UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Jure Podlogar

Racionalnost na finančnih trgih

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Karin Cvetko Vah

Ljubljana, 2013

Kazalo

Zahvala

Za pomoč in nasvete pri pisanju dela diplomskega seminarja se zahvaljujem mentorici prof. dr Karin Cvetko - Vah. Za podporo in koristne pripombe se zahvaljujem tudi svoji družini.

Racionalnost na finančnih trgih

Povzetek

Ideja, da so prihodnje cene na finančnih trgih nenapovedljive, in da odražajo vse dosegljive informacije, je bila temeljna za razvoj sodobne finančne teorije. Ta ideja je tudi temelj pojma racionalnosti na finančnih trgih. Racionalnost na finančnih trgih, kot jo je definiral Mark Rubinstein v članku *Rational markets: yes or no? The Affirmitive Case*, je tesno povezana z racionalnostjo posameznega investitorja. Racionalni investitor soočen z negotovostjo je definiran s pomočjo Savageovih aksiomov. V delu diplomskega seminarja so predstavljeni Savageovi aksiomi ter definirana racionalnost na finančnih trgih. Obravnavani sta tudi vprašanji, če na racionalnih finančnih trgih ni priložnosti za arbitražo in če cene na racionalnih finančnih trgih odražajo vse informacije, ki jih imajo investitorji.

Racionality on financial market

Abstract

The idea that future prices on financial markets are unpredictable and that they reflect all available information was fundamental for the development of modern financial theory. This idea is also fundamental for the concept of rationality on financial markets. Rationality on financial markets, as defined by Mark Rubinstein in article *Rational markets: yes or no? The Affirmitive Case* is tightly connected to rationality of individual investors. Rationality of an investor in face of uncertainty is defined using of Savage's axioms. In this article Savage's axioms are introduced and rationality on financial markets is defined. The question whether rational financial markets are arbitrage-free and whether the prices on rational financial markets reflect all the information possessed by the investors is also discussed.

Math. Subj. Class. (2010): 60A05, 91B24

Ključne besede: hipoteza učinkovitosti finančnega trga, Savageovi aksiomi, subjektivna verjetnost, racionalnost na finančnih trgih.

Keywords: Efficient - market hypothesis, Savage's axioms, subjective probability, rationality on financial market.

1. Uvod

Raketoplan Challenger je 28. januarja 1986 kmalu po izstrelitvi razneslo. Izstrelitev je bila medijsko odmeven dogodek, zato je za nesrečo že po eni uri vedela večina Američanov. Informacija o nesreči je v nekaj minutah prišla do investitorjev na borzah. Cene delnic štirih podjetij, ki so imela večjo vlogo pri izstrelitvi raketoplana, so kmalu začele padati. Vrednosti podjetij Lockheed, Martin Marietta, Rockwell in Morton Thiokol so dvajset minut po nesreči padle za 3% do 5%. Med padcem vrednosti delnic podjetja Morton Thiokol in ostalimi se je kmalu pokazala pomembna razlika. Trgovanje z delnicami Morton Thiokola je bilo zaradi nezadostnega povpraševanja po manj kot eni uri zaustavljeno. Do trenutka, ko se je trgovanje z delnicami Morton Thiokila ponovno začelo, so cene delnic ostalih podjetij ponovno zrasle na okoli 2% pod vrednost pred nesrečo. Tam so do konca trgovalnega dneva tudi ostale. Vrednost delnic Morton Thiokola pa je do konca trgovalnega dne padla približno 12% pod vrednost pred nesrečo.

Investitorji so očitno brez javno dostopnih informacij predvideli, da je za nesrečo krivo podjetje Morton Thiokol in so posledice krivde na prihodnje denarne tokove podjetja prenesli v ceno delnice podjetja. Zanimivo je, da v javnih glasilih ni bilo nobenih informacij, ki bi za nesrečo krivile določeno podjetje. Komisija, ki je nesrečo raziskala, je po nekaj mesecih dela razlog za nesrečo pripisala toplotni občutljivosti gumijastih tesnil, ki jih je izdelovalo prav podjetje Morton Thiokol. Kasneje [5] se je izvedelo, da so v podjetju Morton Thiokol že pred nesrečo obstajali dvomi o toplotni občutljivosti tesnila. Avtorja članka [5] nista uspela odkriti kdo in kako je to informacijo vključil v ceno delnice.

Primer odziva cen delnic na nesrečo raketoplana Challenger kaže, da je v ceni delnic na trgu vsebovana tudi informacija, ki jo ima zelo malo investitorjev. Iz tega lahko sklepamo, da imajo investitorji kolektivno znanje in vse potrebne informacije, da se na borznem trgu izoblikuje vrednost podjetja, ki dobro odraža pravo vrednost podjetja.

2. Razvoj ideje racionalnih trgov

Z razvojem finančnih trgov in borz se je pričelo tudi beleženje in zbiranje cen vrednostnih papirjev, kar je bila osnova za preučevanje obnašanja in lastnosti finančnih trgov. Na koncu 19. in začetku 20. stoletja, ko se je v znanosti začela uporabljati teorija verjetnosti, je v Franciji Louis Bachelier [6], [11] v tezi *Théorie de la spéculation* [16] predstavil finančne inštrumente na francoskih borzah ter nihanje njihovih cen v bližnji prihodnosti opisal kot zvezni naključni sprehod, ki je neodvisen od preteklega gibanja. Za modeliranje nihanja cen je vzel Brawnovo gibanje in s pomočjo tega izpeljal formulo za izračun vrednosti raznih opcijskih pogodb. V [6] so avtorji ugotovili, da so imela Bachelierjeva kasnejša dela precejšen vpliv na razvoj teorije verjetnosti in slučajnih procesov. Kljub temu vse do leta 1955 njegovo delo ni imelo velikega vpliva na razvoj teorij o finančnih trgih. Leta 1955 je Bachelierjevo delo *Le Jeu, la Chance, et le Hasard* [17] odkril Leonard Savage in ga razširil med akademskimi kolegi. Ideje Bacheliera je med drugimi v svojem Brownovem modelu finančnega trga izpopolnil Paul Samuelson [11].

Na začetku 20. stoletja so začeli lastnosti finančnih trgov akademsko opazovati in razlagati tudi v ZDA. Kmalu se je nabralo veliko nasprotujočih si interpretacij zbranih podatkov. Nekateri so bili prepričani, da lahko s pomočjo preučevanja preteklih vzponov in padcev cen napovejo prihodnje gibanje cen. Drugi so bili prepričani, da lahko prihodnje cene napovejo s pomočjo natančnega pregleda gospodarskih kazalcev. Tretji so verjeli, da gibanje cen na trgu, ki predstavlja informacije in ugibanje mnogih investitorjev, napoveduje prihodnja gospodarska gibanja.

Tudi v ZDA je bila prisotna ideja, da so gibanja cen delnic naključna. Frederick Maculay [11] je leta 1925 gibanja cen primerjal z grafom, ki ga je dobil s pomočjo meta kovanca. Padec cifre je predstavljal padec cene, padec grba pa rast. Čeprav je Maculay kasneje dodal, da je gibanje cen na trgu podobno gibanju pri metu kovanca zgolj na kratek rok, na daljši rok pa pride do nihanj, ki jih je povezoval s čednim obnašanjem in sistematičnimi napakami investitorjev, je v prihodnjih letih prevladal pogled na gibanje cen kot na slučajni proces. Naključnost gibanja cen so raziskovalci med drugimi dokazovali tako, da so z naključnim izbiranjem investicij vseeno dosegali podobne donose kot profesionalni investitorji. Uspeli so pokazati tudi, da lahko realizacije povsem slučajnih procesov proizvajajo ciklom podobna gibanja, tako kot gibanje cen na finančnem trgu. Cikli v cenah delnice naj bi bili torej naključni vzorci, ki jih je mogoče opaziti v preteklosti, ničesar pa ne povedo o prihodnosti. Prepričanje o naključnih gibanjih cen je v akademski sferi prevladovalo vse do vzpona vedenjskih ekonomistov, ki so v 70. letih 20. stoletja ponovno začeli odkrivati napake, ki jih investitorji počnejo sistematično in ne zgolj naključno, kar lahko vodi v pretirane rasti in pretirane padce cen delnic.

2.1. **Hipoteza učinkovitosti finančnega trga.** Leta 1948 je Holbrook Working združil dva pogleda na razumevanje finančnih trgov. Prvi pogled je, da trg zbira informacije in napoveduje prihodnje dogodke, drugi pa, da se cene na trgu gibljejo naključno. Zagovarjal je stališče, da bi nezmožnost profesionalnih napovedovalcev, da napovejo cene na trgu lahko bila dokaz popolnosti trga. Če trenutne cene vsebujejo vse do tega trenutka dosegljive informacije, se bo cena spremenila zgolj ob razkritju nove informacije, pomembne za vrednost finančnega inštrumenta. Investitorji lahko torej ustvarijo izgubo ali dobiček, odvisno od novih informacij, ki jih ni mogoče predvideti. To pomeni, da noben investitor ne more konstantno zaslužiti več kot so tržni donosi.

Taka razmišljanja so pripeljala do hipoteze učinkovitosti finančnega trga, ki jo je okoli leta 1960 razvil Eugene Fama [13]. Fama je definiral tri stopnje učinkovitosti finančnega trga, in sicer šibko, srednje močno in močno.

Definicija 2.1 (Učinkovitost finančnega trga).

(1) Finančni trgi so *šibko učinkoviti*, če na trgu prihodnjih cen ni mogoče napovedati s pomočjo preteklih gibanj cen. V trenutni ceni so vključena vsa pretekla gibanja cen.
(2) Finančni trgi so *srednje močno učinkoviti*, če cena finančnih naložb na trgu odraža vse javno dostopne informacije. Ob novi informaciji se cena prilagodi tako hitro, da s pomočjo te informacije ni mogoče doseči višje donosnosti od tržne.
(3) Finančni trgi so *močno učinkoviti*, če cene na trgu odražajo vse javne in vse notranje informacije.

Če se cene na trgu obnašajo v skladu s šibko obliko hipoteze učinkovitosti finančnega trga pomeni, da s pomočjo tehnične analize, torej preučevanja preteklih cen, na dolgi rok na finančnih trgih ni mogoče zaslužiti več kot zraste trg.

Ker so na trgu, ki je srednje močno učinkovit, v ceni vključene vse javno dostopne informacije velja, da se na dolgi rok na takem trgu ne da zaslužiti niti s tehnično niti s temeljno analizo. Primeri javno dostopnih informacij so informacije o preteklih gibanjih cene, že objavljeni podatki o poslovanju podjetja in podatki o stanju gospodarstva.

Na močno učinkovitem trgu sploh ni mogoče konstantno služiti več kot raste trg, saj so v ceni vključene tudi notranje informacije, kot so na primer še neobjavljeni podatki o poslovanju podjetja. Tudi večina tistih, ki podpira hipotezo učinkovitosti trgov je mnenja, da močna učinkovitost ne velja. Glavni razlog je zakonodaja, ki prepoveduje trgovanje z notranjimi informacijami.

Zgled 2.2. Neka trgovalna strategija v nekem obdobju konstantno prinaša višje donose kot so tržni donosi. Če je trg srednje močno učinkovit, to pomeni, da investitorji za tako strategijo zahtevajo višje donose, ker pričakujejo, da se bo zgodil malo verjeten dogodek, ki bo za izvajalca strategije pomenil večjo izgubo. Skupaj s to izgubo bodo donosi njegove strategije enaki donosom trga.

Za veljavnost hipoteze učinkovitosti finančnih trgov morajo investitorji maksimizirati svojo funkcijo koristnosti in imeti racionalna pričakovanja glede prihodnjih dogodkov. Investitorji imajo racionalna pričakovanja, če ne delajo sistematičnih napak, njihove ocene prihodnjih dogodkov pa so v povprečju pravilne. Če se v ceni finančnih inštrumentov na trgu odražajo mnenja vseh investitorjev tako, da se njihove napake, kot sta na primer precenjevanje in podcenjevanje pomena informacije, izničijo, potem cene predstavljajo dober približek prave vrednosti finančnega inštrumenta.

Upanje, da bi se napake v resnici lahko izničile, daje fenomen, ki se imenuje modrost množic.

