UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Maja Langus

Diferenčne enačbe in ekonomski modeli

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Jasna Prezelj

Ljubljana, 2013

Kazalo

Diferenčne enačbe in ekonomski modeli

Povzetek

v Diplomskem seminarju smo naredili pregled treh ekonomskih modelov, ki jih je moč definirati s pomočjo diferenčnih enačb. To so bili Hansen-Samuelsonov model, model prilagoditev trga in racionalnih pričakovanj in pa Hicksov model. V uvodu smo definirali diferenčne enačbe in še eno izmed metod reševanja le teh in sicer metodo operatorja zamika. Za vsak model smo določili ravnotežni pogoj, ga prevedli na diferenčno enačbo in jo rešili. V Hansen-Samuelsonovem modelu smo opazili, da rešitev diferenčne enačbe, ki velja v modelu, pove obnašanje nacionalnih prihodkov skozi čas. Pri modelu prilagoditev trga in racionalnih pričakovanj nam je rešitev enačbe povedala, da je cena p_t odvisna ne samo od sedanjih eksogenih šokov, ampak tudi preteklih in prihodnjih, vendar pa vpliv teh šokov eksponentno pada z oddaljenostjo od trenutnega časa. Pri Hicksovem modelu pa partikularno rešitev enačbe lahko interpretiramo kakor ravnotežni trend nacionalnega prihodka. V tem modelu smo pogledali tudi kaj se dogaja s poslovnimi cikli skozi čas in kaj nanje vpliva.

Second-order Difference Equations in Economic Models

Abstract

In a graduate seminar we did a review of three economic models that can be defined with difference equations. These were the Hansen-Samuelson model, a model of market adjustments and rational expectations and the Hicks' model. In the introduction we defined difference equations and one of the methods for finding a solution namely operational method. For each model, we defined equilibrium condition and with a simple substitution got a secon-order equation, which we solved. In Hansen-Samuelson model, we determined that the solution of the equation of the model gives the behaviour of national income over time. In market adjustments and rational expectations model the solution expresses p_t as a weighted sum of past, present, and future values of the exogenous shock, but the impact of these shocks decreases exponentially with distance from the current time. In Hicks' model the particular solution can be interpreted as the euilibrium trend of national income. In this model, we looked at what is happening with the business cycles through time and what affects them.

Math. Subj. Class. (2010): 39A05, 39A06, 39A22, 39A23, 39A30

Ključne besede: Diferenčne enačbe, metoda operatorja zamika, homogena rešitev, partikularna rešitev, Hansen-Samuelsonov model, ravnotežni pogoj, prilagoditve trga in racionalna pričakovanja, Hicksov model, zgornja meja, spodnja meja, poslovni cikel, ravnovesna lega.

Keywords: Difference equations, operational method, homogeneous solution, particular solution, Hansen-Samuleson model, equilibrium condition, market adjustments and rational expectations, Hicks' trade cycle model, ceiling, floor, business cycle, trend.

1. Uvod

V diplomski nalogi se bomo ukvarjali s tremi ekonomskimi modeli dobička in poslovnih ciklov in sicer s Hansen-Samuelsonovim modelom, modelom racionalnih pričakovanj in prilagoditev trga in pa s Hicksovim modelom. Vsi našteti modeli so definirani s pomočjo diferenčnih enačb drugega reda.

1.1. **Diferenčne enačbe.** Za dano funkcijo $y = f(t)$ je prva diferenca definirana kot razlika $f(t+h) - f(t)$ za $h > 0$,

$$\Delta y = f(t+h) - f(t).$$

Privzeti smemo, da so časovni intervali enaki in da so kar enaki 1. Prve diference lahko izračunamo za zaporedne intervale:

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= f(t+1) - f(t) = y_{t+1} - y_t, \\
\Delta y_{t+1} &= f(t+2) - f(t+1) = y_{t+2} - y_{t+1}, \\
\Delta y_{t+2} &= f(t+3) - f(t+2) = y_{t+3} - y_{t+2},
\end{aligned}$$

itd. Iz tega lahko izračunamo druge diference

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_t &= \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t, \\
\Delta^2 y_{t+1} &= \Delta y_{t+2} - \Delta y_{t+1} = y_{t+3} - 2y_{t+2} + y_{t+1}, \\
\Delta^2 y_{t+2} &= \Delta y_{t+3} - \Delta y_{t+2} = y_{t+4} - 2y_{t+3} + y_{t+2},
\end{aligned}$$

in tretje diference

$$\Delta^3 y_t = \Delta^2 y_{t+1} - \Delta^2 y_t = y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t$$

itd.

Ker je izračun diferenc linearna operacija, je $\Delta(ay_t) = a\Delta y_t$ oziroma za linearno kombinacijo je $\Delta(ay_t + bz_t) = ay_{t+1} + bz_{t+1} - ay_t - bz_t = a\Delta y_t + b\Delta z_t$.

Definicija 1.1. Navadna diferenčna enačba je enačba, ki vključuje eno ali več diferenc Δy, $\Delta^2 y$, ... Red diferenčne enačbe je enak redu najvišje diference.

Za vsak fiksen t bo rešitev te enačbe definirana samo za diskretne čase $t, t+1$, $t+2, \ldots$

Če diference zamenjamo z izrazi y_t, y_{t+1}, itd. lahko diferenčno enačbo zapišemo kot funkcjo takih izrazov. Diferenčna enačba

$$\Delta y_t = a$$

je ekvivalenta

$$\begin{aligned}
y_{t+1} - y_t &= a. \\
\text{torej če} \quad y_0 &= b, \\
y_1 &= y_o + a, \\
y_1 &= b + a, \\
y_2 &= y_1 + a = b + 2a, \\
y_t &= b + ta, \quad b \text{ poljuben.}
\end{aligned}$$

Rešitve take diferenčne enačbe so natanko linearne funkcije oblike $y = at + b$, kjer je b konstanta, ki jo npr. določimo iz začetne vrednosti y_0. Iz tega takoj dobimo, da so rešitve diferenčne enačbe $\Delta^2 y_t = 0$ natanko vse premice $y = at + b$, kjer sta a in b konstanti. Podobno velja za tretje diference:

$$\Delta^3 y_t = 0$$

pomeni

$$\begin{aligned}
\Delta y_t &= at + b. \\
y_{t+1} - y_t &= at + b, \\
y_0 &= c, \\
y_1 &= a + b + c, \\
y_2 &= 2a + b + a + b + c,
\end{aligned}$$

torej

$$y_t = \frac{at^2}{2} + bt + c.$$

Recimo, da obstaja še neka druga rešitev z_t. Potem je $\Delta(z_t - y_t) = 0$ in sledi, da je $z_t = y_t = konstanta$.

Vidimo, da izračun diference reda n eliminira natako n konstant. Iz tega dobimo:

Izrek 1.2. *Splošna rešitev enačbe reda n je funkcija t, ki vsebuje natanko n prostih parametrov.*

Obravnavajmo rešitev splošne diferenčne enačbe 2. reda.

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = g(t)$$

Najprej poiščimo rešitev homogene enačbe z nastavkom $y_t = \lambda^t$. Ko vstavimo v enačbo in izpostavimo λ^{t-2}, dobimo

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Rešitvi sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

Splošna rešitev je torej oblike

$$y_{t_H} = A\lambda_1^t + B\lambda_2^t.$$

Če je y_p partikularna rešitev, potem je splošna rešitev oblike

$$y = y_p^{(t)} + A\lambda_1^t + B\lambda_2^t.$$

Rešitev je stabilna natanko tedaj, ko $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$.

