

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Manca Homar

**Vrednotenje vpoglednih vlog in določanje replikativnega
portfelja**

Magistrsko delo

Mentor: doc.dr. Janez Bernik

Ljubljana, 2012

Podpisana Manca Homar izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom Vrednotenje vpoglednih vlog in določanje replikativnega portfelja izdelala samostojno pod mentorstvom doc. dr. Janeza Bernika in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 15. 10. 2012

Podpis:

KAZALO

1. Uvod	5
2. Predpostavke in obrazložitve	6
2.1. Procesi in diskretizacija	6
2.2. Predpostavke k modelom	8
2.3. Opis podatkov	11
3. Model gibanja hipnih tržnih obrestnih mer	14
3.1. Vasičkov model	14
3.2. Ho-Leejev model	24
3.3. Primerjava modelov	30
4. Model gibanja stanja depozitov	31
4.1. Normalni model	31
4.2. Lognormalni model	35
5. Neto sedanja vrednost depozitov	36
6. Določanje replikativnega portfelja	37
7. Primerjava modelov	39
7.1. Vasičkov in Ho-Leejev model obrestnih mer ter normalni model višine depozitov.	39
7.2. Vasičkov in Ho-Leejev model obrestnih mer ter lognormalni model višine depozitov.	45
8. Zaključek	51
Literatura	52
Priloge	53

POVZETEK

Depozitne inštitucije se lahko srečujejo s presežkom likvidnosti, s katero se da nekaj zaslužiti, če zanjo izberejo primeren replikativni portfelj. Kakšen bo ta presežek likvidnosti lahko izračunajo s simulacijo hipne obrestne mere in višine depozitov. Osredotočimo se na Vasičkov in Ho-Leejev model hipnih obrestnih mer ter na normalni in lognormalni model višine depozitov. Za vsakega od teh modelov opredelimo nekaj prednosti in slabosti.

ABSTRACT

Deposit institutions can face surplus of liquidity with which they can make some money if they choose appropriate replicating portfolio. Surplus of liquidity can be calculated with simulation of instantaneous short interest rate and simulation of deposit volumes. We focus on Vasiček and Ho-Lee instantaneous short interest rate model and on normal and lognormal models of deposit volumes. For each of these models, we state some pros and cons.

Math. Subj. Class. (2010): 65C20, 65C05, 68U20

Ključne besede: Brownovo gibanje, Ornstein-Uhlenbeckov proces, do tveganja nevtralna verjetnost, Vasičkov model, Ho-Leejev model, neto sedanja vrednost depozitov, replikativni portfelj

Keywords: Brownian motion, Ornstein-Uhlenbeck process, risk neutral probability, Vasiček model, Ho-Lee model, net present value of deposit, replicating portfolio

1. UVOD

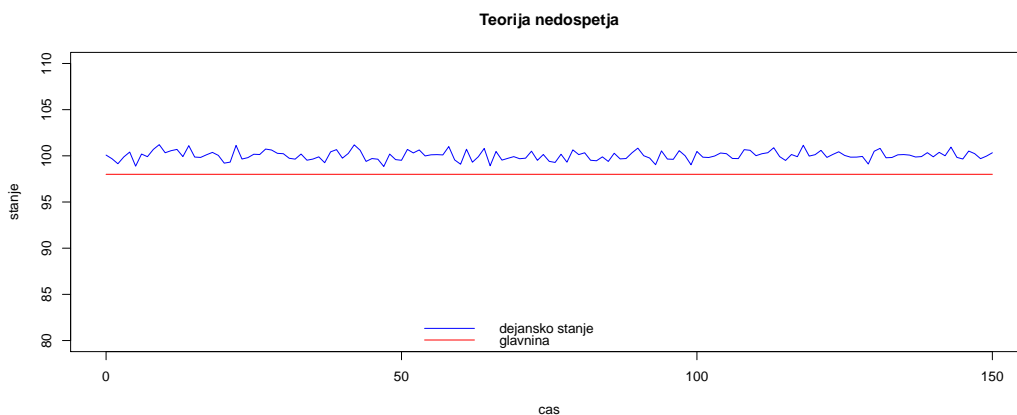
Obrestne mere na depozite so običajno nižje od obrestnih mer na trgu, zato imajo le-ti za banko pozitivno vrednost. Depozitne inštitucije namreč skušajo zaslužiti pozitivno razliko med sredstvi, ki jih vložijo (posojila in kupljene obveznice) in svojimi viri financiranja (depoziti in drugi viri). Razlika mora pokriti operativne stroške inštitucije in povrniti pošten profit na njen kapital.

Pri doseganju tega prihodka se depozitna inštitucija (banka) srečuje z več tveganji. Med najpomembnejša sodijo kreditno tveganje (tveganje povračila posojil), tveganje financiranja (obrestne mere na depozite) in likvidnostno tveganje [7].

Obrestna mera na depozite je ponavadi deterministična funkcija kratkoročne obrestne mere na trgu.

Za depozite je likvidnostno tveganje dokaj težko upravljati, saj za precejšen del depozitov, kot so vloge na vpogled in vloge na odpoklic, ne poznamo dospelja. Vrednotenje depozitov je za banke pomembno, saj se glede na pričakovano stanje depozitov odločajo, v katere varne vrednostne papirje (obveznice) vlagajo denar, ki ga imajo na razpolago. Osrednji problem upravljanja s tveganjem za depozite je torej določitev profila dospelj in tako konstrukcija replikativnega portfelja obveznic z različnimi dospelji.

Veliko bank se poslužuje naslednjega principa za določanje replikativnega portfelja na depozite, v literaturi poznanega tudi kot "teorija nedospetja"¹: najprej se do-



SLIKA 1. Primer stanja depozitov in teorija nedospetja.

loči glavnina pozicije banke, spreminjajoči se del pa se določi kot dejansko stanje, zmanjšano za glavnino. Spreminjajoči se del se vloži čez noč, saj se pričakuje, da ima krajše dospelje, glavnina pa v obveznice z dospelji od treh mesecev pa do deset let. Ta teorija se zdi smiselna, saj ima banka veliko število strank, ki imajo pri njej odprte račune z relativno nizkim stanjem, zato bo večina (glavnina) denarja vedno na bančnih računih, ker se ne pričakuje, da bi veliko število strank naenkrat dvignilo denar (razen ob izjemnih dogodkih, ki smo jim bili priča v sedanji finančni krizi, kjer so morale banke pokrivati primankljaj likvidnosti, največkrat s pomočjo centralnih bank, ki so posojilodajalec v skrajni sili).

¹Angleško "non-maturation theory".

Stanje depozitov je lahko povezano s tržnimi obrestnimi merami. Ob manjših obrestnih merah na trgu ljudje denar raje držijo na depozitnih računih in ob večjih raje vlagajo drugam (obveznice). So pa seveda ljudje precej različni, nekateri se odzovejo na veliko razliko med obrestnimi merami na trgu in pri banki, lahko seveda z velikim zamikom, nekateri pa se sploh ne odzovejo. Seveda velja omeniti, da je večina vlagateljev na trgu nenaklonjena k tveganju, večja obrestna mera pa ponavadi odraža višje tveganje. Mi bomo zato privzeli, da je stanje depozitov neodvisno od tržne obrestne mere in bomo zato pri izračunih za stanje depozitov vzeli podatke o stanjih nočnih depozitov.

Vrednotenje finančnih inštrumentov je povezano z obrestno mero. Eden najstarejših načinov vrednotenja temelji na izračunu hipnih obrestnih mer, katerih modeliranje lahko razdelimo v dve glavni skupini: *ravnotežni modeli* in *brezarbitražni modeli*.

V tej nalogi predstavimo dva slučajna modela hipnih tržnih obrestnih mer, in sicer ravnotežni *Vasičkov model* in brezarbitražni *Ho-Leejev model*, ki ju simuliramo z Monte Carlo metodo. Za model gibanja stanja depozitov vzamemo *normalni* in *lognormalni model*. Zanima nas, kateri od modelov obrestnih mer je boljši pri napovedovanju. Nato izračunamo neto sedanjo vrednost depozitov, na koncu pa moramo določiti še replikativni portfelj, torej portfelj, v katerega banka vloži denar, ki ga pridobi z depoziti.

