$S = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & ax_1 + b \\ 1 & x_2 & ax_2 + b \\ 1 & x_3 & ax_3 + b \end{bmatrix}.$$

Ta matrika pa je singularna, saj je njena determinanta enaka 0. To pomeni, da rešitev interpolacijskega problema ni enolična.

**Izrek 2.4.** Recimo, da imamo dano množico  $n = \binom{d+2}{2}$  različnih točk  $A = \{t_i\}_{i=1}^n := \cup_{i=1}^{d+1} \{t_{ij}\}_{j=1}^i$  v  $\mathbb{R}^2$  tako, da za nek nabor  $\{L_i\}_{i=1}^{d+1}$  različnih premic v ravnini za  $i = 1, \dots, d+1$ , točke  $\{t_{ij}\}_{j=1}^i$  ležijo na  $L_i$ , ne pa na  $L_{i+1} \cup \dots \cup L_{d+1}$ . Potem je interpolacijski problem enolično rešljiv.

*Dokaz.* Dokazujemo z indukcijo. V primeru, ko je  $d = 0$ , je rezultat očiten. Sedaj predpostavimo, da rezultat drži za  $d - 1$ . Naj bo  $S$  matrika kot (2.5) in naj bo  $c := (c_1, c_2, \dots, c_n)$  rešitev sistema  $Sc = 0$ . Dokazati želimo, da je  $S$  nesingularna. To pa bo natanko takrat, ko bo  $c$  enak 0. To pa je ekvivalentno temu, da če  $p \in \mathcal{P}_d$  zadostuje

$$p(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.6)$$

potem je  $p$  polinom, ki je v vsaki točki identično enak 0.

Naj bo sedaj za vsak  $i = 1, 2, \dots, d+1$ ,  $\alpha_i x + \beta_i y = \gamma_i$  enačba premice  $L_i$ . Predpostavimo, da polinom  $p$  zadostuje (2.6). Ker je na  $L_{d+1}$   $p$  polinom ene spremenljivke stopnje  $d$ , ki v  $d+1$  različnih točkah  $\{t_{d+1,j}\}$  na  $L_{d+1}$  zavzame vrednost nič, iz tega sledi, da je  $p$  identično enak nič na  $L_{d+1}$  in zato

$$p(x, y) = (\alpha_{d+1}x + \beta_{d+1}y - \gamma_{d+1})q(x, y),$$

kjer je  $q$  polinom stopnje  $d - 1$ . Ker nobena izmed točk iz  $\tilde{A} := \cup_{i=1}^d \{t_{ij}\}_{j=1}^i$  ne leži na  $L_{d+1}$ , lahko vidimo, da polinom  $q$  zavzame vrednosti 0 v vsaki izmed točk iz  $\tilde{A}$  kar pomeni, da je  $q$  po indukcijski predpostavki identično enak 0. Iz tega pa sledi, da je  $p$  identično enak nič.  $\square$

Zgornji izrek velja le za poseben primer. Zato so pogoji navedeni v izreku zgolj zadostni ne pa tudi potrebni. Se pravi, če je pogojem iz izreka 2.4 zadoščeno, bo matrika  $S$  nesingularna in bo polinom, ki bo potekal skozi dane točke tudi enolično določen. Obstaja pa še izrek, ki nam pove, kdaj rešitev interpolacijskega problema obstaja in je enolična v splošnem primeru.

**Izrek 2.5.** Naj bo dana množica  $A$  z  $n = \binom{d+2}{2}$  različnih točk. Potem rešitev interpolacijskega problema obstaja in je enolična, če točke iz  $A$  ne ležijo na algebraični krivulji stopnje  $\leq d$ .

Dokaz si lahko bralec prebere v [2].

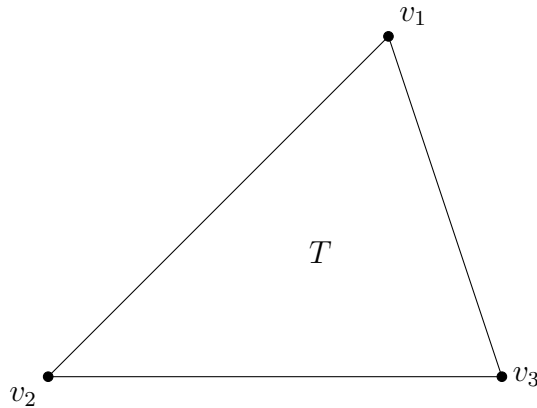
### 3 Bernstein-Bézierjeve metode za dvorazsežne polinome

Dvorazsežne polinome lahko zapišemo tudi z Bernsteinovimi baznimi polinomi, ki so definirani z baricentričnimi koordinatami na trikotniku.

#### 3.1 Baricentrične koordinate

Ker se bom v nadaljevanju ukvarjal s polinomi, ki so definirani na trikotnikih, bom baricentrične koordinate definirale le za dvodimenzionalni primer, čeprav jih lahko definiramo za poljuben simpleks. Baricentrični koordinatni sistem je leta 1827 predstavil nemški matematik August F. Möbius.

Recimo, da imamo v ravnini poljuben neizrojen trikotnik z oglišči  $v_1$ ,  $v_2$  in  $v_3$  (kot prikazuje slika 2), ki ga označimo s  $T := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ .



Slika 2: Poljuben trikotnik  $T$  v ravnini.

**Lema 3.1.** Vsako točko  $v := (x, y) \in \mathbb{R}^2$  lahko natanko na en način zapišemo kot

$$v = b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3, \quad (3.1)$$

kjer za  $b_1, b_2$  in  $b_3$  velja

$$b_1 + b_2 + b_3 = 1. \quad (3.2)$$

Števila  $b_1, b_2$  in  $b_3$  imenujemo **baricentrične koordinate** točke  $v$  glede na trikotnik  $T$ .

Za vse točke, ki se nahajajo znotraj trikotnika  $T$ , imajo baricentrične koordinate pozitiven predznak, medtem ko za ostale točke velja, da je lahko katera izmed baricentričnih koordinat  $b_1, b_2$  ali  $b_3$  tudi negativna ali 0.

*Dokaz.* Enačbi (3.1) in (3.2) lahko za vsako oglišče  $v_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , zapišemo kot sistem treh enačb s tremi neznankami  $b_1, b_2$  in  $b_3$ . Prva enačba je enaka (3.2),

druga zajema abscise vseh treh oglišč trikotnika  $T$ , tretja pa ordinate oglišč,

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 &= 1 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= x \\ b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 &= y \end{aligned} \iff \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}_z = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}}_z \quad (3.3)$$

Po Cramerjevem pravilu dobimo, da so rešitve sistema (3.3):

$$b_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.4)$$

Tu je  $A_i$  matrika, ki ima v  $i$ -tem stolpcu stolpec  $z$ . □

Iz zgornjega takoj sledi, da so baricentrične koordinate funkcije točke  $v$ .

**Lema 3.2.** *Za vsak  $i = 1, 2, 3$ , so baricentrične koordinate  $b_i$  linearni polinomi v  $x$  in  $y$ .*

*Dokaz.* Če zapišemo enačbo (3.4) za  $i = 1$  na daljše, dobimo

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \\ &= \frac{x_2y_3 + x_3y + xy_2 - yx_2 - y_2x_3 - xy_3}{\det(A)} = \\ &= \frac{(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + x_2y_3 - y_2x_3}{\det(A)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

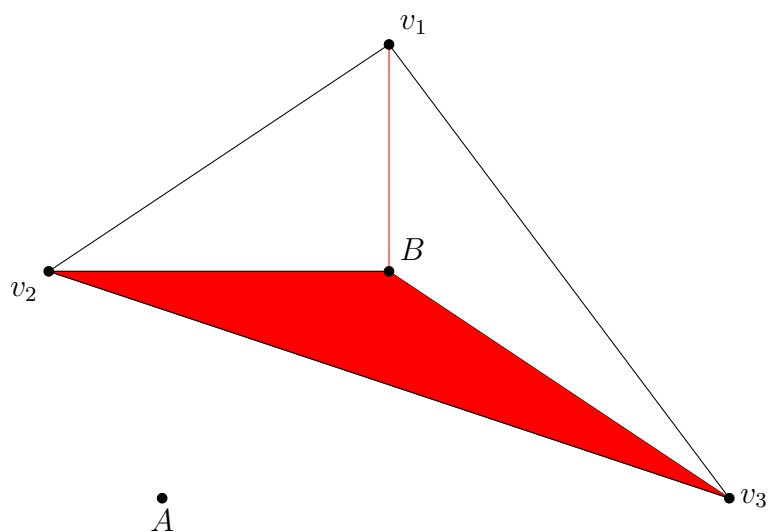
kjer je  $\det(A)$  predznačena ploščina trikotnika. Iz tega se takoj vidi, da je  $b_1$  linearni polinom. Podobno velja za  $i = 2, 3$ . □

**Lema 3.3.** *V vsaki točki, ki leži na stranici nasproti oglišča  $v_i$ , baricentrična koordinata  $b_i$  zavzame vrednost 0. Baricentrična koordinata  $b_i$  v oglišču  $v_i$  zavzame vrednost 1, ostali dve koordinati pa sta enaki 0.*

*Dokaz.* BŠŠ  $i = 1$ . V tem primeru lahko neposredno iz enačbe (3.5) dobimo, da je vrednost  $b_1$  v  $v_1$  enaka 1. Če v  $A$  vstavimo oglišče  $v_1$ , dobimo v števcu ploščino trikotnika, kar pa je tudi v imenovalcu. To pomeni  $b_1 = 1$ . V  $v_1$  sta  $b_2$  in  $b_3$  enaki 0, kar sledi neposredno iz njune enačbe.