(1) $a_1^2 - 4a_2 > 0$: Ničli sta realni, imamo območje $a_2 < a_1^2/4$. Če izpeljemo, dobimo

$$\left|\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}\right| < 1,$$

$$-2 + a_1 < \pm\sqrt{a_1^2 - 4a_2} < 2 + a_1.$$

Če naj bo to res, morata biti $-2 + a_1 < 0$ in $2 + a_1 > 0$, torej $|a_1| < 2$. Iz leve neenačbe zgoraj, dobimo

$$\begin{aligned} \sqrt{a_1^2 - 4a_2} &< 2 - a_1, \\ a_1^2 - 4a_2 &< 4 - 4a_1 + a_1^2, \\ 1 - a_1 + a_2 &> 0. \end{aligned}$$

Podobno iz druge neenačbe.

$$\begin{aligned} -2 + a_1 &< -\sqrt{a_1^2 - 4a_2} \\ 2 + a_1 &> \sqrt{a_1^2 - 4a_2} \\ 4 + 4a_1 + a_1^2 &> a_1^2 - 4a_2 \\ 1 + a_1 + a_2 &> 0 \end{aligned}$$

Imamo območje A.

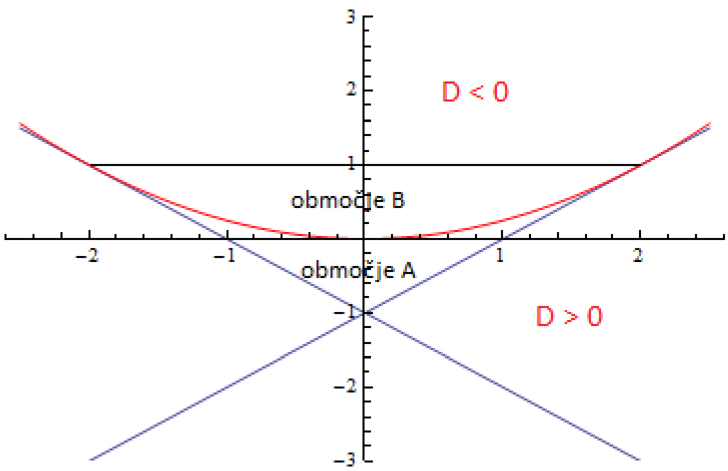
(2) Če je diskriminanta < 0, dobimo pogoj

$$\frac{1}{4}(a_1^2 - a_1^2 + 4a_2) < 1,$$

$$\text{torej } a_2 < 1.$$

To je naše območje B.

Na grafu imamo narisani funkciji $a_2 = -a_1 - 1$ in $a_2 = a_1 - 1$ in pa rdečo krivuljo $a_2 = a_1^2/4$.



Graf 1

Nas pa zanima območje AUB, torej vse stabilne točke, ne glede na to, ali so kompleksne ali realne. Območje AUB je ravno trikotnik, podan z neenačbami $a_2 < 1$, $1 + a_1 + a_2 > 0$ in $1 - a_1 + a_2 > 0$.

Reševanje diferenčnih enačb smo že spoznali med študijem, zato bomo v uvodu definirali zgolj enega izmed načinov iskanja partikularne rešitve diferenčne enačbe. Uporabili ga bomo namreč pri reševanju enačb v modelu prilagoditev trga in racionalnih pričakovanj.

1.1.1. *Metoda operatorja zamika.*

Trditev 1.3. *naj bo $A : X \to X$ omejen linearen operator med Banachovima prostoroma in naj bo $\|A\| < 1$. Potem je operator $I - A$ obrnljiv in njegov inverz je $(I - A)^{-1} = \sum_0^\infty (A^n)$.*

Dokaz: $\sum_0^\infty (A^n)$ konvergira, ker je $\| \sum_0^\infty (A^n)\| \leq \sum_0^\infty (\|A^n\|)$ in ta je konvergentna. Spomnimo se : zaporedje $B_k = \sum_0^k (A^n)$ je Cauchyjevo.

$$\|B_k - B_{k+l}\| = \| \sum_{k+1}^{k+l} (A^n)\| \leq \sum_{k+1}^{k+l} (\|A^n\|) < \frac{\|A\|^{k+1}}{1 - \|A\|}$$

in prostor omejenih operatorjev na X je poln metrični prostor, zato je zaporedje konvergentno. Preverimo še, da je

$$(I - A)^{-1} = \sum_0^\infty A^n.$$

Pomnožimo z $(I - A)$ z leve in dobimo

$$I = (I - A) \sum_0^\infty A^n = \sum_0^\infty A^n - \sum_0^\infty A^{n+1} = I.$$

■

Kako pa je v našem primeru? Za operator zamika L velja, da $Ly_t = y_{t-1}$.

Imamo operator $(I + a_1 L + a_2 L^2)$. Zanima nas inverz. Denimo, da je naš operator oblike $(I + a_1 L + a_2 L^2) = (I - \lambda_1 L)(I - \lambda_2 L)$. Potem bo obrnljiv natanko tedaj, ko bosta obrnljiva $(I - \lambda_1 L)$ in $(I - \lambda_2 L)$. Kdaj bo to res?

(1) Operator zamika ima normo 1 (v sup normi na funkcijah):
$$L(F(t)) = f(t - 1)$$
(2) Izraz $I - \lambda_1 L$ je torej obrnljiv, če je $|\lambda_1| < 1$, saj bo potem $A = x_1 L$ ustrezal trditvi.
(3) Če je $|\lambda_1| > 1$, pa lahko izraz preoblikujemo:
$$I - \lambda_1 L = \lambda_1 L \left(\frac{1}{\lambda_1} F - I \right),$$
kjer je F operator pomika nazaj, ki ima prav tako normo 1, izraz $\lambda_1 L$ pa je obrnljiv z inverzom $(\lambda_1)^{-1} F$. Zato ima $\frac{1}{\lambda_1} F$ normo $|\frac{1}{\lambda_1}| < 1$ in ustreza trditvi.

Naša ideja bo torej naslednja. Poiščemo ničli karakterističnega polinoma za

$$I + a_1 L + a_2 L^2.$$

Privzemimo, da sta različni in da nobena ni enaka 1 po absolutni vrednosti.

- $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$:

$$(I + a_1 L + a_2 L^2)^{-1} = \frac{1}{(I - \lambda_1 L)} \cdot \frac{1}{(I - \lambda_2 L)} = \frac{c}{(I - \lambda_1 L)} + \frac{d}{(I - \lambda_2 L)},$$

ker

$$(I - \lambda_1 L)^{-1}(I - \lambda_2 L)^{-1} = (I - \lambda_1 L)^{-1} \cdot c + (I - \lambda_2 L)^{-1} \cdot d.$$

Pomnožimo sedaj izraz z izrazom $(I - \lambda_1 L) \cdot (I - \lambda_2 L)$. Dobimo

$$I = c \cdot (I - \lambda_2 L) + d \cdot (I - \lambda_1 L).$$
$$\Rightarrow (c\lambda_1 + d\lambda_2) \cdot L = (c + d - 1) \cdot I.$$

Ker L ni identiteta, je to mogoče le, če je

$$c\lambda_1 + d\lambda_2 = 0,$$
$$c + d = 1.$$

Taka c in d obstajata, ker je determinanta sistema

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$$

po privzetku.

Potem je$(I + a_1 L + a_2 L^2)^{-1} = c \sum_0^\infty \lambda_1^n \cdot L^n + d \sum_0^\infty \lambda_2^n \cdot L^n$.

- Podobno postopamo v primeru, ko je $|\lambda_1| < 1, |\lambda_2| > 1$.

$$(I + a_1 L + a_2 L^2)^{-1} = \frac{c}{(I - \lambda_1 L)} + \frac{d}{(I - \lambda_2 L)},$$

le da je sedaj

$$\frac{d}{(I - \lambda_2 L)} = d \cdot \frac{1}{\lambda_2} \cdot F \cdot (-1) \cdot \sum_0^\infty \lambda_2^{-n} F^n =$$

$$= \frac{d}{\lambda_2} \cdot L^{-1} \cdot (-1) \cdot \sum_0^\infty (\lambda_2 L)^{-n}.$$

- Enako za primer, ko $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$.

Pretvorimo sedaj to na enačbo oblike:

$$c_2 y_t + c_1 y_{t-1} + c_0 y_{t-2} = x_t$$

Če vstavimo izraz $X_t = (1/c_2)x_t$, sledi

$$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = X_t$$

oziroma, če vstavimo operator zamika L :

$$(1 + a_1 L + a_2 L^2) y_t = X_t$$

Partikularna rešitev te enačbe je

$$\overline{y}_t = \frac{1}{1 + a_1 L + a_2 L^2} X_t.$$

Izraz $1 + a_1 L + a_2 L^2$ lahko zapišemo kot $L^2(F^2 + a_1 F + a_2)$, kjer je $F = L^{-1}$ inverzen operator zamika.