2. PREDPOSTAVKE IN OBRAZLOŽITVE

2.1. Procesi in diskretizacija.

Definicija 1. *Slučajni sprehod je vsako zaporedje delnih vsot $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ procesa $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, kjer so X_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ neodvisne enako porazdeljene slučajne spremenljivke in $S_i = X_1 + X_2 + \dots + X_i$ za $i = 1, 2, 3, \dots$*

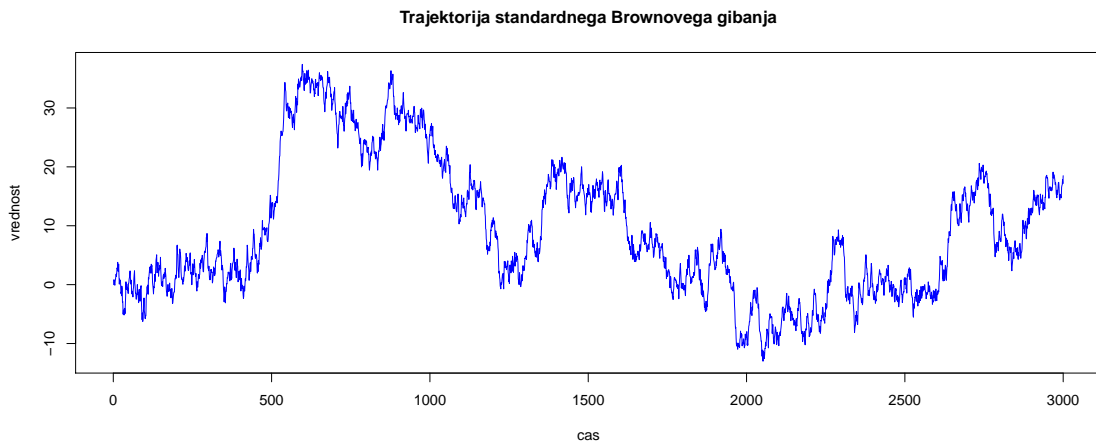
Slučajni sprehod je temeljni diskretni model obnašanja gibanj na finančnih trgih. Temeljni model v zveznem času pa je Brownovo gibanje, ki ga dobimo kot limito slučajnega sprehoda.

Definicija 2. *Standardni Wienerjev proces $(W_t)_{t \geq 0}$, imenovan tudi standardno Brownovo gibanje na verjetnostnem prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) , je slučajni proces, za katerega velja:*

- $W_0 = 0$ s. g. , tj. $P(W_0 = 0) = 1$,
- $(W_t)_{t \geq 0}$ ima neodvisne stacionarne (homogene) prirastke, tj. za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ so prirastki $(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}})$ neodvisni in $W_{t_i} - W_{t_{i-1}} \sim N(0, t_i - t_{i-1})$ za $i = 1, 2, \dots, n$,
- $(W_t)_{t \geq 0}$ ima s. g. zvezne trajektorije, tj. $P(\{\omega; t \geq 0 \mapsto W_t(\omega) \text{ je zvezna}\}) = 1$.

Opomba 3. *Trajektorije Brownovega gibanja so zvezne s.g., ampak skoraj nikjer odvedljive.*

Če je slučajna spremenljivka Z porazdeljena standardno normalno, potem lahko W_t zapišemo kot $W_t \stackrel{(d)}{=} Z\sqrt{t}$.



SLIKA 2. Primer trajektorije standardnega Brownovega gibanja.

Definicija 4. Ornstein-Uhlenbeckov proces je proces $(X_t)_{t \geq 0}$, ki zadošča stohastični diferencialni enačbi

$$dX_t = -\rho(X_t - \mu)dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

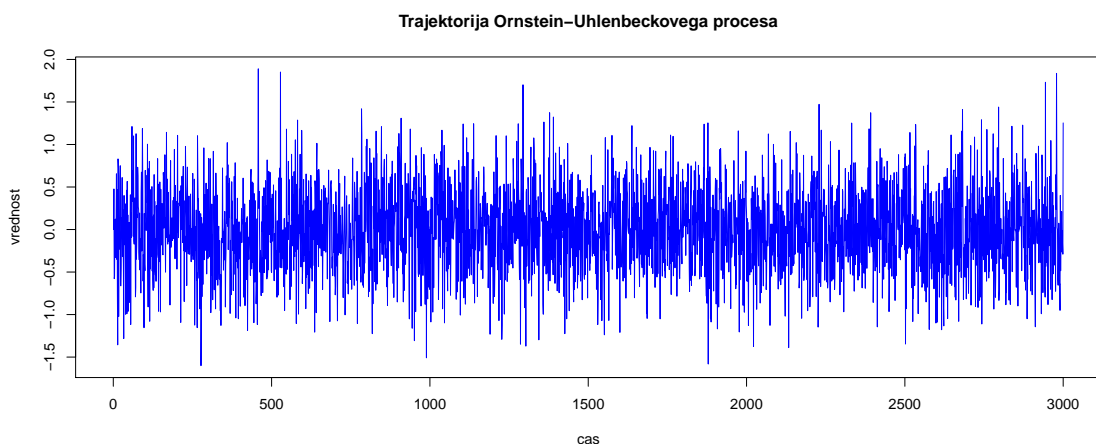
kjer so ρ , μ in σ konstante.

Opomba 5. Večkrat srečamo Ornstein-Uhlenbeckov proces oblike

$$dX_t = -\rho X_t dt + \sigma dW_t, \quad (2)$$

kjer je $E(X_t) = \mu = 0$.

Opomba 6. Stohastično diferencialno enačbo iz opombe 5 rešimo v poglavju o Vasilkovem modelu.



SLIKA 3. Primer trajektorije Ornstein-Uhlenbeckovega procesa za $X_0 = 0$, $\mu = 0$, $\rho = 1$ in $\sigma = 0,5$.

Slučajni proces lahko diskretiziramo po Eulerjevi metodi, ki jo je lahko implementirati, ni pa vedno najbolj natančna. Je najenostavnejša metoda za približek

simulacije stohastičnih diferencialnih enačb. Naj \hat{X}_t označuje diskretiziran približek za X_t . Eulerjeva aproksimacija v časovnih točkah $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$ za Ornstein-Uhlenbeckov proces je enaka

$$\hat{X}_0 = X_0 \quad (3)$$

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} - \rho(\hat{X}_{t_i} - \mu)[t_{i+1} - t_i] + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \text{ za } i = 0, 1, \dots, m-1, \quad (4)$$

kjer so Z_1, Z_2, \dots, Z_m neodvisne standardno normalno porazdeljene slučajne spremenljivke.

Slučajni sprehod lahko skonstruiramo na naslednji način: nastavimo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ in $W_0 = 0$ ter

$$W_{t_{i+1}} = W_{t_i} + \sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \text{ za } i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5)$$

oziroma

$$W_{t_{i+1}} = \sqrt{t_1}Z_1 + \sqrt{t_2 - t_1}Z_2 + \dots + \sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \text{ za } i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (6)$$

kjer so Z_1, Z_2, \dots, Z_n neodvisne standardno normalno porazdeljene slučajne spremenljivke [3].

2.2. Predpostavke k modelom. Dinamika strukture obrestnih mer je odvisna od donosnosti obveznic. Naj bo $P(t, T)$ cena brezkuponske obveznice z dospeljem T ob času t , $t \leq T$. Naj bo nominalna vrednost obveznice 1, torej

- $P(t, t) = 1$ za vse t in
- za vse $0 \leq t \leq T$ velja $0 < P(t, T) \leq 1$.