2.2. **Modrost množic.** Leta 1906 so na kmečkem sejmu v Plymouthu priredili igro, v kateri so morali udeleženci ugotoviti, koliko bodo skupaj tehtali kosi zaklanega vola [14]. Nagrada je bila obljubljena tistemu, ki se bo najbolj približal pravi teži razkosanega vola. Pri ugibanju je sodelovalo okoli 800 ljudi, tako mesarji in živinorejci, kakor tudi obiskovalci sejma, ki sicer niso bili povezani z živinorejo. Na sejmu je Francis Galton zbral lističe, na katerih so bili zapisani odgovori ter podatke statistično analiziral. Ugotovil je, da je bilo povprečje ugibanj 1197 funtov, stehtana teža pa je bila 1198 funtov. Primer, ki prikazuje, kako natančne odgovore lahko daje skupinsko ugibanje, tudi če posamezniki, ki ugibajo, nimajo posebnih informacij in znanj, je spodbudil nadaljnje raziskave na področju, ki so ga poimenovali modrost množic.

V delu *The Wisdom of Crowds* [18] je James Surowiecki poleg tega primera opisal še druge primere delovanja modrosti množic, tudi primer nesreče raketoplana Challenger, ki je opisan v uvodu. Opisal je tudi primere v katerih modrost množic ni delovala.

S preučevanjem primerov delovanja in nedelovanja modrosti množic je postavil kriterije, ki morajo biti izpolnjeni, da koncept modrosti množic deluje. Ugotovil je, da morajo biti mnenja ocenjevalcev raznolika, med seboj neodvisna in osnovana na podlagi različnih znanj in izkušenj. Obstajati mora tudi način za pretvorbo mnenja različnih oseb v mnenje celotne množice.

3. Savageovi aksiomi in preference

V [3] je Mark Rubinstein racionalni trg definiral s pomočjo racionalnih investitorjev, kjer racionalnost pomeni, da investitorji izpolnjujejo Savageove aksiome in so njihova prepričanja o verjetnosti prihodnjih dogodkov v povprečju pravilna. Kakšen je racionalen trg po Rubinsteinovi definiciji je torej odvisno od tega, kako se obnaša investitor, ki izpolnjuje Savageove aksiome. V tem poglavju so predstavljeni Savageovi aksiomi, ki so zasnovani podobno kot von Neumann-Morgensternovi aksiomi, vendar za situacije v katerih se osebe soočajo z negotovostjo.

Če oseba igra igro na srečo s poštenim kovancem, obstajajo dobri argumenti, da lahko pri analiziranju igre privzamemo, da sta verjetnosti dogodkov padca cifre in padca grba enaka, in sicer ena polovica. Ta trditev je dovolj dober približek realnosti, zato lahko tako verjetnostno porazdelitev privzamemo za objektivno verjetnost. V takem primeru lahko rečemo, da ima oseba opravka s tveganjem. Za take primere sta von Neumann in Morgernstern definirala aksiome, ki za osebe, katerih odločitve so skladne s temi aksiomi, obstaja do afine transformacije enolična funkcija koristnosti. V ekonomiji se racionalne osebe pogosto definira kot osebe, ki izpolnjujejo von Neumann-Morgernsternove aksiome in maksimizirajo svojo pričakovano koristnost.

Kaj pa, če oseba želi staviti na dobitnika naslednje Nobelove nagrade za mir? V tem primeru ne obstaja natančna verjetnostna porazdelitev, o kateri bi se večina strinjala, in zato tako verjetnostno porazdelitev težko privzamemo za objektivno. Zato rečemo, da imamo opravka z negotovostjo.

V negotovi situaciji lahko racionalnost definiramo na več načinov. Prvi način je, da privzamemo, da obstaja neka objektivna verjetnost, in uporabimo von Neumann-Morgensternove aksiome. Leonard Savage je v [1] ubral drugačen pristop in definiral subjektivne verjetnosti, kjer ima vsaka oseba lastna prepričanja o verjetnosti negotovih dogodkov. Če se ta oseba pri svojih odločitvah drži Savageovih aksiomov, ponovno obstaja do afine transformacije enolična funkcija koristnosti. Tako dobimo drugo definicijo racionalne osebe kot osebe, ki se drži Savageovih aksiomov in maksimizira svojo pričakovano koristnost.

Savage je v svojem delu poskušal zgraditi model odločanja, ki bi določil kriterije, kako naj bi se racionalna oseba odločala med možnimi dejanji, in sicer tako, da bi uporabljala logiko, v primeru negotovosti pa logiki podobne kriterije. Aksiomi odločanja so predpostavljeni iz normativnega pogleda, torej, kako bi se oseba morala odločati in ne empiričnega pogleda, torej, kako se oseba dejansko odloča. Ideja je, da bi oseba, ki bi ji bilo predstavljeno, da krši aksiome, svoje odločitve prilagodila tako, da bi bile te skladne z aksiomi.

3.1. **Svet in stanje sveta.** Preden lahko zapišemo aksiome, potrebujemo nekaj definicij. Za motivacijo definicij Savage navede nekaj primerov, o čem je oseba lahko negotova.

Zgled 3.1. Osebo zanima:

(1) Ali je določeno jajce pokvarjeno?
(2) Katera jajca izmed dvanajstih so pokvarjena?
(3) Kakšna bo v Chichagu naslednji dan temperatura ob poldnevu?
(4) Točna in celotna preteklost, sedanjost in prihodnost vesolja, razumljena v kakorkoli širokem smislu.

V prvem primeru zgleda 3.1 je vprašanje zastavljeno tako, da ima zgolj dva možna odgovora, čeprav ima jajce več lastnosti kot zgolj to, da je ali ni pokvarjeno. Drugi primer lahko opišemo z 2^{12} situacijami oziroma stanji. Skrajna primera opisov sta, da ni pokvarjeno nobeno jajce in da so pokvarjena vsa. Tretji in četrti primer imata neskončno možnih stanj.

Razmišljanje o teh primerih pokaže potrebo po nekaterih definicijah.

Definicija 3.2. *Svet* je objekt, ki zanima osebo.

Definicija 3.3. *Stanje sveta* (s, s', s'', ...) popiše vse bistvene vidike sveta.

Definicija 3.4. *Pravo stanje sveta* je tisto stanje, ki se v resnici zgodi oziroma v resnici obstaja.

Pri prvem primeru iz zgleda 3.1 lahko za svet vzamemo jajce, ki nas zanima. Ta svet ima dve stanji. Prvo stanje je, da je jajce pokvarjeno, drugo pa, da je jajce v redu. V konkretnem primeru bi lahko za svet vzeli tudi večji svet dvanajstih jajc, med katerimi bi bilo konkretno jajce. Za eno stanje sveta bi vzeli, da je jajce, ki nas zanima, pokvarjeno, ostala pa so bodisi pokvarjena bodisi v redu. Znotraj tega sveta bi seveda lahko obravnavali tudi drugi primer iz zgleda 3.1. Savage trdi, da z izbiro večjega sveta ne naredimo nobene škode, zato predlaga, da za svet enkrat za vselej vzamemo svet, ki bi zadoščal četrtemu primeru iz zgleda 3.1.

3.2. **Dogodek.** V tretjem primeru zgleda 3.1 osebo posebej zanima, če bo temperatura pod lediščem. To z drugimi besedami pomeni, da jo zanima, če je pravo stanje sveta vsebovano v množici, ki ima za elemente vsa stanja sveta, ko je temperatura pod lediščem. Taki množici rečemo dogodek.

Definicija 3.5. *Dogodek* (A, B, C, ...) je množica stanj sveta.

Definicija 3.6. *Univerzalni dogodek* (S) je dogodek, ki ima za elemente vsa stanja sveta. *Prazen dogodek* (0) je dogodek, ki za elemente nima nobenega stanja sveta.

Univerzalen dogodek je dogodek, ki popiše vsa možna stanja. Univerzalni dogodek pri prvem primeru iz zgleda 3.1 je dogodek, da je jajce pokvarjeno ali v redu. Prazen dogodek je dogodek, da je jajce pokvarjeno in v redu.

Definicija 3.7. Dogodek *obstaja*, če dogodek vsebuje pravo stanje sveta.

3.3. **Posledice in dejanja.** Za ilustracijo posledic in dejanj je Savage uporabil zgled 3.8.

Zgled 3.8. V posodi že imamo pet jajc, ki niso pokvarjena. Imamo še eno jajce. Situacijo poenostavimo s predpostavko, da imamo na voljo zgolj tri dejanja. Jajce lahko razbijemo v posodo, razbijemo na krožnik in ga pregledamo, ali pa zavržemo. Posledice dejanja, odvisne od pravega stanja sveta, so predstavljene v tabeli 1.

TABELA 1. Posledice dejanj

dejanje	stanje	
	v redu	pokvarjeno
razbijemo v posodo	šest jajčna omleta	pokvarjena omleta in pet dobrih jajc uničenih
razbijemo na krožnik	šest jajčna omleta in umazan krožnik	pet jajčna omleta in umazan krožnik
zavržemo	pet jajčna omleta in dobro jajce uničeno	pet jajčna omleta

Definicija 3.9. *Posledica* (f, g, h, ...) je karkoli se zgodi osebi. *Množica posledic* je označena z F.

Če imata dve dejanji enaki posledici v vsakem stanju sveta, nima smisla, da ju razlikujemo, torej lahko dejanja definiramo tako, da zapišemo posledice dejanja v vseh možnih stanjih sveta.

Definicija 3.10. *Dejanje* $\mathbf{f}$ je funkcija, ki slika iz množice stanj v množico posledic. Dejanje $\mathbf{f}$ ima v stanju sveta $s \in S$ posledico $f(s)$. *Množica dejanj* je označena z $\mathbf{F}$.

3.4. **Preference med dejanji.** Če oseba med dejanjema $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$ izbere slednjega, to pomeni, da ima dejanje $\mathbf{g}$ raje od $\mathbf{f}$ ali pa se ji zdita dejanji ekvivalentni in je dejanje izbrala naključno. Da se osebi zdita dejanji ekvivalentni lahko pri empiričnem testiranju povzroči težave, saj nam informacija o tem, katero dejanje je oseba izbrala, ne odgovori na vprašanje, katero dejanje ima raje. Zaradi tega, in ker je v obravnavanju aksiomov bolj priročno, bomo večinoma uporabljali relacijo preferenc nima raje od.

Definicija 3.11. Relacijo preferenc *nima raje od* označimo z $\leq$. Če oseba med dejanjema $\mathbf{f}$ in $\mathbf{g}$ izbere $\mathbf{g}$, za to osebo velja $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$.

S pomočjo relacije nima raje od lahko definiramo tudi druge relacije med dejanji.

Definicija 3.12.
(1) $\mathbf{f} \geq \mathbf{g}$ je definirano kot $\mathbf{g} \leq \mathbf{f}$.
(2) $\mathbf{f} > \mathbf{g}$, to je $\mathbf{f}$ *ima raje od* $\mathbf{g}$, je definirano kot ni res, da je $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$.
(3) $\mathbf{f} < \mathbf{g}$ je definirano kot $\mathbf{g} > \mathbf{f}$.
(4) $\mathbf{f} \doteq \mathbf{g}$, to je $\mathbf{f}$ *je ekvivalentno* $\mathbf{g}$, je definirano kot $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ in $\mathbf{g} \leq \mathbf{f}$.

Definicija 3.13. Relacija preferenc $\leqslant$ na množicah je *šibka urejenost*, če za vsak element $x, y, z, \ldots$ množice velja:
(1) **Sovisnost**: $x \leqslant y$ ali $y \leqslant x$.
(2) **Tranzitivnost**: Iz $x \leqslant y$ in $y \leqslant z$ sledi $x \leqslant z$.

Sedaj imamo vse potrebne definicije za postavitev prvega aksioma, ki bi se ga racionalne osebe želele držati.

Aksiom 1. Relacija preferenc med dejanji $\leq$ je šibka urejenost.

Aksiom 1, ki predstavlja kriterij konsistentnosti, nima veliko empiričnih kritik. V empiričnih raziskavah osebe, ki kršijo tranzitivnost preferenc, ob opozorilu na kršitve svoje preference popravijo. To ustreza Savageovi ideji, da osebe pri svojih odločitvah želijo ravnati v skladu z aksiomi.

