UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Sabina Umek

Davkoplačevalčeva prodajna opcija in modeliranje vrednosti podjetja

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr.Tomaž Košir

Ljubljana, 2013

Kazalo

Davkoplačevalčeva prodajna opcija in modeliranje vrednosti podjetja

Povzetek

Na finančnem trgu se vsakodnevno sklepajo finančne pogodbe z različno stopnjo tveganja. Finančna podjetja lahko veliko zaslužijo predvsem s tveganimi posli a problem nastane, če posel propade. Takrat mora podjetje kriti svoje izgube. Če velika finančna institucija ne more kriti svojih izgub, pomoč išče pri državi, le-ta pa jih skoraj vedno pokrije. Država krije izgube z državnim proračunom oziroma z davkoplačevalčevim denarjem. V delu diplomskega seminarja sem se osredotočila na finančne instrumente, ki ocenijo tveganost posla. Glede na tveganost mora imeti podjetje v rezervi toliko kapitala, da lahko z njim krije možne izgube. S tem preprečimo, da izgube podjetja padejo v breme državi.

Taxpayer put option and modelling of firm's value

Abstract

On the financial market the contracts are daily made which have a different risk level. Financial firms can earn a lot, especially in the business that are risky, but a problem accours if the business fails. At that time the company needs to cover its losses. If a large financial institution is unable to cover its losses, then they are looking for a help from the state, which almost always covers the losses. State pays the loss from the state budget with taxpayers money. In my Bachelor Thessis I focused on financial instruments that evaluate the risk of the business. Company must have enough reserve capital to cover potential losses. Appropriate level of the reserve capital prevents that the loss of the company fall on the state.

Math. Subj. Class. (2010): 91G20

Ključne besede: Binomski model, opcije, Black-Scholesova formula, Mertonov model, davkoplačevalčeva prodajna opcija

Keywords: Binomial model, option, Black–Scholes formula, Merton model, taxpayer put option

Poglavje 1

Uvod

1.1 Opis diplomskega seminarja

Na finančnem trgu velike finančne inštitucije brez ustrezne strukture kapitala velikokrat izkoristijo pomankljivosti delovanja finančnega sistema in realnega gospodarskega stanja. Ta ugotovitev je pripeljala do situacije, da država velikim udeležencem na trgu vedno pomaga pred propadom.

Cilj diplomskega seminarja je opisati predloge Madana in Erbeleina za izboljšanje urediteve in nadzora nad vsemi sistemsko pomembnimi finančnimi inštitucijami, inštrumenti ter trgi, ki bodo vključevali sistemsko pomembno varovanje pred tveganji. Analiza delovanja velikih finančnih ištitucij zanima predvsem druge udeležence na trgu, kot so investicijske družbe tveganega kapitala, le- ti pa želijo trgovati podobno kot velike finančne inštitucije. Novost analize je, da pokaže, tako imenovane posledice neomejenega dostopa do sredstev, v nadaljevanju neomejene odgovornosti.

Študija temelji na Mertonovi analizi, ki vključuje naključna sredstva in omejeno odgovornost, katerih posledica je ta, da v najslabšem primeru, ko vrednost premoženja pade na nič, to nima posledic za ostalo gospodarstvo. V diplomskem seminarju bomo predstavili model s predpodstavko, da se lahko velika finančna podjetja neomejeno zadolžijo in nimajo omejenih obveznosti. Torej, tudi če dolg in premoženje zapišemo kot ničelna, nam še vedno ostaja nek neporavnan dolg, drugače povedano če izpraznimo vse svoje rezerve še vedno ostane za poplačati nek dolg, ki pa ga krije država oziroma davkoplačevalci. Na ta način gre sedaj za prenos sredstev od posojilodajalca, torej tistega, ki nam omogoča neomejen dostop do sredstev do dolžnika, tistega kateremu smo dolžni.

V diplomski nalogi se bomo osredotočili na dvoje:

- na predstavitev binomskega in Mertonovega modela ter
- na vrednotenje davkoplačevalčeve prodajne opcije.

Vrednosti bomo ocenili, glede na porazdelitev sredstev in odgovornosti iz tržnih informacij. Iz informacij bomo dobili porazdelitev in s to porazdelitvijo bomo določili ceno in rezervni kapital. Porazdelitev izhaja iz podatkov o opcijah na delnico ob posplošitvi Mertonovega modela, da se upošteva neomejena odgovornost in ocenitev rezultata o sestavljeni opciji modela. Večina teh testov vrednotenja je narejena za JPMorgan (JPM), Morgan Stanley (MS), Goldman Sachs (GS), Bank of America (BAC), Wells Fargo (WFC) and Citigroup (C) z namenom, da najdemo vrednost davkoplačevalčeve prodajne opcije in velikost kapitalskih rezerev.

Kot prvo bomo predstavili binomski model ter Black-Scholesovo formulo za izračun premije evropske nakupne in prodajne opcije. Temu sledi predstavitev Mertonovega modela. Ta v svojem modelu dodela osnovni model vrednotenja opcij avtorjev Blacka in Scholesa in ga prenese na vrednotenje sredstev podjetja, s katerimi izračuna verjetnost neplačila dolga dolžnika.

Kot drugo bomo predstavili kapitalski model kot opcijo na razliko vrednosti kateregа osnova bo Mertonov model.

Za konec pa preprost model, kjer bo predstavljen izračun za davkoplčevalčevo prodajno opcijo.

1.2 Kaj so opcije?

Da bodo termini v nadaljevanju jasni, bomo na začetku opisali kaj so to opcije.

Opcija (angl. option) je izvedeni finančni inštrument. Nanaša se na neko osnovno premoženje (delnice, blago...). Je pogodba, podobna terminski pogodbi, s to bistveno razliko, da ima nosilec (kupec) pogodbe pravico odločiti se, ali bo nakup/prodaja osnovnega premoženja izvršena.

Izdajatelj in kupec opcije se dogovorita za to, da bo v času zapadlosti T lahko kupec opcije kupil ali prodal osnovno premoženje po izvršilni ceni K. Za to pravico, ki ni nujno dolžnost, mora kupec opcije (v času $t = 0$) plačati premijo.

Če opcija daje kupcu pravico do nakupa osnovnega premoženja rečemo, da je nakupna opcija. Če daje pravico do prodaje osnovnega premoženja je to prodajna opcija.

Opciji, ki daje pravico nakupa (prodaje) samo ob času T, rečemo evropska (nakupna ali prodajna) opcija. Če opcija daje kupcu pravico do izvršitve kadarkoli v časovnem intervalu $(0, T]$ je to ameriška opcija.

Kupcu se opcijo splača izvršiti (torej uporabiti pravico, ki mu jo opcijska pogodba daje) samo v primeru, da je:

- $K > S_t$ za prodajno opcijo,
- $K < S_t$ za nakupno opcijo,

kjer je S_t vrednost osnovnega premoženja v času $t \in [0, T]$.

Analizirajmo vrednost evropske in ameriške nakupne in prodajne opcije. S $t = 0$ označimo čas izdaje opcije, s $t = T$ pa čas zapadlosti, S_t je cena osnovnega premoženja v času $t \in [0, T]$. S K označimo izvršilno ceno. Vrednost opcije za nosilca opcije je enaka razliki med ceno osnovnega premoženja v času izvršitve in izvršilno ceno, če je zanj pozitivna. Sicer je vrednost opcije enaka 0. S C_T označimo vrednost nakupne opcije ob zapadlosti in P_T vrednost prodajne opcije ob zapadlosti. Imetnik opcije lahko ob vsakem času $t \in (0, T)$ bodisi ne naredi nič, bodisi opcijo proda ali pa, samo v primeru ameriške opcije, izvrši opcijo. V času $t = T$ pa lahko ne naredi nič ali pa izvrši opcijo. Izplačilo opcije ob času T je potem enako

$$C_T = max\{S_T - K, 0\}$$

in

$$P_T = max\{K - S_T, 0\}.$$

Naj bo:

- c_t^a premija za nakupno in p_t^a premija za prodajno ameriško opcijo
- c_t^e premija za nakupno in p_t^e premija za prodajno evropsko opcijo.