Privzetek 7. *Predpostavimo:*

- *Obstaja trg brez davkov in transakcijskih stroškov za obveznice z vsemi možnimi dospelji. Informacije so vsem investitorjem enako dostopne in vsi investitorji se vedejo racionalno (trg je učinkovit). To implicira, da je trg brez arbitraže.*
- *Cena obveznice $P(t, T)$ je za vsak fiksen t odvedljiva glede na čas dospelja T .*

[12]

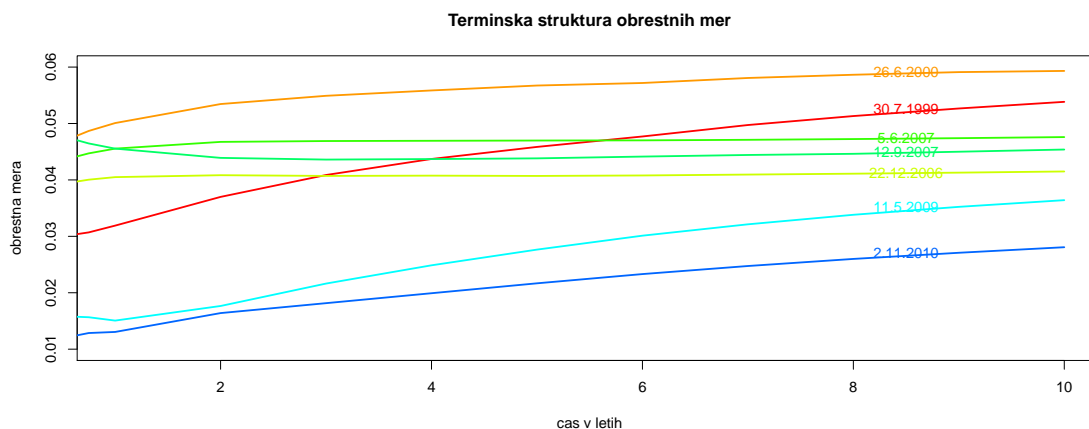
Definicija 8. *Arbitraža je transakcija, ki se lahko zgodi, ko se vrednostni papir prodaja po dveh različnih cenah. Ta transakcija vključuje nakup vrednostnega papirja po nižji ceni in prodaja le-tega po višji ceni. V literaturi se omenja tudi kot zastonjsko kosilo [12].*

Opomba 9. *Za fiksen t je $P(t, T)$ funkcija dospelja T . Pove ceno obveznice ob času t pri vseh možnih dospeljih T . Graf te funkcije imenujemo časovna struktura ob času t . Ta graf je gladek. Za fiksen T je $P(t, T)$ slučajni proces, ki daje cene obveznice s fiksnim dospeljem T ob različnih časih [12].*

Časovna struktura obrestnih mer² ima štiri možne oblike: normalno, položno (grbasto), strmo in invertirano. Oblika je ponavadi odvisna od pričakovanj glede prihodnosti. Normalna časovna struktura pomeni, da donosnost raste z dospelostjo.

²Angleško "yield curve", tudi krivulja donosnosti.

Pozitiven naklon odraža pričakovanje investorjev o rastoči ekonomiji v prihodnosti in tudi o rastoči inflaciji. Zato se pričakuje, da bodo centralne banke poostrele monetarno politiko z dvigom kratkoročnih obrestnih mer v prihodnosti in posledično manjšanjem ekonomske rasti. Invertirana časovna struktura je povezana z deflacijo, ko dolgoročne obrestne mere padejo pod kratkoročne. Pričakuje se upočasnjevanje ekonomije. Strma časovna struktura pomeni pričakovanje, da se bo ekonomska rast v prihodnosti hitro povečevala. Značilna je za začetek ekonomske ekspanzije ali za obdobje ob koncu recesije. Značilno je naraščanje razlike v obrestnih merah med dolgoročnimi in kratkoročnimi zakladnimi menicami (dolgoročni raste precej hitreje kot kratkoročnim). Položna časovna struktura pomeni, da so vse obrestne mere, ne glede na dospelje, enake, odraža pa negotovost v ekonomiji. Grbasta časovna struktura pomeni, da so kratkoročne in dolgoročne obrestne mere enake, srednjeročne pa so višje [16].



SLIKA 4. Primeri časovnih struktur obrestnih mer.

Podatke za primere časovnih struktur obrestnih mer navajamo v prilogi pod imenom *tsom.txt*.

Lema 10 (Zakon ene cene). *Za $s \leq t \leq u$ velja:*

$$P(s, u) = P(s, t)P(s, t, u), \quad (7)$$

kjer je $P(s, t, u)$ termimska cena brezkuponske obveznice v času s .

Opomba 11. *Zakon ene cene sledi iz predpostavke o neobstoju arbitraže. Pogoji $P(t, t) = 1$, za vse t , mora veljati na brezarbitražnem trgu.*

Definicija 12. *Zvezno obrestovan donos³ (leten in zvezno obrestovan) $R(t, T)$ je implicitno definiran kot*

$$P(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (8)$$

in eksplicitno kot

$$R(t, T) = -\frac{\log P(t, T)}{T-t}. \quad (9)$$

³Tudi donosnost do dospelja, moč obresti, povprečna obrestna mera.

Definicija 13. Naj bo hipna terminska obrestna mera $f(t, T)$ z dospeljem T ob času t definirana kot

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, \tau) d\tau} \quad (10)$$

oziroma

$$f(t, T) = -\frac{\partial \log P(t, T)}{\partial T}, \quad (11)$$

hipna obrestna mera ob času t pa kot

$$r_t = f(t, t). \quad (12)$$

Hipna obrestna mera je teoretičen pojem, ki se ga v praksi ne da opazovati.

Definicija 14. Naj bo zvezno obrestovan terminski donos ob času t za $[T, T + \Delta T]$ definiran kot

$$R(t; T, T + \Delta T) = -\frac{\log P(t, T + \Delta T) - \log P(t, T)}{\Delta T}. \quad (13)$$

Velja:

$$R(t; t, T) = R(t, T).$$

Definicija 15. Bančni račun B_t je definiran kot vsota denarja, akumuliranega do časa t , če ob času 0 vložimo eno enoto denarja in ga zvezno reinvestiramo po hipni obrestni meri r_t :

$$B_t = e^{\int_0^t r_s ds}, \quad (14)$$

kjer je $B_0 = 1$.

Cena brezkuponske obveznice ob času t z dospeljem T je zato definirana kot

$$P(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}. \quad (15)$$

Definicija 16. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, Q)$ filtriran verjetnostni prostor in $(X_t)_{t \geq 0}$ prilagojen proces, tj. X_t je merljiv glede na \mathcal{F}_t , $t \geq 0$. Naj bo $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. $(X_t)_{t \geq 0}$ je martingal glede na verjetnost Q , če velja:

$$E_Q(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \text{ za } 0 \leq s \leq t.$$

Definicija 17. Vrednostni papir, ki ima pozitivno ceno za vse $t \in [0, T]$, se imenuje numerar. Vrednost vseh ostalih vrednostnih papirjev oziroma finančnih nštrumentov lahko izrazimo v enotah numerarja. Ponavadi za numerar vzamemo bančni račun.

Definicija 18. Verjetnost Q je ekvivalentna P , če za vsak dogodek $A \in \mathcal{F}$ (npr. stanje ekonomije) velja

$$Q(A) \neq 0 \iff P(A) \neq 0.$$

Definicija 19. Q je ekvivalentna martingalska verjetnost glede na dan numerar, če je Q ekvivalentna P in če je vrednost finančnega inštrumenta v enotah numerarja martingal glede na verjetnostno mero Q .

Trditev 20 (Prvi fundamentalni izrek vrednotenja premoženja). Na trgu ni arbitraže natanko tedaj, ko za dan numerar obstaja ekvivalentna martingalska verjetnost.

Dokaz. Dokaz lahko najdemo v zapiskih predavanj [9]. □

Opomba 21. Ker je vrednost obveznice ob času t z dospeljem T v enotah bančnega računa martingal⁴ glede na Q , je Q ekvivalentna martingalska verjetnost in zato po fundamentalnem izreku vrednotenja premoženja na trgu ni arbitraže. Modeli so predstavljeni glede na ekvivalentno martingalsko verjetnost Q , ki je do tveganja nevtralna⁵. Velja:

$$\begin{aligned}
 P(t, T) &= B_t \cdot \frac{P(t, T)}{B_t} = \\
 &= B_t \cdot E_Q\left(\frac{P(T, T)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
 &= B_t \cdot E_Q\left(e^{-\int_0^T r_s ds} P(T, T) \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
 &= B_t \cdot E_Q\left(e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right) = \\
 &\stackrel{6}{=} E_Q\left(e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right).
 \end{aligned}$$

Označimo od sedaj naprej $E(\cdot) := E_Q(\cdot)$.

2.3. Opis podatkov. Podatke bomo črpali s statistične strani Evropske centralne banke <http://sdw.ecb.europa.eu/> in <http://www.ecb.europa.eu>.

Hipno obrestno mero bomo računali na dnevni ravni, torej naš korak predstavlja en dan.