Sedaj lahko izraz $F^2 + a_1 F + a_2$ razstavimo v $(F - F_1)(F - F_2)$, kjer sta F_1 in F_2 ničli izraza $F^2 + a_1 F + a_2 = 0$. Ta enačba sovpada z enačbo $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0$. Torej F_1 in F_2 sovpadata z $\lambda_1 I$ in $\lambda_2 I$. Sledi torej:

$$\begin{aligned} 1 + a_1 L + a_2 L^2 &= L^2(F - \lambda_1)(F - \lambda_2) = \\ &= (LF - \lambda_1 L)(LF - \lambda_2 L) = \\ &= (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L). \end{aligned}$$

Zapišemo torej lahko, da je

$$\frac{1}{1 + a_1 L + a_2 L^2} = \frac{\Theta_1}{1 - \lambda_1 L} + \frac{\Theta_2}{1 - \lambda_2 L},$$

kjer je

$$\theta_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

in

$$\theta_2 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Partikularno rešitev torej lahko zapišemo kot:

$$\overline{y}_t = \sum_{r=1}^{2} \frac{\Theta_r}{1 - \lambda_r L} X_t$$

oziroma, če razvijemo izraz

$$(1 - \lambda_r L)^{-1} = 1 + \lambda_r L + \lambda_r^2 L^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_r)^i L^i.$$

Torej je

$$\overline{y}_t = \sum_{r=1}^{2} \Theta_r \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda_r)^i X_{t-1}.$$

2. Hansen-Samuelsonov model

Model je po navdihu teorije Alvina Hansena definiral ameriški ekonomist Paul Samuelson. Samuelsonov multiplikator-akcelerator model (ali kasneje Hansen-Samuelsonov model) temelji na mehanizmu multiplikatorja, ki izvira iz Keynesijanske potrošne funkcije z zamikom. Keynezijanska teorija poslovnih ciklov razlaga poslovne cikle s pomočjo delovanja akceleratorja in multiplikatorja ter temelji na vzrokih v gibanju agregatnega povpraševanja. Hansen-Samuelsonov model sestoji iz funkcije potrošnje, investicijske funkcije in relacije, ki definira ravnotežno vrednost dohodka.

2.1. **Struktura modela.** V modelu imamo naslednje enačbe;

$$\begin{aligned} C_t &= bY_{t-1} \qquad 0 < b < 1 \\ I_t &= I_t^{'} + I_t^{''} \\ I_t^{''} &= G \\ I_t^{'} &= k(C_t - C_{t-1}), \end{aligned}$$

kjer je;

Y : dohodkovna funkcija,
C : funkcija potrošnje,
I : investicijska funkcija,
b : nagnjenost k potrošnji,
G : pozitivna konstanta,
$I^{''}$: avtonomsne investicije,
$I^{'}$: inducirane investicije.

Potrošnja je torej odvisna od dohodka v prejšnjem obdobju. Razlikujemo med induciranimi in avtonomnimi investicijami. Avtonomne investicije oz. javni izdatki so konstantni po stopnji G, kjer je G pozitivna konstanta, inducirane investicije pa so odvisne od sprememb v povpraševanju po potrošnji, v skladu z načelom akceleratorja, kjer je k koeficient akceleratorja oz. "relacija", kakor jo imenuje Samuelson.

Ravnotežni pogoj, ki velja v modelu je

$$Y_t = C_t + I_t.$$

S preprosto substitucijo dobimo diferenčno enačbo drugega reda.

$$Y_t - Y_{t-1}(1+k)b + bkY_{t-2} = G$$

Rešitev te diferenčne enačbe nam bo povedala obnašanje nacionalnih prihodkov skozi čas.

2.1.1. *Reševanje diferenčne enačbe.* - Partikularna rešitev:

Partikularno rešitev lahko poizkusimo poiskati tako, da vstavimo $\overline{Y_t} =$ konst.

$$\begin{aligned} Y_t - Y_{t-1}(1+k)b + bkY_{t-2} = G \\ Y - b(1+k)Y + bkY = G \\ Y - bY - bkY + bkY = G \\ Y(1-b) = G \end{aligned}$$

Iz tega sledi

$$\overline{Y} = \frac{G}{1-b}.$$

Partikularna rešitev determinira ravnotežno vrednost nacionalnega dohodka.

- Homogeni del:

$$Y_t - Y_{t-1}(1+k)b + bkY_{t-2} = 0$$

Karakteristični polinom enačbe je

$$\lambda^2 - b(1+k)\lambda + bk = 0.$$

Naredimo sedaj kvalitativno analizo karakterističnega polinoma. Preverimo najprej stabilnostne pogoje, ki jih tako kot v poglavju (1.1), dobimo iz izraza

$$\lambda_{1,2} = \left| \frac{b(1+k) \pm \sqrt{b^2(1+k)^2 - 4bk}}{2} \right| < 1,$$

$$-2 - b(1+k) < \pm\sqrt{b^2(1+k)^2 - 4bk} < 2 - b(1+k).$$

To velja za realne ničle oziroma $b > 4k/(1+k)^2$.

Oglejmo si sedaj neenačbi

(1)

$$-2 - b(1+k) < -\sqrt{b^2(1+k)^2 - 4bk},$$

$$\begin{aligned} 2 + b(1+k) &> \sqrt{b^2(1+k)^2 - 4bk}, \\ 4 + 4b(1+k) + b^2(1+k)^2 &> b^2(1+k)^2 - 4kb, \\ 1 + b(1+k) + bk &> 0. \end{aligned}$$

To je eden izmed treh stabilnostnih pogojev in to vedno drži.

(2)

$$\sqrt{b^2(1+k)^2 - 4bk} < 2 - b(1+k),$$

$$\Rightarrow 1 - b > 0.$$

Če je $2 - b(1+k) > 0$, je to naslednji stabilnostni pogoj. Če pa je $2 - b(1+k) < 0$, pa to ne drži. To pa pomeni, da dobimo še dodaten pogoj, ki je

$$2 - (b(1+k)) > 0.$$

Ampak, če je $2-(b(1+k))>0$ in če je diskriminanta <0, potem sta rešitvi kompleksni. V tem primeru je stabilnostni pogoj oblike

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \frac{1}{4}(b^2(1+k)^2 - (b^2(1+k)^2 - 4bk)) < 1.$$

Torej

$$1 - bk > 0.$$

Stabilnostni pogoji v modelu so torej sledeči:

$$\begin{gathered} 1 - b(1+k) + bk = 1 - b > 0 \\ 1 - bk > 0 \\ 1 + b(1+k) + bk > 0 \end{gathered}$$

Opazimo, da je prvi neenakost zadoščeno, saj je b manj kot 1. Tudi tretja neenakost velja, saj je leva stran vsota pozitivnih členov. Ključna neenakost je torej druga. Da bi ugotovili tip gibanja, najprej pogledamo ničli karakterističnega polinoma, ki sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{b(1+k) \pm \sqrt{b^2(1+k)^2 - 4bk}}{2}.$$

Ničli sta nenegativni , saj je v primeru pozitivne diskriminante

$$b(1+k) \geq \sqrt{b^2(1+k)^2 - 4bk},$$

če pa je diskriminanta negativna, pa je realni del ničel enak $b(1+k)$, ki je tudi pozitiven.