Veljati mora:

- $c_t^a \geq c_t^e$
- $p_t^a \geq p_t^e$.

Za nakupne opcije veljajo naslednje neenakosti:

$$max\{S_T - KD(t,T), 0\} \leq c_t^e \leq c_t^a \leq S_t.$$

Za evropsko prodajno opcijo velja:

$$max\{KD(t,T) - S_T, 0\} \leq p_t^e \leq KD(t,T).$$

Za ameriško prodajno opcijo velja:

$$max\{K - S_T, 0\} \leq p_t^a \leq K.$$

Pariteta evropske nakupne in prodajne opcije:

$$S_t + p_t^e = c_t^e + KD(t,T).$$

Pariteta ameriške nakupne in prodajne opcije:

$$c_t^a + KD(t,T) \leq S_t + p_t^a \leq c_t^a + K.$$

Poglavje 2

Binomski model

Binomski model imenujemo tudi CRR- model, ker so ga prvi opisali Cox, Ross in Rubinstein.

Imamo N časovnih obdobij in čas t zavzame vrednosti $t = 0, 1, 2, ..., N$. Privzeli bomo, da imamo v vsakem obdobju, od časa $t-1$ do časa t, dva možna razvoja ekonomije: dobrega in slabega. Verjetnost dobrega razvoja ekonomije je enaka p, kjer je $p \in (0,1)$. Verjetnost slabega razvoja ekonomije je enaka $1-p$.

Razvoj ekonomije skozi vsa obdobja lahko opišemo z N ponovitvami neodvisnih Bernoullijevih poskusov z verjetnostim prostorom $\Omega = [0,1]$ in verjetnostjo $P(0) = 1-p$, $P(1) = p$. Pri tem 1 predstavlja dober razvoj enkonomije in 0 slab razvoj ekonomije. Verjetnostni prostor vseh možnih razvojev ekonomije je dan z $\Omega = \Omega_0^N$. Razvoj ekonomije je dan z N-terico $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$, kjer je ω_t razvoj ekonomije od časa $t-1$ do časa t. Za vsak $t = 1, 2, \ldots, N$ označimo $Z_t(\omega) = \omega_t$ projekcijo na t-to komponento in z $D_t(\omega) = \sum_{j=1}^{t} \omega_j$ vsoto prvih t projekcij. Za vse t so D_t in Z_t slučajne spremenljivke na Ω. D_t šteje, koliko je bilo dobrih razvojev ekonomije do časa t. Slučajna spremenljivka D_t ima Bernoullijevo porazdelitev na množici $0, 1, 2, \ldots, t$: $P(D_t = k) = \binom{t}{k} p^k (1-p)^{t-k}$. Opazimo še, da so slučajne spremenljivke $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ neodvisne.

Informacijaska struktura je podana s particijami $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ množice ω. V času t poznamo razvoj ekonomije do t. Ta razvoj je podan s t-terico ničel in enic:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_t \end{pmatrix},$$

kjer a_j pove, kakšen je bil razvoj ekonomije od časa $j-1$ do j: $a_j = 1$ pomeni dober razvoj in $a_j = 0$ slab razvoj ekonomije. Za vsak a označimo $A_{a,t}$ dogodek $[Z_1 = a_1, \ldots, Z_t = a_t]$.

V modelu privzemimo, da obstaja bančni račun z deterministično, od časa neodvisno, obrestno mero R. Vrednostni proces bančnega računa je podan z:

$$B_t(\omega) = (1+R)^t$$

za vse $\omega \in \Omega$. Tvegan vrednostni papir (npr. delnica) pa ima vrednostni proces podan s :

$$S_t(\omega) = S_0(1+g)^{D_t(\omega)}(1+b)^{t-D_t(\omega)}. \tag{2.1}$$

Pri tem je $S_0 > 0$ začetna cena in je $-1 < b < g$, kjer je g stopnja rasti vrednosti delnice v primeru dobrega razvoja ekonomije in b stopnja rasti/ padca vrednosti delnice v primeru slabega razvoja ekonomije. V tem modelu privzemimo, da se g in b ne spreminjata s časom.
Iz informacij slučajnih spremenljivk D_t in Z_t dobimo še rekurzivno formulo:

$$S_t(\omega) = S_{t-1}(1+g)^{Z_t(\omega)}(1+b)^{1-Z_t(\omega)} \tag{2.2}$$

za $t = 1, 2, \ldots, N$. Stopnja dobička ali izgube je slučajna spremenljivka $R_t : \Omega \to \mathbb{R}$ dana z:

$$R_t(\omega) = \frac{S_t(\omega)}{S_{t-1}(\omega)} = (1+g)^{Z_t(\omega)}(1+b)^{1-Z_t(\omega)}.$$

Ker je R_t funkcija slučajne spremenljivke Z_t in so slučajne spremenljivke $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ neodvisne, so tudi slučajne spremenljivke $R_1, R_2, \ldots, R_N$ neodvisne.

V našem enostavnem modelu bomo za slučajne spremenljivke predpostavili, da velja lastnost: če je X merljiva glede na $\mathcal{F}_t$, potem obstaja taka funkcija $F : \mathbb{R}^t \to \mathbb{R}$, da je

$$X(\omega) = F(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_t(\omega))$$

za vse $\omega \in \Omega$.

Za numerar vzamemo bančni račun. Potem sta diskontirana vrednostna procesa za bančni račun in za delnico enaka:

$$\widetilde{B}_t = \frac{B_t}{B_t} = 1$$

$$\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = \frac{S_t}{(1+R)^t}$$

za $t = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Trditev 2.0.1. Če je $b < R < g$, potem obstaja ekvivalentna martingalska verjetnost Q dana z

$$Q(Z_{t+1} = \omega | A) = q^{\omega}(1-q)^{1-\omega}$$

za vsak datum iz $\mathcal{F}_t$, $\omega = \{0, 1\}$, $t = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Potem je

$$Q(\omega) = q^{D_N(\omega)}(1-q)^{N-D_N(\omega)}$$

za vsak $\omega \in \Omega$.