Omenili smo že, da je hipna obrestna mera teoretičen pojem, ki se ga v praksi ne da opazovati, zato bomo približek teh obrestnih mer izračunali iz podatkov za letni donos (od datuma izdaje) kratkoročnih evropskih vrednostnih papirjev⁷ z ročnostjo od enega do tri dni najvišjih bonitetnih ocen z upoštevanom celotno ekonomijo. Omenimo, da tudi teh obrestnih mer ne moremo opazovati vsak dan, zato bomo datume z neznanimi vrednostmi izključili iz analize. Vzeli bomo 341 podatkov med 1.1.2009 in 31.12.2011. Hipno obrestno mero bomo simulirali od 1.1.2012 in jo primerjali z dejansko obrestno mero med 1.1.2012 in 20.4.2012.

4

$$\begin{aligned}
 E_Q\left(\frac{P(t, T)}{B_t} \mid \mathcal{F}_s\right) &= E_Q\left(\frac{e^{-\int_t^T r_s ds}}{e^{\int_0^t r_s ds}} \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
 &= E_Q\left(e^{-\left(\int_t^T r_s ds + \int_0^t r_s ds\right)} \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
 &= E_Q\left(e^{-\int_0^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_s\right) = \\
 &= E_Q(P(0, T) \mid \mathcal{F}_s) = \\
 &= P(0, T) = \\
 &= \frac{P(s, T)}{B_s}
 \end{aligned}$$

⁵Tudi vrednotenje depozitov je opisano po do tveganja nevtralni proceduri - glej [6].

⁶ B_t je merljiv glede na \mathcal{F}_t .

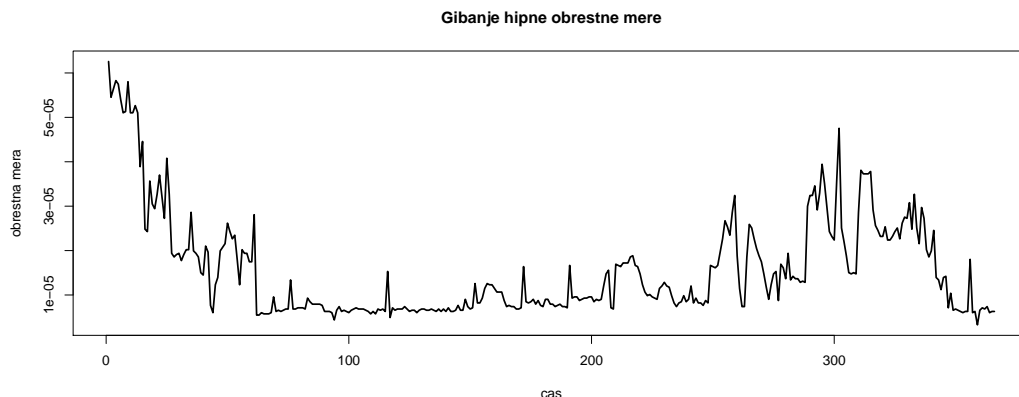
⁷Angleško "STEP" ali "Short Term European Papers".

Ker so obrestne mere podane na letni ravni, simulirali pa jih bomo dnevno, jih preračunamo na dnevno raven po enačbi

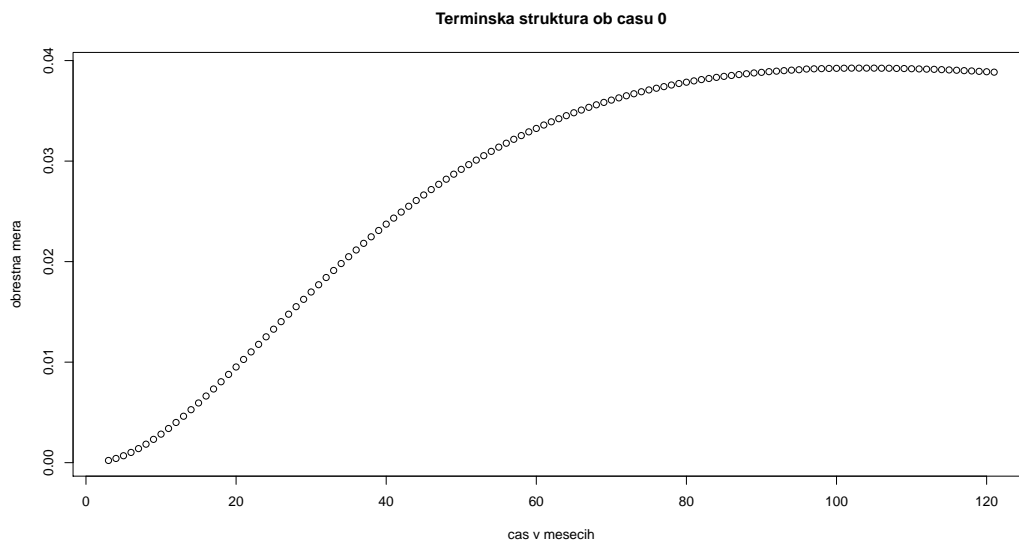
$$i_d = \frac{i_l}{365}, \quad (16)$$

kjer i_l označuje obrestno mero na letni ravni, i_d pa obrestno mero na dnevni ravni, ki predstavlja hipno obrestno mero.

Podatke za hipne obrestne mere (na letni ravni) navajamo v prilogi pod imenom *InstShortRates.txt*.



SLIKA 5. Gibanje hipne obrestne mere od 1.1.2009 do 20.4.2012.

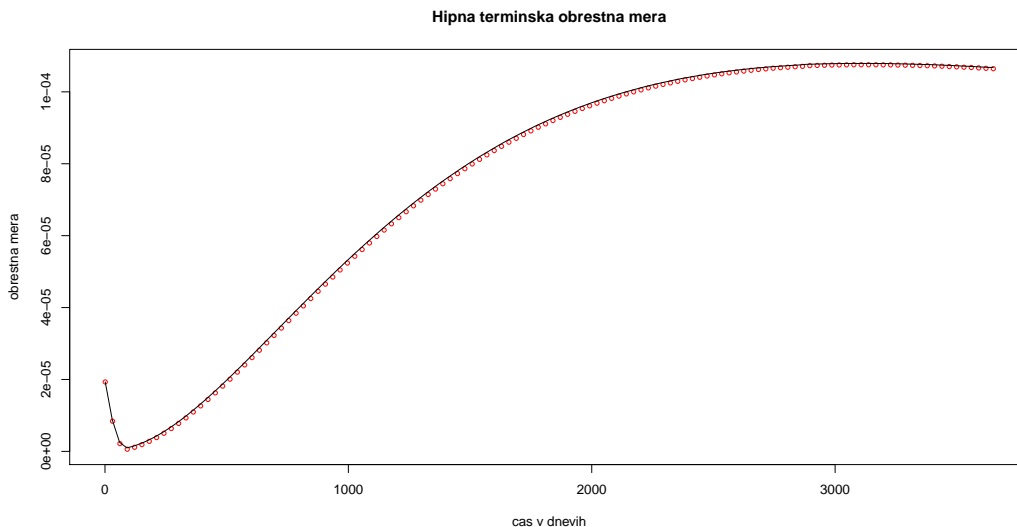


SLIKA 6. Časovna struktura na dan 2.1.2012.

Za hipno časovno strukturo obrestnih mer ob času 0 bomo vzeli hipne terminske obrestne mere na vladne obveznice z bonitetno oceno AAA v evroobmočju z ročnostjo od treh mesecev do deset let na dan 2.1.2012, od katerega naprej se tudi simulira obrestne mere in stanja depozitov. Ti podatki so prav tako pridobljeni s

spletnih strani Evropske centralne banke in so izračunani po Svenssonovem modelu s šestimi parametri [13]. Finejšo časovno strukturo (dnevno, imamo pa mesečno), ki jo potrebujemo v Ho-Leejevem modelu, izračunamo kot odsekoma linearno funkcijo med znanimi podatki (na časovnih točkah t_{30}, t_{60}, \dots) za hipne terminske obrestne mere, pri čemer za $f(0, t_0) = f(0, 0)$ vzamemo povprečje hipnih obrestnih mer med 19.12.2011 in 5.1.2012.

