UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1.stopnja

Jaša Krivec

**Neskončno deljive porazdelitve**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Matjaž Omladič

Ljubljana, 2013

Kazalo

**Neskončno deljive porazdelitve**

Povzetek

Slučajna spremenljivka je neskončno deljiva, če jo za vsak $n \in \mathbb{N}$ lahko razdelimo na $n$ neodvisnih in enako porazdeljenih delov. V uvodu predstavimo osnovne lastnosti neskončno deljivih porazdelitev in jih povežemo s centralnim limitnim problemom. V naslednjem razdelku obravnavamo zadostne in potrebne pogoje za neskončno deljivost. Neskončna deljivost porazdelitev je zelo pomembna tudi v teoriji procesov s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki, v seminarju pa obenem pokažemo, da ta lastnost včasih velja za porazdelitve časov prvih prehodov v markovskih verigah. V zaključku omenimo še nekaj znanih neskončno deljivih porazdelitev. Izkaže se, da so neskončno deljive tudi nekatere pogosto uporabljene porazdelitve, kot so normalna, gama ter Poissonova.

**Infinitely divisibile distributions**

Abstract

Random variable is infinitely divisible, if it can be devided into $n$ independent and identically distributed parts for every $n \in \mathbb{N}$. In the introduction we present basic properties of infinitely divisible distributions and we link this type of distributions with the central limit problem. Furthermore, we discuss necessary and sufficient conditions for infinite divisibility. Infinitely divisible distributions are also very important in processes with stationary and independent increments. Moreover, we show that this property sometimes holds for the first passage times in Markov chains as well. To conclude, we mention few well known infinitely divisible distributions, e.g. normal, gamma and Poisson distribution.

**Math. Subj. Class. (2010):** 60E07, 60F05, 60G51, 60J10, 60J27, 60J65

**Ključne besede:** Neskončno deljiva porazdelitev, karakteristična funkcija, konvolucija, stacionarni neodvisni procesi, časi prvih prehodov v markovskih verigah

**Keywords:** Infinitely divisible distribution, convolution, characteristic function, stationary independent processes, first passage times in Markov chains

## 1. Uvod in osnovne lastnosti

Deljivost slučajne spremenljivke $X$ je lastnost, da je $X$ lahko deljiva na neodvisne enako porazdeljene dele. Rečemo, da je $X$ $n$-deljiva, če obstajajo take neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke $Y_1, \cdots, Y_n$, da velja:

$$X = Y_1 + \ldots + Y_n,$$

kjer $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Opomba: Če za slučajne spremenljivke $Y_1, \ldots, Y_n$ zahtevamo, da so neodvisne in ne nujno enako porazdeljene, potem pravimo, da je X $n$-razcepna. Deljivost je torej strožja zahteva kot razcepnost. Smiselno je poudariti tudi dejstvo, da iz $(n+1)$-deljivosti ne sledi nujno $n$-deljivost slučajne spremenljivke.

**Primer 1.0.1.** Zapišimo enostaven primer pri $n = 3$. Slučajna spremenljivka $X \sim Bin(3, p)$ je 3-deljiva. Vemo namreč, da velja $X = Y_1 + Y_2 + Y_3$, kjer so $Y_i$ neodvisne slučajne spremenljivke porazdeljene po zakonu $Bern(p)$. V tem primeru lahko preverimo tudi veljavnost trditve iz zgornje opombe in pokažemo, da slučajna spremenljivka $X$ ni 2-deljiva. Naj velja $X = Y_1 + Y_2$, kjer sta $Y_1$ in $Y_2$ neodvisni ter enako porazdeljeni slučajni spremenljivki. Potem skoraj gotovo velja $Y_i \in [0, \frac{3}{2}]$, $P(Y_i = 0) > 0$ in $P(Y_i = \frac{3}{2}) > 0$. Torej obstaja pozitivna verjetnost, da $X$ zavzame vrednost $\frac{3}{2}$, kar je seveda v protislovju z dejstvom, da je $X$ binomsko porazdeljena slučajna spremenljivka. □

Deljivost slučajnih spremenljivk je zelo uporabna v modeliranju. Če na primer opazujemo vsoto škodnih zahtevkov, ki jih ima zavarovalnica v enem letu, lahko ta znesek modeliramo kot slučajno spremenljivko $X$, ki je 12-deljiva. V tem primeru slučajne spremenljivke $Y_i$ predstavljajo škodne zahtevke v posameznih mesecih $i = 1, \ldots, 12$. Podobno bi lahko zahtevali tudi 52-deljivost v primeru tedenskih zahtevkov ali pa celo 365-deljivost v primeru dnevnih zahtevkov. Ugotovili smo že, da $(n+1)$-deljivost ne implicira $n$-deljivosti, zato je bolj smiselno obravnavati, ali je slučajna spremenljivka $X$ $n$-deljiva za vsak $n$. Taka lastnost je zelo uporabna pri slučajnih spremenljivkah, ki merijo količine v zveznem času (kot je na primer merjenje količine dežja). Obenem nas vodi k sledečemu konceptu, ki je glavna tema tega diplomskega seminarja.

**Definicija 1.0.2.** Slučajna spremenljivka je neskončno deljiva, če za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja:

$$X \stackrel{d}{=} X_{n,1} + \cdots + X_{n,n},$$

kjer so $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke, simbol $\stackrel{d}{=}$ pa označuje enakost porazdelitve slučajne spremenljivke $X$ s porazdelitvijo vsote slučajnih spremenljivk $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$. Neskončna deljivost slučajne spremenljivke X je pravzaprav lastnost porazdelitve X. Tudi za porazdelitev, porazdelitveno funkcijo, gostoto porazdelitve in transformacije neskončno deljive slučajne spremenljivke X uporabljamo izraz neskončno deljive.

Opomba: V celotnem seminarju uporabljamo spodaj zapisane enotne oznake. Naj bo $X$ slučajna spremenljivka. Označimo:

- $P$ - rodovna funkcija,
- $\tilde{F}$ - Laplaceova transformacija,
- $\varphi$ - karakteristična funckija,
- $F$ - porazdelitvena funkcija,
- $f$ - gostota porazdelitve.

Iz definicije (1.0.2) sledi, da je porazdelitvena funkcija $F$ neskončno deljiva natanko tedaj, ko je za vsak $n \in \mathbb{N}$ enaka $n$-kratni konvoluciji neke porazdelitvene funkcije $F_n$ same s seboj. Prav tako velja tudi, da je karakteristična funkcija $\varphi$ neskončno deljiva natanko tedaj, ko je za vsak $n \in \mathbb{N}$ enaka $n$-ti potenci neke karakteristične funkcije $\varphi_n$. To lahko zapišemo kot:

$$F = F_n^{\star n} \; za \; n \in \mathbb{N},$$
$$\varphi(u) = \{\varphi_n(u)\}^n \; za \; n \in \mathbb{N}.$$

Funkcijo $F_n$ poimenujemo $n$-ti faktor funkcije $F$, funkcijo $\varphi_n$ pa $n$-ti faktor funkcije $\varphi$. Iz definicije obenem sledi, da če je slučajna spremenljivka $X$ neskončno deljiva, je tudi $aX$ neskončno deljiva za vsak $a \in \mathbb{R}$. Velja tudi, da je slučajna spremenljivka $X + Y$ neskončno deljiva, če sta $X$ in $Y$ neodvisni in neskončno deljivi slučajni spremenljivki. Slednjo lastnost bomo v seminarju pogosto uporabljali in jo zato zapišemo v spodnjo trditev.