Izrek 2.0.2. *Binomski model je poln in brez arbitraže natanko tedaj, ko je $b < R < g$. Ekvivalentna martingalska verjetnost je ena sama in je dana z $Q(\omega) = q^{D_N(\omega)}(1-q)^{N-D_N(\omega)}$, kjer je $q = \frac{R-b}{g-b}$.*

2.1 Vrednotenje v binomskem modelu

Privzeli bomo, da je $b < R < g$. Potem velja, da je vsaka pogojna terjatev X z zapadlostjo T dosegljiva, torej obstaja strategija samofinanciranja Φ za katero je $V_T(\Phi) = X_T$. Zanima nas vrednost cenovnega funkcionala $\Pi_0(X_T)$ za katerega velja, da je enak začetni vrednosti portfelja $V_0(\Phi)$ v času $t = 0$. Velja:

$$\Pi_0(X_T) = V_0(\Phi) = E^Q(\widetilde{X}_T) = E^Q(\frac{X}{(1+R)^T}) = \frac{1}{(1+R)^T}E^Q(X) = \\ = \frac{1}{(1+R)^T}\sum_{\omega\in\Omega} X_T(\omega)q^{D_T(\omega)}(1-q)^{T-D_T(\omega)}.$$

Za premijo pogojne terjatve X_t v času $t \in [0, T]$ velja enačba:

$$\Pi_t(X_T) = V_t(\Phi) = E^Q(\frac{B_t X_T}{B_T}|\mathcal{F}_t) = \frac{1}{(1+R)^{T-t}}E^Q(X_T|\mathcal{F}_t).$$

Sedaj obravnavamo poseben primer, ko je pogojna terjatev $X_T = f(S_T)$ za neko funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki je odvisna samo od vrednosti delnice v času T (na primer X_T predstavlja izplačila evropske opcije).
Ker je $S_T = S_0(1+g)^{D_T(\omega)}(1+b)^{T-D_T(\omega)}$ je

$$X_T = f(S_T) = h_f(S_0, D_N)$$

za

$$h_f(x,l) = f(x(1+g)^l(1+b)^{T-l}).$$

D_T dobimo tako, da ga izrazimo iz enačbe $S_T = S_0(1+g)^{D_T(\omega)}(1+b)^{T-D_T(\omega)}$:

$$\begin{aligned}
S_T &= S_0(1+g)^{D_T(\omega)}(1+b)^{T-D_T(\omega)}\\
lnS_T &= lnS_0 + D_T ln(1+g) + (T-D_T)ln(1+b)\\
D_T &= \frac{lnS_T - lnS_0 - Tln(1+b)}{ln(1+g) - ln(1+b)}.
\end{aligned}$$

Slučajna spremenljivka D_T je porazdeljena Bernullijevo s parametroma T in l: $D_T \sim B(T,l)$. Njena gostota je enaka: $Q(D_T = l) = \binom{T}{l} q^l (1-q)^{T-l}$.
Če je $X_T = f(S_T)$, lahko premijo pogojne terjatve X_T zapišemo kot:

$$\Pi_0(X_T) = \frac{1}{(1+R)^T} \sum_{l=0}^{T} \binom{T}{l} q^l (1-q)^{T-l} h_f(S_0, l).$$

Za $t = 0,1,2,\ldots,T$ in za vse $\omega \in \Omega$ pa je premija $\Pi_t(X_t)$ v času t enaka:

$$\Pi_t(X_t)(\omega) = E^Q(\frac{X_T}{(1+R)^{T-t}}|\mathcal{F}_t) = \sum_{l=0}^{T-t} \binom{T-l}{l} q^l (1-q)^{T-t-l} h_f(S_0, l+D_t(\omega)).$$

Binomski model v primeru $X_T = f(S_T)$ lahko poenostavimo in namesto binomskega drevesa uporabimo binomsko mrežo. Končna vozlišča so predstavljena s števili $0,1,2,\ldots,T$ glede na vrednost D_T. Na nivoju t imamo $t+1$ vozlišč glede na vrednost D_t.
Za evropsko nakupno opcijo so izplačila v času T enaka:

$$X_T = max\{S_T - K, 0\},$$

kjer je K izvršilna cena in T čas dospetja. Izplačila X_T so pozitivna, če velja $S_T > K$. Torej:

$$\begin{aligned}
S_T &= S_0(1+g)^{D_T}(1+b)^{T-D_T} > K\\
lnS_0 &+ D_T ln(1+g) + (T-D_T)ln(1+b) > lnK\\
D_T &> \frac{lnK - lnS_0 - Tln(1+b)}{ln(1+g) - ln(1+b)}.
\end{aligned}$$

Za evropsko nakupno opcijo velja $X_T > 0$ natanko tedaj, ko je $D_T \geq m(K)$, kjer je m(K) najmanjše naravno število.

Izrek 2.1.1. *Premija za evropsko nakupno opcijo z izvršilno ceno K v binomskem modelu je enaka*

$$\Pi_0(X_T^C) =^* \frac{S_0}{(1+R)^T} \sum_{l=m(K)}^{T} \binom{T}{l} q^l (1-q)^{T-l} (1+g)^l (1+b)^{T-l} -$$

$$- \frac{K}{(1+R)^T} \sum_{l=m(K)}^{T} \binom{T}{l} q^l (1-q)^{T-l}$$

$$*S_T - K = S_0(1+g)^{D_T}(1+b)^{T-D_T} - K$$

Premijo za evropsko prodajno opcijo dobimo iz paritetne enačbe.

2.2 Black - Scholesova formula

Interval $[0, T]$ razdelimo na N enakih podintervalov in predpostavimo, da je trgovanje možno ob časih $0, \frac{T}{N}, \frac{2T}{N}, \ldots, \frac{(N-1)T}{N}, T$ in razvoj tega modeliramo z binomskim modelom z N obdobji.

Čas t zavzame vse vrednosti $\frac{iT}{N}$ za $i = 0, 1, 2, \ldots, N$. Slučajni spremenljivki D_t in Z_t bomo sedaj pisali kot $D_{N,t}$ in $Z_{N,t}$, ker sta odvisni od N. Netvegani vrednostni papir zavzame vrednosti:

$$B_{N,t} = (1 + R_N)^t.$$

Tvegani vrednostni papir pa zavzame vrednosti:

$$S_{N,t} = S_0(1 + g_N)^{D_{N,t}}(1 + b_N)^{t-D_{N,t}}.$$

Naravna vejetnost je $p_N \in (0, 1)$. Z R določimo moč obresti, tako da velja: $(1 + R_N)^N = e^{TR}$ oziroma $1 + R_N = e^{\frac{T}{N}R}$. Tedaj definiramo slučajno spremenljivko H_N na verjetnostnem prostoru Ω_N, za katero velja:

$$\frac{S_{N,N}}{S_0} = e^{H_N}$$

oziroma

$$H_N = lnS_{N,N} - lnS_0.$$

$D_{N,t}$ šteje dobra obdobja v modelu z N obdobji do časa t. $D_{N,N}$ ima binomsko porazdelitev $B \sim (N, p_N)$, kjer je p_N naravna verjetnost dobrega razvoja ekonomije. Glede na naravno verjetnost velja : $E_{p_N}(D_{N,N}) = Np_N$. Ker je

$$\begin{aligned} H_N &= lnS_{N,N} - lnS_0 = \\ &= lnS_0 + D_{N,N}ln(1+g_N) + (N - D_{N,N})ln(1+b_N) - lnS_0 = \\ &= D_{N,N}ln(1+g_N) + (N - D_{N,N})ln(1+b_N). \end{aligned}$$

Potem sta pričakovana vrednost in varianca H_N glede na verjetnost p_N enaka:

$$\begin{aligned} E_{p_N}(H_N) &= Np_N ln(\frac{1+g_N}{1+b_N}) + Nln(1+b_N) = \\ &= Np_N ln(1+g_N) - Np_N ln(1+b_N) + Nln(1+b_N) = \\ &= Np_N ln(1+g_N) + Nln(1+b_N)(1-p_N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var_{p_N}(H_N) &= Np_N(1-p_N) \\ &\Rightarrow Var_{p_N}(H_N) = Np_N(1-p_N)(ln(1+g_N) - ln(1+b_N))^2. \end{aligned}$$

Iz zgodovinskih podatkov za gibanje vrednosti delnice poiščemo μ in σ^2 kot vzorčno povprečje in vzorčno varianco spremenljivke $\frac{1}{T}H_N$:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{T}E_{p_N}(H_N) = \frac{1}{T}E_{p_N}(ln\frac{S_{N,N}}{S_0}) \\ \sigma^2 &= \frac{1}{T}Var_{p_N}(H_N) = \frac{1}{T}Var_{p_N}(ln\frac{S_{N,N}}{S_0}) \end{aligned}$$