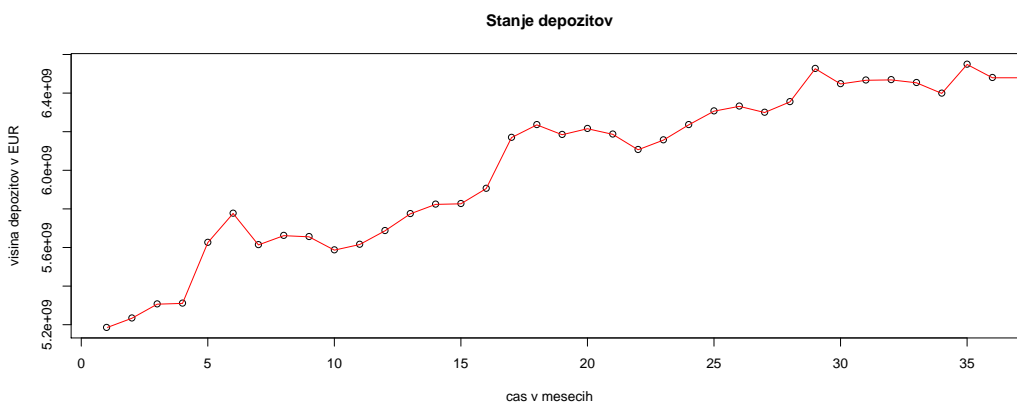
Podatke za hipne terminske obrestne mere (na letni ravni) navajamo v prilogi pod imenom *InstForwardRates.txt*.



SLIKA 7. Hipna terminska obrestna mera in odsekoma linearna funkcija.

Za višino depozitov vzamemo mesečne podatke Evropske centralne banke za nočne depozite gospodinjstev in neprofitnih organizacij v Republiki Sloveniji od januarja 2009 do decembra 2011. Ker so podatki mesečni, želimo pa dnevne, privzamemo, da je stanje depozitov odsekoma linearna funkcija med znanimi mesečnimi podatki.

Podatke za višino depozitov navajamo v prilogi pod imenom *depoziti.txt*.



SLIKA 8. Stanje depozitov.

Predpostavimo, da je obrestna mera na depozite konstantna, in sicer naj znaša 0, 10% na letni ravni, kar je tudi dejansko stanje v slovenskih bankah.

3. MODEL GIBANJA HIPNIH TRŽNIH OBRESTNIH MER

Naj na trgu veljajo predpostavke iz drugega poglavja. Dinamika hipne obrestne mere je podana s stohastično diferencialno enačbo

$$dr_t = b(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t \quad (17)$$

z začetnim pogojem za r_0 , kjer b predstavlja tendenco⁸, σ difuzijski koeficient, W_t pa je Brownovo gibanje prilagojeno filtraciji $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ pod do tveganja nevtralno verjetnostno mero Q .

Trditev 22. *Za obstoj rešitve zgornje stohastične diferencialne enačbe, kjer je r_0 \mathcal{F}_0 -merljiva slučajna spremenljivka in velja $\int_0^t r_s^2 ds < \infty$ s.g. za vsak $t > 0^9$, privzamemo obstoj konstante $K > 0$, ki ustreza naslednjim pogojem:*

1.

$$|\sigma(t, x)| + |b(t, x)| \leq K(1 + |x|),$$

2. (*Lipschitzov pogoj*)

$$|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Dokaz. Dokaz lahko najdemo v zapiskih predavanj [10]. □

Kot že omenjeno, lahko modele hipnih obrestnih mer razdelimo na ravnotežne in brezarbitražne modele. Slabost ravnotežnih modelov je, da se ne prilegajo trenutni časovni strukturi obrestnih mer, četudi parametre lahko naredimo časovno odvisne. Brezarbitražni modeli pa so ravno nasprotje: ujemajo se s trenutno časovno strukturo obrestnih mer. Tako je tendenca b funkcija časa [12].

3.1. Vasičkov model.

Definicija 23. *Vasičkov model hipne obrestne mere r_t , kjer je r_t kot v enačbi (12), je Ornstein-Uhlenbeckov slučajni proces oblike*

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma dW_t, \quad (18)$$

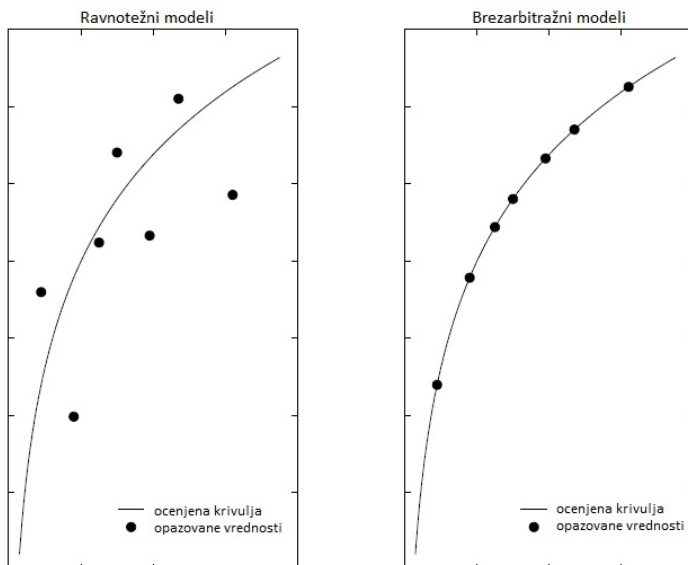
kjer so α, β in σ nenegativne konstante.

Vasičkov model je eden izmed prvih slučajnih modelov hipne obrestne mere. Prednost tega modela je, da je r_t normalno porazdeljen, slabost pa, da so obrestne mere lahko tudi negativne in da ne odraža trenutne časovne strukture obrestnih mer. Tu α predstavlja dolgoročno normalno obrestno mero, sam proces hipnih obrestnih mer pa je proces, ki teži k ravnotežju¹⁰, kar pomeni, da če je obrestna mera večja od

⁸Angleško "drift".

⁹V resnici vsak proces z zveznimi trajektorijami ustreza temu pogoj. Sledi, da obstaja zaporedje časov ustavljanja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $T_n \uparrow \infty$ s. g., da velja $E \left[\int_0^{T_n} r_s^2 ds \right] < \infty$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, zato lahko uporabimo Itôv integral.

¹⁰Ravnotežni ali angleško "mean reverting" proces pomeni, da so visoka in nizka stanja začasna in se slej ko prej ustalijo pri povprečju.



SLIKA 9. Primerjava ravnotežnih in brezarbitražnih modelov v prileganju trenutni časovni strukturi. Vir: [12], str. 35.

dolgoročnega povprečja ($r_t > \alpha$), potem je tendenca negativna, saj $\beta > 0$, zato se obrestna mera zniža v smeri r_t in obratno, če $r_t < \alpha$. Koeficient β je hitrost prilagoditve obrestne mere k dolgoročnemu povprečju. Vasičkov model je tako *enofaktorski ravnotežni model*: Ko so obrestne mere visoke, se ekonomija začne upočasnjevati in sposojevalci zahtevajo manj posojil, zato se obrestna mera zmanjša in gre nazaj proti povprečju. Ko pa so obrestne mere nizke, povpraševanje po posojilih naraste, zato se obrestne mere dvignejo [12]. Koeficient σ predstavlja trenutno volatilitnost in meri naključnost sistema. Višji σ pomeni večjo naključnost [15].