3.5. **Načelo gotovosti.** Primer, s katerim Savage opiše načelo gotovosti (ang. surething principle), kakor se imenuje naslednji aksiom, je sledeč: Poslovnež razmišlja o neki investiciji. Prepričan je, da je donos investicije odvisen od rezultata predsedniških volitev. Ko preuči investicijo v primeru, da zmaga demokratski kandidat, ugotovi, da bi se odločil za investicijo. Enako ugotovi v primeru zmage republikanskega kandidata. Ob ugotovitvi, da bi se za investicijo odločil, ne glede na izid volitev, investira, ne glede na to, da ne ve, kakšen bo rezultat volitev. Povedano v skladu z definicijami, investitor dejanja ne investiraj nima raje od dejanja investiraj, ne glede na to, da ne ve, kateri izmed komplementarnih dogodkov obstaja.

Nekoliko bolj formalen opis načela gotovosti je, da če oseba dejanja $\mathbf{f}$ nima raje od $\mathbf{g}$, v primeru, ko ve, da se bo zgodil dogodek B, in prav tako $\mathbf{f}$ nima raje od $\mathbf{g}$, ko ve, da se bo zgodil dogodku B komplementaren dogodek, potem velja, da **f** nima raje od **g**.

Za formuliranje drugega aksioma je potrebnih še nekaj definicij.

Definicija 3.14. **f** in **g** se *skladata* na B, če je f(s) = g(s) za vsak s $\in B$.

Definicija 3.15. Dogodek ∼B je *komplement* dogodka B in vsebuje vse tiste elemente univerzalnega dogodka S, ki niso v B.

Definicija 3.16. Za dogodka **f** in **g** velja **f** $\leq$ **g** *glede na* B natanko tedaj, ko velja **f'** $\leq$ **g'** za vsaki taki dejanji **f'**, ki se sklada z **f** na dogodku B, in **g'**, ki se sklada z **g** na dogodku B, na dogodku $\sim B$ pa se skladata **f'** in **g'**.

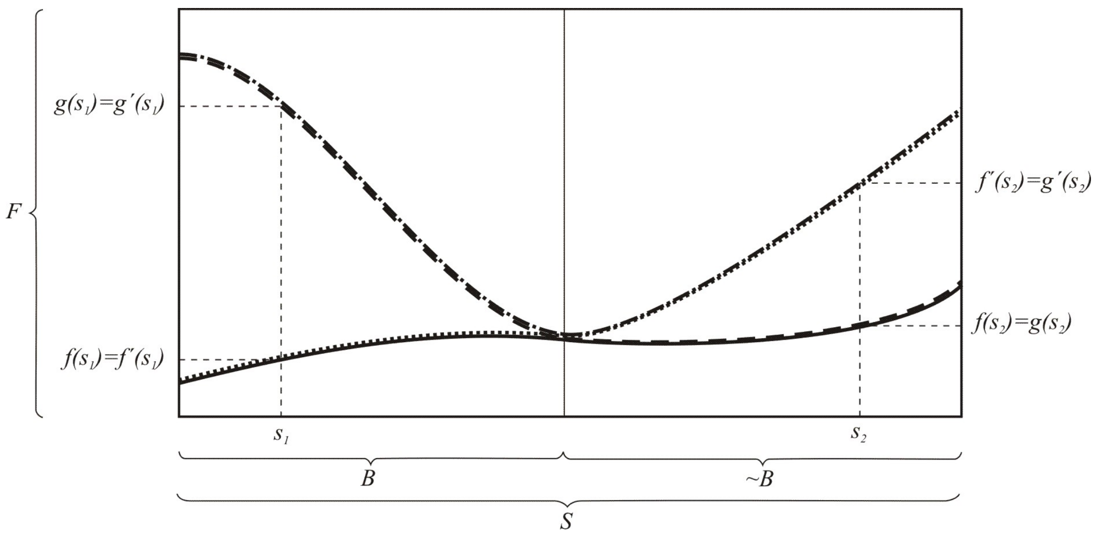
Aksiom 2 (Načelo gotovosti)**.** Če so dejanja **f**, **g** in **f'**, **g'** taka, da:

(1) se na dogodku $\sim B$ **f** sklada z **g** ter **f'** sklada z **g'**,

(2) se na dogodku B **f** sklada z **f'** ter **g** sklada z **g'**,

(3) **f** $\leq$ **g**,

potem velja **f'** $\leq$ **g'**.



Slika 1. Načelo gotovosti

Načelo gotovosti ni tako univerzalno sprejeto kot šibka urejenost relacije preferenc med dejanji. Eksperimenta Mauricea Allaisa in Daniela Ellsberga sta namreč pokazala, da pri nekaterih stavah večina ljudi pri svojih odločitvah krši aksiom 2.

Zgled 3.17 (Ellsbergov paradoks)**.** Ljudem ponudimo dve stavi o tem, katera žogica bo izvlečena iz žare s 30 rdečimi kroglicami in 60 kroglicami, ki so črne in rumene barve, v neznanem razmerju. Pri prvi stavi oseba lahko stavi, ali bo izžrebana rdeča (stavo označimo kot dejanje **f**) ali pa črna kroglica (**g**). Pri drugi stavi lahko stavi bodisi na dogodek, da bo izžrebana rdeča ali rumena žogica (**f'**), bodisi črna ali rumena (**g'**). Nagrade za dobljeno stavo so v vseh primerih enake.

V empiričnih eksperimentih, o stavah iz zgleda 3.17, se je večina ljudi odločila, da imajo dejanje **f** strogo raje od **g** in dejanje **g'** strogo raje od **f'**. Velja torej **f** $>$ **g** in **f'** $<$ **g'**. Takšne preference med dejanji so v nasprotju z načelom gotovosti. Če z A označimo dogodek, da je izžrebana rdeča ali črna kroglica, vidimo, da velja:

$$f(s) = f'(s) \text{ in } g(s) = g'(s) \text{ za } \forall s \in A$$

$$f(s) = g(s) \text{ in } f'(s) = g'(s) \text{ za } \forall s \in \sim A$$

Da bi bila odločitev skladna z aksiomom 2, bi moralo iz **f** $>$ **g** slediti **f'** $>$ **g'**, kar pa za večino oseb ne velja.

Če ljudje kršijo aksiom 2, to še ne pomeni, da niso Savageovo racionalni. Če se odločitve osebe skladajo z ostalimi aksiomi in odločitve, ki kršijo aksiom 2 oseba po opozorilu na kršitev ustrezno spremeni, je vedenje te osebe še vedno skladno s Savageove idejo racionalnosti. O tem, ali ljudje v realnosti po opozorilu na kršitev aksioma 2 prilagodijo svoje odločitve, je bilo opravljenih več raziskav, ki pa so dale različne rezultate. Nekaj raziskav in rezultatov je opisanih v članku [7].

3.6. **Preference med posledicami.**

Definicija 3.18. Dejanje je *konstantno*, če je posledica neodvisna od stanja sveta. Oznaka **f** $\equiv g$ pomeni, da je $f(s) = g$ za vsak $s \in S$.

S pomočjo konstantnih dejanj in preferenc med dejanji sedaj lahko definiramo tudi preference med posledicami.

Definicija 3.19. Za posledici f in g velja $f \leq g$ natanko tedaj, ko za konstantni dejanji **f** $\equiv f$ in **g** $\equiv g$ velja **f** $\leq$ **g**.

S pomočjo konstantnih dejanj lahko definiramo tudi izraze **f** $\leq g$ in $g \leq$ **f**. Analogno, kot pri preferencah med dejanji lahko tudi za preference med posledicami definiramo $f \doteq g$, $f < g$ in druge. Definiramo lahko tudi $f \leq g$ glede na B, vendar naslednji aksiom naredi tak izraz nepotreben.

Vprašanje, ki ga razrešuje aksiom 3 je, če za taki konstantni dejanji **f** $\equiv g$ in **f'** $\equiv g'$, za kateri velja $g \leq g'$, obstaja tak dogodek B, da velja **f** $>$ **f'** glede na B. Dilemo Savage ponazori s pomočjo zgleda 3.20.

Zgled 3.20. Oseba, ki se odpravlja na piknik s prijatelji se mora odločiti, ali bo kupila kopalke ali lopar za tenis. Če za eno dejanje proglasimo nakup kopalk (**f**), za drugo pa nakup loparja (**f'**), potem ima dejanje **f** posledico imetje kopalk (g), dejanje **f'** pa ima posledico imetje loparja (g'), oboje neodvisno od lokacije piknika. Dejanji **f** in **f'** sta konstantni dejanji. Če posledice in dejanja definiramo tako, se bo oseba ob informaciji, da bo piknik ob vodi in ne ob teniškem igrišču, kljub temu, da ima posledico imetje loparja raje od posledice imetje kopalk, raje odločila za dejanje nakup kopalk. Torej velja **f** $>$ **f'** glede na dogodek, da bo piknik ob vodi in ne ob teniškem igrišču, čeprav velja $g < g'$.

Lahko pa za dejanje vzamemo nakup in imetje kopalk (**f**) ter nakup in imetje loparja (**f'**). Potem posledice teh dejanj niso več konstantne, saj bi bila posledica nakupa kopalk kopanje s prijatelji, če je piknik v bližini vode in druženje s prijatelji z novimi kopalkami v torbi, če piknik ne bi bil ob vodi. Informacija o tem, da bo piknik ob vodi, torej ne bi spremenila preferenc med posledicami.

Aksiom 3 bo zagotovil, da so dejanja definirana tako, da ne obstajajo konstantna dejanja, in posledično posledice, za katere bi poznavanje prihodnjih dogodkov spremenilo preference med temi konstantnimi dejanji.

Definicija 3.21. Dogodek B je *nepomemben*, če za vsaki dejanji **f**, **g** velja **f** $\leq$ **g** glede na B.

Aksiom 3. Če je **f** $\equiv$ g in **f'** $\equiv$ g' in B ni nepomemben, potem je **f** $\leq$ **f'** glede na B natanko tedaj, ko je g $\leq$ g'.

4. Savageovi aksiomi in subjektivna verjetnost

4.1. **Kvalitativna subjektivna verjetnost.** Potrebujemo mehanizem, s pomočjo katerega bomo lahko ugotovili, kateri izmed dveh dogodkov se zdi osebi bolj verjeten. Osebo bi lahko preprosto vprašali, kateri dogodek se ji zdi bolj verjeten, vendar Savage predlaga, da damo osebi na razpolago dve dejanji. Eno, ki prinese nagrado v primeru dogodka A in tolažilno nagrado v primeru dogodka $\sim A$, ter drugo, ki da nagrado za dogodek B in tolažilno nagrado za dogodek $\sim B$. Glede na to, katero dejanje ima oseba raje, določimo, kateri dogodek se osebi zdi bolj verjeten.

Zgled 4.1. Osebi sta ponujeni dve stavi:

(1) V loteriji s 1000 loterijskimi listki je 500 listkov z dobitkom 1000 evrov in 500 listkov z dobitkom 0 evrov.
(2) Če bo v Chichagu temperatura naslednjega dne ob poldnevu pod lediščem, oseba dobi nagrado 1000 evrov, ter 0 evrov, če bo nad lediščem.

Če je oseba prepričana, da je verjetnost dobitka pri stavi (1) višja kot pri stavi (2), bo izbrala stavo (1), saj je višina nagrade v obeh primerih enaka.

Subjektivne verjetnosti posameznih dogodkov lahko merimo s pomočjo odločitev oseb med različnimi dejanji. Za definicijo subjektivne verjetnosti potrebujemo taka dejanja, ki bodo s preferencami med dejanji merila, kateri dogodek se zdi osebi bolj verjeten.

Definicija 4.2. Dejanje $\mathbf{f}_A^g$ je definirano kot:

$$\mathbf{f}_A^g(s) = \begin{cases} f; & \text{če } s \in A \\ g; & \text{če } s \in \sim A \end{cases}$$

Aksiom 4. Naj za posledice *f*, *f'*, *g* in *g'*, dogodka A in B ter dejanji $\mathbf{f}_A^{f'}$, $\mathbf{f}_B^{f'}$ velja:

(1) $f' < f$,
(2) $g' < g$,
(3) $\mathbf{f}_A^{f'} \leq \mathbf{f}_B^{f'}$.