**Trditev 1.0.3.** *Neskončna deljivost porazdelitev se s konvolucijami ohranja.*

Velja, da lahko porazdelitveno funkcijo $F$ razcepimo kot:

$$F = \alpha F_d + (1 - \alpha) F_c,$$

kjer $0 \leq \alpha \leq 1$, $F_d$ diskretna porazdelitvena funkcija in $F_c$ zvezna porazdelitvena funkcija. Če $0 < \alpha < 1$, je razčlenitev enolična.

**Lema 1.0.4.** *Naj bo $X$ zvezna slučajna spremenljivka, $Y$ pa diskretna slučajna spremenljivka in naj bosta neodvisni. Potem je vsota $X + Y$ zvezna slučajna spremenljivka.*

*Dokaz.* Naj bo $X$ zvezna in $Y$ diskretna slučajna spremenljivka. Želimo dokazati, da je $Z := X + Y$ zvezna slučajna spremenljivka. Dovolj je pokazati, da je verjetnost skoka slučajne spremenljivke $Z$ enaka 0. Velja:

$$\begin{aligned}
P(Z = u) &= P(X + Y = u) = \\
&= \sum_i P(Y = y_i) P(X + Y = u | Y = y_i) = \\
&= \sum_i P(Y = y_i) P(X = u - y_i | Y = y_i) = \\
&= \sum_i P(Y = y_i) P(X = u - y_i) = 0.
\end{aligned}$$

Verjetnost, da $X = u - y_i$ je enaka 0, saj je $X$ zvezna slučajna spremenljivka. Sledi, da je tudi $Z$ zvezna slučajna spremenljivka , saj je $P(Z = u) = 0$. $\square$

**Trditev 1.0.5.** *Diskretna komponenta $F_d$ neskončno deljive porazdelitvene funkcije $F$ na $\mathbb{R}$ je neskončno deljiva.*

*Dokaz.* Naj bo $n \in \mathbb{N}$ in $F_n$ $n$-ti faktor funkcije $F$. Razcepimo $F_n$ kot $F$ zgoraj:

$$F_n = \alpha_n F_{n,d} + (1-\alpha_n)F_{n,c}.$$

Ker vemo, da je $F = F_n^{\star n}$ za $n \in \mathbb{N}$, po binomski formuli sledi:

$$F = \alpha_n^n F_{n,d}^{\star n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha_n^k (1-\alpha_n)^{n-k} F_{n,d}^{\star k} \star F_{n,c}^{\star(n-k)}.$$

Ker po lemi (1.0.4) velja, da vsi izrazi v zgornji vsoti predstavljajo zvezne porazdelitve, po enoličnosti razcepa funkcije $F$ sledi:

$$F_d = F_{n,d}^{\star n}.$$

Torej je $F_d$ neskončno deljiva porazdelitvena funkcija. $\square$

Množica točk nezveznosti neskončno deljive porazdelitvene funkcije $F$ je lahko prazna, ima en element ali pa je neomejena. To dokazuje trditev (1.0.5) skupaj s spodaj navedeno elementarno lastnostjo. Ta nam obenem pove, da na primer enakomerna in binomska porazdelitev nista neskončno deljivi.

**Trditev 1.0.6.** *Neizrojena omejena slučajna spremenljivka ni neskončno deljiva.*

*Dokaz.* Naj bo $X$ slučajna spremenljivka in naj velja $|X| \leq a$ za nek $a \in \mathbb{R}$. Predpostavimo, da je $X$ neskončno deljiva slučajna spremenljivka. Potem za $n$-ti faktor $X_n$ slučajne spremenljivke $X$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, po trditvi (1.0.5) velja:

$$|X_n| \leq a/n$$

in zato lahko $\mathbb{V}arX$ ocenimo kot:

$$\mathbb{V}arX = n\mathbb{V}arX_n \leq n\mathbb{E}X_n^2 \leq a^2/n.$$

Ko $n$ pošljemo proti $\infty$, velja $\mathbb{V}arX = 0$. To pomeni, da je slučajna spremenljivka $X$ izrojena. Če je torej slučajna spremenljivka $X$ omejena in neskončno deljiva, je lahko izključno izrojena slučajna spremenljivka. Sledi, da omejena neizrojena slučajna spremenljivka ni neskončno deljiva. $\square$

Vrnimo se spet k dejstvu, da je deljivost strožji pogoj kot razcepnost. V spodnjem primeru pokažemo, da je enakomerna porazdelitev $n$-razcepna vendar ni $n$-deljiva za vsak $n$.

**Primer 1.0.7.** Naj bo slučajna spremenljivka $X$ porazdeljena enakomerno na intervalu $(-1,1)$. Na enak način kot v dokazu prejšnje trditve je možno pokazati, da $X$ ni $n$-deljiva za vsak $n > 2$. V primeru $n = 2$ predpostavimo, da $X \stackrel{d}{=} Y_1 + Y_2$, kjer sta $Y_1$ in $Y_2$ neodvisni ter porazdeljeni po istem zakonu $Y$. Potem je $Y \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ skoraj gotovo in velja

$$\begin{aligned}
\{P(Y > 0)\}^2 &= P(Y_1 > 0, Y_2 > 0) \geq \\
&\geq P(Y_1 + Y_2 > \frac{1}{2}) = P(X > \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}, \\
\{P(Y \leq 0)\}^2 &= P(Y_1 \leq 0, Y_2 \leq 0) \geq \\
&\geq P(Y_1 + Y_2 < -\frac{1}{2}) = P(X < -\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Sledi:

$$P(Y > 0) \geq \frac{1}{2} \text{ in } P(Y \leq 0) \leq \frac{1}{2}.$$

Če namesto $P(Y > 0)$ v izraz vstavimo $1 - P(Y \leq 0)$, lahko opazimo, da velja neenakost $\frac{1}{2} \leq P(Y \leq 0) \leq \frac{1}{2}$ in posledično:

$$P(Y > 0) = \frac{1}{2} \text{ in } P(Y \leq 0) = \frac{1}{2}.$$

Velja še $P(Y_1 > 0, Y_2 > 0) = P(Y_1 + Y_2 > \frac{1}{2})$ ter $P(Y_1 \leq 0, Y_2 \leq 0) = P(Y_1 + Y_2 < -\frac{1}{2})$ in očitno $P(|Y| \leq \frac{1}{4}) = 0$. Iz tega sledi $P(\frac{1}{4} \leq |X| \leq \frac{1}{2}) = 0$, kar je v protislovju z dejstvom, da je $X$ enakomerno porazdeljena slučajna spremenljivka. $X$ torej ni 2-deljiva.
Obravnavamo še razcepnost. Kot smo že omenili v uvodu, za razcepnost velja, da so slučajne spremenljivke neodvisne, vendar ne nujno enako porazdeljene. Karakteristično funkcijo $\varphi$ slučajne spremenljivke $X$ lahko zapišemo kot:

$$\varphi(u) = \frac{e^{iu} - e^{-iu}}{2iu} = \frac{\sin(u)}{u} = \prod_{j=1}^{\infty} \cos\left(\frac{u}{2^j}\right).$$