Trditev 24. *Rešitev stohastične diferencialne enačbe Vasičkovega modela je*

$$r_t = r_0 e^{-\beta t} + \alpha(1 - e^{-\beta t}) + \sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s. \quad (19)$$

Dokaz. Začnimo s stohastično diferencialno enačbo

$$dr_t = \beta(\alpha - r_t)dt + \sigma dW_t.$$

Naj bo

$$X_t = r_t - \alpha. \quad (20)$$

X_t je rešitev stohastične diferencialne enačbe

$$dX_t = -\beta X_t dt + \sigma dW_t, \quad (21)$$

kar je po (2) Ornstein-Uhlenbeckov proces. Nato nastavimo

$$Y_t = e^{\beta t} X_t. \quad (22)$$

Z uporabo Itôve formule sledi, da je

$$\begin{aligned} dY_t &= \beta e^{\beta t} X_t dt + e^{\beta t} dX_t = \\ &= \beta e^{\beta t} X_t dt + e^{\beta t} (-\beta X_t dt + \sigma dW_t) = \\ &= e^{\beta t} \sigma dW_t \end{aligned}$$

in zato

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{\beta s} \sigma dW_s. \quad (23)$$

Po enačbi (22) je

$$Y_0 = e^0 X_0 = X_0$$

in po (23)

$$e^{\beta t} X_t = X_0 + \int_0^t e^{\beta s} \sigma dW_s$$

oziroma

$$X_t = e^{-\beta t} (X_0 + \int_0^t e^{\beta s} \sigma dW_s).$$

Po enačbi (20) sledi

$$\begin{aligned} r_t &= e^{-\beta t} (r_0 - \alpha) + e^{-\beta t} \sigma \int_0^t e^{\beta s} dW_s + \alpha = \\ &= e^{-\beta t} r_0 + \alpha(1 - e^{-\beta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s. \end{aligned}$$

□

Opomba 25. Za $u \leq t$ lahko r_t zapišemo tudi drugače

$$\begin{aligned} r_t &= e^{-\beta t} r_0 + \alpha(1 - e^{-\beta t}) + \sigma \int_0^t e^{-\beta(t-s)} dW_s = \\ &= e^{-\beta(t-u)} r_u + \alpha(1 - e^{-\beta(t-u)}) + \sigma \int_u^t e^{-\beta(t-s)} dW_s. \end{aligned}$$

Lema 26. Za vsak t je r_t normalna slučajna spremenljivka z upanjem

$$E(r_t) = r_0 e^{-\beta t} + \alpha(1 - e^{-\beta t}) \quad (24)$$

in disperzijo

$$D(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t}). \quad (25)$$

Posledično velja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(r_t) = \alpha, \quad (26)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} D(r_t) = \frac{\sigma^2}{2\beta}. \quad (27)$$

Dokaz. Ker je

$$Z_t = \int_0^t e^{\beta s} dW_s$$

normalna slučajna spremenljivka (kasneje označeno z N (upanje, disperzija)) z upanjem 0 in disperzijo, ki jo izračunamo po Itôvi izometriji

$$\begin{aligned} D(Z_t) &= \int_0^t e^{2\beta s} ds = \\ &= \left[\frac{e^{2\beta s}}{2\beta} \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{2\beta} (e^{2\beta t} - 1), \end{aligned}$$

je

$$\sigma e^{-\beta t} \int_0^t e^{\beta s} dW_s \sim N\left(0, \frac{1}{2\beta} (e^{2\beta t} - 1) \frac{\sigma^2}{e^{2\beta t}}\right) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t})\right).$$

Torej je

$$r_t \sim N\left(e^{-\beta t} r_0 + \alpha(1 - e^{-\beta t}), \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta t})\right).$$

□

3.1.1. *Diskretizacija in ocena parametrov.* Simulacija zveznega procesa je točna v diskretnem naboru časovnih točk [3]. Vasičkov model obrestne mere lahko simuliramo na način, opisan spodaj.

Po opombi 25 velja

$$r_t = e^{-\beta(t-u)} r_u + \alpha(1 - e^{-\beta(t-u)}) + \sigma \int_u^t e^{-\beta(t-s)} dW_s$$

in zato

$$\begin{aligned} E(r_t | \mathcal{F}_u) &= r_u e^{-\beta(t-u)} + \alpha(1 - e^{-\beta(t-u)}), \\ D(r_t | \mathcal{F}_u) &= \frac{\sigma^2}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t-u)}). \end{aligned}$$

Da torej simuliramo obrestno mero ob časih $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, nastavimo

$$r_{t_{i+1}} = e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)} r_{t_i} + \alpha(1 - e^{-\beta(t_{i+1}-t_i)}) + \sigma \sqrt{\frac{1}{2\beta} (1 - e^{-2\beta(t_{i+1}-t_i)})} Z_{i+1} \quad (28)$$

za $i = 0, 1, \dots, n-1$,

kjer so Z_1, Z_2, \dots, Z_n neodvisne standardno normalno porazdeljene slučajne spremenljivke.

V primeru diskretizacije Vasičkovega modela po Eulerjevi metodi pa dobimo

$$r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + \beta(\alpha - r_{t_i}) [t_{i+1} - t_i] + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \text{ za } i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (29)$$

kjer so Z_1, Z_2, \dots, Z_n neodvisne standardno normalno porazdeljene slučajne spremenljivke.

Privzemimo, da je $t_{i+1} - t_i = 1$, potem za simulacijo velja

$$r_{t_{i+1}} = e^{-\beta} r_{t_i} + \alpha(1 - e^{-\beta}) + \sigma \sqrt{\frac{1}{2\beta} (1 - e^{-2\beta})} Z_{i+1}$$

in za diskretizacijo velja

$$r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + \beta(\alpha - r_{t_i}) + \sigma Z_{i+1}.$$

Trditev 27. V Vasičkovem modelu je cena brezakuponske obveznice ob času t , $0 \leq t \leq T$, z dospeljem T enaka

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r_t B(t, T)}, \quad (30)$$

kjer sta

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-\beta(T-t)}}{\beta}, \quad (31)$$

$$A(t, T) = \exp\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\beta^2}\right)(B(t, T) - T + t) - \frac{\sigma^2}{4\beta}B^2(t, T)\right). \quad (32)$$

Dokaz. Spomnimo se, da velja

$$P(u, T) = E\left(e^{-\int_u^T r_s ds} | \mathcal{F}_u\right).$$

Izračunajmo $\int_u^T r_s ds$:

$$\begin{aligned} \int_u^T r_s ds &= \int_u^T e^{-\beta(s-u)} r_u ds + \alpha \int_u^T (1 - e^{-\beta(s-u)}) ds + \sigma \int_u^T \int_u^s e^{-\beta(s-z)} dW_z ds = \\ &= r_u \frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta} + \alpha \left(T - u - \frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta}\right) + \sigma \int_u^T \int_u^s e^{-\beta(s-z)} dW_z ds. \end{aligned}$$

Tako je

$$E\left(\int_u^T r_s ds | \mathcal{F}_u\right) = r_u \frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta} + \alpha \left(T - u - \frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta}\right)$$

in

$$\begin{aligned}
D\left(\int_u^T r_s ds | \mathcal{F}_u\right) &= D\left(\sigma \int_u^T \int_u^s e^{-\beta(s-z)} dW_z ds | \mathcal{F}_u\right) = \\
&= E\left[\left(\sigma \int_u^T \int_u^s e^{-\beta(s-z)} dW_z ds | \mathcal{F}_u\right)^2\right] = \\
&= E\left[\left(\sigma \int_u^T \int_z^T e^{-\beta(s-z)} ds dW_z | \mathcal{F}_u\right)^2\right] = \\
&\stackrel{11}{=} \sigma^2 \int_u^T \left[\int_z^T e^{-\beta(s-z)} ds\right]^2 dz = \\
&= \sigma^2 \int_u^T \left[\left[\frac{e^{\beta z} e^{-\beta s}}{-\beta}\right]_z^T\right]^2 dz = \\
&= \frac{\sigma^2}{\beta^2} \int_u^T \left[e^{-\beta(T-z)} - 1\right]^2 dz = \\
&= \frac{\sigma^2}{\beta^2} \int_u^T \left[e^{-2\beta(T-z)} - 2e^{-\beta(T-z)} + 1\right] dz = \\
&= \frac{\sigma^2}{\beta^2} \left[e^{-2\beta T} \frac{e^{2\beta z}}{2\beta} - 2e^{-\beta T} \frac{e^{\beta z}}{\beta} + z\right]_u^T = \\
&= \frac{\sigma^2}{\beta^2} \left[\frac{1 - e^{-2\beta(T-u)}}{2\beta} - 2\frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta} + T - u\right].
\end{aligned}$$

¹¹Itôva izometrija.