Potem za dejanji $\mathbf{g}_A^{g'}$, $\mathbf{g}_B^{g'}$ velja $\mathbf{g}_A^{g'} \leq \mathbf{g}_B^{g'}$.

Aksiom 4 pravi, da izbira dejanja, ki določi, kateri dogodek se zdi osebi bolj verjeten, ni odvisna od višine nagrade in tolažilne nagrade, dokler je nagrada večja od tolažilne nagrade. Sedaj lahko definiramo kvalitativno subjektivno verjetnost.

Definicija 4.3. Dogodek A je *največ tako verjeten kot* B ($A \preceq B$) natanko tedaj, ko za vsaki taki posledici f in g, za kateri velja $g < f$, velja $\mathbf{f}_A^g \leq \mathbf{f}_B^g$. Relacija največ tako verjeten kot predstavlja *kvalitativno subjektivno verjetnost.*

Naslednji aksiom izloči trivialni primer, v katerem bi bila oseba indiferentna med vsemi posledicami.

Aksiom 5. Vsaj za en par posledic *f*, *f'* velja $f < f'$.

Definicija 4.4. Relacija $\leqslant$ med dogodki je *kvalitativna verjetnost* natanko tedaj, ko za poljubne dogodke B, C, D velja:

(1) $\leqslant$ je šibka urejnost,
(2) $B \leqslant C$ natanko tedaj, ko velja $B \cup D \leqslant C \cup D$, kjer je D tak, da velja $B \cap D = C \cap D = 0$,

(3) $0 \leqslant B$, $0 < S$.

Izrek 4.5. *Če dejanja osebe izpolnjujejo aksiome 1-5, je relacija največ tako verjeten kot kvalitativna verjetnost.*

Dokaz.

(1) Dokažemo, da je relacija $\preceq$ šibka urejenost.

(a) **Sovisnost**: Naj bosta dana dogodka A in B. Po aksiomu 5 obstajata posledici f in g, za kateri velja $f \prec g$. Po sovisnosti relacije $\leq$ na dejanjih sledi, da velja bodisi $\mathbf{f}_A^g \leq \mathbf{f}_B^g$ bodisi $\mathbf{f}_B^g \leq \mathbf{f}_A^g$. Brez škode za splošnost lahko privzamemo $\mathbf{f}_A^g \leq \mathbf{f}_B^g$.
Naj bosta f' in g' poljubni dejanji, za kateri velja $f' \leq g'$. Ker velja $f \leq g$, $\mathbf{f}_A^g \leq \mathbf{f}_B^g$ in $f' \leq g'$, po aksiomu 4 sledi $\mathbf{f'}_A^{g'} \leq \mathbf{f'}_B^{g'}$. Ker sta bila f' in g' poljubna, po definiciji $\preceq$ sledi $A \preceq B$.

(b) **Tranzitivnost**: Naj velja $A \preceq B$ in $B \preceq C$. Naj bosta f in g taki posledici, da velja $g < f$. Po aksiomu 5 taki posledici obstajata. Ker velja $A \preceq B$, po definiciji relacije $\preceq$, velja $\mathbf{f}_A^g \leq \mathbf{f}_B^g$. Analogno dobimo, da velja $\mathbf{f}_B^g \leq \mathbf{f}_C^g$. Po tranzitivnosti relacije preferenc med dejanji $\leq$ sledi, da velja $\mathbf{f}_A^g \leq \mathbf{f}_C^g$. Torej velja tudi $A \preceq C$.

(2) Privzamemo, da velja $B \cap D = C \cup D = 0$ in dokažemo, da velja:

$$B \preceq C \Leftrightarrow B \cup D \preceq C \cup D.$$

($\Rightarrow$) Privzamemo, da velja $B \preceq C$. Velja:

(a) Če velja $s \notin B \cup C$, imamo dve možnosti. V primeru, da je $s \notin D$, velja $s \notin B \cup D$ in $s \notin C \cup D$. Torej je $\mathbf{f}_{B \cup D}^g(s) = g$ in $\mathbf{f}_{C \cup D}^g(s) = g$. V primeru, da je $s \in D$, velja $\mathbf{f}_{B \cup D}^g(s) = f$ in $\mathbf{f}_{C \cup D}^g(s) = f$.
Torej se $\mathbf{f}_{B \cup D}^g$ sklada s $\mathbf{f}_{C \cup D}^g$ glede na $\sim (B \cup C)$.

(b) Da se $\mathbf{f}_B^g$ sklada s $\mathbf{f}_C^g$ glede na $\sim$(B $\cup$ C), je očitno.

(c) Če je $s \in B \cup C$, velja bodisi $s \in B$ bodisi $s \in C \backslash B$. Če $s \in B$, je $\mathbf{f}_{B \cup D}^g(s) = \mathbf{f}_B^g(s) = f$. V primeru $s \in C \backslash B$ velja $s \in C \backslash (B \cup D)$, saj po predpostavki velja $C \cup D = 0$. Torej velja $\mathbf{f}_{B \cup D}^g(s) = \mathbf{f}_B^g(s) = g$. Zato se $\mathbf{f}_{B \cup D}^g$ sklada s $\mathbf{f}_B^g$ glede na $B \cup C$.

(d) Analogno prejšnjemu primeru se $\mathbf{f}_{C \cup D}^g$ sklada s $\mathbf{f}_C^g$ glede na B $\cup$ C.

(e) Ker po predpostavki velja $B \preceq C$, po definiciji relacije $\preceq$ velja tudi $\mathbf{f}_B^g \leq \mathbf{f}_C^g$.

V točkah 2a - 2e smo pokazali, da velja:

- Na dogodku $\sim (B \cup C)$ se dejanje $\mathbf{f}_{B \cup D}^g$ sklada s $\mathbf{f}_{C \cup D}^g$, ter $\mathbf{f}_B^g$ se sklada s $\mathbf{f}_C^g$.
- Na dogodku $B \cup C$ se dejanje $\mathbf{f}_{B \cup D}^g$ sklada s $\mathbf{f}_B^g$, ter dejanje $\mathbf{f}_{C \cup D}^g$ se sklada s $\mathbf{f}_C^g$.
- Velja $\mathbf{f}_B^g \leq \mathbf{f}_C^g$.

Torej po aksiomu 2 velja $\mathbf{f}_{B \cup D}^g \leq \mathbf{f}_{C \cup D}^g$. Iz tega, po definiciji relacije preferenc med dogodki $\preceq$, sledi $B \cup D \preceq C \cup D$.

($\Leftarrow$) Privzamemo, da velja $B \cup D \preceq C \cup D$. Dokaz je analogen dokazu za ($\Rightarrow$), zgolj pri točki 2e uporabimo $B \cup D \preceq C \cup D$, iz česar po definiciji relacije preferenc med dogodki $\preceq$, sledi $\mathbf{f}_{B \cup D}^g \leq \mathbf{f}_{C \cup D}^g$.

(3) Dokažemo, da velja $0 \preceq B$, za poljuben dogodek B, in $0 \prec S$.

(a) Dokazati moramo, da za posledici g in f iz $g < f$ sledi $\mathbf{f}_0^g \leq \mathbf{f}_B^g$. Ker velja $\mathbf{f}_0^g = g$, je dejanje konstantno in pišemo $\mathbf{f}_0^g = \mathbf{g}$, torej moramo pokazati, da velja $\mathbf{g} \leq \mathbf{f}_B^g$. Ker se dejanje $\mathbf{f}_B^g$ sklada z dejanjem $\mathbf{g}$ glede na $\sim B$, je dovolj pokazati, da velja $\mathbf{g} \leq \mathbf{f}$ glede na B, kjer je $\mathbf{f} := \mathbf{f}^g_B$ glede na B konstantno dejanje. Če je B nepomemben dogodek, po definiciji nepomembnega dogodka sledi $\mathbf{g} \leq \mathbf{f}$ glede na B. Če B ni nepomemben, ker velja $g < f$, po aksiomu 3 sledi, da je $\mathbf{g} \leq \mathbf{f}$ glede na B. Torej velja $0 \preceq B$.

(b) Dokažemo, da velja $S \not\preceq 0$. Recimo, da je $S \preceq 0$. Po aksiomu 5 velja, da obstajata taki posledici g in f, da velja $g < f$. Ker je $S \leq 0$, sledi $\mathbf{f}^g_S \leq \mathbf{f}^g_0$. Dejanji $\mathbf{f}^g_0 := \mathbf{g} = g$ in $\mathbf{f}^g_S := \mathbf{f} = f$ sta konstantni dejanji. Torej velja $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ in po definiciji preferenc med dejanji sledi, da za posledici f in g velja $f \leq g$, kar je v nasprotju s predpostavko, da velja $g < f$. Torej velja $0 \prec S$.

4.2. **Kvantitativna subjektivna verjetnost.** Savageova namera je bila vzpostaviti močno povezavo med subjektivno verjetnostjo in matematično verjetnostjo. Pri trenutnih aksiomih še ni mogoče nedvoumno določiti numerične verjetnosti vsakemu dogodku. To lahko naredimo, kakor je pokazal de Finetti, tako da predpostavimo, da lahko svet razdelimo na poljubno število ekvivalentih podmnožic.

Definicija 4.6. *Končno aditivna verjetnostna mera* na množici S je funkcija P, ki vsaki množici $B \subset S$ priredi realno število $P(B)$, tako da velja:

(1) $P(B) \geq 0$, za vsak B,
(2) $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$, kjer je C tak, da velja $B \cap C = 0$,
(3) $P(S) = 1$.

Definicija 4.7. Na S imamo verjetnostno mero P in kvalitativno verjetnost $\leqslant$ za vsak dogodek B in C.

- P je (*strogo*) *skladna* z $\leqslant$, če velja, da je $P(B) \leq P(C)$ natanko tedaj, ko je $B \leqslant C$.
- P je *skoraj skladna* z $\leqslant$, če velja, da iz $B \leqslant C$ sledi $P(B) \leq P(C)$.

Definicija 4.8. Končno aditivno verjetnostno mero P, ki je skladna s kvalitativno subjektivno verjetnostjo $\preceq$ neke osebe, imenujemo *kvantitativna subjektivna verjetnost* te osebe.

Želimo si, da bi za osebo s kvantitativnimi subjektivnimi verjetnostmi obstajala enolično določena, z relacijo $\preceq$ skladna končno aditivna verjetnost. Da bi bilo to res, morajo osebe slediti novemu aksiomu. Kar mora aksiom zagotavljati, je predstavljeno v izrekih 4.11, 4.15, 4.17 ter posledici 4.16.

Definicija 4.9. Verjetnostna mera P je *neatomska*, če za vsako realno število ρ, $0 \leq \rho \leq 1$, in vsak dogodek $B \subset S$ obstaja tak dogodek $C \subset B$, da velja $P(C) = \rho P(B)$.

Definicija 4.10. *n-bločna skoraj enakomerna particija* dogodka B je taka particija dogodka B na n blokov, da unija nobenih r blokov particije ni bolj verjetna kot unija katerih koli r+1 blokov.

Izrek 4.11. *Če obstaja n-bločna skoraj enakomerna particija dogodka S za poljubno velike vrednosti n, obstaja natanko ena končno aditivna verjetnostna mera P, ki se skoraj sklada s kvalitativno verjetnostjo $\leqslant$. Nadalje velja, da je verjetnostna mera P neatomska.*

Izrek 4.11 je Savage v [1] dokazal na straneh 35 in 36.

Definicija 4.12. Kvalitativna verjetnost $\leqslant$ je *drobna* (ang. fine) natanko tedaj, ko za vsak $B > 0$ obstaja taka particija S, da noben blok particije ni bolj verjeten kot B.

Definicija 4.13. Dogodka B in C sta *skoraj ekvivalenta* natanko tedaj, ko za vse dogodke G in H, ki niso nepomembni, poleg tega pa velja $B \cap G = C \cap H = 0$, velja tudi $B \cup G \geqslant C$ in $C \cup H \geqslant B$.

Definicija 4.14. Kvalitativna verjetnost $\leqslant$ je *tesna* (ang. tight) natanko tedaj, ko je vsak par skoraj ekvivalentnih dogodkov tudi ekvivalenten, pri čemer sta dogodka A in B ekvivalentna, če velja $A \leqslant B$ in $B \leqslant A$.