Uporabimo Lévyjev izrek, ki pravi, da če zaporedje karakterističnih funkcij konvergira po točkah proti neki karakteristični funkciji $\varphi$, potem tudi zaporedju pripadajoče slučajne spremenljivke šibko konvergirajo proti slučajni spremenljivki, katere karakteristična funkcija je enaka $\varphi$. V obravnavanem primeru torej velja:

$$\sum_{j=1}^{\infty} Y_j \xrightarrow{d} X,$$

kjer so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, znak $\xrightarrow{d}$ pa predstavlja šibko konvergenco oziroma konvergenco po zakonu. Za vsak $j \in \mathbb{N}$ je $Y_j$ slučajna spremenljivka, ki zavzame vrednosti $-\frac{1}{2^j}$ ter $\frac{1}{2^j}$, obe z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Sledi, da je $X$ $n$-razcepna za vsak $n \in \mathbb{N}$. $\square$

**Primer 1.0.8.** Naj bo $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Potem je slučajna spremenljivka $X$ neskončno deljiva. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ za $n$-ti faktor velja $X_n \sim N(\mu/n, \sigma^2/n)$. $\square$

**Primer 1.0.9.** Naj bo $X \sim \mathit{Poisson}(\lambda)$. Potem je slučajna spremenljivka $X$ neskončno deljiva. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ za $n$-ti faktor velja $X_n \sim \mathit{Poisson}(\lambda/n)$. $\square$

**Primer 1.0.10.** Naj bo $X \sim \mathit{gamma}(r, \lambda)$. Potem je slučajna spremenljivka $X$ neskončno deljiva. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ za $n$-ti faktor velja $X_n \sim \mathit{gamma}(r/n, \lambda)$. Pri $r = 1$ dobimo eksponentno porazdelitev in tudi ta je neskončno deljiva. $\square$

**Trditev 1.0.11.** *Če je $\varphi$ neskončno deljiva karakteristična funkcija, potem $\varphi(u) \neq 0$ za vsak $u \in \mathbb{R}$ in $\varphi^t$ je karakteristična funkcija za vse $t > 0$. Natančneje, za $n \in \mathbb{N}$ je $\varphi^{1/n}$ $n$-ti faktor karakteristične funkcije $\varphi$.*

Zgornjo trditev bomo potrebovali pri konstrukciji procesov s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki v zveznem času.

1.1. **Centralni limitni problem.** Iz že omenjenih primerov vemo, da sta Poissonova ter normalna porazdelitev pomembna gradnika splošnih neskončno deljivih porazdelitev. Pokažemo lahko, da sta obenem tudi posebni rešitvi centralnega limitnega problema. Normalna porazdelitev na primer reši spodnji problem. Naj bodo $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke z lastnostjo:

$$\frac{1}{b_n}(Y_1 + \cdots + Y_n - a_n) \xrightarrow{d} X \quad [n \to \infty], \tag{1}$$

kjer $a_n \in \mathbb{R}$ ter $b_n > 0$. Zanima nas, katere so možne porazdelitve limitne slučajne spremenljivke $X$. Odgovorimo lahko s sledečim primerom.

**Primer 1.1.1.** Naj $Y_j \sim Bern(p)$ z vrednostima 0 in 1. Potem je vsota $Y_1+\cdots+Y_n$ porazdeljena binomsko s parametroma $(n, p)$. Matematično upanje je enako $np$, varianca pa $np(1-p)$. Če torej definiramo $a_n = np$ in $b_n = \sqrt{np(1-p)}$, potem dobimo (1), kjer je slučajna spremenljivka $X$ porazdeljena standardno normalno. $\square$

**Izrek 1.1.2** (Centralni limitni izrek)**.** *Če so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke z matematičnim upanjem $\mu$ in končno varianco $\sigma^2$, potem velja:*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(Y_1 + \cdots + Y_n - n\mu) \xrightarrow{d} X \quad [n \to \infty], \tag{2}$$

*kjer je slučajna spremenljivka $X$ porazdeljena standardno normalno.*

Ob določenih predpostavkah lahko Poissonovo porazdelitev dobimo iz binomske porazdelitve s parametroma $(n, p)$. Naj gre $n$ proti $\infty$, poleg tega pa naj bo parameter $p$ odvisen od $n$. Potem so $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$, neodvisne in $Bern(p_n)$ porazdeljene slučajne spremenljivke, ki lahko zavzamejo vrednosti 0 in 1. Poleg tega velja, da je njihova vsota $X_{n,1} + \cdots + X_{n,n}$ porazdeljena $Bin(n, p_n)$ z upanjem $np_n$. Predpostavimo, da $np_n \to \lambda$, ko $n \to \infty$. Sledi:

$$X_{n,1} + \cdots + X_{n,n} \xrightarrow{d} X \quad [n \to \infty], \tag{3}$$

kjer je slučajna spremenljivka $X$ porazdeljena po zakonu $Poisson(\lambda)$.

Nadalje opazimo, da lahko (1) zapišemo v obliki (3), če definiramo:

$$X_{n,j} := \frac{1}{b_n}(Y_j - a_n/n) \quad [n \in \mathbb{N};\ j = 1, \ldots, n].$$

Ker so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke, so tudi $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ neodvisne in enako porazdeljene (za vsak fiksen $n$). To nas vodi do obravnave bolj splošnih trikotnih matrik $(X_{n,j})_{n\in\mathbb{N}, j=1,\ldots,k_n}$, kjer $k_n \uparrow \infty$, ko $n \to \infty$, in so $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ neodvisne in enako porazdeljene slučajne spremenljivke. Sedaj se lahko ponovno vprašamo o možnih limitnih porazdelitvah slučajne spremenljivke $X$, podobno kot pri (3). Po definiciji je seveda ustrezna vsaka neskončno deljiva porazdelitev, možno pa je tudi dokazati, da druge rešitve ne obstajajo. Neskončno deljive porazdelitve lahko torej opredelimo na sledeč način.

**Izrek 1.1.3.** *Slučajna spremenljivka $X$ je neskončno deljiva natanko tedaj, ko jo lahko dobimo kot:*

$$X_{n,1} + \cdots + X_{n,k_n} \xrightarrow{d} X \quad [n \to \infty], \tag{4}$$

*kjer $k_n \uparrow \infty$ in so za vsak $n \in \mathbb{N}$ slučajne spremenljivke $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}$ neodvisne in enako porazdeljene.*

Nadalje nas zanima, ali je limitna slučajna spremenljivka $X$ v (4) še vedno neskončno deljiva, če izpustimo pogoj, da so v vsaki vrstici trikotne matrike slučajne spremenljivke $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}$ enako porazdeljene.

**Primer 1.1.4.** Poglejmo si poseben primer tipa (1), kjer so $Y_j \stackrel{d}{=} Z_j/j$ in so $Z_1, Z_2, \ldots$ neodvisne in porazdeljene standardno eksponentno, to je eksponentno z $\lambda = 1$. Možno je dokazati, da pri izboru $a_n = \log n$ in $b_n = 1$ velja, da ima limitna slučajna spremenljivka $X$ *Gumbelovo* porazdelitev, ki je neskončno deljiva. □

Po drugi strani pa smo v primeru (1.0.7) že videli, da niso nujno vse limitne spremenljivke $X$ iz (1), kjer so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke, neskončno deljive. V splošnem velja spodnji izrek, ki ga zapišemo kar brez dokaza.