Da je vrednost  $b_1 = 0$  za vsako točko, ki leži nasproti oglišča  $v_1$ , pa sledi iz tega, da je prvi stolpec matrike  $A_1$  linearno odvisen od drugih dveh in zato je determinanta te matrike enaka 0. □

**Primer 3.4.** *Naj bo dan trikotnik  $T$  v  $\mathbb{R}^2$  z oglišči  $v_1 = (5, 5)$ ,  $v_2 = (2, 3)$  in  $v_3 = (8, 1)$  in točki  $B = (5, 3)$  in  $A = (3, 1)$  kot prikazuje slika 3. Izračunajmo baricentrične koordinate za točki  $A$  in  $B$ .*



Slika 3: Trikotnik z oglišči  $v_1 = (5, 5)$ ,  $v_2 = (2, 3)$  in  $v_3 = (8, 1)$

Recimo, da najprej izračunam baricentrične koordinate točke  $B$ . Za izračun lahko direktno uporabimo enačbo (3.4) oziroma lahko kar izračunamo razmerje med ploščino označenega trikotnika in pa celotnega trikotnika.

Baricentrično koordinato  $b_1$  za točko  $B$  dobim tako, da izračunam razmerje med ploščino trikotnika z oglišči  $(B, v_2, v_3)$ , ki je na sliki označen z rdečo barvo, in prvotnega trikotnika  $T$ .

$$b_1 = \frac{pl(\Delta Bv_2v_3)}{pl(T)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$pl(\Delta Bv_2v_3) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad (3.6)$$

$$pl(T) = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 9 \quad (3.7)$$

S podobnim izračunom dobimo, da je  $b_2 = b_3 = \frac{1}{3}$ .

Vse tri baricentrične koordinate so enake  $\frac{1}{3}$ , kar pomeni, da je točka  $B$ , ki se nahaja v notranosti trikotnika tudi težišče trikotnika.

Kot sem omenil že prej, je vsota vseh baricentričnih koordinat enaka 1 in če se točka nahaja v notranosti trikotnika so vse tri vrednosti strogo pozitivne, kar v tem primeru drži.

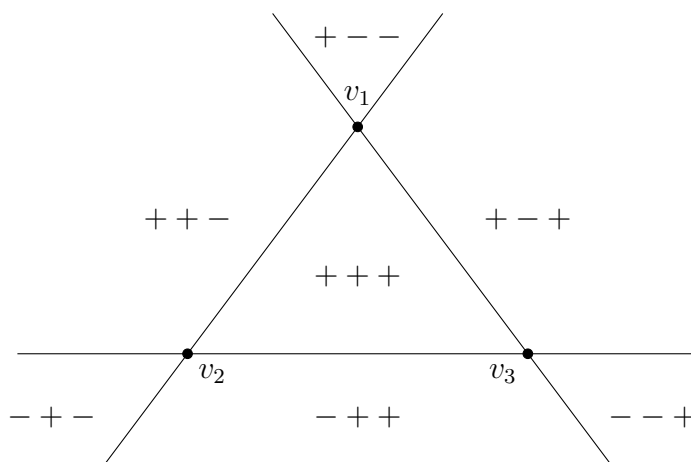
Če sedaj izračunamo še baricentrične koordinate točke  $A$ , ki se nahaja izven trikotnika  $T$ , bi morala biti po že prej povedanem vsaj ena koordinata negativna.

S podobnim izračunom kot za točko  $B$ , so baricentrične koordinate točke  $A$ :

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(-\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{10}{9}\right).$$

Pomembna opazka je, da je prva baricentrična koordinata negativna.

Kot smo videli v zgornjem primeru, če se točka nahaja izven trikotnika, bo vsaj ena baricentrična koordinata negativna. Naslednja slika prikazuje, kakšnih predznakov bodo baricentrične koordinate, če si izberemo točko, ki se nahaja na enem izmed 7 območij, ki jih določajo nosilke stranic trikotnika.



Slika 4: Predznaki baricentričnih koordinat glede na območje izbrane točke

## 3.2 Bernsteinovi bazni polinomi

Naj bodo  $(b_1, b_2, b_3)$  baricentrične koordinate točke  $v \in \mathbb{R}^2$  glede na trikotnik  $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ . Bernsteinov bazni polinom stopnje  $d$  je:

$$B_{ijk}^d(v) = B_{ijk}^d(b_1, b_2, b_3) := \frac{d!}{i!j!k!} b_1^i b_2^j b_3^k, \quad (3.8)$$

kjer je  $i + j + k = d$ ,  $i, j, k \geq 0$  in

$$b_1 = \frac{(y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + x_2y_3 - y_2x_3}{2 \text{pl}(T)},$$

$$b_2 = \frac{(y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y + x_3y_1 - y_3x_1}{2 \text{pl}(T)},$$

$$b_3 = \frac{(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + x_1y_2 - y_1x_2}{2 \text{pl}(T)}.$$

**Opomba 3.5.** Če je kateri izmed  $i$ ,  $j$  ali  $k$  negativen, potem je po dogovoru  $B_{ijk}^d \equiv 0$ .

Ti polinomi imajo nekatere lepe lastnosti. Navedel bom dve izmed njih.

1. Vsota vseh Bernsteinovih baznih polinomov stopnje  $d$  je enaka 1 za vsako točko  $v \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\sum_{i+j+k=d} B_{ijk}^d(v) \equiv 1 \quad (3.9)$$

*Dokaz.*

$$\sum_{i+j+k=d} B_{ijk}^d(v) = \sum_{i+j+k=d} \frac{d!}{i!j!k!} b_1^i b_2^j b_3^k = (b_1 + b_2 + b_3)^d = 1,$$

kjer smo uporabili enačbo (3.8), trinomsko razširitev in dejstvo, da je vsota baricentričnih koordinat enaka 1.  $\square$

2. Za vsako točko  $v \in T$  velja:

$$0 \leq B_{ijk}^d(v) \leq 1. \quad (3.10)$$

*Dokaz.*

(a)  $B_{ijk}^d(v) \geq 0$

Nenegativnost je očitna, saj sledi iz dejstva, da so  $b_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  za  $v \in T$  vsi nenegativni in  $i, j, k, d \in \mathbb{N}$ .

(b)  $B_{ijk}^d(v) \leq 1$

Ta neenakost sledi iz enačbe (3.9) in točke (a). Ker je  $\sum B_{ijk}^d$  enaka 1 za vsak  $v \in \mathbb{R}^2$ , pomeni, da je tudi za vsak  $v \in T$  vsota manjša ali enaka 1. Zato mora biti vsak člen te vrste manjši ali enak ena.  $\square$

**Trditev 3.6.** *Množica*

$$\mathcal{B}^d := \{B_{ijk}^d\}_{i+j+k=d} \quad (3.11)$$

*Bernsteinovih baznih polinomov je baza za prostor polinomov prostora  $\mathcal{P}_d$ .*

*Dokaz.* Ker je število Bernsteinovih baznih polinomov enako dimenziji  $\mathcal{P}_d$ , ki je enaka  $\binom{d+2}{2}$ , je potrebno dokazati, da so vsi polinomi oblike  $x^n y^m$  za  $0 \leq n+m \leq d$  v linearni ogrinjači prostora  $\mathcal{B}^d$ , ki jo označimo z  $\mathcal{L}(\mathcal{B}^d)$ . Dokazujemo z indukcijo.

$$1 \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^d)$$

To sledi neposredno iz lastnosti prostora, in sicer iz enačbe (3.9).

$$x, y \in \mathcal{L}(\mathcal{B}^d)$$

S pomočjo enačbe (3.1),

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + b_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

in enačbe (3.9), dobimo:

$$\begin{aligned}
x &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\
&= (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) \left( \sum_{i+j+k=d-1} B_{ijk}^{d-1}(x, y) \right) \\
&= \sum_{i+j+k=d} \frac{1}{d} (ix_1 + jx_2 + kx_3) B_{ijk}^d(x, y),
\end{aligned} \tag{3.12}$$

kjer smo iz druge v tretjo vrstico upoštevali, da imamo tri vsote, kjer za prvo dobimo:

$$\begin{aligned}
b_1x_1 \left( \sum_{i+j+k=d-1} B_{ijk}^{d-1}(x, y) \right) &= \frac{1}{d} d b_1x_1 \sum_{i+j+k=d-1} \frac{(d-1)!}{i!j!k!} b_1^i b_2^j b_3^k \\
&= \sum_{(i+1)+j+k=d} \frac{1}{d} x_1 \frac{d!}{i!j!k!} b^{i+1} b_2^j b_3^k \\
&= \sum_{(i+1)+j+k=d} \frac{1}{d} (i+1) x_1 \frac{d!}{(i+1)!j!k!} b^{i+1} b_2^j b_3^k \\
&= \sum_{i+j+k=d} \frac{1}{d} i x_1 \frac{d!}{i!j!k!} b^i b_2^j b_3^k \\
&= \sum_{i+j+k=d} \frac{1}{d} i x_1 B_{ijk}^d(x, y).
\end{aligned}$$

Na podoben način bi dobili še ostali dve.

S podobnim razmislekom bi za  $y$  dobili:

$$y = \sum_{i+j+k=d} \frac{1}{d} (iy_1 + jy_2 + ky_3) B_{ijk}^d(x, y)$$

To dokazuje, da sta  $x$  in  $y$  v  $\mathcal{L}(\mathcal{B}^d)$ .