Izrek 4.15. *Če je kvalitativna verjetnost $\leqslant$ drobna, obstaja natanko ena končno aditivna verjetnostna mera P, ki je skoraj skladna z $\leqslant$. Nadalje velja, da je verjetnostna mera P neatomska. Velja tudi, da iz $B > 0$ sledi $P(B) > 0$ ter, da sta dogodka B in C skoraj ekvivalentna natanko tedaj, ko velja $P(B) = P(C)$.*

Izrek 4.15 je Savage v [1] delno dokazal na strani 37 in 38. V [4] je Ilkka Niiniluoto izrek dokazal v celoti in opozoril na manjšo Savageovo napako pri dokazovanju.

Posledica 4.16. *Če je kvalitativna verjetnost $\leqslant$ drobna in tesna, je edina končno aditivna verjetnostna mera, ki je skoraj skladna z $\leqslant$, tudi strogo sklad z $\leqslant$. V tem primeru obstaja tudi particija S na poljubno mnogo ekvivalentnih dogodkov.*

Izrek 4.17. *Kvalitativna verjetnost $\leqslant$ je drobna in tesna natanko tedaj, ko za vsak $B < C$ obstaja taka particija S, da je unija vsakega njenega bloka z B manj verjetna kot C.*

Dokaz.
($\Rightarrow$) Predpostavimo, da velja:

(1) $$\forall B > 0,\ \exists \text{ particija } S \text{ na bloke } P_i \ni\colon P_i < C \text{ za } \forall i,$$

Predpostavimo tudi, da za dogodka B in C za katera velja:

(2)
$$(\forall G, H > 0\ B \cap G = C \cap H = 0 \text{ velja } B \cup G \geqslant C \text{ in } C \cup H \geqslant B) \Rightarrow B \leqslant C \text{ in } C \leqslant B$$

- Dokažemo, da $\exists$ taka particija S, da sta dogodka D in $D \cup P_i$ skoraj ekvivalentna za $\forall i$. Potem po (2) velja $D \leqslant D \cup P_i$ in $D \cup P_i \leqslant D$.
- Dogodka D in $D \cup P_i$ sta skoraj ekvivalentna, če velja $D \cup P_i \cup G \geqslant D$ in $D \cup H \geqslant D \cup P_i$ za $\forall G, H > 0$, take da je $(D \cup P_i) \cap G = D \cap H = 0$
- $D \cup P_i \cup G \geqslant D$ velja očitno.
- Če za P_i velja $D \cap P_i = 0$, potem BŠS predpostavimo, da obstaja taka particija S, da za nek P_j velja $D \cup P_j = D$ in za $D \cup P_i \backslash P_j = 0$. Da je $D \cup H \geqslant D \cup P_j = D$ je očitno.
- Če je P_i tak, da velja $D \cap P_i = 0$, potem velja:

(3) $$D \cup H \geqslant D \cup P_i \text{ in } D \cap H = D \cap P_i = 0 \Leftrightarrow H \geqslant P_i.$$

Po (1) za $H > 0$ $\exists$ taka particija S na P_i, da velja $H \geqslant P_i$.
- Dokazali smo, da obstaja taka particija S na P_i, da velja:

(4) $$B \cup P_i \leqslant B\ \forall i$$

– Če je $B < C$ po (4) obstaja taka particija S, da velja:

$$B \cup P_i \leqslant B < C \forall i \tag{5}$$

($\Leftarrow$) Predpostavimo, da velja:

$$\forall B < C,\ \exists \text{ particija } S \text{ na bloke } P_i \ni\colon B \cup P_i < C \text{ za } \forall i. \tag{6}$$

(1) **Drobnost:** Če vzamemo $B = 0$, po (6) dobimo:

$$\forall C > 0,\ \exists \text{ particija } S \text{ na bloke } P_i \ni\colon P_i < C\ \forall i. \tag{7}$$

To je ravno definicija drobnosti.

(2) **Tesnost:** Dokazati moramo, da za dogodka B in C za katera velja:

$$\forall G, H > 0\ B \cap G = C \cap H = 0 \text{ velja } B \cup G \geqslant C \text{ in } C \cup H \geqslant B. \tag{8}$$

velja tudi:

$$B \leqslant C \text{ in } C \leqslant B. \tag{9}$$

Če $\exists\, G, H > 0$ taka, da velja $B \cap G = C \cap H = 0$, potem BŠS: $\exists i, j$: $B \cap P_i = C \cap P_j = 0$.

(a) Velja $C \leqslant B \cup G$ po (6) $\exists$ particija S na bloke P_i $\ni$: $C \cup P_i \leqslant B \cup G$. Ker $\exists i\ B \cap P_i = 0$ vzamemo $G = P_i$. Potem velja:

$$C \cup P_i \leqslant B \cup P_i \text{ in } B \cap P_i = 0 \Rightarrow C \leqslant B. \tag{10}$$

(b) Če velja $B \leqslant C \cup H$ na enak način kot v (a) dobimo $B \leqslant C$.

□

Glede na posledico 4.16 in izrek 4.17 bi za obstoj enolične končno aditivne verjetnostne mere, ki bi se skladala s kvantitativno subjektivno verjetnostjo $\preceq$, zadostovalo, da bi privzeli obstoj take particije S, da bi za $B \prec C$ in vsak blok particije veljalo, da je unija B in tega bloka manj verjetna kot C.

Pri definiciji funkcije koristnosti bomo poleg aksioma 7 potrebovali nekoliko strožjo predpostavko, ki bo urejala tudi splošna dejanja, ne zgolj posebno vrsto dejanj oblike $\mathbf{f}_B^g$, s pomočjo katerih smo definirali kvantitativno verjetnost.

Aksiom 6. Naj bosta $\mathbf{g}$ in $\mathbf{h}$ poljubni dejanji, za kateri velja $\mathbf{g} < \mathbf{f}$, in naj bo f poljubna posledica. Potem obstaja taka particija S, da, če dejanje $\mathbf{g}$ na katerem koli bloku particije spremenimo tako, da se tam sklada z dogodkom f, še vedno velja $\mathbf{g} < \mathbf{h}$. Če spremenimo $\mathbf{h}$ na kateremkoli bloku particije tako, da se tam sklada z f, prav tako še vedno velja $\mathbf{g} < \mathbf{h}$.

Naj za dejanji $\mathbf{g}$ in $\mathbf{h}$ velja $\mathbf{g} < \mathbf{h}$. Aksiom 6 pravi, da obstaja taka particija S, da če bodisi dejanje $\mathbf{g}$ bodisi dejanje $\mathbf{h}$ na enem bloku particije spremenimo tako, da za posledico dejanja na tem bloku vzamemo posledico f, nobena posledica f ne spremeni stroge preference med spremenjenim dejanjem in nespremenjenim dejanjem. To pomeni, da ne obstaja nobena posledica, ki bi bila neskončno boljša oziroma slabša od katerekoli druge posledice.

Če za dejanja iz aksioma 6 vzamemo $\mathbf{f}_B^g$ ter $\mathbf{f}_C^g$, za katera velja $\mathbf{f}_B^g < \mathbf{f}_C^g$, potem po definiciji 4.3 velja $B \prec C$. Po aksiomu 6 obstaja taka particija S, da če dejanje $\mathbf{f}_B^g$ na katerem koli bloku particije spremenimo s poljubno posledico, bi za tako spremenjeno dejanje (označimo ga z $\mathbf{f}$) še vedno veljalo $\mathbf{f} < \mathbf{f}_C^g$. To pomeni, da za poljubni blok P particije S velja $\mathbf{f}_{B\cup P}^g < \mathbf{f}_C^g$. Torej po definiciji 4.3 velja $B \cup P \prec C$ za vsak blok particije S.

Tako vidimo, da če velja aksiom 6, po izreku 4.17 velja, da je kvantitativna subjektivna verjetnost $\preceq$ drobna in tesna. Iz tega po posledici 4.16 velja, da obstaja enolično določena končno aditivna verjetnostna mera, ki se sklada s kvantitativno subjektivno verjetnostjo $\preceq$.

Savage se pridružuje mnenju de Finettija in Koopmana, da za predpostavko, ki bi implicirala števno aditivnost verjetnostne mere ni pravega razloga, saj ne pozna nobenega argumenta, ki bi podpiral tezo, da kršenje števne aditivnosti pomeni nekonsistentnost in nespametnost odločitev. Zato predlaga, da se predpostavka o števni aditivnosti sprejme kot dodatna hipoteza v tistih primerih, v katerih je to sprejemljivo in koristno.

4.3. **Funkcija koristnosti.**

Definicija 4.18. *Loterija* $\boldsymbol{f} = \sum \rho_i f_i$ je razred vseh takih dejanj $\mathbf{f}$, za katera obstaja particija S na bloke B_i, da velja $P(B_i) = \rho_i$ in $f(s) = f_i$ za $s \in S$, kjer je f_i končno zaporedje posledic, ρ_i pa ustrezno zaporedje takih nenegativnih realnih števil, za katere velja $\sum \rho_i = 1$.

Za vsa dejanja $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ iz loterije $\boldsymbol{f}$ velja $\mathbf{g} \doteq \mathbf{h}$.

Definicija 4.19. *Funkcija koristnosti* je preslikava, ki slika iz množice posledic v realna števila tako, da za $\boldsymbol{f} = \sum \rho_i f_i$ in $\boldsymbol{g} = \sum \sigma_i g_i$ velja $\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{g}$ natanko tedaj, ko velja $\sum \rho_i U(f_i) \leq \sum \sigma_i U(g_i)$.

Definicija 4.20.

$$U[\boldsymbol{f}] = E(U(\boldsymbol{f})) = \sum \rho_i U(f_i).$$

Savage je dokazal, da aksiomi 1-6 zadoščajo za obstoj do pozitivno afine transformacije enolične funkcije koristnosti, če so dejanja sestavljena iz končno mnogo posledic.

Čeprav v realnosti redko ali pa celo sploh ne naletimo na odločitev, v kateri bi imeli opravka z dejanji z neskončno mnogo posledicami, je pogosto najboljši način obravnavanja situacije, da predpostavimo obstoj dejanj z neskončno mnogo posledicami.

Naslednji aksiom, ki je zastavljen podobno kot aksiom 2 zadostuje za obstoj funkcije koristnosti tudi za dejanja z neskončno posledicami.

Aksiom 7. Če je $\mathbf{f} \leq g(s)$ glede na B, za vsak $s \in B$, potem je $\mathbf{f} \leq \mathbf{g}$ glede na B. Podobno, če je $g(s) \leq \mathbf{f}$ glede na B, za vsak $s \in B$, potem $\mathbf{g} \leq \mathbf{f}$ glede na B.

Izrek 4.21. *Naj bo $\leq$ relacija preferenc na množici dejanj $\boldsymbol{F}$. Naslednji trditvi sta ekvivalentni:*

(1) *Relacija $\leq$ zadošča aksiomom 1 - 7.*
(2) *Na S obstaja taka enolična, neatomska, končno aditivna verjetnostna mera P, da velja P(E) = 0 natanko tedaj, ko je dogodek E nepomemben. Poleg*

tega na množici posledic F obstaja omejena, do pozitivne afine transformacije enolično določena funkcija U z realnimi vrednostmi. Pri tem je funkcija U taka, da za vsa dejanja $\boldsymbol{f}$ in $\boldsymbol{g}$ velja $\boldsymbol{f} \leq \boldsymbol{g}$ natanko tedaj, ko velja $\sum_{\mathrm{s}} P(\mathrm{s})U(\mathrm{f}(\mathrm{s})) \leq \sum_{\mathrm{s}} P(\mathrm{s})U(\mathrm{g}(\mathrm{s}))$.

Izrek 4.21 je leta 1970 dokazal Peter Fishburn v delu *Utillity Theory for Decisopn Making.* Savage je v [1] dokazal podoben izrek, vendar zgolj za skoraj gotovo omejena dejanja.