**Izrek 1.1.5.** *Slučajna spremenljivka $X$ je neskončno deljiva natanko tedaj, ko jo lahko dobimo kot:*

$$X_{n,1} + \cdots + X_{n,k_n} \xrightarrow{d} X \quad [n \to \infty],$$

*kjer $k_n \uparrow \infty$ in so slučajne spremenljivke $X_{n,1}, \ldots, X_{n,k_n}$ neodvisne za vsak $n \in \mathbb{N}$ ter velja*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\le j\le k_n} P(|X_{n,j}| \ge \varepsilon) = 0 \quad [\varepsilon > 0].$$

1.2. **Pomembni izreki o neskončno deljivih porazdelitvah.** Sledijo pomembni izreki o neskončno deljivih porazdelitvah, katerih dokazi presegajo nivo znanja dodiplomskega študija.

**Izrek 1.2.1 (Kanonična predstavitev Kolmogorova).** *Funkcija $\varphi$ je karakteristična funkcija neskončno deljive porazdelitve z vrednostmi $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$ in končno neničelno varianco natanko tedaj, ko ima $\varphi$ obliko:*

$$\varphi(u) = \exp\left[iu\mu + \kappa \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iux)\frac{1}{x^2} dH(x)\right],$$

*kjer je $\mu \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ in $H$ porazdelitvena funkcija.*

**Izrek 1.2.2 (Lévyjeva kanonična predstavitev).** *Funkcija $\varphi$ je karakteristična funkcija neskončno deljive porazdelitve z vrednostmi $\mathbb{C}$ na $\mathbb{R}$ natanko tedaj, ko ima $\varphi$ obliko:*

$$\varphi(u) = \exp\left[iua - \frac{1}{2}u^2\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2}) dM(x)\right],$$

*kjer je $a \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \ge 0$ in $M$ funkcija zvezna z desne, ki je nepadajoča na $(-\infty, 0)$ in na $(0, \infty)$ ter velja $M(x) \to 0$, ko $x \to -\infty$ ali $x \to \infty$, poleg tega pa še $\int_{(-1,1)\setminus\{0\}} x^2 dM(x) < \infty$.*

**Izrek 1.2.3.** *Slučajna spremenljivka $X$ zavzame vrednosti v $\mathbb{N}_0, \mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}$ ter je neskončno deljiva, če njena transformacija dopušča enega od naslednjih zapisov:*

$$P(z) = exp\left[\mu(Q(z) - 1)\right],$$

*kjer velja $\mu > 0$, $Q$ je gostota,*

$$\tilde{F}(\tau) = exp\left[\int_0^\infty (1 - e^{-\tau X})x^{-1}dK(x)\right],$$

*kjer je $K$ nepadajoča funkcija ali*

$$\varphi(u) = \exp\left[icu + \int_{-\infty}^\infty (e^{iux} - 1 - \frac{iux}{1+x^2})\frac{1+x^2}{x^2}d\theta(x)\right],$$

*kjer je $c \in \mathbb{R}$ in $\theta$ nepadajoča funkcija. Slednje dejstvo je znano tudi kot Lévy-Hinčinov izrek.*

Za slučajno spremenljivko $X$, ki zavzame vrednosti v $\mathbb{N}_0$ ali $\mathbb{R}_+$, lahko zgornji izrek prevedemo v spodnje zahteve.

**Posledica 1.2.4.** *Slučajna spremenljivka $X$ v $\mathbb{N}_0$ ali v $\mathbb{R}_+$ je neskončno deljiva, če velja:*

$$\frac{P'(z)}{P(z)}$$

*je absolutno monotona, tj. ima nenegativne odvode za $z \in [0, 1)$ ali pa je*

$$-\frac{\tilde{F}'(\tau)}{\tilde{F}(\tau)}$$

*popolno monotona, tj. ima izmenične odvode za $\tau \in (0, \infty)$.*

Ostali pogoji za neskončno deljivost so navedeni v naslednjem poglavju.

## 2. Pogoji za neskončno deljivost

Na koncu tega seminarja je zapisan seznam nekaterih porazdelitev, ki so neskončno deljive. Za dokaz te lastnosti potrebujemo zadostne pogoje za neskončno deljivost. Po drugi strani pa, če želimo ovreči lastnost neskončne deljivosti, potrebujemo potrebne pogoje oziroma lastnosti neskončno deljivih porazdelitev. V tem razdelku je navedenih nekaj standardnih pogojev obeh tipov. Reference za spodaj navedene dokaze so podane v člankih [3] in [4].

### 2.1. Zadostni pogoji.

(1) Diskretna porazdelitev $\{p_k\}$ na $\mathbb{N}_0$, kjer je $p_0 > 0$, je neskončno deljiva, če velja eden od naslednjih pogojev:

(a)

$$\begin{vmatrix} p_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & p_1 \\ p_1 & p_0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 2p_2 \\ p_2 & p_1 & p_0 & \cdot & \cdot & 0 & 3p_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & p_0 & \cdot \\ p_{n-1} & p_{n-2} & p_{n-3} & \cdot & \cdot & p_1 & np_n \end{vmatrix} \geq 0$$

za vse $n \in \mathbb{N}$;

(b) $p_n$ je log-konveksna, tj. $p_{n+1}/p_n$ je nepadajoča;

(c) $p_n$ je popolnoma monotona, tj. zaporedje je nenaraščajoče in ima alternirajoče diference oziroma ekvivalentno, velja

$$p_n = \int_0^1 u^n d\mu$$

za neko mero $\mu$.

(2) Porazdelitvena funkcija $F$ na $\mathbb{R}_+$ je neskončno deljiva, če velja eden od naslednjih pogojev:

(a)

$$\tilde{F}(\tau) = \int_0^\infty (\tilde{G}(\tau))^x dH(x),$$

kjer sta $G$ in $H$ neskončno deljivi porazdelitveni funkciji;

(b) gostota $f$ je log-konveksna, tj. $\log f(x)$ je konveksna;

(c) gostota $f$ je popolnoma monotona, tj. nenaraščajoča in ima alternirajoče odvode oz. ekvivalentno, porazdelitvena funkcija $F$ je mešanica eksponentnih porazdelitvenih funkcij:

$$f(x) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dG(\lambda),$$

kjer je $G$ porazdelitvena funkcija.

(3) Porazdelitvena funkcija $F$ na $\mathbb{R}$ je neskončno deljiva, če velja eden od naslednjih pogojev:

(a)

$$\varphi(t) = \tilde{H}(-\log(\gamma(t))),$$

kjer sta $H$ in $G$ neskončno deljivi porazdelitveni funkciji;

(b)

$$\varphi(t) = \tilde{H}(t^2/2),$$

kjer je porazdelitvena funkcija $H$ neskončno deljiva, tj. $F$ je mešanica normalnih porazdelitev oziroma ekvivalentno,

$$X \stackrel{d}{=} NV^t$$

kjer je $N$ standardno normalno porazdeljena slučajna spremenljivka, $F_V = H$, slučajni spremenljivki $N$ in $V$ pa sta neodvisni;

(c) karakteristična funkcija $\varphi$ je realna in log-konveksna na $(0, \infty)$.