$d-1 \Rightarrow d$

Po indukcijski predpostavki za polinom stopnje  $d-1$  vemo, da je

$$x^{n-1}y^m = \sum_{i+j+k=d-1} c_{ijk} B_{ijk}^{d-1}(x, y),$$

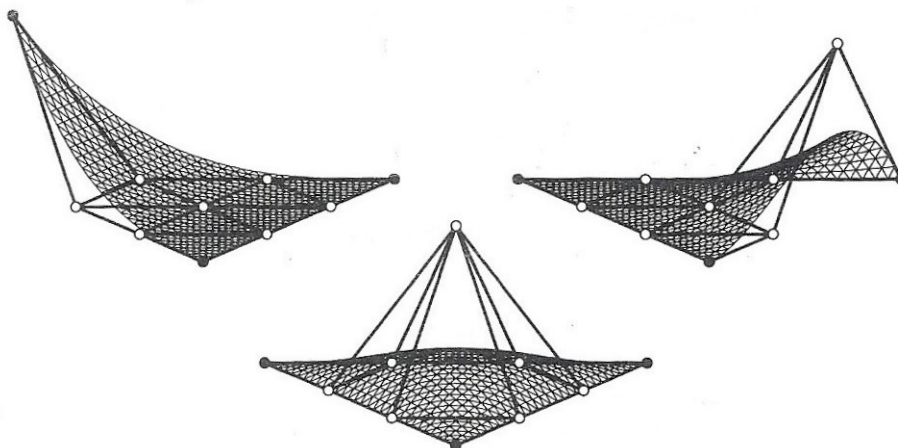
za neke koeficiente  $c_{ijk}$ . Potem za

$$x^n y^m = (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3) \sum_{i+j+k=d-1} c_{ijk} B_{ijk}^{d-1}(x, y),$$

z nekaj premetavanja (kot v (3.12)) dobimo, da je

$$x^n y^m = \sum_{i+j+k=d} e_{ijk} B_{ijk}^d(x, y),$$

kjer je  $e_{ijk} = \frac{1}{d}(ix_1 + jx_2 + kx_3)c_{ijk} \in \mathbb{R}$ , kar dokazuje, da je tudi  $x^n y^m$  za  $n+m=d$  v linearni ogrinjači prostora  $\mathcal{B}^d$ .  $\square$



Slika 5: Nekaj Bernsteinovih baznih polinomov stopnje 3

Vsak polinom  $p$  stopnje  $d$  lahko sedaj z Bernsteinovimi polinomi enolično zapišemo kot

$$p = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d, \quad c_{ijk} \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Zapis (3.13) polinoma  $p$  imenujemo *B-forma*, koeficiente  $c_{ijk}$  pa *B-koeficienti*. Za polinomsko ploskev (za polinom zapisan v *B-formi*) na nekem trikotniku se uporablja izraz *B-krpa* (*B-patch*). Če so  $c_{ijk}$  iz  $\mathbb{R}$  potem zapisu pravimo *neparametrični zapis*. Alternativno lahko polinom zapišemo v *parametrični obliki*, kjer so  $c_{ijk}$  točke iz  $\mathbb{R}^3$ .

**Opomba 3.7.** (*Ureditev B-koeficientov*) *B-koeficienti so urejeni v zaporedje tako, da je  $c_{mnl}$  v zaporedju pred  $c_{ijk}$ , pod pogojem, da je  $m > i$ , ali če je  $m = i$ , potem  $n > j$  ali če je  $m = i$  in  $n = j$ , potem  $l > k$ .*

### 3.3 de Casteljaujev algoritem

Velikokrat namesto celotnega zapisa shranimo le *B-koeficiente*, s katerimi potem delamo naprej. Recimo za računanje vrednosti polinoma v neki točki je zadosti uporabiti le *B-koeficiente*. Za polinome, ki so zapisani v bazi (2.2), lahko izračunamo vrednost polinoma v neki poljubni točki s *Hornerjevim algoritmom*. Podoben algoritem imamo tudi za računanje vrednosti polinoma, zapisanega v Bernsteinovi bazi. Ta algoritem se imenuje *de Casteljaujev algoritem*, in je poimenovan po francoskem matematiku in fiziku Paulu de Casteljauju, ki ga je razvil med svojim službovanjem pri francoskem proizvajalcu avtomobilov Citroën. Najprej je bil razvit algoritem za krivulje, ki ga je de Casteljau objavil v svojem poročilu leta 1959.

Algoritem temelji na enostavni rekurzivni zvezi, ki je posledica definicije Bernsteinovega baznega polinoma

$$B_{ijk}^d = b_1 B_{i-1,j,k}^{d-1} + b_2 B_{i,j-1,k}^{d-1} + b_3 B_{i,j-1,k}^{d-1}, \quad \text{za } \forall i + j + k = d. \quad (3.14)$$

**Trditev 3.8.** *Naj bo  $p$  polinom zapisan v B formi kot v (3.13) s koeficienti*

$$c_{ijk}^{(0)} := c_{ijk}, \quad i + j + k = d. \quad (3.15)$$



Naj ima točka v baricentrične koordinate  $b := (b_1, b_2, b_3)$  in za vsak  $\ell = 1, 2, \dots, d$ , naj bo

$$c_{ijk}^{(\ell)} := b_1 c_{i+1,j,k}^{(\ell-1)} + b_2 c_{i,j+1,k}^{(\ell-1)} + b_3 c_{i,j,k+1}^{(\ell-1)}, \quad (3.16)$$

za  $i + j + k = d - \ell$ . Potem je

$$p(v) = \sum_{i+j+k=d-\ell} c_{ijk}^{(\ell)} B_{ijk}^{d-\ell}(v), \quad (3.17)$$

za vsak  $0 \leq \ell \leq d$ . V posebnem velja, da je

$$p(v) = c_{000}^{(d)}. \quad (3.18)$$

*Dokaz.* Trditve bomo dokazali z indukcijo na  $\ell$ .

$\ell = 0$

Za  $\ell = 0$  je enačba (3.17) kar definicija B-forme (3.13).

$\ell - 1 \Rightarrow \ell$

Za dokazovanje tega se skličemo na rekurzivno zvezo (3.14). Za Bernsteinove bazne polinome stopnje  $d - \ell + 1$  imamo

$$\begin{aligned} p(v) &= \sum_{i+j+k=d-\ell+1} c_{ijk}^{(\ell-1)} B_{ijk}^{d-\ell+1}(v) \\ &= \sum_{i+j+k=d-\ell+1} c_{ijk}^{(\ell-1)} \left[ b_1 B_{i-1,j,k}^{d-\ell}(v) + b_2 B_{i,j-1,k}^{d-\ell}(v) + b_3 B_{i,j,k-1}^{d-\ell}(v) \right] \end{aligned}$$

Sedaj lahko to gledamo kot tri vsote. Če pogledamo samo prvo vidimo

$$\sum_{i+j+k=d-\ell+1} b_1 c_{ijk}^{(\ell-1)} B_{i-1,j,k}^{d-\ell}(v) = \sum_{i+j+k=d-\ell} b_1 c_{i+1,j,k}^{(\ell-1)} B_{ijk}^{d-\ell}(v).$$

Podobni formuli dobimo tudi za ostali dve. Če vse tri združimo z uporabo formule (3.16), dobimo natanko enačbo (3.17).

V primeru, ko je  $d = \ell$ , dobimo enačbo (3.18), saj je Bernsteinov bazni polinom stopnje 0 enak 1.  $\square$

Iz zgornje trditve dobimo de Casteljaujev algoritem za izračun vrednosti polinoma v neki točki.

**Algoritem 3.9.** (de Casteljaujev algoritem)

Za  $\ell = 1, 2, \dots, d$

Za vse  $i + j + k = d - \ell$

$$c_{ijk}^{(\ell)} := b_1 c_{i+1,j,k}^{(\ell-1)} + b_2 c_{i,j+1,k}^{(\ell-1)} + b_3 c_{i,j,k+1}^{(\ell-1)}$$

Začetni podatki, ki jih de Casteljaujev algoritem sprejme so B-koeficienti  $c_{ijk}^0 = c_{ijk}$  in pa baricentrične koordinate  $(b_1, b_2, b_3)$  točke, v kateri računamo vrednost polinoma. Tu so  $b_1, b_2, b_3$  skalarji. Algoritem kot rezultat vrne  $c_{000}^d$ , ki je vrednost polinoma v točki, kateri pripadajo dane baricentrične koordinate.

Bistvo tega algoritma je, da se na vsakem koraku izvede linearna interpolacija za B-koeficiente  $(c_{ijk})$ . Za polinom stopnje  $d$  imamo na začetku  $\binom{d+2}{2}$  B-koeficientov, katerih število pa se na vsakem koraku zmanjša na  $\binom{d-\ell+2}{2}$ , kjer je  $\ell$  korak na katerem smo.

De Casteljaujev algoritem je sicer počasnejši od Hornerjevega algoritma, vendar pa je zelo stabilen in učinkovit. Stabilnost se kaže že v tem, da računamo s samimi pozitivnimi števili, saj so baricentrične koordinate za vsako točko iz trikotnika pozitivne. Kot sem omenil že zgoraj, je vsota vseh baricentričnih koordinat 1, kar pomeni, da na vsakem koraku algoritma računamo konveksno kombinacijo B-koeficientov, ki smo jih naračunali v prejšnjem koraku.

Ena izmed pomembnih posledic je, da so vmesni koeficienti  $c_{ijk}^{(\ell)}$ , ki jih de Casteljaujev algoritem izračuna, v bistvu polinomi stopnje  $\ell$  v točki  $v$ . Kako so dani koeficienti algoritma, nam pove naslednja trditev.