Izrek 4.21 pravi, da imajo tiste osebe, ki se ravnajo v skladu s Savageovimi aksiomi, do pozitivne afine transformacije enolično določeno funkcijo koristnosti. Savage je torej zapisal aksiome, ki se jih morajo osebe držati v negotovih situacijah, da zanje velja podobna lastnost, kot za osebe, ki se v tveganih situacijah držijo von Neumann-Morgensternovih aksiomov.

5. Racionalnosti na finančnih trgih

Za Rubinsteinovo definicijo racionalnih investitorjev poleg Savageovih aksiomov potrebujemo še nepristranskost kvantitativnih subjektivnih verjetnosti, s katerimi investitorji ocenjujejo verjetnosti prihodnjih dogodkov in s katerimi računajo svojo pričakovano koristnost.

Definicija 5.1. Kvantitativne subjektivne verjetnosti investitorja so *nepristranske*, če je pri informacijah, ki jih ima investitor, kvantitativna subjektivna verjetnost porazdeljena enako, kot bi bili porazdeljeni donosi naložb, če bi znova in znova zaganjali gospodarstvo.

Definicija 5.2. Investitor je *racionalen*, če izpolnjuje Savageove aksiome in maksimira svojo funkcijo koristnosti. Poleg tega morajo biti investitorjeve kvantitativne subjektivne verjetnosti nepristranske.

Nepristranskost kvantitativnih subjektivnih verjetnosti pomeni, da investitor v povprečju pravilno napove prihodnje donose naložb. Pomeni tudi, da imajo racionalni investitorji z enakimi informacijami enake kvantitativne subjektivne verjetnosti. Investitorji imajo torej različna mnenja o prihodnosti zgolj, če imajo različne informacije. Primer različnih subjektivnih verjetnosti je prikazan v zgledu 5.3.

Zgled 5.3. Oseba A vrže kovanec. Oseba B miži, tako, da ne vidi kako je kovanec pristal. Ko je kovanec pristal, oseba A vidi, da je padel grb. Glede na dane informacije je subjektivna verjetnost osebe A, da je padel grb, ena. V tem trenutku oseba B še vedno miži. Glede na informacije, ki jih ima oseba B, bi bilo razumsko sklepati, da je za osebo B subjektivna verjetnost tako padca cifre, kot grba ena polovica.

Na vrednotenje prihodnjih naložb racionalnih investitorjev nimajo vpliva zgolj informacije in posledično subjektivne verjetnosti. Pomembne so tudi preference med posledicami. Primer racionalnih investitorjev z enakimi subjektivnimi verjetnostmi, vendar različnim vrednotenjem investicije, je opisan v zgledu 5.4.

Zgled 5.4. Racionalna investitorja A in B imata na voljo investicijo. Oba sta prepričana, da bo investicija z verjetnostjo $1/2$ povrnila 2000 evrov čez eno leto, ali pa bo z verjetnostjo $1/2$ povrnila 3000 evrov čez dve leti. Oseba A je manj potrpežljiva od osebe B. To se odrazi v tem, da oseba A za diskontni faktor vzame $r = 8\%$, oseba B pa $r = 5\%$. Vrednost naložbe izračunata s pomočjo pričakovane neto sedanje vrednosti in dobita:

$$\text{Oseba A: } E[NSV(A)] = \frac{1}{2}\left(\frac{2000}{1,08}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3000}{1,08^2}\right) \approx 2212$$

$$\text{Oseba B: } E[NSV(B)] = \frac{1}{2}\left(\frac{2000}{1,05}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3000}{1,05^2}\right) \approx 2313$$

Glede na razlike v njunih preferencah osebi A in B investicijo različno vrednotita. Oseba A je za investicijo danes pripravljena plačati največ 2212 evrov, oseba B pa največ 2313 evrov.

Rubinsteinova definicija racionalnosti finančnih trgov [3] je zapisana v definiciji 5.5.

Definicija 5.5.

(1) Trg je *maksimalno racionalen*, če so vsi investitorji racionalni.
(2) Trg je *racionalen*, če so cene določene, kot če bi bili vsi investitorji racionalni.
(3) Trg je *minimalno racionalen*, če na trgu ni priložnosti za izreden zaslužek racionalnih investitorjev. Priložnost za izreden zaslužek pomeni, da je na trgu priložnost za zaslužek, ki je večji od rasti trga in to brez dodatnega tveganja.

5.1. **Lastnosti racionalnega trga.** Rubinstein trdi, da bi na maksimalno racionalnem trgu investitorji trgovali malo ter veliko uporabljali indeksne sklade. To bi bilo racionalno obnašanje investitorja, če bi investitor verjel, da velja hipoteza učinkovitosti finančnega trga in so vse informacije že vsebovane v ceni delnice. Če bi vsi investitorji trgovali malo, bi se cena oblikovala na podlagi vrednotenja majhnega števila investitorjev, kar bi povečalo verjetnost, da obstaja informacija, ki še ni vključena v ceno delnic. To bi privedlo do priložnosti za netvegan zaslužek, ki bi jo racionalen investitor izkoristil. Na maksimalno racionalnem trgu bi torej aktivno trgovalo ravno toliko investitorjev, da bi cene odražale vse informacije, ki so razpoložljive v danem trenutku.

V realnosti ljudje očitno niso racionalni. Med drugim sta Alliasova in Ellsbergova paradoksa pokazala, da odločitve večine ljudi niso skladne s Savageovim aksiomom in zato po definiciji 5.2 niso racionalni. Če je glavna lastnost določanja cen na maksimalno racionalnem trgu ta, da cene vsebujejo vse razpoložljive informacije, potem je to mogoče tudi, če niso vsi investitorji racionalni. Večina investitorjev je lahko presamozavestnih, kar pomeni, da so prepričani, da so sposobni odkriti informacijo, ki še ni vključena v ceno in tako zaslužiti več kot bi zaslužil povprečen investitor. Taki investitorji bi lahko z iskanjem informacij ceno približali pravi vrednosti, čeprav sami na dolgi rok, skupaj s stroški iskanja informacij, zaradi vsebovanosti vseh informacij v ceni, ne bi mogli preseči tržnih donosov.

Rubinstein navaja raziskave Michaela Jensena iz članka *Risk, The Pricing of Capital Assets, and The Evaluation of Investment Portfolios* [20] in članka *The preformance of mutual funds in the period 1945-1964* [19] v katerih je Jensen pokazal, da povprečen vzajemni sklad, ki je bil vključen v raziskavo, ni zaslužil več, kot je zrastel indeks, na katerem je sklad deloval. To pomeni, da je skupaj s stroški iskanja informacij in stroški trgovanja, povprečen sklad zaslužil manj, kot je zrastel trg. Seveda obstajajo skladi, ki so v tem obdobju zaslužili več kot povprečni sklad in torej tudi več, kot je zrastel trg. Vendar Jensen trdi, da je večji zaslužek teh skladov mogoče pripisati naključju. To bi pomenilo, da se vlaganje sredstev v iskanje informacij, s pomočjo katerih bi lahko odkrili informacijo, preden bi bila ta že vključena v ceno, vzajemnim skladom ne povrne. Med naborom raziskovanih vzajemnih skladov so bili tudi aktivno upravljani skladi, torej tisti, ki vlagajo veliko sredstev v iskanje netveganih investicij. Če bi kdo lahko na trgu odkril anomalije, ki bi privedle do visokega, netveganega zaslužka, bi morali biti to ravno ti skladi. Ker tudi ti skladi ne dosegajo nadpovprečnih donosov, Jensenova raziskava potrjuje, da bi trgi lahko bili vsaj minimalno racionalni.

Iz definicije 5.5 minimalno racionalnega trga sledi, da na njem investitorji na dolgi rok ne morejo zaslužiti več, kot zraste trg. V zgledu 5.6 je navedenih nekaj primerov možnih razlogov za tako omejitev.

Zgled 5.6. Primeri, ko na trgu s pomočjo iskanja informacij ni mogoče netvegano zaslužiti:

(1) Cene na trgu vsebujejo vse informacije in mnenja o prihodnjih dogodkih mnogih investitorjev. Zato cena predstavlja najboljšo oceno realne vrednosti, ki jo predstavlja finančni inštrument, torej se cena spremeni zgolj ob prihodu nove informacije, ki pa je nepredvidljiva.
(2) Stroški iskanja v ceno še nevključenih informacij so višji kot dodaten zaslužek, ki ga omogoča pridobljena informacija.
(3) Pridobljena informacija, za katero investitor meni, da še ni vključena v ceno, je v ceni že upoštevana. V tem primeru investitor tvega izgubo, saj je napačno ocenil vrednost informacije.
(4) Informacija, da je neka delnica precenjena, investitorju ne koristi, če te delnice nima v lasti in če je uporaba kratke prodaje omejena.

Ena izmed pomembnejših in v mnogih modelih o finančnih trgih predpostavljenih lastnostih racionalnega trga je lastnost, da na trgu ni priložnosti za arbitražo. To pomeni, da na trgu ni mogoče zaslužiti brez tveganja. V realnosti so priložnosti za zaslužek popolnoma brez tveganja zelo redke, obstajajo pa trgovalne strategije, ki gledano z vidika dnevnega trgovanja ponujajo malo tvegan zaslužek. Poleg tega, da so zaslužki na tak način večinoma zelo majhni, take strategije pogosto skrivajo, sicer malo verjetne, možnosti za velike izgube.

Zgled 5.7. Neka trgovalna strategija v nekem obdobju konstantno prinaša višje donose, kot so tržni donosi.

(1) Če to velja na trgu, ki je maksimalno racionalen, to pomeni, da investitorji za tako strategijo zahtevajo višje donose, ker pričakujejo, da se bo zgodil malo verjeten dogodek, ki bo za izvajalca strategije pomenil večjo izgubo. Skupaj s takšnimi izgubami bodo donosi strategije na dolgi rok enaki donosom trga.
(2) Če strategija z višjimi donosi ne bi vsebovala tveganja malo verjetnih dogodkov, bi jo racionalni investitorji začeli izkoriščati, kar bi njene donose znižalo do tržnih donosov.
(3) Če bi na racionalnem trgu takšno strategijo poizkušalo izrabiti veliko neracionalnih investitorjev, bi donosi strategije padli, kar pa bi pomenilo, da bi takšni neracionalni investitorji skupaj z malo verjetnimi izgubami dosegali nižje donose od tržnih.

Zgled 5.7 ponazarja pričakovanje, da tako na maksimalno racionalnem, kot na racionalnem trgu ni priložnosti za arbitražo, saj bi jo racionalni investitorji sicer že izkoristili. Priložnosti za arbitražo ni niti na minimalno racionalnem trgu, saj bi bilo to v nasprotju z definicijo takega trga.

6. Enostaven model racionalnega trga

Primer reakcije finančnih trgov na nesrečo raketoplana Challenger, ki je opisan v uvodu, in drugi primeri delovanja modrosti množic kažejo, da bi bile lahko cene na finančnih trgih zelo dobra ali celo pravilna ocena vrednosti, ki jo predstavlja finančni inštrument.

Če investitorji pri ocenjevanju prihodnosti ne delajo sistematičnih napak, bo povprečje vrednotenj blizu realne vrednosti finančnega inštrumenta. Da investitorji ne delajo sistematičnih napak, na primer pomeni, da niso vsi investitorji presamozavestni v svojih napovedih, temveč nekaj napovedi investitorjev donose investicije preceni, nekaj pa podceni. Take napake se potem lahko v povprečju izničijo, kar bi povprečje vrednotenj naredilo za zelo dober približek realne vrednosti.

Z dvema enostavnima modeloma trga želimo preveriti, ali se cene na finančnih trgih določajo tako, da je cena delnice blizu povprečnega vrednotenja delnice vseh investitorjev. Najprej smo v prvem modelu predpostavili, da je kratka prodaja delnice prepovedana, nato pa smo v drugem modelu dovolili uporabo kratke prodaje delnice brez omejitev. Simulacijo obeh modelov smo naredili v programskem jeziku R.