2.2. **Potrebni pogoji.**

(1) Če je porazdelitev $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ na $\mathbb{N}_0$, kjer je $p_0 > 0$, neskončno deljiva, potem velja:
   (a) $2p_0p_2 - p_1^2 \geq 0$;
   (b) če velja $p_m p_n > 0$, potem $p_{m+n} > 0$;
   (c) če velja $p_1 > 0$, potem $p_n > 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$;
   (d) če je $p_1 > 0$, potem je $p_n \geq (a/n)^n$ za nek $a > 0$, torej $p_n$ ne more padati poljubno hitro.

(2) Če je porazdelitvena funkcija $F$ na $\mathbb{R}_+$ neskončno deljiva, potem velja:
   (a) če je $F(x) > 0$ za vse $x > 0$ in če je $f = F'$ zvezen, potem je $f(x) > 0$ za vse $x > 0$;
   (b) $-\log(1 - F(x)) \leq ax \log x$ za nek $a > 0$ in zadostno velike $x$.

(3) Če je porazdelitvena funkcija $F$ na $\mathbb{R}$ neskončno deljiva, potem velja:
   (a) $\varphi(t) \neq 0$ za $t \in \mathbb{R}$;
   (b) če je
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)|^p dt < \infty$$
   za vse $p > 0$, potem je množica $\{x | f(x) = 0\}$ prazna ali pa je polos;
   (c)
$$-\log(F(-x) + 1 - F(x)) \leq ax \log x$$
   za nek $a > 0$ in zadostno velike $x$, razen če je F normalno porazdeljena;
   (d) če F ni izrojena, potem ima neomejeno definicijsko območje.

## 3. Neskončna deljivost v stohastičnih procesih

3.1. **Procesi s stacionarnimi neodvisnimi prirastki.** Procesi s stacionarnimi neodvisnimi prirastki v zveznem času so tesno povezani z lastnostjo neskončne deljivosti. Ti procesi predstavljajo zvezno analogijo slučajnim sprehodom, ki se začnejo v točki 0. Le te lahko definiramo kot procese $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$, za katere velja:

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \tag{5}$$

kjer $n \in \mathbb{Z}_+$, $X_0 :\equiv 0$ in so $Y_1, Y_2 \ldots$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke, ki predstavljajo dolžine koraka slučajnega sprehoda. Očitno ima definirani proces $X_n$ naslednjo lastnost:

$$\begin{cases} X_{n_0}, X_{n_1} - X_{n_0}, \ldots \text{ neodvisne za } 0 < n_0 < n_1 < \ldots, \\ X_{m+n} - X_m \overset{d}{=} X_n \text{ za } m, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{6}$$

V tem primeru pravimo, da je $(X_n)$ proces s stacionarnimi neodvisnimi prirastki (v diskretnem času). Porazdelitev tega procesa je v celoti določena s porazdelitvijo slučajne spremenljivke $X_1$. Ker je za $n \geq 2$ $X_n$ $n$-deljiva, je lahko porazdelitev $X_1$ izbrana poljubno, saj katerakoli slučajna spremenljivka $Y$ v resnici enolično generira proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki $(X_n)$, kjer je $X_1 \overset{d}{=} Y$, in $(X_n)$ lahko razumemo kot slučajni sprehod z dolžinami korakov, ki so porazdeljeni enako kot $Y$.

Na tem koraku poiščemo zvezni analog lastnosti (6). V zveznem času opazujemo slučajni proces $X(\cdot) = (X(t))_{t\geq 0}$, ki se začne v ničli in zanj velja $X(s+t) \to X(s)$, ko $t \to 0$ za vse $s \geq 0$. Takšnemu procesu pravimo proces s stacionarnimi neodvisnimi prirastki (v zveznem času), če velja:

$$
\begin{cases} X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \ldots \text{ neodvisne za } 0 < t_0 < t_1 < \ldots, \\ X(s+t) - X(s) \overset{d}{=} X(t) \text{ za } s, t > 0. \end{cases} \tag{7}
$$

Poglejmo si končno razsežne porazdelitve procesa s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki $X(\cdot)$. Pri fiksnem $t > 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $n \geq 2$, lahko zapišemo:

$$
X(t) = \sum_{j=1}^{n} \{X(jt/n) - X((j-1)t/n)\},
$$

kjer iz (7) opazimo, da so sumandi neodvisni in enako porazdeljeni. Po definiciji torej sledi, da je proces $X(t)$ neskončno deljiv. Nadalje, naj bo $\varphi_t$ karakteristična funkcija pripadajoča $X(t)$. Ker lahko zapišemo $X(s+t) = X(s) + \{X(s+t) - X(s)\}$, zaradi neodvisnosti prirastkov velja:

$$
\varphi_{s+t}(u) = \varphi_s(u)\varphi_t(u), \qquad s, t > 0. \tag{8}
$$

Za vsak $u \in \mathbb{R}$ je funkcija $t \to \varphi_t(u)$ zvezna na $\mathbb{R}_+$. To velja zaradi zveznosti procesa $X(\cdot)$. Sledi, da za multiplikativno polgrupo $(\varphi_t)_{t\geq 0}$ velja:

$$
\varphi_t(u) = \{\varphi_1(u)\}^t, \qquad t \geq 0. \tag{9}
$$

Definiramo še delitev $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$, kjer $n \geq 2$. Z uporabo lastnosti (7) je enostavno pokazati, da velja:

$$
(X(t_1), X(t_2), ..., X(t_n)) = (Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + \ldots + Y_n), \tag{10}
$$

kjer so $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ neodvisne slučajne spremenljivke in so porazdeljene enako kot $Y_i \overset{d}{=} X(t_i - t_{i-1})$ za $i = 1, \ldots, n$. Lastnosti (9) in (10) skupaj implicirata naslednjo trditev.

**Trditev 3.1.1.** *Porazdelitev procesa $X(\cdot)$ s stacionarnimi neodvisnimi prirastki je popolnoma določena s porazdelitvijo $X(1)$, ki je neskončno deljiva.*

V nasprotju s procesom v diskretnem času, porazdelitev $X(1)$ tukaj ne sme biti izbrana poljubno, biti mora namreč neskončno deljiva.

**Trditev 3.1.2.** *Naj bo $Y$ neskončno deljiva slučajna spremenljivka. Potem obstaja proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki $X(\cdot)$, za katerega velja, da je $X(1) \overset{d}{=} Y$.*

*Dokaz.* S $\varphi$ označimo karakteristično funkcijo slučajne spremenljivke $Y$. Po trditvi (1.0.11) je $\varphi^t$ dobro definirana karakteristična funkcija za vsak $t > 0$. Naj velja $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, $n \in \mathbb{N}$, in naj bodo $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ neodvisne slučajne spremenljivke, kjer je $\varphi^{t_i - t_{i-1}}$ karakteristična funkcija, ki pripada $Y_i$ za $i = 1, ..., n$. Naj bo $F_{t_1,\ldots,t_n}$ porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja $(Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + \ldots + Y_n)$. S spreminjanjem $t_1, \ldots, t_n$ na intervalu $(0, \infty)$ dobimo konsistenten nabor porazdelitvenih funkcij. Izrek Kolmogorova o razširitvi zagotavlja obstoj procesa s stacionarnimi neodvisnimi prirastki $X(\cdot)$, ki zadošča $(Y_1, Y_1 + Y_2, \ldots, Y_1 + \ldots + Y_n)$ v porazdelitvi. □

Procesu v zgornji trditvi, ki je skonstruiran iz neskončno deljive slučajne spremenljivke $Y$, rečemo proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki generiran z $Y$ (ali s pripadajočo porazdelitvijo oziroma transformacijo).