Izenačimo izraze za μ ter $E_{p_N}(H_N)$ in σ^2 ter $Var_{p_N}(H_N)$:

$$p_N(1+g_N) + (1-p_N)ln(1+b_N) = \frac{N}{T}\mu \tag{2.3}$$

$$p_N(1-p_N)(ln(1+g_N) - ln(1+b_N))^2 = \frac{T}{N}\sigma^2. \tag{2.4}$$

Predpostavimo še, da je vrednost S_N neodvisna od zaporedja dobrih in slabih razvojev ekonomije, pač pa samo od števila dobrih razvojev. Zaporedje dobrega in slabega razvoja ne spremeni vrednosti:

$$(1+g_N)(1+b_N) = 1 \Rightarrow ln(1+b_N) = -ln(1+g_N). \tag{2.5}$$

Iz enačb (2.3), (2.4), (2.5) določimo p_N, g_N in b_N:

$$\begin{aligned} ln(1+g_N) &= \sqrt{\frac{T}{N}\sigma^2 + \frac{T^2}{N^2}\mu^2} = -(ln(1+b_N) \\ p_N &= \frac{1}{2} + \frac{\mu}{2\sigma\sqrt{\frac{N}{T} + (\frac{N}{T})^2}}. \end{aligned}$$

Za velik N uporabimo Taylorjevo aproksimacijo in vzamemo

$$g_N = e^{\sqrt{\frac{T}{N}\sigma^2}} - 1, b_N = e^{-\sqrt{\frac{T}{N}\sigma^2}} - 1$$
$$p_N = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{N}}.$$

Vzamemo še:

$$R_N = e^{\frac{T}{N}R} - 1.$$

Z uporabo zgornjih aproksimacij izračunamo matematično upanje in varianco za H_N glede na ekvivalentno martingalsko verjetnost Q_N. Velja:

- $D_{N,N} \sim B(N, q_N)$, kjer je $q_N = \frac{R_N - b_N}{g_N - b_N} \approx \frac{e^{\frac{T}{N}R} - e^{-\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma}}{e^{\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma} - e^{-\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma}}$
- $E_{Q_N}(D_{N,N}) = Nq_N$
- $ln(1 + b_N) = \sqrt{\frac{T}{N}}\sigma$
- $D_{Q_N}(D_{N,N}) = Nq_N(1 - q_N)$.

Torej, matematično upanje je enako:

$$\begin{aligned} E_{Q_N}(H_{N,N}) &= E_{Q_N}(D_{N,N})(ln(1 + g_N) - ln(1 + b_N)) + Nln(1 + b_N) = \\ &= N[(q_N ln(1 + g_N) - q_N ln(1 + b_N)) + ln(1 + b_N)] \approx \\ &\approx \frac{2e^{\frac{T}{N}R} - e^{\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma} - e^{-\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma}}{\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma(e^{\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma} - e^{-\sqrt{\frac{T}{N}}\sigma})}\sigma^2 T. \end{aligned}$$

Sedaj poiščemo limiti za matematično upanje in varianco, saj bi radi poiskali limito CRR modela, ko gre $N \to \infty$:

$$\lim_{N\to\infty} E_{Q_N}(H_N) = RT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$$
$$\lim_{N\to\infty} Var_{Q_N}(H_N) = T\sigma^2.$$

Izrek 2.2.1. *Zaporedje slučajnih spremenljivk H_N konvergira po zakonu k normalni porazdelitvi $N(RT - \frac{1}{2}\sigma^2 T, T\sigma^2)$.*

Limito vrednosti cenovnega funkcionala za dano pogojno terjatev izračunamo s pomočjo informacije o kovergenci H_N in z uporabo zveze $S_{N,N} = S_0 e^{H_N}$. Za primer si oglejmo evrosko nakupno in prodajno opcijo. Pripadajoči pogojni terjatvi, ki predstavljata izplačila z dospetjem T sta:

$$X_c = max\{S_T - K, 0\} \text{ in}$$
$$X_p = max\{K - S_T, 0\}.$$

V binomskem modelu z N obdobji imamo

$$\begin{aligned}\Pi_0^N(X_p) &= \frac{1}{(1+R_N)^N} E_{Q_N}(max\{K - S_{N,N}, 0\}) = \\ &= e^{-RT} E_{Q_N}(max\{K - S_0 e^{H_N}, 0\}).\end{aligned}$$

Izrek 2.2.2 (**Black-Scholesova formula**). *Premija za evropsko prodajno opcijo je v limiti, ko $N \to \infty$ enaka:*

$$\Pi_0(X_p) = \lim_{N\to\infty} \Pi_0^N(X_p) = Ke^{-RT}\Phi(-d_2) - S_0\Phi(-d_1), \tag{2.6}$$

kjer je

$$d_1 = \frac{ln(\frac{S_0}{K}e^{RT}) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

in

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

je porazdelitvena funkcija standardne normalne porazdelitve. Za ceno evropske nakupne opcije imamo

$$\Pi_0(X_c) = \lim_{N\to\infty} \Pi_0^N(X_c) = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-RT}\Phi(d_2).$$

Poglavje 3

Mertonov model

Mertonov model (1973, 7974, 1977) se uvršča med klasične strukturne modele kreditnega tveganja, ki se z drugo besedo imenujejo opcijski modeli. Merton je v svojem delu dodelal osnovni model vrednotenja opcij avtorjev Blacka in Scholeasa in ga prenesel na podjetje oziroma natančneje na vrednotenje sredstev podjetja in za izračun verjetnosti neplačila dolga oziroma propada podjetja. Danes ga banke uporabljajo v modificiranih, nadgrajenih oblikah in služi kot temelj mnogim modernim, sodobnim modelom ocenjevanja kreditnih tveganj.

Osnovni namen modela je izračunati verjetnost neplačila dolga dolžnika. Mertonov model s pomočjo uporabe opcijske teorije pri napovedi propada podjetja kreditno tveganje meri s pomočjo uporabe tržnih cen. Merton propad napove kot trenutek, ko je vrednost (sredstev) podjetja nižja od vrednosti dolga podjetja. Pri tem vrednost podjetja opredeli kot vsoto lastniških deležev kapitala in dolga. Ob uvedbi opcijske teorije kapital opredeli kot nakupno opcijo in dolg kot prodajno opcijo.

Merton model zastavi kot nakupno opcijo na sredstva podjetja, z dnevom zapadlosti T in z izvršilno ceno enako višini dolga ob dnevu zapadlosti. Propad podjetja se razume kot stanje, ko ob dnevu dospelosti nakupne opcije tržna vrednost sredstev podjetja pade pod knjigovodsko vrednost dolga. Doba odplačila dolga oziroma čas do zapadlosti T je za stopnjo tveganosti dolžnika zelo pomemben. Daljša kot je doba odplačila dolga, večja je verjetnost neplačila oziroma stečaja podjetja.

3.1 Predstavitev Mertonovega modela

V modelu bomo predstavili kapital kot nakupno opcijo, ki jo imajo imetniki kapitala na sredstva podjeta. Kapitalska struktura podjetja je enostavna. Sestavljena je iz ene vrste kapitala - delnice E, in dolga - brezkuponske obveznice L, ki zapade v času T. Izvršilna cena nakupne opcije je enaka L. Imetniki kapitala bodo nakupno opcijo izvršili, ko bo tržna vrednost sredstev ob zapadlosti višja od izvršilne cene opcije. Tako bo podjetje sredstva kupilo ceneje od njihove tržne vrednosti.