**Trditev 3.10.** *Koeficienti de Casteljaujevega algoritma v enačbi (3.17) so enaki*

$$c_{ijk}^{(\ell)} = \sum_{m+n+l=\ell} c_{i+m,j+n,k+l} B_{mnl}^{\ell}(v), \quad i+j+k = d-\ell. \quad (3.19)$$

*Dokaz.* Najprej zapišemo

$$c_{ijk}^{(1)} = c_{i+1,j,k} b_1 + c_{i,j+1,k} b_2 + c_{i,j,k+1} b_3, \quad i+j+k = d-1 \quad (3.20)$$

kot

$$c_{ijk}^{(1)} = (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3) c_{ijk}, \quad (3.21)$$

kjer je  $E_1 c_{ijk} = c_{i+1,j,k}$ ,  $E_2 c_{ijk} = c_{i,j+1,k}$ ,  $E_3 c_{ijk} = c_{i,j,k+1}$ . S pomočjo te notacije zapišemo algoritem (3.9) kot

$$c_{ijk}^{(\ell)} = (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3) c_{ijk}^{(\ell-1)}.$$

Sedaj uporabimo to formulo za  $c_{ijk}^{(\ell-1)}$  in ponovimo postopek  $\ell - 1$  krat in dobimo

$$\begin{aligned} c_{ijk}^{(\ell)} &= (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3) c_{ijk}^{(\ell-1)} \\ &= (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3)^2 c_{ijk}^{(\ell-2)} \\ &= \dots \\ &= (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3)^{\ell} c_{ijk}. \end{aligned}$$

Z uporabo trinomske razširitve dobimo

$$\begin{aligned}
c_{ijk}^{(\ell)} &= (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3)^\ell c_{ijk} \\
&= \sum_{m+n+l=\ell} \frac{\ell!}{m!n!l!} (b_1 E_1)^m (b_2 E_2)^n (b_3 E_3)^l c_{ijk} \\
&= \sum_{m+n+l=\ell} \frac{\ell!}{m!n!l!} \underbrace{b_1^m b_2^n b_3^l}_{B_{mnl}^\ell(v)} E_1^m E_2^n E_3^l c_{ijk} \\
&= \sum_{m+n+l=\ell} c_{i+m, j+n, k+l} B_{mnl}^\ell(v)
\end{aligned}$$

□

**Primer 3.11.** Naj bo dan trikotnik  $T$  in točka  $B$  z baricentričnimi koordinatami  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  kot v primeru 3.4. Recimo, da imamo še polinom  $p$  stopnje  $d = 2$ , ki je zapisan kot v (3.13) v neparametrični obliki z  $B$ -koeficienti  $c_{ijk} = (1, 0, 2, 1, 1, 3)$ , ki so urejeni kot v (3.7). Za izračun vrednosti polinoma  $p$  v točki  $B$  bomo potrebovali 2 koraka.

1. Iz začetnih 6 vrednosti dobimo z linearno interpolacijo 3 nove vrednosti, ki jih potem uporabimo v zadnjem koraku.

$$c_{100}^{(1)} = b_1 c_{200} + b_2 c_{110} + b_3 c_{101} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 1$$

S podobnim izračunom dobimo, da je  $c_{010}^{(1)} = \frac{2}{3}$  in  $c_{001}^{(1)} = 2$ .

2. Na zadnjem, drugem koraku pa bomo iz naračunanih vrednosti  $c_{100}^{(1)}$ ,  $c_{010}^{(1)}$  in  $c_{001}^{(1)}$  dobili vrednost polinoma v točki  $B$ .

$$c_{000}^{(2)} = b_1 c_{100}^{(1)} + b_2 c_{010}^{(1)} + b_3 c_{001}^{(1)} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{3+2+6}{9} = \frac{11}{9}$$

V zgornjem primeru sem pokazal kako se izračuna vrednost polinoma v neki točki, če je polinom zapisan v neparametrični obliki. Sedaj pa sledi še primer de Casteljaujevega algoritma za polinom zapisan, v parametrični obliki.

**Primer 3.12.** Naj bosta polinom  $p$  in točka  $v$  kateri nas zanima vrednost ista kot v prejšnjem primeru, le da je sedaj polinom zapisan v parametrični obliki. Sedaj bomo na zadnjem koraku de Casteljaujevega algoritma dobili vektor s tremi komponentami.

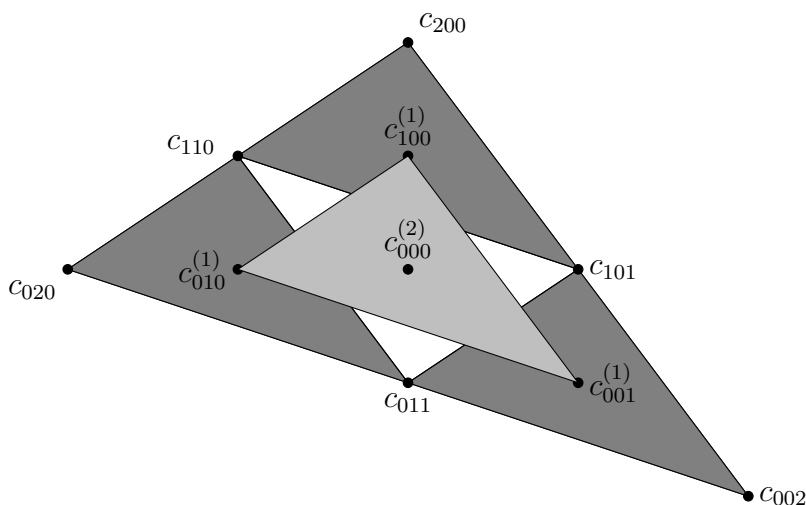
Na prvem koraku algoritma bi dobili tri vektorje, in sicer:

$$c_{100}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_{010}^{(1)} = \begin{bmatrix} 10.5 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad c_{001}^{(1)} = \begin{bmatrix} 19.5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Na drugem, zadnjem koraku dobimo:

$$c_{000}^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 11 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Kot rezultat na zadnje koraku algoritma smo dobili vektor  $c_{000}^{(2)}$ , ki nam pove, da je vrednost polinoma v prvih dveh koordinatah  $(5, 3)$  enaka  $\frac{11}{9}$ . Pričakovano smo dobili, da je vrednost polinoma v neki točki enaka v obeh primerih.



Slika 6: Grafični prikaz de Casteljaujevega algoritma

### 3.4 Smerni odvod

Na tem mestu bom definiriral še smerni odvod polinoma, zapisanega v B-formi, ki ga bom pozneje uporabljal pri lastnostih dvodimenzionalnih zlepkov in polinomov.

Kot že samo ime pove, je to odvod v neki smeri, ki jo določa vektor  $\vec{u}$ . Vektor  $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$  lahko vedno zapišemo kot razliko dveh točk, ki sta zapisani v baricentričnih koordinatah. Zato so koordinate vektorja  $\vec{u}$  enolično določene, hkrati pa je njihova vsota enaka 0. Trojico  $(a_1, a_2, a_3)$  imenujemo *smerne koordinate* vektorja  $\vec{u}$ .

**Trditev 3.13.** *Naj bo  $p$  polinom stopnje  $d$ , definiran na nekem trikotniku  $T$  in zapisan v B-formi. Naj bo  $\vec{u} := (a_1, a_2, a_3)$  smerni vektor. Potem je smerni odvod polinoma  $p$  v neki točki  $v$  in smeri  $\vec{u}$ :*

$$D_u p(v) = d \sum_{i+j+k=d-1} c_{ijk}^{(1)}(\vec{u}) B_{ijk}^{d-1}(v), \quad (3.22)$$

kjer so  $c_{ijk}^{(1)}$  vrednosti, ki jih dobimo na prvem koraku de Casteljaujevega algoritma, kjer pa namesto baricentričnih koordinat točke  $v$  vzamemo trojico  $(a_1, a_2, a_3)$ .

*Dokaz.* Če izračunamo smerni odvod polinoma (3.13), dobimo:

$$D_u p(v) = \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} \underbrace{D_u B_{ijk}^d(v)}_{(*)} \quad (3.23)$$

Ker računamo odvod v smeri  $\vec{u}$ , gledamo sedaj baricentrične koordinate točke  $v + tu$ .

Z uporabo posrednega odvajanja za  $(\star)$  dobimo:

$$\begin{aligned}
D_u B_{ijk}^d(v) &= D_u \frac{d!}{i!j!k!} (b_1 + ta_1)^i (b_2 + ta_2)^j (b_3 + ta_3)^k \\
&= \frac{d!}{i!j!k!} \left[ i b_1^{i-1} a_1 b_2^j b_3^k + b_1^i j b_2^{j-1} a_2 b_3^k + b_1^i b_2^j k b_3^{k-1} a_3 \right] \\
&= a_1 \frac{d!}{(i-1)!j!k!} b_1^{i-1} b_2^j b_3^k + a_2 \frac{d!}{i!(j-1)!k!} b_1^i b_2^{j-1} b_3^k + \\
&\quad + a_3 \frac{d!}{i!j!(k-1)!} b_1^i b_2^j b_3^{k-1} \\
&= d \left[ a_1 B_{i-1,j,k}^{d-1}(v) + a_2 B_{i,j-1,k}^{d-1}(v) + a_3 B_{i,j,k-1}^{d-1}(v) \right],
\end{aligned}$$

kjer smo na koraku iz prve v drugo vrstico posredno odvajali po  $t$  in izračunali vrednost v  $t = 0$ .