6.1. **Poenostavljen model trga z omejitvijo kratke prodaje.**

Model 1. Poenostavljen model trga z omejitvijo kratke prodaje določajo naslednje omejitve:

(1) Investitorji ocenjujejo vrednost podjetja.
(2) Posamezen investitor se ne moti sistematično.
(3) Investitorji ne izstopajo iz vrednotenja in trgovanja z delnico, novi pa ne vstopajo.
(4) Investitorji niso omejeni z denarnimi sredstvi.
(5) Vsak investitor lahko kupi samo eno delnico.
(6) Kratka prodaja je prepovedana.
(7) Investitorjev je dovolj (vsaj toliko kot delnic).
(8) Investitor delnico proda, ko jo lahko proda za več, kot jo vrednoti sam.
(9) Investitor delnico kupi, ko jo lahko kupi za manj, kot jo vrednoti sam.

Posledica prve predpostavke je, da investitorji ne ocenjujejo, po kakšni vrednosti bodo lahko delnico prodali na trgu, temveč koliko je vrednost premoženja, ki ga predstavlja delnica. Na trgu torej ni investitorjev, ki bi poizkušali zaslužiti s posredovanjem med tistimi, ki bi delnico želeli prodati in tistimi, ki jo želijo kupiti. Skupaj s predpostavko (3) ima to za posledico, da se cene spreminjajo zgolj ob trenutkih, ko investitorji dobijo informacijo, ki je pomembna za vrednost podjetja in njegovo prihodno poslovanje (na primer poročila o poslovanju, zamenjava direktorjev podjetja, nepričakovana sprememba cene surovin, stanje gospodarstva). Investitorjevo vrednotenje torej ni odvisno od mnenj in ocen, ki si jih o podjetju oblikujejo ostali investitorji. Z drugimi besedami: vsi investitorji imajo v načrtu delnice držati dolgoročno, zato trenutna cena na trgu ne vpliva na njihovo mnenje o vrednosti delnice, prav tako verjamejo svoji oceni vrednosti delnice.

Predpostavka (2) pove, da posamezen investitor včasih vrednoti delnico previsoko, včasih prenizko, v povprečju pa je njegova ocena pravilna.

Predpostavke (4)-(9) zagotavljajo, da vrednost delnice na trgu določi tisti investitor, ki ima delnico v lasti in jo je pripravljen prodati za najnižjo ceno. Predpostavka (4) zagotavlja, da imajo vsi investitorji dovolj denarja za nakup delnice, če se jim glede na njihovo vrednotenje in ceno na trgu to zdi smiselno ob upoštevanju predpostavke (9). Predpostavka (5) precej poenostavi razmišljanje o dogajanju na trgu, ne da bi znatno poslabšala skladnost modela z realnostjo.

Predpostavka (8) pove, da je za nakup delnice potrebno plačati vsaj toliko, na kolikor vrednoti delnico tisti lastnik delnice, ki jo vrednoti na najnižjo vrednost. Taka je torej nabavna cena na trgu. Predpostavka (9) pove, da je s prodajo delnice možno dobiti največ toliko, na kolikor vrednoti delnico tisti investitor brez delnice, ki vrednoti delnico najvišje. Taka je torej prodajna cena na trgu. Do zamenjave lastnika delnice pride, ko je nabavna cena višja ali enaka prodajni ceni delnice.

Predpostavka (6) prepoveduje kratko prodajo. V realnosti je na trgu kratka prodaja, torej prodaja izposojene delnice omejena iz več razlogov. Zaradi zakonskih omejitev je trg izposoje nerazvit, zato si je delnico v nekaterih primerih težko izposoditi. Posojeno delnico lahko posojevalec odpokliče, kadar želi, kar prelaga dodatno tveganje na investitorja, ki se poslužuje kratke prodaje. Za izposojo delnice je potrebno posojevalcu tudi plačati, kar pomeni, da mora biti investitor prepričan, da bo donos kratke prodaje večji od stroška izposoje. Več razlogov in podrobnejši opisi omejitev kratke prodaje so navedeni v [9].

6.1.1. *Simulacija poenostavljenega modela trga z omejitvijo kratke prodaje.* V definiciji 6.1 definiramo nekaj oznak.

Definicija 6.1.

- Z n označimo število investitorjev.
- Z d označimo število delnic.
- Z *Vr(j)* označimo vektor $\mathbb{R}^n$. Na i-tem mestu je zapisano vrednotenje delnice i-tega investitorja po prihodu j-te nove informacije.
- Z *Pr(j)* označimo vektor $\mathbb{R}^n$. Na i-tem mestu je zapisano, za koliko se spremeni vrednotenje delnice i-tega investitorja ob prihodu j-te nove informacije.

Za simulacijo poenostavljenega modela trga z omejitvijo kratke prodaje za začetno vrednost *Vr(0)* generiramo vektor z n neodvisnimi enako porazdeljenimi slučajnimi spremenljivkami. Če želimo, da se investitorji ne motijo sistematično, mora biti porazdelitev slučajnih spremenljivk simetrična. Delnice bo imelo v lasti tistih d investitorjev, ki bodo delnico vrednotili najvišje izmed n investitorjev. Nabavno ceno delnice torej določi d-ta najvišja vrednost iz vektorja *Vr(j)*. Ob prihodu novih informacij investitorji spremenijo svoje vrednotenje. To simuliramo tako, da ob prihodu j-te informacije izračunamo:

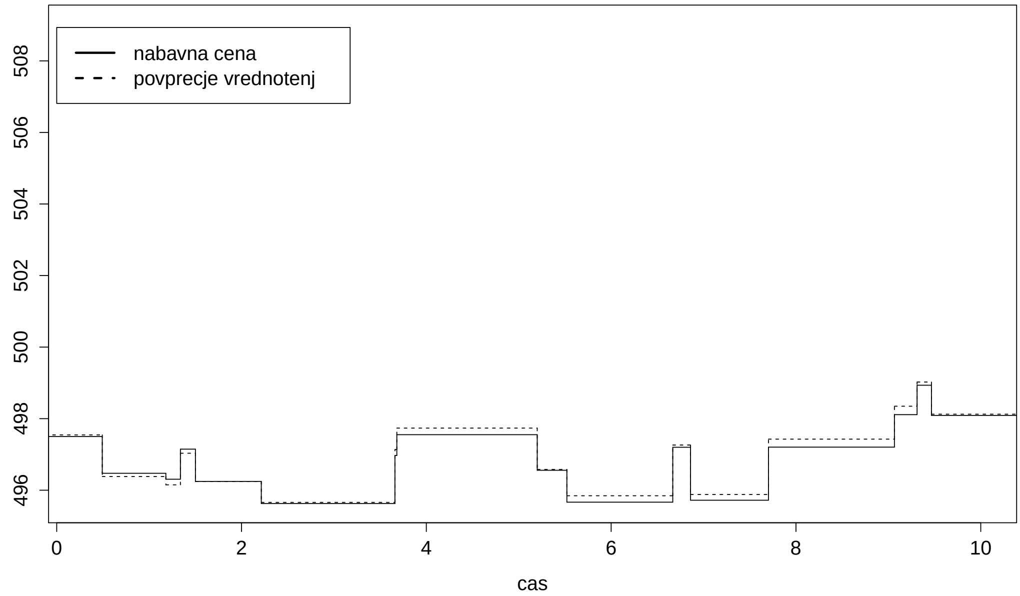
$$Vr(j) = Vr(j-1) + Pr(j),$$

kjer je *Pr(j)* slučajni vektor z n neodvisnimi enako porazdeljenimi slučajnimi spremenljivkami. Sprememba vrednotenja za vsakega investitorja je zaradi predpostavke, da se investitor ne moti sistematično, neodvisna tudi od prejšnjega vrednotenja.

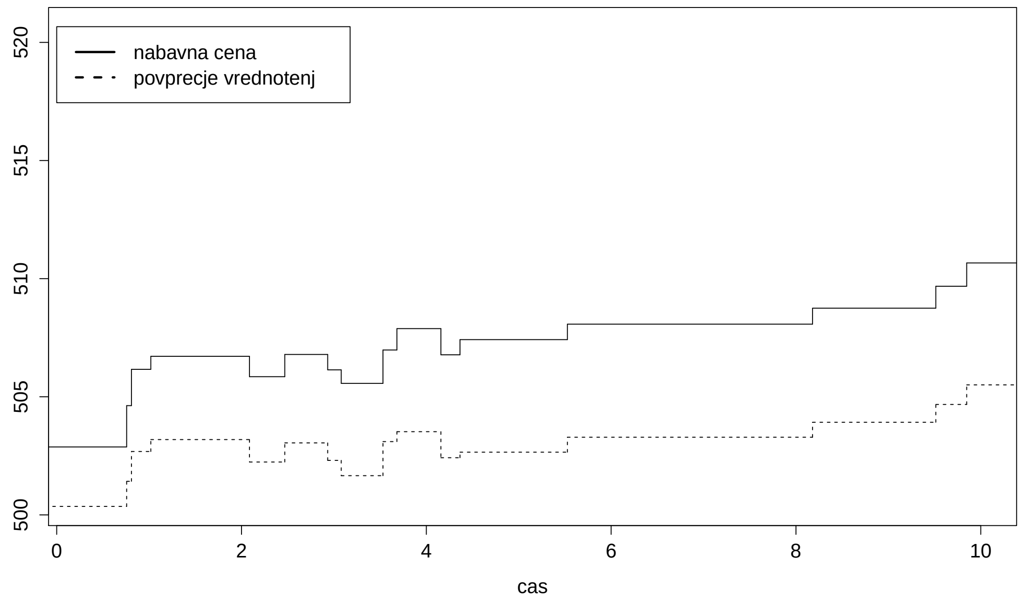
Rezultati simulacije so prikazani na sliki 2 in sliki 3. Na sliki 2 je prikazana simulacija v primeru, ko je na trgu delnic pol manj kot investitorjev. V tem primeru je ocena vrednosti delnice investitorja, ki določa nabavno ceno delnice blizu mediane vseh vrednotenj. Ker so vrednosti v simulaciji dobljene iz simetrične porazdelitve, bo cena delnice blizu povprečja vrednotenj. V takem primeru torej velja lastnost, da je cena na trgu blizu povprečja vrednotenja vseh investitorjev.

Na sliki 3 je prikazano gibanje cene delnice v primeru, ko je delnic na trgu več kot pol manj od investitorjev. V tem primeru ceno določi tisti del investitorjev, ki ocenjuje vrednost finančnega inštrumenta višje, kot je mediana vrednotenj. To pomeni, da je cena višja od povprečja vrednotenj investitorjev.

Izračun kaže, da se s povečevanjem števila investitorjev cena delnice na trgu, kjer je uporaba kratke prodaje omejena, oddalji od povprečja vrednotenj investitorjev, saj imajo optimistični investitorji v tem primeru večjo vlogo pri določanju cen. Primeri in razlogi previsokih cen na trgu, kjer je kratka prodaja omejena, so opisani tudi v [9].

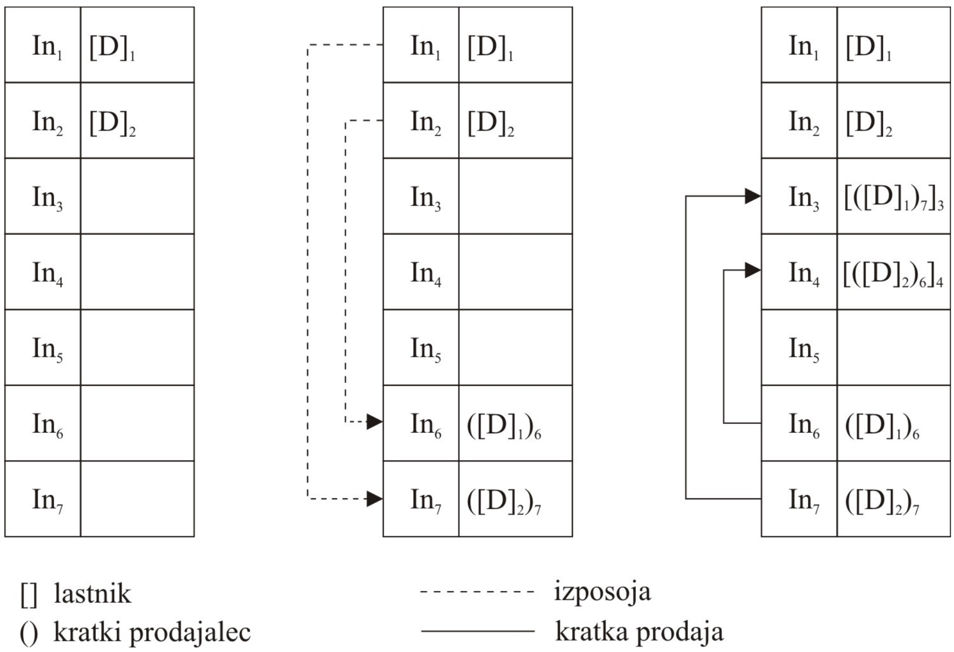


Slika 2. Gibanje cene delnice modela z omejitvijo kratke prodaje: 1000 investitorjev, 500 delnic.