**Primer 3.1.3.** Procesu s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki, ki je generiran z normalno porazdelitvijo s pripadajočima parametroma $(\mu, \sigma^2)$, pravimo *Brownovo gibanje* s parametroma $\mu$ in $\sigma^2$. Polgrupa $(\varphi_t)$ je definirana s karakteristično funkcijo:

$$\varphi_t(u) = \exp[iu\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 u^2 t].$$

Če je $\mu = 0$ in $\sigma^2 = 1$, imenujemo proces standardno Brownovo gibanje.

Standardni Brownov ali Wienerjev proces je stohastični proces $(W_t)_{t \geq 0+}$ definiran na verjetnostnem prostoru$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ z naslednjimi lastnostmi:

(1) $W_0 = 0$,
(2) funkcija $t \to W_t$ je zvezna v $t$ skoraj gotovo,
(3) proces $(W_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne in stacionarne prirastke,
(4) prirastek $W_{t+s} - W_s$ je porazdeljen normalno, $N(0, t)$.

□

**Primer 3.1.4.** Procesu s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki, ki je generiran s porazdelitvijo Poisson($\lambda$), pravimo *Poissonov proces* z intenziteto $\lambda$. Polgrupa $(\varphi_t)$ je definirana s karakteristično funkcijo:

$$\varphi_t(u) = \exp[\lambda t\{e^{iu} - 1\}].$$

□

**Primer 3.1.5.** Procesu s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki, ki je generiran s porazdelitvijo gamma $(r, \lambda)$, pravimo *gamma proces* s parametroma $r$ in $\lambda$. Polgrupa $(\varphi_t)$ je definirana s karakteristično funkcijo:

$$\varphi_t(u) = (\frac{\lambda}{\lambda - iu})^{rt}.$$

Če $r = 1$ in $\lambda = 1$, proces imenujemo *standardni* gamma proces. □

Nadalje ugotovimo, da je iz dveh podanih procesov z enako lastnostjo možno s kompozicijo skonstruirati proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki. Naj bosta $S(\cdot)$ in $T(\cdot)$ dva neodvisna procesa v zveznem času. Potem velja, da sta $S(1)$ in $T := T(1)$ neskončno deljivi slučajni spremenljivki. Poleg tega, naj bo $T(\cdot)$ še nenegativna. Tako lahko definiramo:

$$X(\cdot) := S(T(\cdot)). \tag{11}$$

Opazimo, da je $X(\cdot)$ zopet proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki, torej sledi, da je slučajna spremenljivka $X = S(T)$ prav tako neskončno deljiva. Ta namreč generira proces $X(\cdot)$. Če obravnavamo $T(\cdot)$ samo v diskretnem času, potem $T$ ni nujno neskončno deljiva in iz (11) sledi, da je $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki v diskretnem času, pri čemer tudi $X$ ni nujno neskončno deljiva. Podobne rezultate dobimo, če opazujemo $S(\cdot)$ samo v diskretnem času. V tem primeru mora $T(\cdot)$ zavzeti vrednosti izključno v $\mathbb{Z}_+$. Slednji proces označimo kot $N(\cdot)$, ki je generiran z $N := N(1)$. Tako ugotovimo, da obstajajo štirje tipi *sestavljenih procesov s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki* $X(\cdot)$ ali $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$:

(1) procesa $S(\cdot)$ in $T(\cdot)$ določata nov proces $X(\cdot)$, za katerega velja, da je $X(t) := S(T(t))$ za $t \geq 0$; proces je generiran z $X := S(T)$, ki je neskončno deljiva.

(2) procesa $S(\cdot)$ in $(T_n)$ določata nov proces $(X_n)$ za katerega velja, da je $X_n := S(T_n)$ za $n \in \mathbb{Z}_+$; proces je generiran z $X := S(T)$, ki ni nujno neskončno deljiva.
(3) procesa $S_n$ in $N(\cdot)$ določata nov proces $X(\cdot)$ za katerega velja, da je $X(t) := S_{N(t)}$ za $t \geq 0$; proces je generiran z $X := S_N$, ki je neskončno deljiva.
(4) procesa $(S_n)$ in $(N_n)$ določata nov proces $(X_n)$ za katerega velja, da je $X_n := S_{N_n}$ za $n \in \mathbb{Z}_+$; proces je generiran z $X := S_N$, ki ni nujno neskončno deljiva.

### 3.2. **Časi prvih prehodov v markovskih verigah.**

3.2.1. *Uvod v markovske verige.* Najprej obravnavamo slučajne procese v diskretnem času. Naj $S$ označuje števno množico stanj, $s \in S$ pa naj bodo možna stanja. V tem primeru je slučajni proces vsako zaporedje spremenljivk $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, katerih zaloga vrednosti je v $S$. Najenostavnejši primer slučajnega procesa je zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Splošneje naj velja, da je vsak člen verige (tj. vrednost slučajnega procesa) odvisen le od zadnjega člena tik pred njim, nič pa od prejšnjih. To lastnost imenujemo *markovska lastnost*, ki jo formuliramo kot:

$$P(X_n = s_n | X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}) = P(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-1}).$$

Slučajni proces s to lastnostjo pa poimenujemo *markovska veriga.*

3.2.2. *Časi prvih prehodov v markovskih verigah.* Naj bo $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ Bernoullijev sprehod na celih številih s parametrom $p$. Torej velja $X_n = X_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$, kjer:

- $X_0, Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne slučajne spremenljivke,
- $X_0 \in \mathbb{Z}$,
- $\mathbb{P}(Y_i = 1) = p$ in $\mathbb{P}(Y_i = -1) = 1 - p =: q$ za vse $i$.

Naj bo $\mathbb{P}_j := \mathbb{P}(\cdot | X_0 = j)$ za $j \in \mathbb{Z}$ in naj bo $T_k$ slučajna spremenljivka, ki označuje *čas prvega prehoda* v stanje $k$, torej:

$$T_k := \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = k\}.$$

Zanima nas $\mathbb{P}_j$-porazdelitev slučajne spremenljivke $T_k$ za $k > j$. Naj bo

$$P_{j,k}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_j(T_k = n) z^n$$

ustrezna verjetnostna rodovna funkcija. Predpostavimo, da velja $p \geq \frac{1}{2}$ in posledično $\mathbb{P}_j(T_k < \infty) = 1$. Najprej obravnavamo primer za $k = j + 1$. Enostavno je preveriti, da za Bernoullijev sprehod velja enakost:

$$P_{j,j+1}(z) = pz + qz P_{j-1,j}(z) P_{j,j+1}(z)$$

ter posledično

$$P_{j,j+1}(z) = \frac{pz}{1 - qz P_{j-1,j}(z)}. \tag{12}$$

Na tem mestu je smiselno zapisati izrek, ki nam pomaga razumeti zgornji rezultat.

**Izrek 3.2.1.** *Sestavljena geometrijska porazdelitev na $\mathbb{Z}_+$, ki ima naslednjo rodovno funkcijo:*

$$P(z) = \frac{1 - p}{1 - pQ(z)},$$

*pri čemer je $p \in (0, 1)$ in je $Q(z)$ verjetnostna rodovna funkcija, je neskončno deljiva.*

Po izreku sledi, da je $P_{j,j+1}$ rodovna funkcija premaknjene sestavljene geometrijske porazdelitve, torej je rodovna funkcija neskončno deljive porazdelitve na $\mathbb{N}$. Podobno za $k > j+1$ ugotovimo, da velja:

$$P_{j,k} = \prod_{l=j}^{k-1} P_{l,l+1}.$$

Tudi v tem primeru rodovna funkcija $P_{j,k}$ pripada neskončno deljivi porazdelitvi na $\mathbb{N}$.