Če sedaj to vstavimo nazaj v (3.23), dobimo z upoštevanjem prvega koraka de Casteljaujevega algoritma za  $\vec{u}$ :

$$c_{ijk}^{(1)} = a_1 c_{i+1,j,k} + a_2 c_{i,j+1,k} + a_3 c_{i,j,k+1}, \quad i + j + k = d - 1, \quad (3.24)$$

natanko enačbo (3.22), ki smo jo hoteli dokazati.  $\square$

**Primer 3.14.** Naj bo  $\vec{u}$  smerni vektor s koordinatami  $(1, 0, -1)$ . Polinom  $p$  naj bo stopnje 2 z  $B$ -koeficienti  $c_{ijk} = (1, 0, 3, 2, 1, 1)$ , ki so urejeni kot v (3.7),

$$p = b_1^2 + 2b_2^2 + b_2b_3 + b_3^2 + 6b_1b_3.$$

Pri odvajanju vsak člen v polinomu odvajamo posebej.

$$\begin{aligned}
B_{200}^2 = b_1^2 &\longrightarrow D_u B_{200}^2 = \frac{2!}{2!0!0!} (1 \cdot 2 \cdot b_1) = 2b_1 = 2B_{100} \\
B_{020}^2 = b_2^2 &\longrightarrow D_u B_{020}^2 = \frac{2!}{0!2!0!} (0 \cdot 2 \cdot b_2) = 0 \\
B_{002}^2 = b_3^2 &\longrightarrow D_u B_{002}^2 = -2b_2 = -2B_{001} \\
B_{011}^2 = b_2b_3 &\longrightarrow D_u B_{011}^2 = \frac{2!}{0!1!1!} (0 \cdot 1 \cdot b_3 - 1 \cdot 1 \cdot b_2) = -2b_2 = -2B_{010} \\
B_{101}^2 = b_1b_3 &\longrightarrow D_u B_{101}^2 = \frac{2!}{1!0!1!} (1 \cdot 1 \cdot b_3 - 1 \cdot 1 \cdot b_1) = \\
&= 2(b_3 - b_1) = 2(B_{001} - B_{100}) \\
B_{110}^2 = b_1b_2 &\longrightarrow D_u B_{110}^2 = \frac{2!}{1!1!0!} (1 \cdot 1 \cdot b_2 + 0 \cdot 1 \cdot b_1) = \\
&= 2b_2 = 2B_{010}
\end{aligned}$$

Za izračun prvega smernega odvoda v smeri vektorja  $\vec{u}$  je potrebno izračunati nove vrednosti  $B$ -koeficientov s pomočjo de Casteljaujevega algoritma na naslednji način:

$$\begin{aligned}
c_{100}^1 &= a_1 c_{200} + a_2 c_{110} + a_3 c_{101} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -2 \\
c_{010}^1 &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = -1 \\
c_{001}^1 &= 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 2
\end{aligned}$$

Sedaj sestavimo vse skupaj kot v formuli (3.23):

$$\begin{aligned} D_u p &= 1 \cdot 2 \cdot B_{100} - 1 \cdot 2 \cdot B_{010} - 1 \cdot 2 \cdot B_{001} + 3 \cdot 2 \cdot (B_{001} - B_{100}) = \\ &= -4B_{100} - 2B_{010} + 4B_{001}, \end{aligned}$$

oziroma po formuli (3.22):

$$D_u p = 2 \cdot [-2 \cdot B_{100} - 1 \cdot B_{010} + 2 \cdot B_{001}] = -4B_{100} - 2B_{010} + 4B_{001}.$$

Rezultat je po formuli (3.22) pričakovano enak rezultatu po formuli (3.23).

Smerni odvodi v smeri vektorjev, ki kažejo v isto smer, v splošnem niso enaki, saj so odvisni od dolžin vektorjev.

**Primer 3.15.** Naj bo  $p$  polinom prve stopnje oblike  $p = B_{100}$  in  $\hat{u} = (1, 0 - 1)$  in  $\tilde{u} = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$  smerna vektorja, ki sta različnih dolžin in imata enako smer.

1. Smerni odvod  $p$  v smeri  $\hat{u}$ :

$$D_{\hat{u}} p = D_{\hat{u}} B_{100} = B_{000}^0 = 1.$$

2. Smerni odvod  $p$  v smeri  $\tilde{u}$ :

$$D_{\tilde{u}} p = D_{\tilde{u}} B_{100} = \frac{1}{2} B_{000}^0 = \frac{1}{2}.$$

Za  $n$ -ti smerni odvod polinoma  $p$  v smeri vektorjev  $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n$ , s smernimi koordinatami  $a^{(i)} = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, a_3^{(i)})$  za  $i = 1, 2, \dots, n$  velja:

$$D_{u_n} \dots D_{u_1} p(v) = \frac{d!}{(d-n)!} \sum_{i+j+k=d-n} c_{ijk}^{(n)}(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) B_{ijk}^{d-n}(v), \quad (3.25)$$

kjer so  $c_{ijk}^{(n)}(a^{(1)}, \dots, a^{(n)})$  vrednosti, ki jih dobimo, če izvedemo  $n$  korakov de Casteljaujevega algoritma, kjer vsakemu koraku uporabimo drugi  $a^{(i)}$ , ki jih izbiramo po vrsti od  $a^{(1)}$  do  $a^{(n)}$ .

Podobno za  $n$ -ti smerni odvod v smeri istega vektorja  $\vec{u}$  s smernimi koordinatami  $a = (a_1, a_2, a_3)$  velja:

$$D_u^n p(v) = \frac{d!}{(d-n)!} \sum_{i+j+k=d-n} c_{ijk}^{(n)}(a) B_{ijk}^{d-n}(v), \quad (3.26)$$

kjer so  $c_{ijk}^{(n)}(a)$  vrednosti, ki jih dobimo po  $n$  korakih de Casteljaujevega algoritma, pri katerem na vsakem koraku uporabimo komponente smernega vektorja  $\vec{u}$ .

Dokaz je za obe navedeni formuli, (3.25) in (3.26), podoben prejšnjemu dokazu za prvi smerni odvod, le, da vsak korak ponovimo  $n$ -krat in upoštevamo, da so B-koeficienti  $c_{ijk}^{(n)}$  iz  $n$ -tega koraka de Casteljaujevega algoritma.

Za nadaljnje potrebe bom povedal še trditev, ki nam pove, kako se izračunajo koeficienti  $c_{ijk}^{(n)}$  smernega odvoda iz formule (3.26), vendar pa na drugačen način, kot sem ga opisal prej.

**Trditev 3.16.** Naj bo  $p$  polinom kot v (3.13). Potem so za poljuben  $1 \leq m \leq d$  koeficienti  $m$ -tega smernega odvoda polinoma  $p$  v smeri  $u = v_2 - v_1$  dani z

$$c_{ijk}^{(m)} := \sum_{\ell=0}^m \binom{m}{\ell} (-1)^\ell c_{i+\ell, j+m-\ell, k}, \quad i + j + k = d - m. \quad (3.27)$$

*Dokaz.* Smerne koordinate smernega vektorja  $u$  so podane z  $a = (-1, 1, 0)$  in po formuli (3.19) dobimo

$$c_{ijk}^{(m)}(a) \stackrel{(3.19)}{=} \sum_{\alpha+\beta=m} c_{i+\alpha, j+\beta, k} B_{\alpha\beta 0}^m(v) = \sum_{\alpha+\beta=m} \frac{m!(-1)^\alpha}{\alpha!\beta!} c_{i+\alpha, j+\beta, k}, \quad i + j + k = d - m.$$

□

## 4 Dvodimenzionalni zleпки

**Definicija 4.1.** *Dvodimenzionalni zleпки so odsekoma polinomske ploskve.*

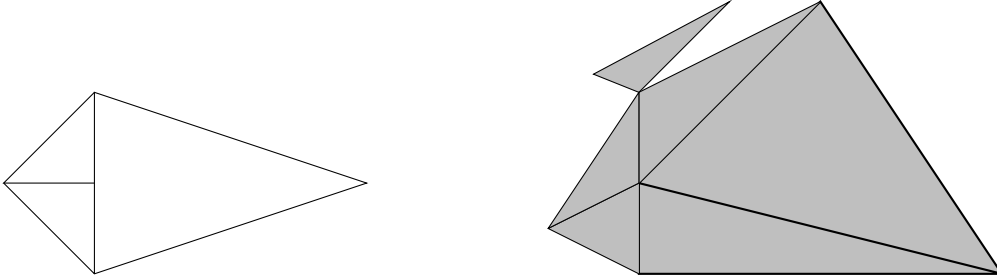
Osredotočil se bom predvsem na dvodimenzionalne zleпки, ki so definirani na trikotnikih. Najprej bom definiral najenostavnejši dvodimenzionalni zlepek. Nato pa še kako pridemo do zlepkov, ki čez rob dosežejo višje gladkosti in njihove lastnosti, kot so pozitivnost, monotonost in konveksnost.

Recimo, da imamo definiran polinom  $p$  stopnje  $d$  na nekem trikotniku  $T$  z oglišči  $v_1$ ,  $v_2$  in  $v_3$ , ki je zapisan v Bernsteinovi bazi kot v (3.13). Ploskev polinoma na trikotniku se imenuje *B-krpa* (*B-patch*). Najprej pa moramo definirati množico točk domene

$$M_{d,T} = \left\{ t_{ijk} = \frac{iv_1 + jv_2 + kv_3}{d} \right\}_{i+j+k=d}, \quad (4.1)$$

kjer so  $t_{ijk}$  točke iz  $\mathbb{R}^2$ . Število vseh takih točk je  $\binom{d+2}{2}$ . Pri  $d = 2$  je moč množice  $M_{2,T}$  enaka 6. Sedaj lahko te točke med sabo povežemo tako, da dobimo triangulacijo. Povezovanje je odvisno od ureditve točk  $t_{ijk}$ .