Ključen stabilnostni pogoj je torej :

$$bk < 1 \quad \text{oziroma} \quad b < \frac{1}{k}.$$

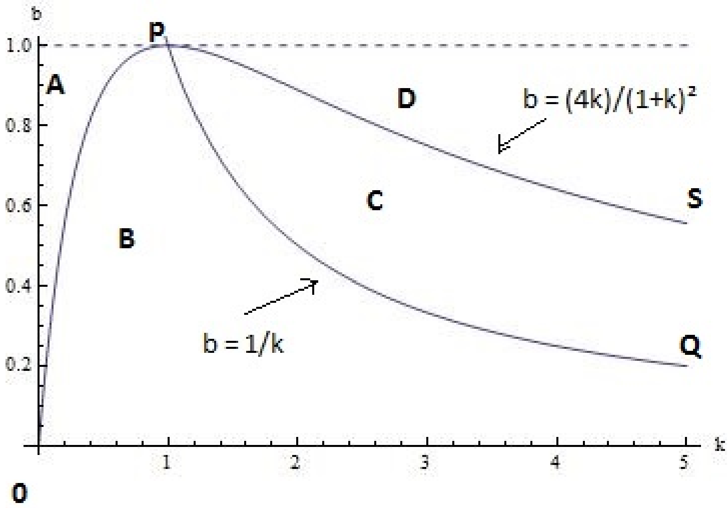
Oglejmo s sedaji diskriminanto karakterističnega polinoma:

$$\triangle = b^2(1+k)^2 - 4bk.$$

Torej velja:

$$\begin{aligned} \triangle > 0, &\text{ če } \quad b > \frac{4k}{(1+k)^2}, \\ \triangle = 0, &\text{ če } \quad b = \frac{4k}{(1+k)^2}, \\ \triangle < 0, &\text{ če } \quad b < \frac{4k}{(1+k)^2}. \end{aligned}$$

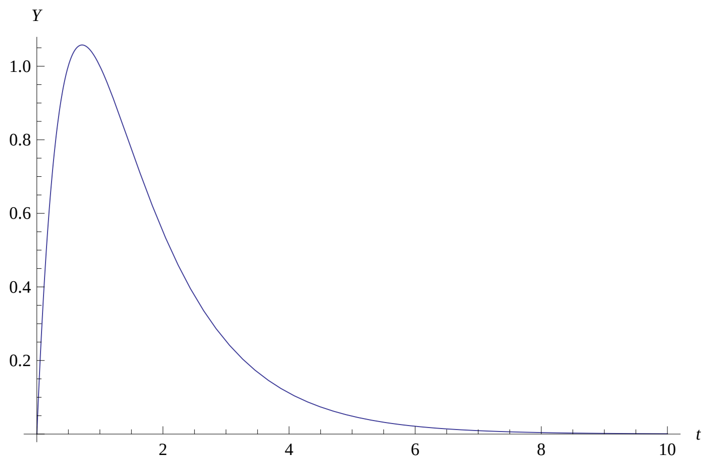
2.2. **Grafična predstavitev.** Narisani sta funkciji $b = 4k/(1+k)^2$, ki predstavlja krivuljo OPS in funkcija $b = \frac{1}{k}$, ki predstavlja krivuljo PQ. Ker je $b < 1$, nas zanima samo območje pod prekinjeno črto. Kvadrant se razdeli na štiri območja. Rekli smo, da so realne ničle pozitivne.



Graf 2 : Samuelsonov diagram multiplikator-akcelerator

Območje A:

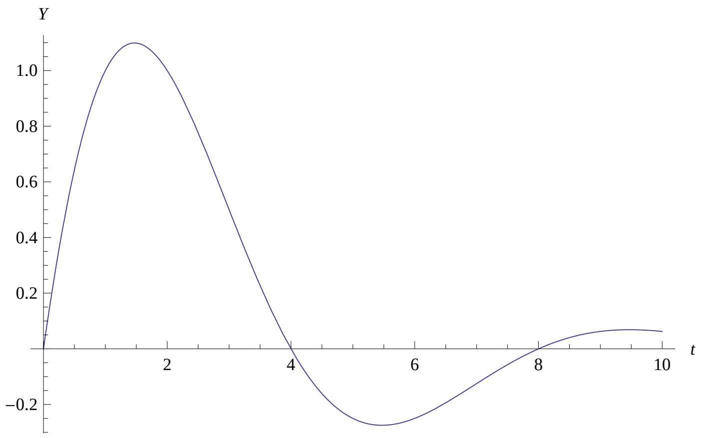
Vse točke v tem območju so nad funkcijo $b = 4k/(1+k)^2$ in pod funkcijo $b = \frac{1}{k}$. Stabilnostnim pogojem je zadoščeno in ničle so realne. Sistem bo pokazal monotono gibanje proti partikularni rešitvi $\frac{G}{(1-b)}$.



Rešitve Y v območju A, v odvisnosti od časa t. Vzamemo na primer $k = 0,1, b = 0,5$ in začetne pogoje $Y_0 = 0, Y_1 = 1$. Splošna rešitev pri izbranih parametrih je $y_t = 3,125(0,435)^t - 3,125(0,115)^t$.

Območje B:

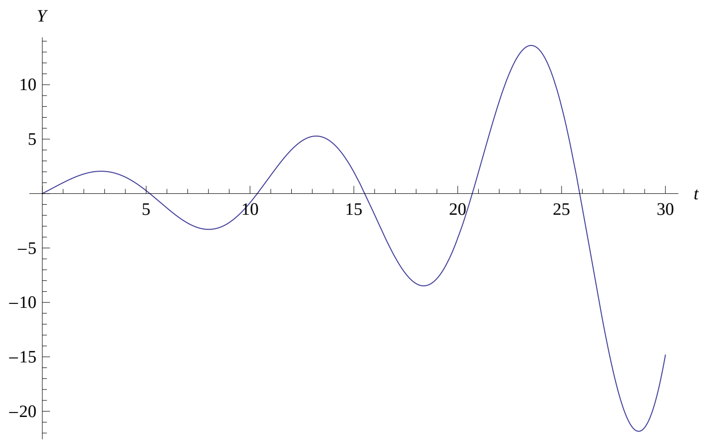
Točke v tem delu zadoščajo neenakostim $b < \frac{1}{k}$ in $b < \frac{4k}{(1+k)^2}$. Stabilnostni pogoji so izpolnjeni in ničle so kompleksne. Rezultat je nihanje okoli ravnotežne vrednosti.



Rešitve Y v območju B, v odvisnosti od časa t. Vzamemo na primer $k = 1, b = 0,5$ in začetne pogoje $Y_0 = 0, Y_1 = 1$. Splošna rešitev pri izbranih parametrih je $y_t = 1/i(1/2 + i/2)^t - 1/i(1/2 - i/2)^t$, kjer $\lambda_{1,2} = 1/2 \pm i1/2$. Poglejmo še realni zapis rešitve za Y. S pomočjo Eulerjeve formule in polarnega zapisa dobimo, da je $r = \sqrt{2}/2$, $\varphi = \pi/4$ in splošna rešitev je $Y = r^t D \sin((\pi/4)t)$, kjer je $D = \sqrt{2}/\sin(\pi/4)$.

Območje C:

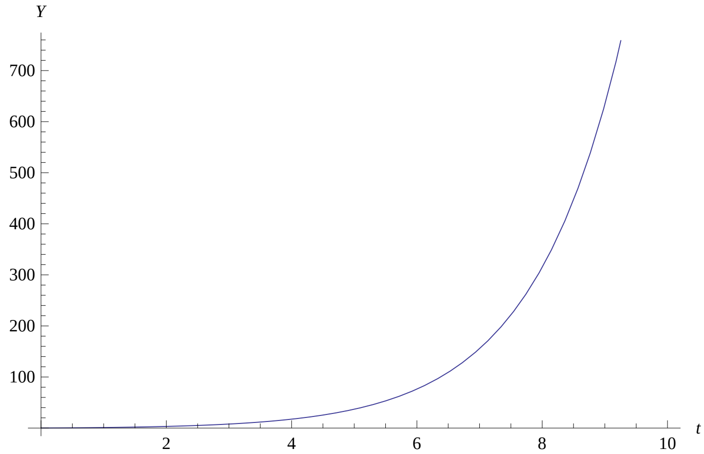
Velja $b > \frac{1}{k}$ in $b < \frac{4k}{(1+k)^2}$. Stabilnostni pogoji niso izpolnjeni, ničle so kompleksne. Rezultat je eksplozivno nihanje okoli ravnotežne vrednosti.