Če $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potem je $E(e^X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ in zato

$$\begin{aligned}
P(u, T) &= E\left(e^{-\int_u^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_u\right) = \\
&= \exp\left(-r_u \frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta} - \alpha\left(T - u - \frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta}\right) + \right. \\
&+ \left. \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \left[\frac{1 - e^{-2\beta(T-u)}}{2\beta} - 2\frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta} + T - u\right]\right) = \\
&= \exp\left(-r_u B(u, T)\right) \cdot \\
&\cdot \exp\left(\alpha(-T + u + B(u, T)) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \left[-\frac{1 - e^{-2\beta(T-u)}}{2\beta} + 2\frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta} - T + u\right]\right) = \\
&= \exp\left(-r_u B(u, T)\right) \cdot \\
&\cdot \exp\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\beta^2}\right)(B(u, T) - T + u) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} \left(-\frac{1 - e^{-2\beta(T-u)}}{2\beta} + \frac{1 - e^{-\beta(T-u)}}{\beta}\right)\right) = \\
&= \exp\left(-r_u B(u, T)\right) \cdot \\
&\cdot \exp\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\beta^2}\right)(B(u, T) - T + u) - \frac{\sigma^2}{4\beta^3} (1 - 2e^{-\beta(T-u)} + e^{-2\beta(T-u)})\right) = \\
&= \exp\left(-r_u B(u, T)\right) \exp\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\beta^2}\right)(B(u, T) - T + u) - \frac{\sigma^2}{4\beta} B^2(u, T)\right) = \\
&= A(u, T) e^{-r_u B(u, T)}.
\end{aligned}$$

□

Trditev 28. V Vasičkovem modelu je hipna terminska obrestna mera $f(0, T)$ ob času 0 enaka

$$f(0, T) = \alpha + e^{-\beta T} (r_0 - \alpha) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta T})^2. \quad (33)$$

Dokaz. Izračunajmo izraz za $P(0, T)$:

$$\begin{aligned}
P(0, T) &= A(0, T) e^{-r_0 B(0, T)} = \\
&= \exp\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2\beta^2}\right) \left(\frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta} - T\right) - \frac{\sigma^2}{4\beta} \left(\frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta}\right)^2 - r_0 \frac{1 - e^{-\beta T}}{\beta}\right) = \\
&= \exp\left(\frac{\alpha(1 - e^{-\beta T})}{\beta} - \alpha T - \frac{\sigma^2(1 - e^{-\beta T})}{2\beta^3} + \frac{\sigma^2 T}{2\beta^2} - \right. \\
&- \left. \frac{\sigma^2(1 - 2e^{-\beta T} + e^{-2\beta T})}{4\beta^3} - \frac{r_0(1 - e^{-\beta T})}{\beta}\right).
\end{aligned}$$

Tako je

$$\begin{aligned}
 f(0, T) &= -\frac{\partial \log P(0, T)}{\partial T} = \\
 &= -\alpha e^{-\beta T} + \alpha + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} e^{-\beta T} - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (e^{-\beta T} - e^{-2\beta T}) + r_0 e^{-\beta T} = \\
 &= \alpha + e^{-\beta T} (-\alpha + r_0) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (-e^{-\beta T} + 1 - e^{-\beta T} + e^{-2\beta T}) = \\
 &= \alpha + e^{-\beta T} (r_0 - \alpha) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta T})^2.
 \end{aligned}$$

□

Za izračun parametrov torej lahko rešujemo predoločen sistem enačb na N podatkih za hipne terminske obrestne mere $(f(0, T_1), f(0, T_2), \dots, f(0, T_N))$ s tremi neznankami :

$$\begin{aligned}
 f(0, T_1) &= \alpha + e^{-\beta T_1} (r_0 - \alpha) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta T_1})^2 \\
 f(0, T_2) &= \alpha + e^{-\beta T_2} (r_0 - \alpha) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta T_2})^2 \\
 f(0, T_3) &= \alpha + e^{-\beta T_3} (r_0 - \alpha) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta T_3})^2 \\
 &\vdots \\
 f(0, T_N) &= \alpha + e^{-\beta T_N} (r_0 - \alpha) - \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta T_N})^2,
 \end{aligned}$$

ki ga rešimo kot nelinearni problem najmanjših kvadratov

$$\min_{\alpha, \beta, \sigma} \left(\sum_{i=1}^N \left[f(0, T_i) - \alpha - e^{-\beta T_i} (r_0 - \alpha) + \frac{\sigma^2}{2\beta^2} (1 - e^{-\beta T_i})^2 \right]^2 \right) \quad (34)$$

pri pogoju, da so vse tri konstante pozitivne.

Kalkulacija 29. V R-u si lahko za izračun neznank pomagamo s knjižnico *BB*, ki je zasnovana za reševanje sistemov nelinearnih enačb. Je pa metoda reševanja zelo občutljiva na vhodne približke. Vzeli smo podatke za 119 hipnih terminskih obrestnih mer, in sicer z ročnostmi 3 mesece, 4 mesece, ..., 121 mesecev. Za vhodni približek pa smo izbrali $\alpha_0 = 10^{-6}$, $\beta_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ in $\sigma_0 = 10^{-5}$.

```

> #####
> ##### Vasickov model #####
> #####
>
> #####
> #   ocena parametrov
> #####
> setwd('C:/Users/Manca/MANCA/MAGdelo/Excel in R')

```

```

> library(BB)
>
> ifr<-read.table('InstForwardRates.txt',header=TRUE)
> ifr<-ifr[,2]/365
>
> om<-read.table('InstShortRates.txt',header=TRUE)
> om[[2]]<-om[[2]]/365
> om_vec<-om[1:341,2]
> r_0<-om_vec[length(om_vec)]
> r_0
[1] 2.465753e-05
>
> ###
> #Vhodni priblizek
> p0<-c(1e-6,2e-5,1e-5)
>
> cenaOptim3<-function(p){
+ e<-numeric(119)
+ i<-seq(90,3650,30)
+ j<-1:119
+ e[j]<-exp(-p[2]*i)
+ min(sum((ifr[j]-p[1]-e[j]*(r_0-p[1])+
+ (p[3]**2/(2*p[2]**2))*(1-e[j])**2)**2))}
>
> (ans3 <- BBoptim(par=p0, fn=cenaOptim3,
  control = list(maxit=15000),lower=c(0,0,0)))
  Successful convergence.
$par
[1] 7.870362e-05 7.831034e-03 3.126682e-06

$value
[1] 1.299698e-07

$gradient
[1] 3.126682e-06

$fn.reduction
[1] 1.380904e-05

$iter
[1] 23

$feval
[1] 31

$convergence
[1] 0

```

```
$message
[1] "Successful convergence"
```

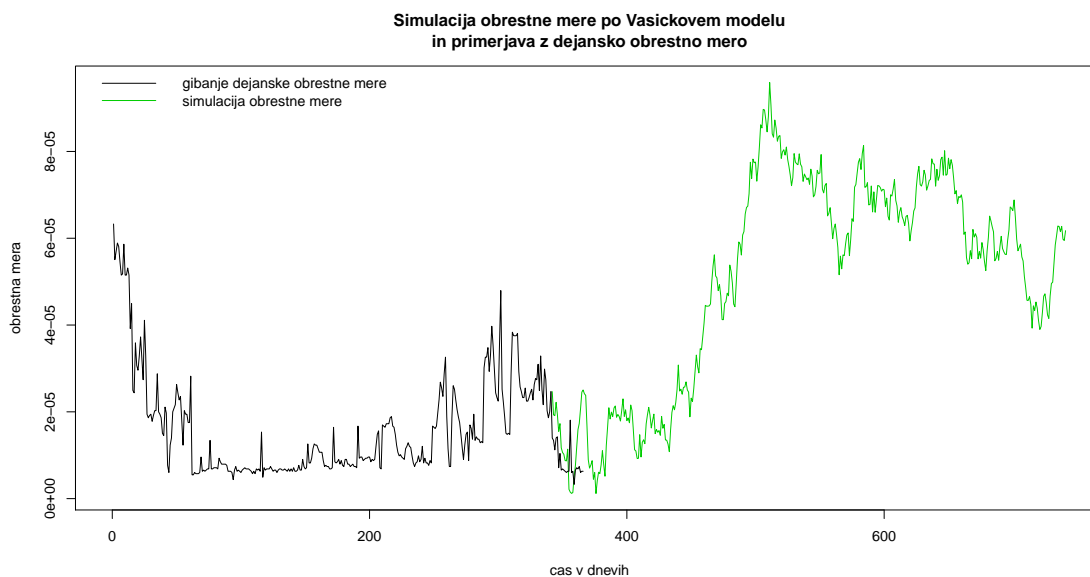
```
$cpar
method      M
      2      50
```

```
> (alfa<-ans3$par[1])
[1] 7.870362e-05
> (beta<-ans3$par[2])
[1] 0.007831034
> (sigma<-ans3$par[3])
[1] 3.126682e-06
```

Kalkulacija 30. Sedaj, ko smo ocenili parametre, lahko simuliramo obrestno mero po Vasičkovem modelu. Obrestno mero simuliramo 1000-krat za časovno obdobje 10 let, oziroma $t = 3650$.