**Definicija 4.2.** *Naboru trikotnikov  $\Delta := \{T_1, T_2, \dots, T_N\}$  rečemo **triangulacija**, če za vsak par trikotnikov iz  $\Delta$ , ki se stikata, velja, da imata skupno oglišče ali skupno stranico.*



Slika 7: Desna slika prikazuje triangulacijo, medtem, ko leva slika prikazuje le nabor trikotnikov, ki ni triangulacija.

Zgornja definicija nam pove, da lahko točke med seboj povežemo med seboj le, če so sosednje, kar pa pomeni, da sta točki  $t_{ijk}$  in  $t_{mnl}$  sosednji, če je zadoščeno naslednjemu pogoju:

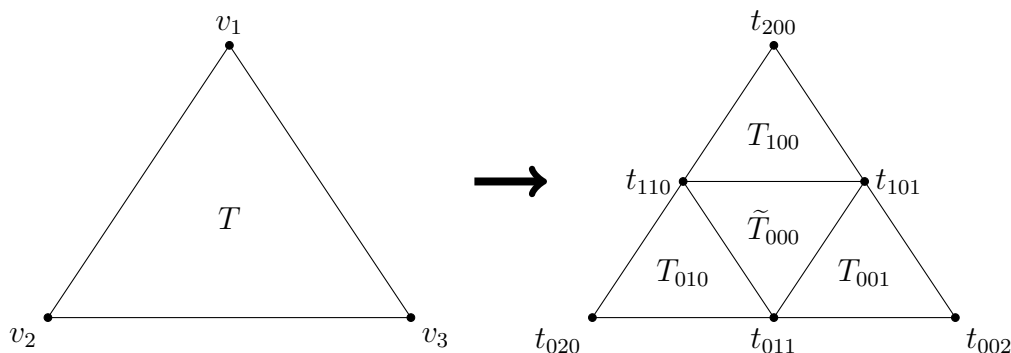
$$|i - m| = |j - n| = |k - l| = 2.$$

Domeno  $T$  sedaj sestavlja  $\binom{d+1}{2}$  zunanjih trikotnikov in  $\binom{d}{2}$  notranjih trikotnikov. Primer za  $d = 2$  prikazuje slika 8. Zunanji trikotniki so tisti, katerih vsaj ena stranica se v celoti dotika s stranico začetnega trikotnika  $T$ . Ostali trikotniki, se pravi vsi notranji, se z začetnim trikotnikom lahko stikajo le preko oglišča, lahko se pa stranice začetnega trikotnika sploh ne dotika. Vse te trikotnike označimo:

$$T_{ijk} := \langle t_{i+1,j,k}, t_{i,j+1,k}, t_{i,j,k+1} \rangle, \quad i + j + k = d - 1 \quad (4.2)$$

$$\tilde{T}_{ijk} := \langle t_{i,j+1,k+1}, t_{i+1,j,k+1}, t_{i+1,j+1,k} \rangle, \quad i + j + k = d - 2 \quad (4.3)$$





Slika 8: Trikotnik  $T$  predstavlja domeno polinoma  $p$  stopnje  $d = 2$  in njegovo pripadajočo triangulacijo

Ker je naš polinom  $p$  zapisan v B-formi, lahko na vsakem izmed trikotnikov  $T$  in  $\tilde{T}$  sedaj definiramo linearne polinome dveh spremenljivk, ki ležijo v  $\mathbb{R}^3$ :

$$q_p(v) := \begin{cases} q_{ijk}(v), & \text{za } v \in T_{ijk}, \quad i + j + k = d - 1 \\ \tilde{q}_{ijk}(v), & \text{za } v \in \tilde{T}_{ijk}, \quad i + j + k = d - 2 \end{cases}$$

in bodo interpolirali vrednosti oglišč vsakega trikotnika. Vrednosti, ki jih dobimo, skupaj s točkami, ki jo interpoliramo, imenujemo *kontrolne točke* in se nahajajo v  $\mathbb{R}^3$ . Kontrolno točko  $K$  zapišemo kot:

$$K_{ijk} := (t_{ijk}, x_{ijk}). \quad (4.4)$$

Ti polinomi, ki so definirani na vsakem trikotniku posebej, se nahajajo v  $\mathbb{R}^3$  in se med seboj stikajo. Sestavljajo t.i. *kontrolno mrežo* (*control net*). Kontrolna mreža je odsekoma linearni polinom oziroma linearni zlepek, ki je zvezen prek robov. To je najosnovnejši dvodimenzionalni zlepek.

S polinomi višjih stopenj pa je preko skupnih robov moč doseči tudi višje stopnje gladkosti. Recimo s kubičnimi polinomi lahko dosežemo gladkosti  $C^0$ ,  $C^1$  ali  $C^2$ .

**Trditev 4.3.** *Recimo, da imamo dva trikotnika  $T = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$  in  $\tilde{T} = \langle v_4, v_3, v_2 \rangle$ , ki imata skupen rob  $s := \langle v_2, v_3 \rangle$  kot prikazuje slika 9 in:*

$$p(v) := \sum_{i+j+k=d} c_{ijk} B_{ijk}^d(v) \quad \text{na } T \quad (4.5)$$

$$\tilde{p}(v) := \sum_{i+j+k=d} \tilde{c}_{ijk} \tilde{B}_{ijk}^d(v) \quad \text{na } \tilde{T} \quad (4.6)$$

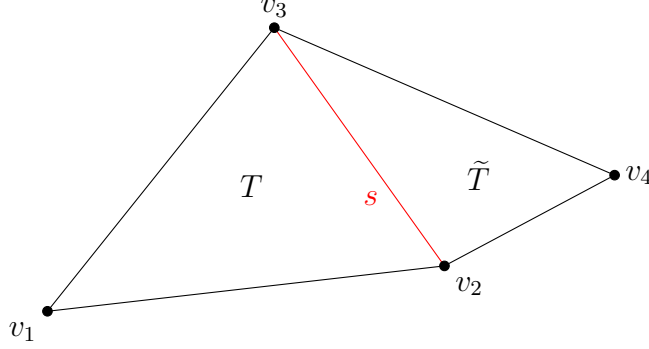
*polinoma zapisana z Bernsteinovi baznimi polinomi in  $\vec{u}$  poljuben vektor, ki ni vzporeden stranici  $s$ . Potem je:*

$$D_u^n p(v) = D_u^n \tilde{p}(v), \quad n = 0, 1, \dots, r, \quad (4.7)$$

*smerni odvod v smeri vektorja  $\vec{u}$  (kot v enačbi (3.26)) v vsaki točki  $v$ , ki leži na skupni stranici  $s$ , če in samo če:*

$$\tilde{c}_{nkj} = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} c_{\alpha,j+\beta,k+\gamma} B_{\alpha\beta\gamma}^n(v_4) \quad j + k = d - n, \quad n = 0, 1, \dots, r \quad (4.8)$$

**Opomba 4.4.** Zgornja trditev pravi, da če je zadoščeno vsem navedenim pogojem, potem je gladkost čez rob  $C^r$ .



Slika 9: Trikotnika  $T$  in  $\tilde{T}$  s skupnim robom  $s = \langle v_2, v_3 \rangle$ .

*Dokaz.* Ker sta polinoma  $p$  in  $\tilde{p}$  vzdolž skupne stranice  $s$  polinoma ene spremenljivke, je jasno, da sta zvezna vzdolž roba  $s$  natanko tedaj, ko je

$$c_{0jk} = \tilde{c}_{0kj}, \quad j + k = d. \quad (4.9)$$

To je primer, ko je  $r = 0$ . Za ostale primere, ko je  $r > 0$  formula (4.7) velja če in samo če drži v smeri  $u = v_4 - v_2$ . To sledi iz dejstva, ker se vsi odvodi polinomov  $p$  in  $\tilde{p}$  v smeri  $v_3 - v_2$  ujemajo v vsaki točki, ki leži na stranici  $s$ , hkrati pa so vsi odvodi v ostalih smereh linearne kombinacije  $D_u$  in  $D_{v_3-v_2}$ .

Naj bodo sedaj  $b = (b_1, b_2, b_3)$  baricentrične koordinate točke  $v_4$ . Potem je smerni vektor  $u$  gleda na trikotnik  $T$  podan s smernimi koordinatami  $a = (b_1, b_2 - 1, b_3)$ , glede na trikotnik  $\tilde{T}$  pa z  $\tilde{a} = (1, 0, -1)$ . Z uporabo formule (3.26) za vsak  $0 \leq n \leq r$  dobimo

$$D_u^n p|_e = \frac{d!}{(d-n)!} \sum_{j+k=d-n} c_{0jk}^{(n)}(a) B_{0jk}^{d-n},$$

$$D_u^n \tilde{p}|_e = \frac{d!}{(d-n)!} \sum_{j+k=d-n} \tilde{c}_{0jk}^{(n)}(\tilde{a}) \tilde{B}_{0jk}^{d-n},$$

kjer so  $c_{ijk}^{(n)}$  in  $\tilde{c}_{ijk}^{(n)}$  koeficienti, ki jih dobimo na  $n$ -tem koraku de Casteljaujevega algoritma, kjer za koeficiente  $c_{ijk}$  uporabimo  $a$ , za  $\tilde{c}_{ijk}$  pa  $\tilde{a}$ .