V nadaljevanju privzemimo, da je:

- $A \ldots$ tržna vrednost sredstev,
- $E \ldots$ tržna vrednost kapitala,
- $D \ldots$ tržna vrednost dolga,
- $T - t \ldots$ čas zapadlosti dolga in
- $r \ldots$ netvegana obrestna mera.

Vrednost sredstev in kapitala je v času t enaka:

$$A_t = E_t + D_t. \tag{3.1}$$

Vrednost kapitala v čau t je torej enaka:

$$E_t = A_t - D_t \tag{3.2}$$

in v času $t = T$:

$$E_T = max\{A_T - L, 0\}. \tag{3.3}$$

Vrednost delnice skozi nakupno opcijo na sredstva podjetja v času $0 \leq t \leq T$ je dana z Black - Scholesovo enačbo za cenitev nakupne opcije:

$$E_t = A_t \Phi(d_1) - Le^{-r(T-t)} \Phi(d_2) \tag{3.4}$$

kjer je

- Φ porazdelitvena funkcija standardizirane normalne spremenljivke
- $d_1 = \frac{ln(\frac{A_t}{L}) + (r + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A \sqrt{(T-t)}}$
- $d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T - t}$
- σ_A volativnost donosa sredstev.

Na dan zapadlosti dolga oziroma izvršitve evropske nakupne opcije na brezkuponsko obveznico mora podjetje v primeru:

- $A > L$ ... vrednost kapitala je večja od nič, zato podjetje izplača lastnike obveznic,
- $A < L$ ... lastniki ne izvršijo opcije in dokapitalizirajo podjetje ali pa imetniki obveznic prevzamejo podjetje.

Tržna vrednost dolga D v času t z netvegano obrestno mero r je

$$D_t = A_t\Phi(-d_1) + Le^{-r(T-t)}\Phi(d_2). \tag{3.5}$$

Povezanost med volatilnostjo sredstev σ_A in volatilnostjo kapitala σ_E je prikazana z enačbo:

$$\sigma_E = \frac{A_t}{E_t}\sigma_A. \tag{3.6}$$

Nelinearni sistem enačb (3.4) in (3.6) nam da vrednost slučajne spremenljivke A_t, tako dobimo tudi volativnost tržne vrednosti sredstev σ_A ter razdaljo do neplačila, predstavljeno z enačbo:

$$DD = \frac{ln(\frac{A_t}{L}) + (r + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A\sqrt{(T-t)}}. \tag{3.7}$$

Čas do neplačila predstavlja število standardnih odklonov od pričakovane vrednosti sredstev. Manjši ko je DD večja je verjetnost, da bo podjetje palačalo svoj dolg. Verjetnost neplačila dolga je enaka:

$$\begin{aligned}
PD_t &= A_t < L \\
&= [ln(A_t) + (\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t) + \sigma_A\sqrt{T-t}Z_t \leq ln(L)] \\
&= P[Z_t \leq -\frac{ln(\frac{A_t}{L}) + (\mu_A + \frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A\sqrt{(T-t)}}] \\
&= \int_{-\infty}^{-\frac{ln(\frac{A_t}{L})+(\mu_A+\frac{\sigma_A^2}{2})(T-t)}{\sigma_A\sqrt{(T-t)}}} \Phi(x)dx.
\end{aligned}$$

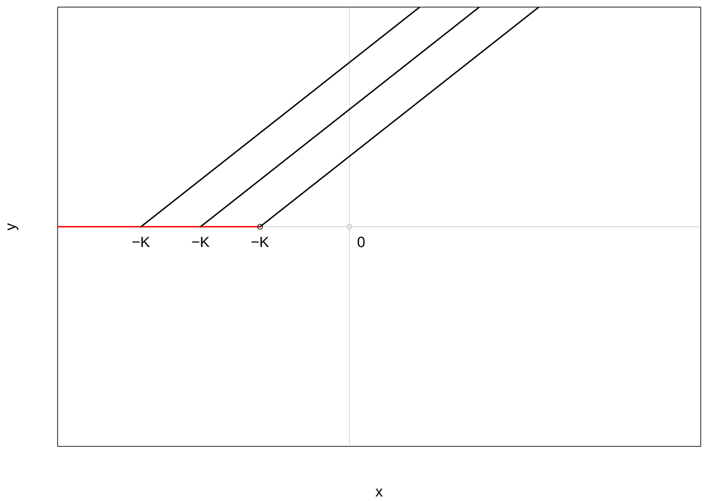
Kjer je Z_t slučajna spremenljivka porazdeljena $N(0,1)$, μ_A konstanten pričakovan donos.

3.2 Vrednost podjetja kot nakupna opcija

Podjetja imajo neomejeno odgovornost, zaradi katere se lahko neomejeno zadolžijo. V našem modelu bo vrednost kapitala podjetja predstavljena kot nakupna opcija, ki jo imajo imetniki kapitala na sredstva podjetja. Posebnost te opcije je, da ima negativno izvršilno ceno $-K$. Ko podjetje porabi vse svoje kapitalske rezerve mu država krije izgubo z davkoplačevalčevim denarjem ali s tako imenovano davkoplačevalčevo prodajno opcijo.

Torej za podjetje, ki išče pomoč pri državi in ta ga skoraj vedno financira rečemo, da ima nakupno opcijo, katera mu daje prosto pot, da jo na vsake toliko časa unovči in z njo pokrije izgube, kadar nastanejo, te izgube pa krijejo davkoplačevalci.

Iz grafa lahko vidimo, da več ko je denarja v blagajni, večja je negativna izvršilna cena.



Slika 3.1: Vrednost podjetja, kot nakupna opcija, katere izvršilna cena je negativna ($-K$).

Poglavje 4

Kapital kot opcija na razliko vrednosti

4.1 Neomejena odgovornost

Naše izhodišče je, da ima podjetje neomejen dostop do sredstev. Modeliramo dostop do trga izvedenih finančnih inštitucij, ki omogoča izpostavljenost tveganju in dovoli pozicijo celi vrsti potencialno neomejenih odgovornosti.

Del naših sredstev damo v kapitalske rezerve, ki so v denarju Z, tvegana sredstva A in vsa sredstva skupaj $A+Z$. Valuta tvegane komponente A skozi čas lahko niha .

Na strani odgovornosti imamo relativno omejeno komponento, to so tvegana sredstva. Tvegane obveznosti so naključne in njihova vrednost je lahko brez omejitve, kot so na primer izplačila za kreditno zaščito, prodajno opcijo ali kratko opcijo v varianci zamenjav, kratke pozicije na zalogo ...

Mertonovo enačbo z naključnimi sredstvi enačimo s kapitalom, katermu prištejemo dolg:

$$Z(t) + A(t) = E(t) + D(t) + L(t). \tag{4.1}$$

Kjer je:

- Z ... denar,
- A ... vrednost tveganih sredstva,
- E ... vrednost kapitala,
- D ... vrednost tveganega dolga in
- L ... tvegane obveznosti.