Rešitve Y v območju C, v odvisnosti od časa t. Vzamemo na primer $k = 2, b = 0,6$ in začetne pogoje $Y_0 = 0, Y_1 = 1$. Splošna rešitev pri izbranih parametrih je $y_t = 0,8/i(0,9 + i0,625)^t - 0,8/i(0,9 - i0,625)^t$, kjer$\lambda_{1,2} = 0,9 \pm i0,625$. Poglejmo še realni zapis rešitve za Y. S pomočjo Eulerjeve formule in polarnega zapisa dobimo, da je $r = 1,1$, $\varphi = \arcsin 0,6$ in splošna rešitev je $Y = r^t E \sin((\pi/4)t)$, kjer je $E = 1/(1,1 * \sin(\pi/4))$.

Območje D:

Velja $b > \frac{1}{k}$ in $b > \frac{4k}{(1+k)^2}$. Stabilnostni pogoji niso izpolnjeni, ničle pa so realne. Rezultat je monotono eksploziven.



Rešitve Y v območju D, v odvisnosti od časa t. Vzamemo na primer $k = 3,1, b = 0,8$ in začetne pogoje $Y_0 = 0, Y_1 = 1$. Splošna rešitev pri izbranih parametrih je $y_t = 1,25(2)^t - 1,25(1,2)^t$.

Da lahko zaključimo našo analizo, moramo pogledati še točke, ki ležijo na krivuljah, ki razmejujejo naša območja. Ker sta b in k pozitivna koeficienta in $b < 1$, lahko iz analize izključimo točke na b osi, točke na k osi, koordinatno izhodišče, ter točko P. Sedaj ločimo naslednje primere;

- Točke na krivulji 0P:
  To je krivulja $b = 4k/(1+k)^2$ in imamo dvojno realno ničlo. Ker je izpolnjen stabilnostni pogoj $b < 1/k$, je ničla po absolutni vrednosti manjša od 1. Ko gre t proti ∞, bo v izrazu $(A_1 + A_2 t)\lambda^{\pm t}$ prevladal člen $\lambda^{\pm t}$ in gibanje bo monotono konvergiralo proti ravnovesju.

- Točke na krivulji med B in C:
  Velja $b < 4k/(1+k)^2$ in $bk = 1$. Ničle so kompleksne, imamo nihanje s konstantno amplitudo, saj je $|\lambda_{1,2}|^2 = |bk| = 1$.

- Točke na krivulji med C in D:
  Velja $b = 4k/(1+k)^2$ in $b > 1/k$. Obstaja dvojna ničla, večja od 1. Rezultat je gibanje, ki ga slej kot prej zdominira monotono divergenten izraz $\lambda^{\pm t}$.

2.3. **primer.** Predpostavimo, da je v Hansen-Samuelsonovem modelu potrošnja funkcija enkratnega dobička, in sicer $C_t = bY_{d_{t-1}}, Y_{d_t} = Y_t - T_t, T_t = \tau Y_t$, kjer je $0 < \tau < 1$ konstantna stopnja obdavčitve.

(1) Zakaj uvedba obdavčitve izvaja stabilizacijski vpliv?
Stabilnostni pogoj, ki velja v modelu je $Y_t = C_t + T_t$. Ko vstavimo v ta izraz

naše spremenljivke, dobimo enačbo

$$Y_t = b(1-\tau)Y_{t-1} + k(b(1-\tau)Y_{t-1} - b(1-\tau)Y_{t-2}) + G,$$

ki jo preoblikujemo v diferenčno enačbo

$$Y_t - b(1-\tau)Y_{t-1} - kb(1-\tau)Y_{t-1} + kb(1-\tau)Y_{t-2} = G.$$

Karakteristični polinom homogenega dela enačbe je torej

$$\lambda^2 - \lambda b((1+k)(1-\tau)) + bk(1-\tau) = 0.$$

Poglejmo stabilnostne pogoje, ki jih dobimo iz pogoja, da sta ničli karakterističnega polinoma $\lambda_{1,2}$ po absolutni vrednosti manjši od 1, torej

$$\left|\frac{b(1+k)(1-\tau) \pm \sqrt{(b(1+k)(1-\tau))^2 - 4kb(1-\tau)}}{2}\right| < 1.$$

Računamo kot v (2.1.) in dobimo stabilnostne pogoje:

$$1 - b(1-\tau)(1+k) + kb(1-\tau) = 1 - b(1-\tau) > 0,$$
$$1 - bk(1-\tau) > 0,$$
$$1 + b(1-\tau)(1+k) + kb(1-\tau) > 0.$$

Prva neenačba drži, saj imamo ustrezne omejitve za parametre. Tretja neenačba drži, saj je na levi strani neenačbe vsota pozitivnih koeficientov. Ključen pogoj je torej druga neenačba, ki jo lahko zapišemo tudi kot $b < 1/k(1-\tau)$.
Opazimo, da uvedba obdavčitve povzroči, da so stabilnostni pogoji lažje dosegljivi. Obdavčitev naredi model bolj stabilen, ker zmanjša dobiček in s tem potrošnjo. Od spremembe potrošnje pa so odvisne tudi inducirane investicije.

(2) Predpostavimo sedaj, da država porabi vse davčne prihodke plus konstantno vsoto G, torej $I_t^{''} = G + T_t$. Poglejmo stabilnostne pogoje.
Ko vstavimo naše spremenljivke v ravnotežni pogoj, dobimo naslednjo diferenčno enačbo.

$$Y_t(1-\tau) - b(1-\tau)(1+k)Y_{t-1} + kb(1-\tau)Y_{t-2} = G$$

Torej je

$$Y_t - b(1+k)Y_{t-1} + kbY_{t-2} = G/(1-\tau),$$

in tako je homogeni del enačbe enak kakor v (2.1), prav tako stabilnostni pogoji.

3. Prilagoditve trga in racionalna pričakovanja

Model je leta 1961 zapisal ameriški ekonomist John Muth. Predpostavimo izoliran trg z izvoznim upadom. Trenutno povpraševanje po potrošnji C_t je odvisno od trenutne cene p_t, medtem ko je trenutna proizvodnja, glede na izvozni upad, odvisna od cene pričakovane za naslednje obdobje p_t^e. Predpostavimo sedaj, da je blago, ki ga proizvedemo, nepokvarljivo in zaloge I lahko obstajajo. V bistvu zaloge celo držimo iz špekulativnih razlogov. Predpostavimo še, da so kakršnikoli stroški hrambe zanemarljivi.

3.1. **Osnovne enačbe v modelu.**

Potrošnja v času t je odvisna od cene v času t.

$$C_t = -\beta p_t$$

Proizvodnja v času t je odvisna od pričakovane cene.

$$P_t = \gamma p_t^e + x_t$$

$$I_t = \alpha(p_{t+1}^e - p_t)$$

α , β in γ so pozitivne konstante, x pa predstavlja učinek zunanjih dejavnikov na zaloge, na primer vreme.

V vsakem obdobju je potrošnja prišteta povpraševanju po zalogah enaka proizvodnji prišteti zalogam iz prejšnjega obdobja, torej

$$C_t + I_t = P_t + I_{t-1}.$$

Predpostavimo racionalna pričakovanja, to pomeni odlično predvidevanje. Zapišemo torej lahko

$$p_t^e = p_t,$$

$$p_{t+1}^e = p_{t+1}.$$

Iz ravnotežnega pogoja, upoštevajoč racionalna pričakovanja, s preprosto substitucijo $X_t = (1/\alpha)x_{t-1}$ dobimo diferenčno enačbo 2. reda:

$$p_t - \frac{2\alpha + \beta + \gamma}{\alpha} p_{t-1} + p_{t-2} = X_t$$

Partikularna rešitev te enačbe nam bo povedala, da je cena p_t utežena vsota preteklih, sedanjih in prihodnjih vrednosti eksogenih šokov.