Ker sta za vsako točko  $v$ , ki leži na  $s$   $B_{0jk}^{d-n}(v) = \tilde{B}_{0kj}^{d-n}(v)$  enaka, formula (4.7) drži, če in samo če velja

$$c_{0jk}^{d-n}(a) = \tilde{c}_{0kj}^{d-n}(\tilde{a}), \quad j + k = d - n, \quad n = 0, 1, \dots, r. \quad (4.10)$$

Za dokaz, da je pogoj (4.10) enak pogoj (4.8) se skličemo na trditev 3.16, ki nam pove

$$\tilde{c}_{0kj}^{(n)}(\tilde{a}) = \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \binom{n}{m} \tilde{c}_{m,k,d-k-m}, \quad j + k = d - n.$$

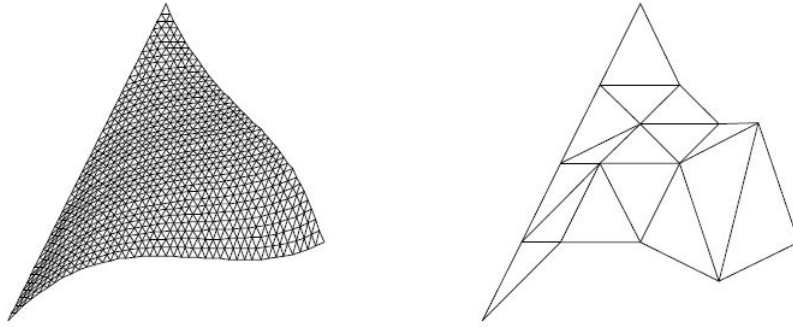
Na drugi strani pa s pomočjo postopka iz dokaza trditve 3.10 in pa trditve 3.16 dobimo

$$\begin{aligned}
c_{0jk}^{(n)}(a) &= (b_1 E_1 + (b_1 - 1) E_2 + b_3 E_3)^n c_{0jk} \\
&= (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3 - E_2)^n c_{0jk} \\
&= \sum_{m=0}^n (-1)^{(n-m)} \binom{n}{m} (b_1 E_1 + b_2 E_2 + b_3 E_3)^m c_{0,j+n-m,k} \\
&= \sum_{m=0}^n (-1)^{(n-m)} \binom{n}{m} c_{0,d-k-m,k}^{(m)}(b), \quad j+k = d-n.
\end{aligned}$$

Iz tega sledi, da (4.10) drži, če in samo če je

$$\tilde{c}_{n,k,d-k-n} = c_{0,d-k-n,k}^{(n)}(b), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n = 0, 1, \dots, r,$$

kar pa je po trditvi 3.10 ekvivalentno (4.8). □



Slika 10: *B-krpa* in pripadajoča *kontrolna mreža* ( $d = 4$ )

Dvodimenzionalni zlepci pa niso uporabni le za predstavitev dvodimenzionalnih polinomov, temveč tudi v primeru interpolacije. Uporabljamo jih predvsem, da bi se izognili problemom, ki so povezani s prevelikim osciliranjem polinoma.

Recimo, da imamo v prostoru dane neke točke, ki jih želimo interpolirati s polinomom. Če je danih veliko točk, bomo potrebovali polinomske ploskve velike stopnje. Tu pa seveda nastopijo težave, saj bodo polinomi velikih stopenj začeli oscilirati, česar si pa ne želimo. Da bi se izognili temu problemu, se domeno razdeli na triangulacijo, ki je sestavljena iz trikotnikov na katerih uporabimo polinomske ploskve nizkih stopenj. Skupna ploskev, sestavljena iz polinomov nizkih stopenj, je dvodimenzionalni zlepek.

## 5 Lastnosti dvodimenzionalnih polinomov in zlepkov

Ker so dvodimenzionalni zleпки odsekoma polinomske ploskve, se lastnosti zlepkov in polinomov med seboj povezujejo. Se pravi, da bodo vse lastnosti, ki jih bom povedal in opisal za dvodimenzionalne zlečke, posledično veljale tudi za polinome dveh spremenljivk.

### 5.1 Pozitivnost

Kontrolna ploskev oziroma dvodimenzionalni zlepek je **pozitiven** natanko tedaj, ko se v celoti nahaja nad svojo triangulacijo.

**Trditev 5.1.** Če so vsi  $B$ -koeficienti  $\{c_{ijk}\}_{i+j+k=d}$  polinoma  $p$  pozitivni (nenegativni), je kontrolna ploskev je pozitivna (nenegativna).

*Dokaz.* Ker je polinom  $p$  zapisan v  $B$ -formi, nenegativnost sledi iz dejstva, da je vsak Bernsteinov bazni polinom nenegativen na  $T$  oziroma za vsako točko  $v \in T$  velja neenakost (3.10). Pozitivost pa sledi iz dejstva, da je za vsako točko iz  $T$  vsaj en bazni polinom pozitiven, saj je njihova vsota enaka 1. Iz tega pa sledi, da morajo biti vsi koeficienti  $c_{ijk} \geq 0$  (oziroma  $> 0$ ).  $\square$

Ta trditev nam da zadosten pogoj za pozitivnost kontrolne ploskve, za polinom stopnje  $d > 1$ . Ta pogoj je potreben le v primeru, ko je  $d = 1$ , se pravi, ko je  $p$  linearni polinom.

**Primer 5.2.** Naj bo  $p$  polinom, zapisan v  $B$ -formi:

$$p = b_1^2 - 6b_1b_2 + 9b_2^2 = (b_1 - 3b_2)^2,$$

kjer so  $b_1, b_2$  in  $b_3$  funkcije baricentričnih koordinat.  $B$ -koeficienti tega polinoma so  $\{1, -3, 0, 9, 0, 0\}$ , ki so urejeni kot je opisano v opombi 3.7. Ta polinom je strogo pozitiven povsod na domeni  $T$ , razen v točkah kjer je  $b_1 = b_2$ . Tam je vrednost 0. Kljub temu, da vsi koeficienti niso pozitivni (nenegativni), je polinom še vedno nenegativen.

Primer 5.2 je le poseben primer, kjer lahko vidimo, da trditev 5.1 ne drži vedno, kar pomeni, da pogoj iz te trditve le zadosten ne pa tudi potreben pogoj za nenegativnost.

Običajno je za polinome višjih stopenj ( $d \geq 2$ ) v resnici zelo težko preveriti, če so pozitivni (nenegativni). V primeru, ko je  $d = 2$ , obstajajo pogoji, kdaj je polinom pozitiven (nenegativen). Bralec jih lahko najde v [3] na straneh 66–69.

Če je kontrolna ploskev pozitivna oziroma nenegativna, potem je polinomska ploskev, kateri ta kontrolna ploskev pripada, tudi pozitivna oziroma nenegativna.

## 5.2 Monotonost

Monotonost je lastnost, ki nam pove, kako se naša funkcija obnaša v smeri nekega vektorja. Se pravi ali funkcija v neki smeri narašča, pada ali pa je konstantna.

**Definicija 5.3.** Recimo, da imamo vektor  $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$  in funkcijo  $f$  definirano na nekem trikotniku  $T$ . Potem funkcija  $f$  **monotono narašča (pada)** v smeri vektorja  $\vec{u}$  pod pogojem, da je  $f(v_2) \geq f(v_1)$  ( $f(v_2) \leq f(v_1)$ ), za vsaki točki  $v_1, v_2 \in T$ , za kateri ima vektor  $v_2 - v_1$  isto smer kot vektor  $\vec{u}$ .

Ekvivalentno zgornji definiciji je, če ima funkcija  $f$  smerni odvod v smeri vektorja  $\vec{u}$  in velja  $D_u f(v) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) potem  $f$  monotono narašča (pada).

Zgornje velja v splošnem, vendar za polinome, zapisane v B-formi, obstajajo pogoji, kdaj polinom monotono narašča (pada).

**Trditve 5.4.** Naj bo dan vektor  $\vec{u}$  s smernimi koordinatami  $a_1, a_2$  in  $a_3$ , katerih vsota je enaka 0 in polinom  $p$  zapisan v B-formi. Če velja:

$$c_{ijk}^{(1)} = a_1 c_{i+1,j,k} + a_2 c_{i,j+1,k} + a_3 c_{i,j,k+1} \geq 0, \quad i + j + k = d - 1, \quad (5.1)$$

potem polinom  $p$  monotono narašča v smeri vektorja  $\vec{u}$ .

*Dokaz.* Vrednosti  $c_{ijk}^{(1)}$  dobimo na enak način kot v dokazu trditve 3.13, se pravi pri prvem koraku de Casteljaujevega algoritma za  $a_1, a_2$  in  $a_3$ . To pomeni, da so to koeficienti prvega smernega odvoda v smeri vektorja  $\vec{u}$  ( $D_u p(v)$ ). Po trditvi 5.1 sledi, da je smerni odvod  $D_u p(v) \geq 0$  za vsak  $v \in T$ . To pa po zgornji definiciji pomeni, da polinom  $p$  v smeri  $\vec{u}$  monotono narašča.  $\square$

**Posledica 5.5.** Naj bo  $u = v_2 - v_1$  smerni vektor, kjer sta  $v_1$  in  $v_2$  oglišči trikotnika  $T$  in  $c_{ijk}$  koeficienti polinoma  $p$  taki, da velja

$$c_{ijk}^{(1)} = c_{i,j+1,0} - c_{i+1,j,0} \geq 0, \quad i + j + k = d - 1. \quad (5.2)$$

Potem  $p$  monotono narašča v smeri  $u$ .

*Dokaz.* Posledica sledi iz trditve 5.4, saj so smerne koordinate vektorja  $u$  ( $a_1, a_2, a_3$ ) =  $(-1, 1, 0)$ .  $\square$

Pogoj zapisan v trditvi 5.4 je le zadosten, da polinom  $p$  monotono narašča v smeri vektorja  $\vec{u}$ .

Vse navedene pogoje za monotono naraščajoč polinom lahko prepisemo v pogoje za monotono padanje tako, da vse  $\geq 0$  zamenjamo z  $\leq 0$ .