Zgoraj opisani primer je le poseben primer neskončne deljivosti časa prvega prehoda v markovskih verigah. Dokažemo lahko precej splošnejši rezultat.

**Izrek 3.2.2.** *Naj bo $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ markovska veriga na $\mathbb{Z}$ s stacionarnimi prehodnimi verjetnostmi $p_{jk}$ za $j,k\in\mathbb{Z}$, ki zadošča:*

$$p_{j,j+1} > 0 \text{ za } j\in\mathbb{Z};\quad p_{jk} = 0 \text{ za } j,k\in\mathbb{Z},\ k > j+1. \tag{13}$$

*Potem je za $k > j$ $\mathbb{P}_j$-porazdelitev časa prvega prehoda $T_k$ do stanja $k$ neskončno deljiva na $\mathbb{N}$ in je celo premaknjena sestavljena geometrijska za $k = j+1$.*

*Dokaz.* Tudi tu najprej obravnavamo primer pri $k = j+1$. Velja $\mathbb{P}_j(T_{j+1} = 1) = p_{j,j+1}$ in za $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_j(T_{j+1} = n) = \sum_{l\leq j} p_{jl}\mathbb{P}_l(T_{j+1} = n-1) = p_{jj}\mathbb{P}_j(T_{j+1} = n-1) +\\ + \sum_{l<j} p_{jl} \sum_{m=1}^{n-1} \mathbb{P}_l(T_j = m)\mathbb{P}_j(T_{j+1} = n-1-m).\end{aligned}$$

Za verjetnostno rodovno funkcijo $P_{j,j+1}$ $\mathbb{P}_j$-porazdelitve slučajne spremenljivke $T_{j+1}$ sledi:

$$P_{j,j+1}(z) = p_{j,j+1}z + z\{p_{jj} + \sum_{l<j} p_{jl}P_{l,j(z)}\}P_{j,j+1}(z)$$

in posledično

$$P_{j,j+1}(z) = \frac{p_{j,j+1}z}{1-(1-p_{j,j+1}Q_j(z)},$$

kjer je $Q_j$ $\mathbb{P}_j$-rodovna funkcija pripadajoča $(T_j|X_1 \leq j)$. Zaključimo lahko, da je $P_{j,j+1}$ rodovna funkcija premaknjene sestavljene geometrijske porazdelitve, torej je rodovna funkcija neskončno deljive porazdelitve na $\mathbb{N}$. Podobno tudi za $k > j+1$ ugotovimo, da velja

$$P_{j,k} = \prod_{l=j}^{k-1} P_{l,l+1}.$$

Tudi v tem primeru rodovna funkcija $P_{j,k}$ pripada neskončno deljivi porazdelitvi na $\mathbb{N}$. $\square$

Podobni rezultati kot zgoraj veljajo za markovske verige v *zveznem času*. Naj bo $X(\cdot) = (X(t))_{t\geq 0}$ markovska veriga na $\mathbb{Z}$ s stacionarnimi prehodnimi verjetnostmi, opisana pa naj bo z vektorjem $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ in prehodno matriko $(p_{jk})_{j,k\in\mathbb{Z}}$ s sledečo interpretacijo. Če je proces v danem času v stanju $j$, potem ostane v njem eksponentno porazdeljeno dolgo časa z matematičnim upanjem $1/\lambda_j$. Ko pa proces zapusti stanje

$j$, se premakne z verjetnostjo $p_{jk}$ v stanje $k$. Predpostavimo še, da velja $p_{jj} = 0$ za vse $j$. Potem za čas prvega prehoda v stanje $k$, ki je definiran kot

$$T_k := \inf\{t > 0 : X(t) = k\}$$

velja naslednji izrek.

**Izrek 3.2.3.** *Naj bo $X(\cdot)$ zvezna markovska veriga kot zgoraj, ki zadošča pogojem iz* (13)*. Potem je za $k > j$ $\mathbb{P}_j$-porazdelitev prvega prehodnega časa $T_k$ do stanja $k$ neskončno deljiva in celo sestavljena eksponentna, če velja $k = j + 1$.*

*Dokaz.* Ponovno je dovolj, da obravnavamo primer, kjer $k = j + 1$. Naj bo $F_{j,j+1}$ $\mathbb{P}_j$-porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $T_{j+1}$ in naj bo $g_j$ $\mathbb{P}_j$-gostota verjetnosti časa zadrževanja $\tau_j$ v stanju $j$. Sledi $g_j(t) = \lambda_j e^{-\lambda_j t}$ za $t > 0$. Potem za $x > 0$ velja:

$$\begin{aligned} F_{j,j+1}(x) &= \int_0^x \mathbb{P}_j(T_{j+1} \leq x | \tau_j = t) g_j(t) dt = \\ &= \int_0^x \{p_{j,j+1} + \sum_{l<j} p_{jl} \mathbb{P}_l(T_{j+1} \leq x - t)\} g_j(t) dt = \\ &= p_{j,j+1} \int_0^x g_j(t) dt + \sum_{l<j} p_{jl} \int_0^x F_{l,j+1}(x-t) g_j(t) dt. \end{aligned}$$

$\mathbb{P}_l$ porazdelitveno funkcijo $F_{l,j+1}$ pripadajočo $T_{j+1}$ lahko zapišemo kot:

$$F_{l,j+1}(y) = \int_{[0,y]} F_{j,j+1}(y - z) dF_{l,j}(z) \;\; [y > 0].$$

Za Laplace-Stieltjesove transformacije ($pLSt$) $\pi_{j,j+1} := \hat{F}_{j,j+1}$ sledi:

$$\pi_{j,j+1}(s) = p_{j,j+1} \frac{\lambda_j}{\lambda_j + s} + \sum_{l<j} p_{jl} \pi_{l,j}(s) \pi_{j,j+1}(s) \frac{\lambda_j}{\lambda_j + s}.$$

Za $\pi_{j,j+1}$ potem velja:

$$\pi_{j,j+1}(s) = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + s} \frac{p_{j,j+1}}{1 - (1 - p_{j,j+1})\{\lambda_j/(\lambda_j + s)\} \pi_j(s)},$$

kjer je $\pi_j$ $pLSt$ podana s

$$\pi_j(s) := \sum_{l<j} p_{jl} \pi_{l,j}(s)/(1 - p_{j,j+1}).$$

Opazimo, da je $\pi_{j,j+1}$ produkt eksponentne in sestavljene geometrijske Laplace-Stieltjesove transformacije ter zaključimo, da je $\pi_{j,j+1}$ neskončno deljiva. $\square$

## 4. Seznam neskončno deljivih porazdelitev

V tem poglavju opišemo nekaj znanih neskončno deljivih porazdelitev in za izbrane to lastnost tudi dokažemo. Zaradi poenostavitve bodo ponekod porazdelitve podane s karakteristično funkcijo, druge z verjetnostno funkcijo, gostoto ali celo z rodovno funkcijo. V prvem poglavju smo že videli, da če je slučajna spremenljivka $X$ porazdeljena $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X \sim Poisson(\lambda)$ ali $X \sim gamma(r, \lambda)$,je neskončno deljiva. Naštejemo še ostale pomembne neskončno deljive porazdelitve:

- (Gamma, $\chi^2$)
$$\varphi(t) = (\frac{\lambda}{\lambda - it})^{\alpha};$$
- (Cauchy)
$$\varphi(t) = e^{-|t|};$$

Zgornji porazdelitvi sta neskončno deljivi po osnovni definiciji, saj se vsaka potenca karakteristične funkcije $\varphi$ ujema s porazdelitvijo iz iste družine.