3.1.1. *Reševanje enačbe.*

- Homogeni del:
Karakteristični polinom je

$$\lambda^2 - \frac{2\alpha + \beta + \gamma}{\alpha}\lambda + 1 = 0,$$

diskriminanta

$$\triangle = \frac{(2\alpha + \beta + \gamma)^2 - 4\alpha^2}{\alpha^2}$$

je pozitivna in ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{(2\alpha + \beta + \gamma)}{2\alpha} \pm \sqrt{\triangle}.$$

Ker so α, β in γ vse pozitivne konstante, imamo torej dve realni ničli, ki bosta pozitivni in bosta recipročen par. Produkt ničel je enak 1, torej je

$$\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_2}.$$

- Partikularna rešitev:

Ker ne poznamo oblike x_t in s tem posledično X_t, bomo za iskanje rešitve uporabili metodo operatorja zamika, ki smo jo definirali v uvodu.

Partikularna rešitev je:

$$\begin{aligned}\overline{p_t} &= \frac{1}{1-\frac{2\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}L+L^2}X_t = \\ &= \left(\frac{\theta_1}{1-\lambda_1 L}+\frac{\theta_2}{1-\lambda_2 L}\right)X_t,\end{aligned}$$

kjer sta λ_1 in λ_2 ničli karakterističnega polinoma.

Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je $\lambda_1 < 1$, zato uporabimo razširitev nazaj za $(1-\lambda_1 L)^{-1}$ in razširitev naprej za izraz $(a-\lambda_2 L)^{-1}$. Partikularna rešitev je torej:

$$\begin{aligned}\overline{p_t} &= \theta_1\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_1^i X_{t-i} - \theta_2\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_2}\right)^i X_{t+i} = \\ &= \theta_1\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_1^i X_{t-i} - \theta_2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_1^i X_{t+i}\end{aligned}$$

Enačba izraža p_t kot uteženo vsoto preteklih, prihodnjih in sedanjih vrednosti eksogenih šokov. Vidimo tudi, da imamo neke vrste koncept 'sedanje vrednosti' preteklih in prihodnjih šokov, in sicer vpliv šokov eksponentno pada z oddaljenostjo od trenutnega časa.

Splošna rešitev je torej enaka:

$$p_t = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_2^t + \overline{p_t} = A_1\lambda_1^t + A_2\lambda_1^{-t} + \overline{p_t}$$

4. Hicksov model

To je model vrste akcelerator-multiplikator in je pomemben, ker postavi v pravilno perspektivo vprašanje časa. Bolj natančno, kaj drži poslovni cikel pri življenju? Večina teorij poslovnih ciklov uporablja linearne modele. Pri linearnih dinamičnih modelih je nihanje ponavadi dušeno ali pa eksplozivno. Dušeno nihanje bi pomenilo izginotje cikla, po drugi strani pa sistem ne bi bil uspešen pri eksplozivnem nihanju. John Hicks, britanski ekonomist, pa je leta 1950 predpostavil model z eksplozivnim gibanjem, ki je omejeno z zgornjo in spodnjo mejo. Hicksov model lahko smatramo kot nelinearen model, sestavljen iz večih povezanih linearnih segmentov. Hicks torej vpelje pojma 'ceiling' (zgornja meja za prihodke) in 'floor' (spodnja meja). V model doda še spremenljivko g, ki je eksogena konstantna rast avtonomnih investicij. S tem nekako pojasni, da je nihanje prihodka vpeto med zgornjo in spodnjo mejo, in da so amplitude približno konstantne in se gibljejo okoli trenda. Opisali bomo osnovni Hicksov model, kajti splošni Hicksov model temelji na diferenčnih enačbah višjega reda.

4.1. **Osnovne enačbe v Hicksovem modelu.**

$$\begin{aligned} Y_t &= C_t + I_t \\ C_t &= bY_{t-1} \\ I_t &= I_t' + I_t'' \\ I_t' &= k(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \end{aligned}$$

Inducirane investicije ne temeljijo zgolj na razliki v potrošnji, ampak tudi na razliki v prihodku v času $t-1$ in $t-2$.

$$I_t'' = A_0(1+g)^t$$

Avtonomne investicije naraščajo s časom, in sicer po konstantni stopnji rasti g.

V tem modelu so drugačni tudi časovni zamiki. Pri induciranih investicijah opazimo odvisnost ne le od Y_{t-1}, ampak tudi od Y_{t-2}, kar pomeni, da mora preteči nekaj časa, da se lahko proizvede dodatno blago, ki ga zahteva povečano povpraševanje.

Model s preprosto substitucijo lahko prevedemo na diferenčno enačbo drugega reda.

$$Y_t - (b+k)Y_{t-1} + kY_{t-2} = A_0(1+g)^t$$

4.1.1. *Reševanje diferenčne enačbe v Hicksovem modelu.*

- Partikularni del: Znana funkcija časa na desni strani enačbe je eksponentna funkcija. Za partikularno rešitev lahko torej vzamemo $Y_t = Y_0(1+g)^t$, kjer je Y_0 neznana konstanta.

  S substitucijo dobimo:

  $$Y_0(1+g)^t - (b+k)Y_0(1+g)^{t-1} + kY_0(1+g)^{t-2} = A_0(1+g)^t$$

  oziroma

  $$(1+g)^{t-2}[Y_0[(1+g)^2 - (b+k)(1+g) + k] - A_0(1+g)^2] = 0$$

Zadnja enačba bo veljala za vsak t, če bo izraz v oklepajih enak 0. Tako dobimo:

$$Y_0 = \frac{A_0(1+g)^2}{(1+g)^2 - (b+k)(1+g) + k}.$$

Privzeli smo, da imenovalec $\neq 0$ oziroma, da $(1+g)$ ni ničla karakterističnega polinoma. Vemo pa, da če je $(1+g)$ ničla, je rešitev nestabilna. Torej je partikularna rešitev enaka:

$$\overline{Y} = \frac{A_0(1+g)^2}{(1+g)^2 - (b+k)(1+g) + k}(1+g)^t.$$

Partikularno rešitev lahko interpretiramo kakor ravnotežni trend nacionalnega prihodka in sicer kot premikajoče se ravnovesje, ki kaže na rast prihodka ob konstantni stopnji rasti g.

- Homogeni del: Karakteristični polinom je enak

$$\lambda^2 - (b+k)\lambda + k = 0.$$

Ničli sta

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}((b+k) \pm \sqrt{(b+k)^2 - 4k}).$$

Stabilnostne pogoje, tako kot v (1.1), dobimo iz

$$\left|\frac{1}{2}((b+k) \pm \sqrt{(b+k)^2 - 4k}\right| < 1$$

$$|(b+k) \pm \sqrt{(b+k)^2 - 4k}| < 2$$

$$-2 < b+k \pm \sqrt{(b+k)^2 - 4k} < 2$$

$$-2 - b - k < \sqrt{(b+k)^2 - 4k} < 2 - (b+k)$$

Od tod sledi, da je

$$(a) \quad \sqrt{(b+k)^2 - 4k} < (2 - (b+k)),$$

$$(b) - 2 - (b+k) < -\sqrt{(b+k)^2 - 4k}.$$

Če poračunamo točko (a) tako, da izraz kvadriramo dobimo

$$(b+k)^2 - 4k < 4 - 4(k+b) + (b+k)^2$$

$$\Rightarrow 4 - 4b > 0 \Rightarrow 1 - b > 0, \text{ pri pogoju } 2 - (b+k) > 0.$$

To je naš prvi stabilnostni pogoj.

Izraz iz točke (b) pomnožimo z -1 in nato kvadriramo. Dobimo

$$(b+k)^2 - 4k < 4 + 4(k+b) + (b+k)^2.$$

$$\Rightarrow 0 < 4 + 4(k+b) + 4k \Rightarrow 1 + (b+k) + k > 0$$

To je naš drugi stabilnostni pogoj.

Tretji stabilnostni pogoj sledi iz enačbe $|\lambda| < 1$ za kompleksne ničle.

$$|\lambda_{1,2}|^2 = \frac{1}{4}((b+k)^2 - (b+k)^2 + 4k)) < 1 \Rightarrow k < 1.$$

Prva neenačba velja, saj je nagnjenost k potrošnji $b < 1$. Tudi druga neenačba velja, saj je leva stran vsota pozitivnih členov. Ključen je torej tretji stabilnostni pogoj, in sicer da je $k < 1$. Ker je $b < 1$ je torej pogoj v Hicksovem modelu še bolj strog kakor v Samuelsonovem modelu in s tem je Hicksov model manj stabilen.