Slika 3. Gibanje cene delnice modela z omejitvijo kratke prodaje: 3000 investitorjev, 100 delnic.

6.2. **Poenostavljen model trga brez omejitve kratke prodaje.** V tem modelu predstavljamo delovanje trga na podoben način kot v prejšnjem modelu, s to razliko, da je dovoljena kratka prodaja. Predpostavljamo, da si je mogoče delnico izposoditi enostavno in brez stroškov. Izposoditi se da tudi delnico, ki je že bila kratko prodana. To pomeni, da vsi investitorji, ki delnico vrednotijo pod ceno na trgu, delnico kratko prodajo. Zaradi kratkih prodaj se ponudba delnice povečuje vse do tedaj, dokler niso vsi investitorji bodisi delnico kratko prodali, bodisi imajo delnico v lasti (če je število $n-d$ liho, en investitor nima v lasti delnice, niti je kratko ne proda). Ceno delnice torej določi investitor, ki vrednoti delnico približno na mediano vseh vrednotenj (odvisno od sodosti ali lihosti števila $n-d$) tistih investitorjev, ki nimajo delnice, in tistih, ki imajo delnico, ki je že bila kratko prodana. Na sliki 4 je prikazan primer prehajanja delnic na trgu, ko je na trgu 7 investitorjev in 2 delnici.

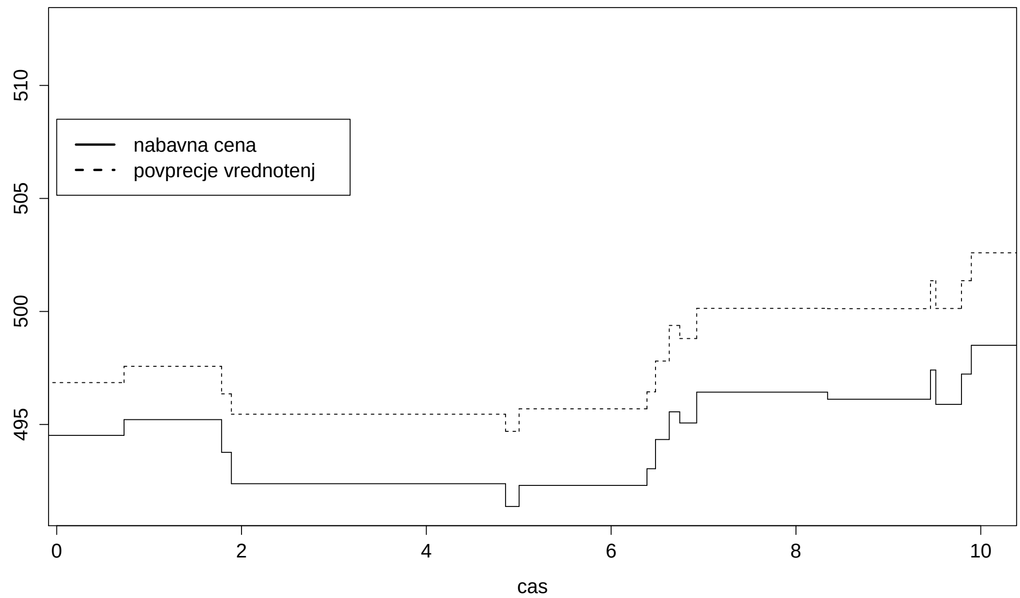


SLIKA 4. Primer prehajanja delnic v modelu trga brez omejitve kratke prodaje.

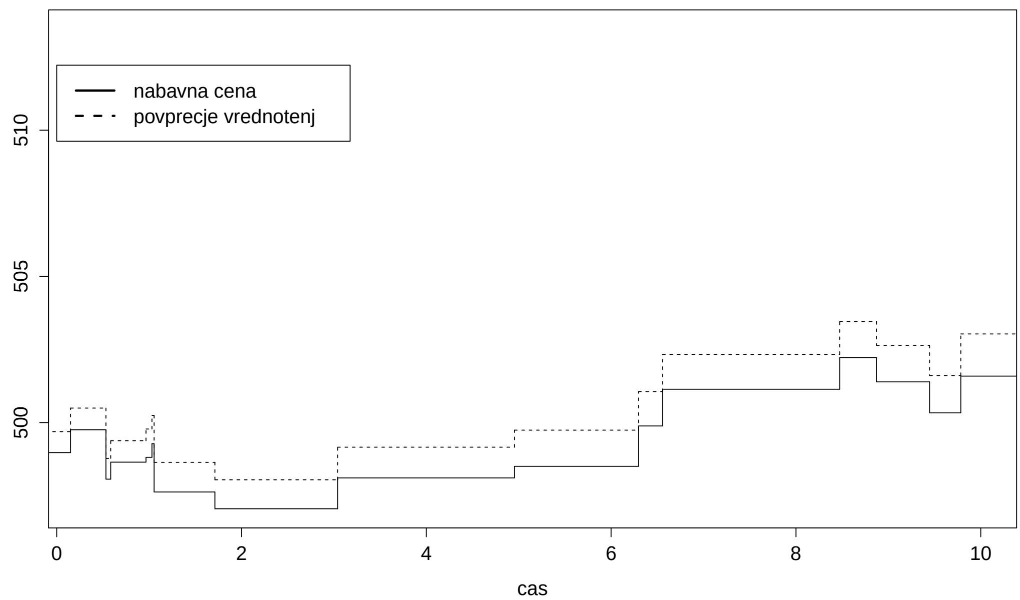
Model 2. Poenostavljen model trga brez omejitve kratke prodaje določajo naslednje omejitve:

(1) Investitorji ocenjujejo vrednost podjetja.
(2) Posamezen investitor se ne moti sistematično.
(3) Investitorji ne izstopajo iz vrednotenja in trgovanja z delnico, novi pa ne vstopajo.
(4) Investitorji niso omejeni z denarnimi sredstvi.
(5) Vsak investitor lahko kupi samo eno delnico.
(6) Kratka prodaja je dovoljena ter izvedljiva brez stroškov. Možna je tudi kratka prodaja delnice, ki je že bila kratko prodana.
(7) Investitorjev je dovolj (vsaj toliko kot delnic).
(8) Investitor delnico proda, ko jo lahko proda za več, kot jo vrednoti sam.
(9) Investitor delnico kupi, ko jo lahko kupi za manj, kot jo vrednoti sam.

6.2.1. *Simulacija poenostavljenega modela brez omejitve kratke prodaje.* Podobno simulacijo kot za model trga z omejitvijo kratke prodaje lahko naredimo za model trga brez omejitve kratke prodaje. Edina razlika je, da se cena določi kot mediana vektorja $\widetilde{Vr(j)}$, kjer je $\widetilde{Vr(j)}$ vektor v $\mathbb{R}^{n-d}$, ki ima enake vrednosti kot Vr, iz katerega odstranimo d najvišjih vrednosti. Iz vektorja $\widetilde{Vr(j)}$ torej odstranimo vrednotenje tistih investitorjev, ki imajo v lasti delnico, ki jim ni bila kratko prodana.



Slika 5. Gibanje cene delnice modela brez omejitve kratke prodaje: 1000 investitorjev, 500 delnic.



Slika 6. Gibanje cene delnice modela brez omejitve kratke prodaje: 3000 investitorjev, 500 delnic.

Na slikah 5 in 6 sta prikazani simulaciji za model trga brez omejitve kratke prodaje. Na sliki 5 vidimo, da je cena pod povprečnim vrednotenjem, vendar pa za razliko od modela trga z omejitvijo kratke prodaje, na sliki 6 vidimo, da se s povečanjem števila investitorjev cena na trgu približuje povprečni vrednosti vrednotenja.

7. Zaključek

Ključnega pomena za razvoj modelov finančnih trgov je bila v dobršnem delu 20. stoletja predpostavka, da je trg racionalen. Hipoteza učinkovitosti finančnih trgov, neobstoj arbitraže, uporabni modeli vrednotenja izvedenih finančnih inštrumentov, neto sedanja vrednost in drugi dosežki na področju razumevanja, obvladovanja in napovedovanja dogodkov na finančnih trgih izhajajo iz ideje, da finančni trgi dobro opravljajo naloge distribucije finančnih sredstev.

Glavna lastnost racionalnih finančnih trgov je, da na racionalnem trgu ni mogoče doseči višjih donosov od tržnih, saj investitorji vsako priložnost za netvegan zaslužek izkoristijo, to pa pomeni, da priložnost za netvegan zaslužek izgine. Vprašanje, ki ga raziskujeta model 1 in model 2, je, če so cene na finančnem trgu, na katerem so vse priložnosti za netvegan zaslužek izkoriščene, blizu prave vrednosti finančnih inštrumentov. Model z omejitvijo kratke prodaje je pokazal, da ceno na finančnem trgu, kjer je kratka prodaja omejena, določa bolj optimističen del investitorjev, kar pomeni, da bi lahko bile cene na takih finančnih trgih previsoke. Model brez omejitve kratke prodaje je pokazal, da lahko s pomočjo kratke prodaje, svoje vrednotenje v ceno na finančnem trgu vključijo tudi manj optimistični investitorji, kar lahko ceno na trgu približa pravi vrednosti finančnega inštrumenta.

Literatura

[1] L. J. Savage, *The foundation of statistics*, Wiley publications in statistics, New York: J. Wiley and Sons, London: Chapman & Hall, 1954

[2] E. Karni, *Savages' subjective expected utility model*, The New Palgrave Dictionary of Economics (2008)

[3] M. Rubinstein, *Rational markets: yes or no? The Affirmitive Case*, Financial Analysts Jurnal **57** (2001) 15–29.

[4] I. Niiniluoto, *A note on fine and tight qualitative probabilities*, Ann. Math. Statist. **43** (1972), 1581–1591.

[5] M. Maloney in H. Mulherin, *The Stock Price Reaction to the Challenger Crash*, (1998).

[6] J. Courtault, Y. Kabanov, B. Bru . . . , *Louis Bachelier on the Centenary of "Théorie de la Spéculation"*, Matematical Finance **10** (2000) 339–353.

[7] P. Slovic in A. Tversky, *Who accepts Savage's acioms?*, Behavioral Science **19** (1974) 368–373.

[8] J. Levin, *Choice under Unceraínty*, 2006.

[9] O. Lamont, *Short sale constraints and overpricing*, NBER Reporter **Winter** (2005) 16–18.

[10] A. Brav, J. Heaton in A. Rosenberg, *The Rational-Behavioral Debate in Financial Economics*, Journal of Economic Methodology **11** (2004) 393–409.

[11] J. Fox, *The myth of the rational market*, HarperCollins Publishers, 2009

[12] C. Mayo-Wilson, *Notes on Savages Foundation of statistics*, 2013.

[13] *Efficient-market hypothesis*, [ogled 15. 8. 2013], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Efficient-market_hypothesis`.

[14] S. Dolenc, *Modrost množic*, verzija 1. 24. 2011, [ogled 20. 8. 2013], dostopno na `http://www.kvarkadabra.net/article.php/Modrost-mnozic`.

[15] *The Wisdom of crowds*, [ogled 20. 8. 2013], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/The_Wisdom_of_Crowds`.

[16] L. Bachelier, *Theory of Speculation*, Princeton University Press, 2006.

[17] L. Bachelier, *Le Jeu, la Chance, et le Hasard*, Ernest Flammarion , Pariz, 1914

[18] J. Surowiecki, *The Wisdom of Crowds*, Anchor, 2005.

[19] M. Jensen, *The preformance of mutual funds in the period 1945-1964*, The Journal of Finance **23** (1968) 389–416.

[20] M. Jensen, *The preformance of mutual funds in the period 1945-1964*, The Journal of Business **42** (1969) 167–247.