Omejena odgovornost nas pripelje, da vrednost tveganega dolga D zamenjamo z nominalno vrednostjo F in dobimo:

$$E(T) = (Z(T) + A(T) - L(T) - F)^+. \tag{4.2}$$

Medtem, ko imetniki dolga dobijo F v primeru, da nimamo dovolj sredstev pa dobijo to kar imamo, če je vse to manjše od F:

$$D(T) = min((Z(T) + A(T) - L(T))^+, F). \tag{4.3}$$

Z vključitvijo denarja, ki je neslučajen in ni tvegan, nastavimo $Z(t) = Z{*}e^{rt}$, kjer je r obrestna mera pri zveznem obrestovanju (moč obresti) ter dobimo:

$$E(T) = (Ze^{rT} + A(T) - L(T) - F)^+. \tag{4.4}$$

4.2 Davkoplačevalčeva prodajna opcija

Davkoplačevalčeva prodajna opcija je opcija, ko podjetje nastale izgube prenese na tržne udeležence, to pa so davkoplačevalci. V tem sklopu bomo opisali, da izgube podjetij krije država z državnim proračunom, kjer je cena dolga enakomerno porazdeljena po davkoplačevalcih. V primeru, ko država ne krije izgub pa pade izguba naravnost na posojilodajalca. Ne glede na to ali bo prišlo do državnega poplačila ali ne, vemo, da pride do denarnega toka, zato bomo temu rekli davkoplačevalčeva prodajna opcija ne glede na to v katerem primeru se dogaja.

Za dvkoplačevalčevo prodajno opcijo velja:

- Pripadajoče tveganje je stopnja tveganih sredstev in možnost neomejenega dostopa do sredstev. Tako izpostavljenost k tveganju imajo tisti udeleženci, ki nimajo kapitalskih rezerv, s katerimi bi dokazali možnost kritja denarnih izgub oziroma bi bili sposobni absorbirati nastale izgube.

- Premoženje delimo na denar, na denarne ustreznike kot so delnice, obveznice, hitro izplačljivi vrednostni papirji, razne menice in preostala sredstva. Denar in denarni ustezniki predstavljajo kapitalske rezerve. Vrednost denarja bomo razumeli kot vrednostni papir, ki ga lahko hitro unovčimo in nima nobenega tveganja, ima znano nominalno vrednost, imamo ga v papirju in ne v denarju. Vrednost denarja v Mertonovem modelu lahko pade na nič saj predpostavi, da imajo podjetja omejeno odgovornost in obvezne kapitalske rezerve. Merton vrednost podjetja modelira kot nakupno opcijo.

- Davkoplačevalčeva prodajna opcija dobi pozitivno vrednost, ko trenutna vrednost razlike med tveganimi obveznostmi in tveganimi sredstvi, ki jih še imamo, preseže rezervo in takrat se opcija izvrši, tako da prosijo za pomoč državo.

- Ko je izguba večja kot je rezerva, podjetje unovči davkoplačevalčevo prodajno opcijo. Vendar je sedaj izvršilna cena negativna glede na velikost kapitalskih rezerv.

- Dospelost davkoplačevalčeve prodajne opcije vzamemo kot parameter, ki ga določijo tržne informacije. Privzeli bomo, da je točen datum dospelosti nedoločen in predvidevamo, da ima trg v prihodnosti nek pričakovan testni datum, ki se spreminja glede na tržne okoliščine.

Slika 4.1: Davkoplačevalčeva prodajna opcija z negativno izvršilno ceno $(-K)$.

4.3 Kapital, dolg, vrednost podjetja, davkoplačevalčeva prodajna opcija in kapitalske rezerve

Tu bomo predstavili formule za:

- E - vrednost kapitala podjetja
- D - vrednost dolga podjetja
- V - vrednost sredstev podjetja
- Y - pozitivna vrednost davkoplačevalčeve prodajne opcije.

Privzamemo, da je naravna verjetnost P do tveganja nevtralna. S seštevkom enačb kapitala in dolga:

$$E = E_0^P[e^{-rT}(A(T) - L(T) - (F - Ze^{rT}))^+] \tag{4.5}$$

$$D = E_0^P[e^{-rT}((Ze^{rT} + A(T) - L(T))^+ \wedge F)] \tag{4.6}$$

dobimo vrednost podjetja:

$$V = E + D = E_0^P[e^{-rT}(Ze^{rT} + A(T) - L(T))^+]. \tag{4.7}$$

Z omejeno odgovornostjo kapitala (4.5) pridemo do omejene odgovornosti podjetja samega z enačbo (4.7). Če so tvegane obveznosti $L(T) = 0$, ko so tvegana sredstva $A(t) \geq 0$ je vrednost podjetja pozitivna. Potem je funkcija omejene obveznosti odveč. Poleg tega lahko izpraznimo denarne rezerve Z do nič, saj smo vedno imeli pozitivno vrednost in ni potrebe po dodatnih zahtevah kapitalskih rezerv.
Iz enačbe o dolgu (4.6) vidimo, da je sedaj vrednost podjetja nakupna opcija na tvegana sredstva, kjer imajo dolžniki omejeno odgovornost in posledično nobene motivacije, da bi spremljali tveganje, kot v klasičnem modelu.

Klasični model je predstavljen tako, da ima podjetje močno motivacijo spremljati tveganje, a tu jo izgubi zaradi davkoplačevalčeve prodajne opcije. Vrednost podjetja je sedaj **NAKUPNA OPCIJA**. Dostop do nomejenih sredstev pa mu omogoči **DAVKOPLAČEVALČEVO PRODAJNO OPCIJO**, katere vrednost je dana z enakostjo:

$$\begin{aligned} Y &= E_0^P[e^{-rT}(-Ze^{rT} - (A(T) - L(T)))^+] = \\ &= E_0^P[e^{-rT}(Ze^{rT} + A(T) - L(T))^+] - Z - (A(0) - L(0)) \geq 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

V Mertonovem modelu sedaj predpostavimo, da imamo finančna podjetja z dovolj konzervativnimi kapitalskimi rezervami in primerno visokim nivojem stresa γ. Za γ velja, da večje ko bo, večji bo učinek povečanja izgub in s tem moramo imeti tudi večje rezerve. Torej večje kot bodo kapitalske rezerve, manjše bo nagnjenje k tveganju.

Parcialni odvod kapitala E in obveznih kapitalskih rezeru Z^* glede na tveganje γ je pozitiven, pri čemer je pacialni odvod ovbveznih kapitalskih rezerv večji od odvoda kapitala:

$$\frac{\partial(E)}{\partial\gamma} \leq \frac{\partial(Z^*)}{\partial\gamma}.$$

Sedaj parcialno odvajamo formulo za dobiček (4.5) glede na tveganje γ, v katerm nastopajo kapitalske rezerve. Potem je odvod po tveganju negativen:

$$\frac{\partial(A - D - L)}{\partial\gamma} \leq 0. \tag{4.9}$$

Namen uvedbe obveznih kapitalskih rezerev je, da ublažimo negativna tveganja, ki izhajajo iz neomejenega dostopa do sredstev. Iz Mertonovega modela, ki vključuje dolg, bodo želeli imetniki kapitala maksimalno povečati nestanovitnost vrednosti dolga. Z davkoplačevalčevo prodajno opcijo imajo le-ti motivacijo za povečanje nestanovitnosti. Torej imajo oboji, imetniki kapitala in imetniki dolga, korist od davkoplačevalčeve prodajne opcije.

Tu se osredotočimo na glavni problem diplomske naloge ali bodo imetniki dolga uveljavili višjo stopnjo kapitalskih rezerv na lastno pest. Prispevki za oblikovanje dodatnih kapitalskih rezerv pa bodo razporejeni med imetnike kapitala in med imetnike dolga.

4.4 Določitev parametrov glede na realno situacijo

Radi bi poiskali do tveganja nevtrano skupno porazdelitev tveganih sredstev in obveznosti $A(T) - L(T)$ s simulacijo zakona o nevtralnem tveganju. To naredimo z Levy-jevimi slučajnimi procesi, da dobimo skupno karakteristično funkcijo za logaritem razlike med sredstvi in obveznosti. Lahko jo ovrednotimo za katerikoli čas t. $E(t)$ je torej je razlika med A in L.