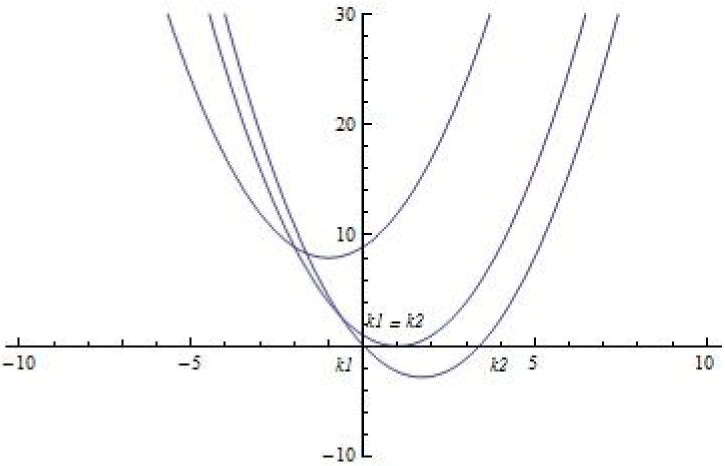
Da bi lahko določili gibanje, si moramo ogledati predznake v karakterističnem polinomu. Ti nam povedo, da ne bo negativnih realnih ničel.
Oglejmo si diskriminanto:

$$\triangle = (b+k)^2 - 4k = k^2 - k(4-2b) + b^2$$

Preveriti moramo pogoje, pri katerih je $\triangle >, <$ ali $= 0$.

Na grafu 3 je narisana parabola $f(k) = k^2 - (4-2b)k + b^2$. Z k_1 in k_2 označimo presečišča z x-osjo.

$$k_1, k_2 = \frac{4 - 2b \pm \sqrt{(4-2b)^2 - 4b^2}}{2}$$



Graf 3.: Diskriminanta v Hicksovem modelu

Iz grafa je očitno, da:
Kadar je $k_1 \neq k_2$, je $f(k) > 0$ za $k < k_1$ in za $k > k_2$. $f(k) = 0$ za $k = k_1$ in $k = k_2$, $f(k)$ pa je < 0 za $k_1 < k < k_2$.
Kadar je $k_1 = k_2$, je $f(k) > 0$ povsod razen za $k = k_1 = k_2$, kjer je enaka 0.
Kadar pa $f(k)$ ne seka k osi, je povsod večja od 0.

S pomočjo substitucije $s = (1-b)$, kjer je s nagnjenost k varčevanju, lahko zapišemo:

$$f(k) = k^2 - (4 - 2 + 2s)k + b^2 =$$
$$= k^2 - 2(1+s)k + (1-s)^2.$$

Od tod dobimo ničli

$$k_1, k_2 = 1 + s \pm 2\sqrt{s} = (1 \pm \sqrt{s})^2.$$

Novih stabilnostnih pogojev s substitucijo ne dobimo. Imamo $f(k) < 0$ za vse vrednosti k-ja na intervalu med ničlama, in $f(k) > 0$ zunaj tega intervala. Dobimo več primerov (Tabela 4).

če	potem	ničle
$k < (1-\sqrt{s})^2$	$\triangle > 0$	realne in različne
$k = (1-\sqrt{s})^2$	$\triangle = 0$	realne in enake
$(1-\sqrt{s})^2 < k < (1+\sqrt{s})^2$	$\triangle < 0$	konjugirano kompleksne
$k = (1+\sqrt{s})^2$	$\triangle = 0$	realne in enake
$k > (1+\sqrt{s})^2$	$\triangle > 0$	realne in različne

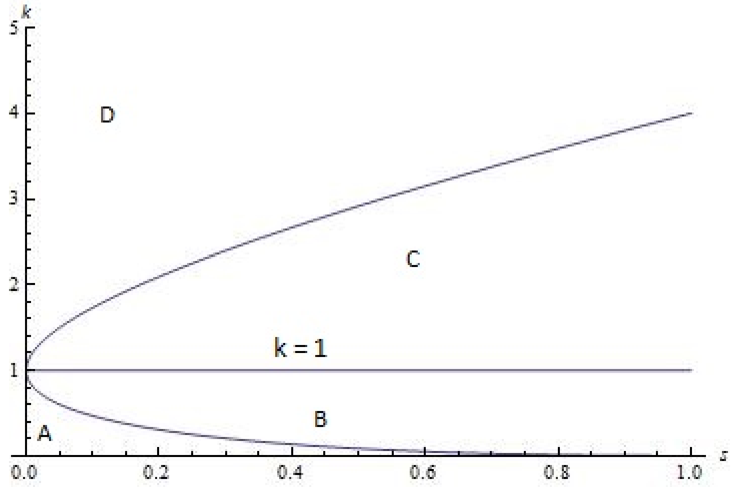
Tabela 4: Tip ničel v Hicksovem modelu

če	ničle	del	obnašanje odklona od trenda
$k < (1-\sqrt{s})^2$	realne,različne	A	monotono, konvergentno
$k = (1-\sqrt{s})^2$	realne, enake		monotono, konvergentno
$(1-\sqrt{s})^2 < k < 1$	konjugirano kompleksne	B	dušeno nihanje
$k = 1$	konjugirano kompleksne		nihanje s kons. amplitudo
$1 < k < (1+\sqrt{s})^2$	konjugirano kompleksne	C	divergentno nihanje
$k = (1+\sqrt{s})^2$	realne in enake		monotono, divergentno
$k > (1+\sqrt{s})^2$	realne in različne	D	monotono, diverhentno

Tabela 5

Rezultate iz prejšnje tabele lahko združimo s stabilnostnim pogojem, da je $k < 1$. Spomnimo se; $s < 1$, to pomeni, da je $\sqrt{s} < 1$. Zato je $0 < 1 - \sqrt{s} < 1$, torej $(1-\sqrt{s})^2 < 1$.

V grafu 6 imamo narisani krivulji $k = (1-\sqrt{2})^2$, ki je na grafu narisana spodaj, $k = (1+\sqrt{2})^2$, na grafu zgoraj in pa $k = 1$.



Graf 6: Ničle v Hicksovem modelu drugega reda

4.2. **Primer.**

(1) Pokaži, da je imenovalec v formuli za Y_0 vedno pozitiven (kar mora biti, da je partikularna rešitev ekonomsko smiselna), ko so ničle karakterističe enačbe pripadajoče homogene enačbe kompleksne. Namig: Imenovalec sovpada s karakteristično enačbo, ko je $1 + g = \lambda$.

Znana funkcija časa je eksponentna funkcija, zato lahko za partikularno rešitev vzamemo $Y_t = Y_0(1 + g)^t$, kjer je Y_0 neznana konstanta.
Iz ravnotežnega pogoja, kakor v (4.1), dobimo diferenčno enačbo, nato pa še, da je

$$Y_0 = \frac{A_0(1+g)^2}{(1+g)^2 - (b+k)(1+g) + k},$$

torej je partikularna rešitev

$$\overline{Y} = \frac{A_0(1+g)^2}{(1+g)^2 - (b+k)(1+g) + k}(1+g)^t.$$

Sedaj želimo, da je imenovalec pozitiven. Iz namiga izvemo, da imenovalec sovpada s karakteristično enačbo, ko $1 + g = \lambda$. Zato gledamo funkcijo $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(k + b) + k$. To je parabola, ki ne seka abscisne osi, če enačba $\lambda^2 - \lambda(k + b) + k = 0$ nima realnih ničel. V takem primeru je $f(\lambda) > 0$, ker v celoti leži nad absciso, torej $(1 + g)^2 - (b + k)(1 + g) + k > 0$.

(2) Poglejmo sedaj še Hicksov model z zunanjo trgovino. Uvoz je funkcija dobička, zamaknjena za eno obdobje, torej $M_t = mY_{t-1}, 0 < m < 0$. Izvoz določajo zunanje zahteve, ki naj bi rasle po konstantni stopnji g_x, tako da $X_t = X_0(1+g_x)^t$. Poiščimo parikularno rešitev in pogoje, da je Y_0 pozitiven. Ali obstaja ravnovesje v plačilni bilanci, torej da je $X_t = M_t$?