- (Laplace)
$$\varphi(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2};$$

Laplaceovo porazdelitev slučajne spremenljivke lahko dobimo kot konvolucijo dveh eksponentnih porazdelitev, pri čemer je ene definirane na $\mathbb{R}_+$, druga pa na $\mathbb{R}_-$. Naj bosta $X$ in $Y$ porazdeljeni $Exp(\lambda)$. Karakteristični funkciji pripadajoči slučajnim spremenljivkam $X$ in $-Y$ sta enaki:

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

ter

$$\varphi_Y(t) = \frac{\lambda}{\lambda + it}.$$

Če ju zmnožimo, dobimo:

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda - it)(\lambda + it)} = \frac{\lambda^2}{\lambda + t^2},$$

kar je pa ravno karakteristična funkcija Laplaceove porazdelitve. Ker vemo, da je $gamma(r, \lambda)$ neskončno deljiva porazdelitev in velja, da za $r = 1$ dobimo eksponentno porazdelitev, sledi neskončna deljivost eksponentne porazdelitve. Posledično je tudi Laplaceova porazdelitev neskončno deljiva, saj se po trditvi (1.0.3) neskončna deljivost ohranja pri konvolucijah.

Naj bo $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ diskretna *Pareto* porazdelitev na $\mathbb{Z}_+$ s parametrom $r > 1$. $(p_k)$ je podana kot:

- (Pareto)
$$p_k = c_r \frac{1}{(k+1)^r} \quad [c_r := 1/\zeta(r),\ \zeta(r) := \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^r]$$

Najprej naredimo Hausdorffovo izpeljavo momentnega problema in sicer v primeru $p_k = c\frac{1}{(k+1)^2}$. Naj bosta slučajni spremenljivki $U$ in $V$ neodvisni ter porazdeljeni enakomerno na $(0,1)$. Velja:

$$p_k = cE(U^k)E(V^k) = cE((UV)^k) = c\int_0^1 x^k(-\log x)dx.$$

Če primer posplošimo, za $p_k = c_r\frac{1}{(k+1)^r}$ po Hausdorffovi izpeljavi velja:

$$p_k = c_r E(e^{-kY_r}) = \frac{c_r}{\Gamma(r)}\int_0^1 x^k(-\log x)^{r-1}dx \quad [k \in \mathbb{Z}_+],$$

kjer je $Y_r$ porazdeljena standardno *gamma*$(r)$. Opazimo, da je $(p_k)$ popolnoma monotona in po zadostnem pogoju (1).$(c)$ sledi, da je neskončno deljiva.

Naj bo $(p_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ logaritemska porazdelitev na $\mathbb{Z}_+$ s parametrom $p \in (0,1)$. $(p_k)$ je podana kot:

- (logaritemska)

$$p_k = c_p\frac{p^{k+1}}{k+1}, \quad [c_p := \frac{1}{-\log(1-p)}].$$

Podobno kot v prejšnjem primeru je Hausdorffova oblika sledeča:

$$p_k = c_p\int_0^1 x^k \mathbf{1}_{(0,p)}(x)dx \quad [k \in \mathbb{Z}_+]$$

in velja, da je $(p_k)$ popolnoma monotona in zato tudi neskončno deljiva.

- (logistična)

$$F(x) = (1+e^{-x})^{-1}, \quad [x \in \mathbb{R}].$$

Klaas van Harn je pokazal, da je karakteristična funkcija logistične porazdelitve:

$$\varphi(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2+t^2}$$

iz česar sledi, da je po trditvi (1.0.3) logistična porazdelitev neskončno deljiva.

Naj bo $Y$ standardna eksponentna porazdelitev in $X \stackrel{d}{=} -\log Y$. Potem je $X$ absolutno zvezna porazdelitev in ji pravimo:

- (Gumbelova porazdelitev)

$$F(x) = \exp[-e^{-x}], \quad f(x) = exp[-(x+e^{-x})] \quad [x \in \mathbb{R}];$$

To je porazdelitev ekstremnih vrednosti in velja:

$$\max\{Y_1,\ldots,Y_n\} - \log n \xrightarrow{d} X \quad [n \to \infty],$$

kjer so $Y_1, Y_2, \ldots$ neodvisne in porazdeljene enako kot slučajna spremenljivka $Y$. Po drugi strani pa velja:

$$\max\{Y_1,\ldots,Y_n\} \stackrel{d}{=} Y_1 + \frac{1}{2}Y_2 + \cdots + \frac{1}{n}Y_n \quad [n \in \mathbb{N}].$$

**Trditev 4.0.4.** *Če zaporedje $(X^{(m)})$ neskončno deljive slučajne spremenljivke konvergira v porazdelitvi proti $X$, potem je tudi $X$ neskončno deljiva.*

Ker vemo, da je eksponentna porazdelitev neskončno deljiva, po trditvah (4.0.4) in (1.0.3) sledi, da je tudi $X$ neskončno deljiva.

Neskončno deljive so tudi porazdelitve:

- (Studentova porazdelitev)
$$f(x) = c(1 + \frac{x^2}{2\nu})^{-\nu};$$
- (Fisherjeva porazdelitev)
$$X = \frac{\sum_{j=1}^{m} N_j^2}{\sum_{j=1}^{n} N_{j+m}^2},$$
kjer so $N_1, N_2, ..., N_{n+m}$ neodvisne slučajne spremenljivke ter porazdeljene standardno normalno.
- (Standardna log-normalna porazdelitev)
$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x)^2}{2}}, \ \ [x > 0].$$

## Literatura


[1] F. W. Steutel in K. van Harn, *Infinite divisibility of probability distributions on the real line*, Pure and applied mathematics **259**, Marcel Dekker Incorporated, New York, 2004.

[2] F. W. Steutel, J. T. Kent, L. Bondesson in O. Barndorff-Nielsen, *Infinite Divisibility in Theory and Practice*, Scand. J. Statist. **6** (1979) strani 57–64.

[3] F. W. Steutel, *Some recent results in infinite divisibility*, Stohastic Processes and their Applications 1 (1973) strani 125-143.

[4] F. W. Steutel, *On the Tails of Infinitely Divisible Distributions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb. 28 (1974) strani 273-276.

[5] *Laplace distribution*, [ogled 12. 7. 2013], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Laplace_distribution`.

[6] *Lévy's continuity theorem*, [ogled 13. 7. 2013], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Levy's_continuity_theorem`.

[7] *Kolmogorov extension theorem*, [ogled 14. 7. 2013], dostopno na `http://en.wikipedia.org/wiki/Kolmogorov_extension_theorem`.

[8] *Brownian motion*, verzija 5.4.2011, [ogled 4. 7. 2013], dostopno na `http://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/313/WienerProcess.pdf`.