Če imamo funkcijo, ki je Furierova transformacija porazdelitvene funkcije za vrednost kapitala in če hočemo dobiti gostoto, moramo uporabiti Furierova inverzno transformacijo. Tako dobimo:

$$E(t) = E_t^P[e^{-r(T-t)}(A(T) - L(T) - (F - Ze^{rT}))^+]. \tag{4.10}$$

Ta formula nas zanima za t, do zapadlosti te opcije, za katere imamo tržne podatke. Te časovne 'točke' imajo 10 razlčnih zapadlosti na trgu znotraj dveh let. Da dobimo par (A_t, L_t) glede na zapadlost kapitalske opcije simuliramo za dve leti v naprej in dobimo porazdelitev. Simulacijo dobimo z matriko, v eni so različne cene, v drugi pa različne zapadlosti kapitalske opcije. To matriko uporabimo za vrednotenje kapitalske opcije $w(K, t)$ glede na izvršilno ceno K in zapadlost v času t:

$$w(K, t) = e^{-rT} E_0^P[(E(t) - K)^+]. \tag{4.11}$$

Nato izračunamo vrednost obveznih kapitalskih rezerv z enačbo

$$Z^* = -\int_{-\infty}^{\infty} x d\Psi^\gamma(F_{A-L}(x)), \tag{4.12}$$

kjer je Ψ konkavna porazdelitvena funkcija na intervalu $[0, 1]$, odvisna od porazdelitvene funkcije $F_{A-L}(X)$, ta pa je v skladu z zakonom $A(t) - L(t)$ v času $t = 1$.

Raven stresa nastavimo na $\gamma = 0,75$ kot minimalen nivo, ki umirja tveganje. Obvezne kapitalske rezerve primerjamo s stopnjo, pridobljeno iz bilance stanja, da določimo katere banke so bile podkapitalizirane in nadkapitalizirane z vidika o izpostavljenosti tveganju.

Ravno tako izračunamo vrednost davkoplačevalčeve prodajne opcije z enačbo (4.8). Vrednost Z^* definiramo kot letno zapadlost. Zapadlost davkoplačevalčeve prodajne opcije T izračunamo iz prejšnje enačbe v času $t = 0$.

V tem sklopu smo predstavili posledice dostopa do neomejenih sredstev za podjetja z omejeno odgovornostjo. Podjetja držijo davkoplačevalčevo prodajno opcijo s pozitivno vrednostjo.

Poglavje 5

Ponazoritev modela

Tu bomo predstavili preprost model, katerega neto sredstva so Gaussove slučajne spremenljivke.

V prvem koraku bomo ocenili vrednost davkoplačevalčeve prodajne opcije in njeno občutljivost na kapitalske rezerve. V drugem koraku bomo dobili formulo za izračun ravni občutljivosti tvegane obvezne kapitalske rezerve.

5.1 Preprost model z Gaussovo spremenljivko

Naj bo:

- X ... tvegan denarni tok,
- N ... nominalna vrednost,
- σ ... standardni odklon in
- ρ ... korelacija med A in L.

In če vse to vzamemo, dobimo enačbo za volativnost:

$$\sigma_X = \sqrt{2}\sigma N \sqrt{1-\rho}.$$

Sedaj lahko definiramo naš model.

Definicija 5.1.1. *Imamo nominalno vrednost N, dolg, ki ima vrednost F in zapadlost T, denarne rezerve Z, obrestno mero r, razpršenost σ izraženo v odstotkih, ρ- korelacija med A in L. Razpršenost X izračunamo z σ_X, kot v enačbi $\sigma_X = \sqrt{2}\sigma N\sqrt{1-\rho}$. Imamo povprečje μ_x, vrednost kapitala E, dolg D, vrednost podjetja V,obvezne kapitalske rezerve Z^* in davkoplačevalčevo prodajno opcijo Y. Iz tega dobimo izpeljane enačbe glede na rezerve:*

$$\begin{aligned} E = {} & \frac{\sigma_x e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(F - Ze^{rT} - \mu_X)^2}{2\sigma_x^2}) - \\ & - (Fe^{-rT} - Z - \mu_X e^{-rT})\Phi(-\frac{F - Ze^{rT} - \mu_x}{\sigma_x}) \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$V = \frac{\sigma_x e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(Ze^{rT} + \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}) + (Z + \mu_x e^{-rT})\Phi(\frac{Ze^{rT} + \mu_x}{\sigma_x}) \tag{5.2}$$

$$D = V - E \tag{5.3}$$

$$Z^* = A(\gamma)\sqrt{2}\sigma N\sqrt{1-\rho} - \mu_X \tag{5.4}$$

$$Y(Z) = \frac{\sigma_x e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(Ze^{rT} + \mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} - (Z + e^{-rT}\mu_x)\Phi(-\frac{Ze^{rT} + \mu_x}{\sigma_x}) \tag{5.5}$$

$$Y'(Z) = -\Phi(-\frac{Ze^{rT} + \mu_x}{\sqrt{2}\sigma N\sqrt{1-\rho}}), \tag{5.6}$$

kjer je $\Phi(x)$ porazdelitvena funkcija standardne normalne porazdelitve in utežna obratna vrednost standardne normalne porazdelitve je

$$A(\gamma) = -\int_0^1 \Phi^{-1}(u)\Psi^{\gamma'}(u)du,$$

kjer je Ψ^γ konkavna porazdelitvena funkcija na intervalu $[0, 1]$.

Če denarni tok dodamo k izvršilni vrednosti po diskontiranju lahko dosežemo, da ima tveganje neničelno matematično upanje. Vrednost davkoplačevalčeve prodajne opcije pada, če se nivo rezervnega kapitala dviga in gre proti 0, ko gre Z proti ∞. Če $Z = \mu = 0$ je vrednost davkoplačevalčeve prodajne opcije enaka:

$$Y(0) = \frac{\sqrt{1-\rho}e^{-rT}}{\sqrt{\pi}}\sigma N.$$

5.2 Ponazoritev modela s primeri

Primer 5.2.1. Če imamo:

- N = 100 milijonov \$
- $\sigma = 10\%$
- $\rho = 25\%$
- $T = 5$
- $r = 5\%$,

potem je davkoplačevalčeva prodajna opcija ocenjena na:

$$Y = 3.415.800\$.$$

Če povečamo volativnost:

- $\sigma = 15\%$,

ima davkoplačevalčeva opcija vrednost:

$$Y = 5.318.500\$.$$

Primer 5.2.2. Vpliv povprečja μ_X na vrednost Z^*:
Razlika med neto obveznimi kapitalskimi rezervami in povprečnim izplačilom je proporcionalna volativnosti, ki jo pomnožimo s faktorjem proporcionalnosti $A(\gamma)$, ta pa je odvisen od γ:

$$Z^* - \mu_X = \sigma A(\gamma).$$

Kar pomeni, če je:

- $\gamma = 0,75 \longrightarrow A(0,75) = 1,07$
- $\gamma = 0,5 \longrightarrow A(0,5) = 0,75$
- $\gamma = 1 \longrightarrow A(1) = 1,35.$

Torej za:

- $\sigma = 10\%$
- $\rho = 25\%$
- $N = 100$ milijonov \$
- $\mu_X = 0$.

$$Z^* = 13,0447\text{milijonovo } \$$$

Z se zmanjša ob prisotnosti povprečja μ_X :

- $\mu_X = 10.000.000$

$$Z^* = 3,0447\text{milijonovo } \$$$

- $\mu_X = 15.000.000$

$$Z^* = -1,9553\text{milijonovo } \$$$

- $\mu_X = -10.000.000$

$$Z^* = 23,0447\text{milijonovo } \$.$$

Primer 5.2.3. Kako bi spodbudili, da dolžniki zmanjšajo volativnost denarnih tokov, čeprav imajo dvakoplačevačevo prodajno opcijo?