**Primer 5.6.** Naj bo  $u$  smerni vektor s smernimi koordinatami  $(2, -1, -1)$  in  $p$  polinom druge stopnje z B-koeficienti  $\{1, -2, 0, -1, -3, -3\}$ . Po enačbi (5.1) dobimo naslednje vrednosti:

$$\begin{aligned} c_{100}^1 &= a_1 c_{200} + a_2 c_{110} + a_3 c_{101} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 0 = 4 \geq 0 \\ c_{010}^1 &= a_1 c_{110} + a_2 c_{020} + a_3 c_{011} = 2 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-3) = 0 \geq 0 \\ c_{001}^1 &= a_1 c_{101} + a_2 c_{011} + a_3 c_{002} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) - 1 \cdot (-3) = 6 \geq 0 \end{aligned}$$

Ker so vse vrednosti nenegativne, iz trditve 5.4 sledi, da polinom  $p$  monotono narašča v smeri vektorja  $u$ .

Enako kot pri prejšnji lastnosti tudi tukaj velja povezava med kontrolno in pa polinomsko ploskvijo, in sicer, če kontrolna ploskev v neki smeri monotono narašča (pada), potem tudi za polinomsko ploskev velja isto.

### 5.3 Konveksnost

**Definicija 5.7.** Funkcija  $f$  definirana na  $T$  je **konveksna v smeri vektorja  $\vec{u}$** , če zadošča enačbi:

$$\frac{f(v_3) - f(v_2)}{|v_3 - v_2|} \geq \frac{f(v_2) - f(v_1)}{|v_2 - v_1|}.$$

za vsako urejeno množico točk  $v_1, v_2$  in  $v_3$  iz  $T$ , ki ležijo na neki premici, ki je vzporedna vektorju  $\vec{u}$ .

**Trditev 5.8.** Funkcija  $f$  je konveksna v smeri vektorja  $\vec{u}$ , če je  $f$  dvakrat smerno odvedljiva v smeri istega vektorja  $\vec{u}$  in

$$D_u^2 f(v) \geq 0, \quad \text{za vsak } v \in T.$$

Če je  $f$  konveksna v vseh smereh, potem rečemo, da je  $f$  konveksna.

Za polinome zapisane v B-formi obstajajo posebni pogoji, kdaj je polinom konveksen, vendar so tudi ti pogoji le zadostni.

**Trditev 5.9.** Polinom  $p$  je konveksen v smeri  $u = v_2 - v_1$ , če je:

$$c_{ijk}^{(2)} = c_{i,j+2,k} - 2c_{i+1,j+1,k} + c_{i+2,j,k} \geq 0, \quad i + j + k = d - 2. \quad (5.3)$$

*Dokaz.* Smerni vektor  $u$  je podan s smernimi koeficienti  $(a_1, a_2, a_3) = (-1, 1, 0)$ . To pomeni, da so B-koeficienti  $c_{ijk}^{(2)}$ , koeficienti drugega smernega odvoda  $D_u^2 p$  in ker je  $D_u^2 p \geq 0$ , po trditvi 5.8 sledi, da je  $p$  konveksen v smeri  $u$  za vsako točko iz  $T$ .  $\square$

Navedel sem le zadosten pogoj, da je polinom  $p$  v smeri nekega vektorja  $u$  konveksen, kjer je vektor  $u$  vzporeden stranici z ogliščema  $v_2$  in  $v_1$ . Isto bi lahko naredili tudi za preostali dve stranici.

Trditev 5.9 nam zagotavlja konveksnost le v smeri vektorja  $u$ , ki je vzporedna kateri izmed stranic. Naslednja trditev pa nam zagotavlja, da je polinom  $p$  lahko konveksen v različnih smereh.

**Trditev 5.10.** Naj bo

$$u = \alpha_2(v_2 - v_1) + \alpha_3(v_3 - v_1) \quad (5.4)$$

smerni vektor in  $\alpha_2$  in  $\alpha_3$  poljubni realni števili. Potem je polinom  $p$  konveksen v smeri  $u$ , če je

$$[\alpha_2, \alpha_3] \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta_{21}^2 c_{ijk} & \Delta_{21} \Delta_{31} c_{ijk} \\ \Delta_{21} \Delta_{31} c_{ijk} & \Delta_{31}^2 c_{ijk} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i + j + k = d - 2. \quad (5.5)$$

Vrednosti v matriki  $A$ , ki nastopajo v zgornji trditvi so:

$$\Delta_{21}^2 c_{ijk} = c_{ijk}^{(2)}, \quad (5.6)$$

ki jo dobimo iz drugega koraka de Casteljaujevega algoritma, kjer v obeh korakih uporabimo vektor  $v_2 - v_1$ . Podobno je tudi za  $\Delta_{31}^2 c_{ijk}$ , le da je tu glede na vektor  $v_3 - v_1$ . Vrednost:

$$\Delta_{21} \Delta_{31} c_{ijk} = c_{ijk}^{(2)} \quad (5.7)$$

pa dobimo pri drugem koraku de Casteljaujevega algoritma, kjer pa na prvem koraku uporabimo vektor  $v_3 - v_1$  na drugem pa  $v_2 - v_1$ .

*Dokaz.* Dokazujemo po trditvi 5.8, kar pomeni, da je potrebno dokazati, da je drugi odvod polinoma  $p \geq 0$ .

$$\begin{aligned} D_u^2 p &= d(d-1) \sum_{i+j+k=d-2} \left[ \left( \sum_{m=2}^3 \alpha_m \Delta_{m1} \right)^2 c_{ijk} \right] B_{ijk}^{d-2} \\ &= d(d-1) \sum_{i+j+k=d-2} \left[ \left( \sum_{m=2}^3 \sum_{n=2}^3 \alpha_m \alpha_n \Delta_{m1} \Delta_{n1} \right) c_{ijk} \right] B_{ijk}^{d-2} \\ &= d(d-1) \sum_{i+j+k=d-2} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} A_{ijk} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} B_{ijk}^{d-2}. \end{aligned}$$

Iz tega sedaj vidimo, da če velja (5.5), potem je polinom  $p$  konveksen in pogoj je zadosten.  $\square$

**Opomba 5.11.** V primeru, ko je polinom  $p$  konveksen v vse smeri, lahko rečemo, da je polinom  $p$  konveksen.

**Opomba 5.12.** Formula (5.5) je definicija pozitivno semidefinitne matrike. Torej, če je matrika  $A$  v trditvi 5.10 pozitivno semidefinitna, je polinom  $p$  konveksen.

**Primer 5.13.** Naj bo  $p$  polinom druge stopnje definiran na trikotniku  $T$  z oglišči  $(v_1, v_2, v_3)$  z  $B$ -koefficienti  $\{2, -1, 0, -1, 3, 1\}$  in  $u = 5 \cdot (v_2 - v_1) - 1 \cdot (v_3 - v_1)$  smerni vektor s smernimi koordinatami  $(-4, 5, -1)$ .

1. Izračunamo  $\Delta_{21}^2 c_{000}$ , tako da izračunamo dva koraka de Casteljaujevega algoritma za smerni vektor  $(-1, 1, 0)$ .

1. korak :

$$c_{100}^{(1)} = -c_{200} + c_{110} = -2 + (-1) = -3$$

$$c_{010}^{(1)} = -c_{110} + c_{020} = 1 + (-1) = 0$$

$$c_{001}^{(1)} = -c_{101} + c_{011} = 3$$

2. korak :

$$c_{000}^{(2)} = -c_{100}^{(1)} + c_{010}^{(1)} = -(-3) + 0 = 3 = \Delta_{21}^2 c_{000}$$

2. Izračunamo  $\Delta_{31}^2 c_{000}$  na podoben način kot v točki 1., le da zdaj uporabimo vektor  $(-1, 0, 1)$ . Na prvem koraku algoritma dobimo:

$$c_{100}^{(1)} = -2, \quad c_{010}^{(1)} = 4, \quad c_{001}^{(1)} = 1,$$

na drugem pa:

$$\Delta_{31}^2 c_{000} = c_{000}^{(2)} = -(-2) + 1 = 3.$$

3.  $\Delta_{21}\Delta_{31}c_{000} = -(-2) + 4 = 6$  oziroma  $\Delta_{31}\Delta_{21}c_{000} = -(-3) + 3 = 6$ . V obeh primerih smo dobili isto, saj je vseeno kateri vektor uporabimo najprej na prvem potem pa na drugem koraku.

4. Izračunamo še

$$[5, -1] \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = [9 \quad 27] \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = 45 - 27 = 18 \geq 0$$

Ker je vrednost večja oziroma enaka nič, iz trditve 5.10 sledi, da je polinom  $p$  v smeri vektorja  $u = (-4, 5, -1)$  konveksen.

Tudi za konveksnost, tako kot za monotonost in pozitivnost, velja, če je kontrolna ploskev konveksna, potem isto velja tudi za polinomske ploskev.

Načeloma je vse zgoraj opisane lastnosti računsko zelo težko preveriti. Obstajajo nekatere formule, ki nam to povedo, vendar so običajno le za  $d = 2$  in  $d = 3$ .



## Literatura

- [1] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, Inc., 5th ed., 2002.
- [2] M. Gasca in T. Sauer, *Polynomial interpolation in several variables*, Adv. Comput. Math., 12 (2000), pp. 377–410.
- [3] M-J. Lai in L. L. Schumaker, *Spline functions on triangulations*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press, 2007.
- [4] *Barycentric coordinate system (mathematics)*, [ogled 28.10.2012], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Barycentric\\_coordinate\\_system\\_%28mathematics%29](http://en.wikipedia.org/wiki/Barycentric_coordinate_system_%28mathematics%29)