Ravnotežni pogoj bo $Y_t = C_t + I_t - M_t + X_t$.
Če vstavimo v pogoj vse naše znane spremenljivke iz (4.1), dobimo enačo

$$Y_t = bY_{t-1} + k(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + A_0(1+g)^t - mY_{t-1} + X_0(1+g_x)^t,$$

iz katere dobimo diferenčno enačbo

$$Y_t - (b+k-m)Y_{t-1} - kY_{t-2} = A_0(1+g)^t + X_0(1+g_x)^t.$$

Za partikularno rešitev lahko poskusimo z

$$\overline{Y} = H_0(1+g)^t + B_0(1+g_x)^t.$$

Doobimo, da je

$$H_0 = \frac{A_0(1+g)^2}{(1+g)^2 - (b+k-m)(1+g) + k}$$

in

$$B_0 = \frac{X_0(1+g_x)^2}{(1+g_x)^2 - (b+k-m)(1+g_x) + k}.$$

Da bo $Y_0 = H_0 + B_0$ pozitiven, je dovolj, da sta oba imenovalca pozitivna. kot v primeru (1) to drži.
Če želimo preveriti še, ali obstaja ravnovesje v plačilni bilanci, moramo primerjati stopnjo rasti uvoza in izvoza. Vemo, da izvoz raste po konstantni stopnji g_x. Uvoz pa je proporcionalen dobičku iz prejšnjega obdobja, torej je rast enaka stopnji rasti g plus g_x. To nasplošno povzroči bilančno neravnovesje, razen v primeru zaprte statične ekonomije, koje $g = 0$. Uvoz in izvoz bi potemtakem rasla po enaki stopnji g_x.

4.3. **Zgornja meja 'ceiling' in spodnja meja 'floor'.** Hicksov cikel je sestavljen iz naraščajoče in padajoče faze.

Zgornja meja ali 'ceiling':

Za zgornjo mejo postavimo vrednost prihodkov ob polni zaposlenosti. Zgornja meja narašča skozi čas (zaradi rasti populacije in produktivnosti) in raste po isti stopnji kakor avtonomne investicije.

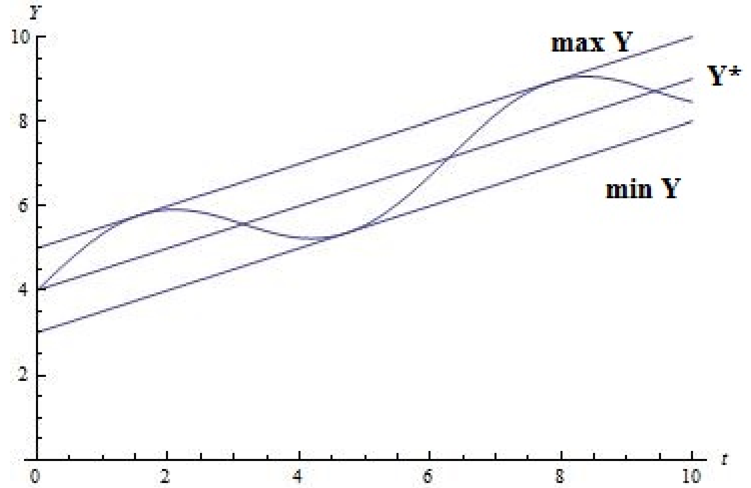
$$B_t = B_0(1+g)^t,$$

kjer je B_t vrednost zgornje meje, B_0 pa pozitivna konstanta, večja od Y_0, zato lahko sklepamo, da zgornja meja leži nad trendom.

- Naraščajoča faza:
  Da prihodki dosežejo zgornjo mejo, mora dohodek rasti po višji stopnji kakor zgornja meja;
  $$\frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} > g$$
  Opazujemo sistem v ravnovesju. Nastopi nek zunanji šok, ki vpliva na dobiček. Začne se eksplozivno gibanje, ki potisne dobiček proti zgornji meji. Da dobiček trči ob zgornjo mejo, mora rasti hitreje kakor g. Zakaj prihodki ne morejo ostati na zgornji meji?
  Zgornja meja raste po enaki stopnji g kakor trend. Prihodki pa lahko rastejo po stopnji g samo ob trendu, torej se mora prihodek vrniti nazaj k trendu, saj je konstantna stopnja rasti g trajna le tam. Začne se torej padajoča faza.

- Padajoča faza:
  Ko se prične padajoča faza, prihodki zaradi eksplozivnosti gibanja prehitijo trend. V padajoči fazi so investicije enake avtonomnim investicijam, zmanjšanim za inducirane investicije. Prihodek se v tej fazi priblizuje spodnji meji, vendar mora, ker spodnja meja narašča, prihodek slej kot prej začeti naraščati. Prihodek začne eksplozivno naraščati proti zgornji meji in zgodba se ponovi.

4.4. **Interpretacija Hicksovega cikla.**



Graf 7: Hicksov cikel

Zgornja meja je na grafu označena z max Y, spodnja pa z min Y. Trend je označen z Y^*. Graf se začne v vzponu oziroma ekspanziji, torej prihodek raste. Akcelerator deluje in inducirane investicije obstajajo. Investicije rastejo s hitrostjo večjo od g, torej prihodek raste hitreje kakor g.
Vendar hitro dosežemo zgornjo mejo. Ker zaloge ne morejo rasti hitreje kakor g, je prihodek prisiljen rasti po stopnji g. Dohodek se giblje ob zgornji meji. Akcelerator sicer še vedno deluje, vendar pa so investicije manjše kakor tiste, ki so nas pripeljale do zgornje meje. Ker pa so investicije manjše, prihodek ni trajnosten in se bo zato moral pomakniti proti ravnovesni legi.
Ko dohodek pada proti trendu, se padec ne bo ustavil, saj ravnovesje zahteva pozitivne inducirane investicije, medtem ko so med padcem 0 ali pa celo negativne. Tej fazi rečemo recesija.
Dohodek udari ob spodnjo mejo. Na tej točki bo prenehal padati in ker avtonomne investicije rastejo s konstantno stopnjo g, bo tudi dohodek rastel po stopnji g, po spodnji meji. Ko pa dohodek raste po spodnji meji, bo člen $k(Y_{t-1} - Y_{t-2})$ pozitiven in inducirane investicije se bodo začele pojavljati.
Dohodek nato začne rasti hitreje kakor po stopnji g, zato se pomakne od spodnje meje proti trendu in sčasoma doseže trend. Vendar pa bo vpliv akceleratorja dohodek ponesel nad ravnovesno lego proti zgornji meji. Cikel se bo ponovil.

Rast je prisotna v vsakem trenutku zaradi eksogene rasti avtonomnih investicij. Stopnja rasti g je pomembna ne le zaradi rastočih ciklov, temveč tudi za sam obstoj cikla. Če bi g izločili, bi bila ravnovesje in spodnja meja konstantni in cikel bi se zaključil.
Nihanja dohodka so torej vpeta med dve meji in nihanja oziroma amplitude nihanj so relativno konstantne, merjeno kot odklod od trenda.

Literatura

[1] Gandolfo Giancarlo, *Economic Dynamics*, study edition, Springer, Berlin ; New York, 1997.

[2] *A reconsideration of Hick's non-linear trade cycle model*, [ogled 4. 5. 2013], dostopno na http://dare.uva.nl/document/15774.

[3] *Hicks' Trade Cycle*, ogled[6. 7. 2013], dostopno na \\http://cruel.org/econthought/essays/multacc/hicksacc.html.

[4] *Mr. Hicks's Trade Cycle Theory*, [ogled 21.8.2013], dostopno na http://www.jstor.org/stable/137700.

[5] *Professor Hicks on the Trade Cycle*, [ogled 22.8.2013], dostopno na http://link.springer.com/article/10.1007%2FBF02199995#page-1.

[6] Tomaž Centrih, *Modeliranje in analiza poslovnih ciklov*, diplomska naloga, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko, 2005.