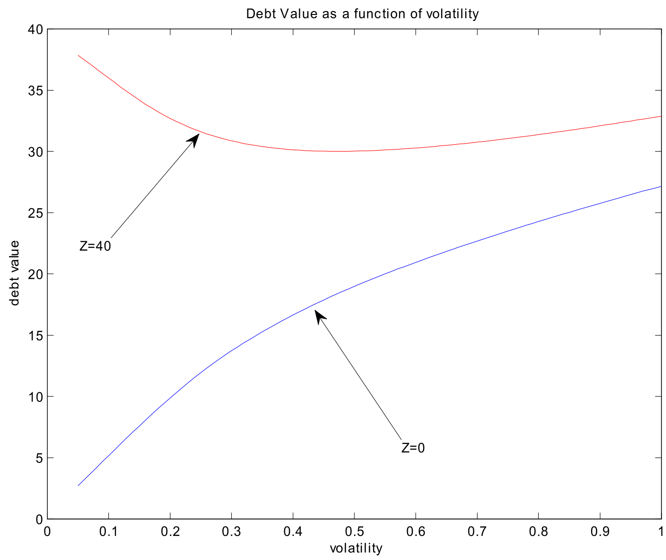
Za vrednost F si dolžniki z dolgo in s kratko pozicijo v vrednosti $-Ze^{rT}$ izposodijo $F - Ze^{rT}$. V grafu je predstavljena vrednost dolga kot funkcija volativnosti, pri čemer ima podjetje v roki davkoplačevalčevo prodajno opcijo.

Predstavljena je za dve vrednosti obveznih kapitalskih rezerv:

- $Z = 0$
- $Z = 40$.

S podatki:

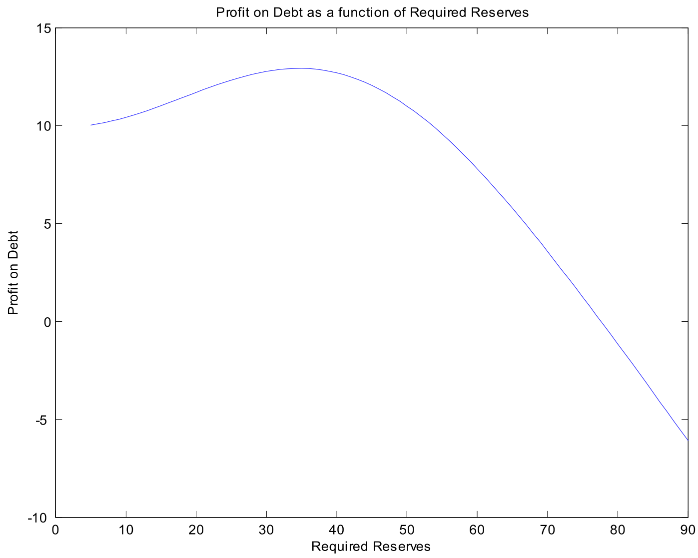
- $N = 100$
- $r = 5\%$
- $\mu = 0$
- $T = 5$
- $\rho = 0,25$
- vrednost dolga je enaka $F = 50$.



Slika 5.1: Graf vrednosti dolga, kot funkcija volativnosti.

Če obvezne kapitalske rezerve niso zahtevane, potem dolžniki izgubijo motivacijo, da ohranijo nizko volativnost saj imajo več koristi, ker držijo davkoplačevalčevo prodajno opcijo in izgube, ki jih morajo vrniti lastnikom kapitala, prenesejo na davkoplačevalca. Če so kapitalske rezerve visoke, na primer $Z = 40$, potem ima dolžnik za nizko vrednostjo še klasično motivacijo spremljanja tveganja, medtem ko pri veliki vrednosti volativnosti dela na tem, da bi bila še večja.

Spodbuda za dolžnika, da ima obvezne kapitalske rezerve, je predstavljena v grafu. Opazimo, da imajo dolžniki z majhno ravnijo rezerv, koristi povečanja rezerv, medtem ko bi bili lastniki kapitala proti taki rasti. Dolžnikom pa ne gre zaupati, da se bodo izognili tveganju, če držijo davkoplačevalčevo prodajno opcijo. Potemtakem predvidevamo, da bi velikost tveganja morala temeljiti na kapitalskih rezervah.



Slika 5.2: Profit dolga, glede na velikost kapitalskih rezerv.

5.3 Umirjanje stresa

Omejena odgovornost omogoča, da se vrednost podjetja kot nakupna opcija prenese na davkoplačevalčevo prodajno opcijo. Tako je občutljivost podjetja pozitivna glede na tveganje. Kapitalske rezerve bi morale biti ravno prav občutljive na tveganje, nasprotno pa bi morala biti občutljivost vrednosti podjetja pozitivna na tveganje.
V preprostem modelu iz enačbe Z^* in σ_X sledi:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_X} Z^* = A(\gamma). \tag{5.7}$$

Če je $\mu_x = 0$ in $r = 0$, potem je parcialni odvod vrednosti sredstev podjetja, ki jo odvajamo po σ_X enak:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_X} V = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{Z^2}{2\sigma_X^2}). \tag{5.8}$$

Če enačbo o občutljivosti obveznih kapitalskih rezerv enačimo z enačbo o občutljivost sredstev podjetja predpostavimo, da bi raven stresa γ morala zadostovati, če velja enačba:

$$exp(-\frac{A(\gamma)^2}{2}) = \sqrt{2\pi} A(\gamma). \tag{5.9}$$

Iz te enačbe sledi, da je v preprostem modelu

$$A(\gamma) = 0,3722$$

$$\gamma = 0,2222.$$

V preprostem modelu smo predpostavili pozitivno vrednost davkoplačevalčeve prodajne opcije, priporočeno vrednost tveganja glede na kapitalske rezerve in posledice neomejene odgovornosti za velikost dolga skupaj z vplivom kapitalskih rezerv na vrednost delnice.

Literatura

[1] E. Eberlein, D. Madan, *Unlimited Liabilities, Reserve Capital Requirements and the Taxpayer Put Option, April 26, 2010*

[2] R. Fišer, *Uvod v finančne trge in inštitucije*, [ogled 27. 8. 2013], dostopno na http://www.scpet.net/vss/xinha/plugins/ExtendedFileManager/demo_images/egradiva/Uvod%20v%20financne%20trge%20in%20institucije-Fiser.pdf.

[3] N. Polanec, *Obvladovanje kreditnega tveganja v bankah in Mertonov model*,april 2011, [ogled 25. 8. 2031], dostopno na http://dkum.uni-mb.si/IzpisGradiva.php?id=18532&tab=dodatno&b=.

[4] H. Byström, *Merton for dummies: A flexible way of modeling default risk, 2007*

[5] M. Jovan, *Mertonov strukturni model in IRB ustreznost, 3.december 2007*

[6] T. Košir, *Binomski model*, verzija 13. 5. 2013, [ogled 29. 8. 2013], dostopno na http://ucilnica.fmf.uni-lj.si/mod/resource/view.php?id=6815.

[7] J. Bradeško in A. Plut, *Obvezne rezerve v Sloveniji in približevanje EMU*, Ljubljana, april 2001.

[8] J. Martini, *Kapitalska ustreznost bank v Sloveniji v skladu z baselskimi standardi*, 2006, dostopno na http://dkum.uni-mb.si/IzpisGradiva.php?id=25588.