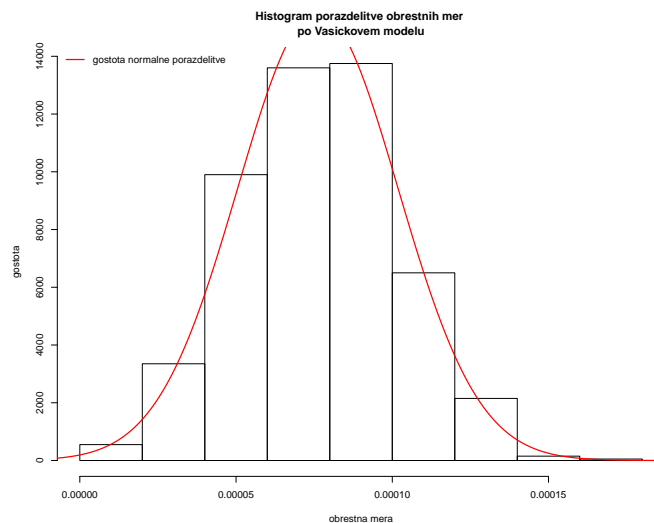
```
> Vasicek<-function(x,st_sim){
+ set.seed(x)
+ Z<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=st_sim)
+ for(i in 1:st_sim){Z[,i]<-rnorm(3650,0,1)}
+
+ r<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=st_sim)
+ r[1,]<-om_vec[length(om_vec)]
+
+ for(i in 2:3650){
+ r[i,]<-exp(-beta)*r[i-1,] + alfa*(1-exp(-beta)) +
+   sigma*sqrt((1/(2*beta))*(1-exp(-2*beta)))*Z[i,]
+ }
+ r
+ }
>
> matrika_V<-Vasicek(3435,1000)
```

Poglejmo si primer simulacije za zgoraj ocenjene parametre, tj. $\alpha = 7,870362 \cdot 10^{-5}$, $\beta = 0,007831034$ in $\sigma = 3,126682 \cdot 10^{-6}$.



SLIKA 10. Primerjava dejanskega gibanja obrestne mere s primerom gibanja obrestne mere po Vasičkovem modelu z ocenjenimi parametri.

Poglejmo si še porazdelitev obrestne mere po Vasičkovem modelu.



SLIKA 11. Porazdelitev vzorcev obrestnih mer po Vasičkovem modelu za $t = 345$ (1000 vzorcev hipnih obrestnih mer) in gostota normalne porazdelitve.

3.2. Ho-Leejev model.

Definicija 31. Ho-Leejev model hipne obrestne mere r_t , kjer je r_t kot v enačbi (12), je slučajni proces oblike

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t, \tag{35}$$

kjer je θ_t deterministična funkcija časa t in σ nenegativna konstanta.

Ho-Leejev model je *enofaktorski brezarbitražni model* hipne obrestne mere. Za razliko od Vasičkovega ravnotežnega modela, ta model ustreza trenutni časovni strukturi obrestnih mer in tako izključuje arbitražne priložnosti, do katerih pride zaradi razlik med opazovanimi in simuliranimi podatki. Funkcija časa θ_t določa povprečno smer spremembe hipne obrestne mere v odvisnosti od časa t , σ pa je standardni odklon hipne obrestne mere. Slabost tega modela je, da ne omogoča fleksibilnosti pri izbiri strukture volatilitnosti. Obrestne mere prav tako lahko postanejo negativne. Model ne predvideva, da se obrestne mere sčasoma vrnejo na neko povprečno raven [8], poleg tega bi ga morali sproti spreminjati glede na spremembe v časovni strukturi obrestnih mer.

Trditev 32. *Rešitev stohastične diferencialne enačbe Ho-Leejevega modela je*

$$r_t = r_0 + \int_0^t \theta_s ds + \sigma W_t, \quad (36)$$

kjer je

$$\theta_t = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t. \quad (37)$$

Opomba 33. *Za $u \leq t$ lahko r_t zapišemo tudi drugače*

$$\begin{aligned} r_t &= r_0 + \int_0^t \theta_s ds + \sigma W_t = \\ &= r_u + \int_u^t \theta_s ds + \sigma(W_t - W_u). \end{aligned}$$

Dokaz. Integrirajmo enačbo

$$dr_t = \theta_t dt + \sigma dW_t.$$

Dobimo

$$\begin{aligned} r_t &= r_0 + \int_0^t \theta_s ds + \int_0^t \sigma dW_s = \\ &= r_0 + \int_0^t \theta_s ds + \sigma W_t. \end{aligned}$$

Izračunajmo še θ_t . Poglejmo si najprej integral $-\int_u^T \sigma(W_s - W_u)ds$. Ta je porazdeljen normalno z upanjem 0 in disperzijo

$$\begin{aligned}
D\left(-\int_u^T \sigma(W_s - W_u)ds\right) &= \sigma^2 D\left(\int_u^T (W_s - W_u)ds\right) = \\
&= \sigma^2 D\left(\int_0^{T-u} W_s ds\right) = \\
&= \sigma^2 D\left([s W_s]_0^{T-u} - \int_0^{T-u} s dW_s\right) = \\
&= \sigma^2 D\left((T-u)W_{T-u} - \int_0^{T-u} s dW_s\right) = \\
&= \sigma^2 E\left(\left(\int_0^{T-u} (T-u-s)dW_s\right)^2\right) = \\
&\stackrel{12}{=} \sigma^2 E\left(\int_0^{T-u} (T-u-s)^2 ds\right) = \\
&= \sigma^2 \left[-\frac{(T-u-s)^3}{3}\right]_0^{T-u} = \\
&= \sigma^2 \frac{(T-u)^3}{3},
\end{aligned}$$

kjer smo v drugi vrstici upoštevali

$$\begin{aligned}
W_s - W_u &\sim W_{s-u} - W_0, \\
D\left(\int_u^T (W_s - W_u)ds\right) &= D\left(\int_u^T (W_{s-u} - W_0)ds\right) = \\
&= D\left(\int_u^T (W_{s-u})ds\right) = \\
&= D\left(\int_0^{T-u} W_s ds\right),
\end{aligned}$$

v tretji vrstici pa

$$\begin{aligned}
d(uW_u) &= u dW_u + W_u du, \\
\int W_u du &= uW_u - \int u dW_u.
\end{aligned}$$

Če $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, potem je $E(e^X) = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$. Vemo, da je $1 = P(u, T)e^{\int_u^T r_s ds}$ in zato

$$\begin{aligned}
P(u, T) &= E\left(e^{-\int_u^T r_s ds}\right) = \\
&= E\left(e^{-\int_u^T (r_u + \int_u^s \theta_z dz + \sigma(W_s - W_u))ds}\right) = \\
&= e^{-(T-u)r_u - \int_u^T \int_u^s \theta_z dz ds + \frac{1}{6}\sigma^2(T-u)^3}.
\end{aligned}$$

¹²Itôva izometrija.

Po enačbi (11) in spodaj izračunanem velja

$$\begin{aligned} f(0, T) &= -\frac{\partial \log P(0, T)}{\partial T} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial T} \left[-Tr_0 - \int_0^T \int_0^s \theta_z dz ds + \frac{1}{6} \sigma^2 T^3 \right] = \\ &= r_0 + \int_0^T \theta_z dz - \frac{1}{2} \sigma^2 T^2. \end{aligned}$$

Zato je

$$f(0, t) = r_0 + \int_0^t \theta_z dz - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2,$$

iz česar sledi

$$\theta_t = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t.$$

Upoštevali smo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_0^T \int_0^s \theta_z dz ds \right) &= \int_0^T \theta_z dz \cdot 1 - \int_0^0 \theta_z dz \cdot 0 + \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial T} \left(\int_0^s \theta_z dz \right) \right) ds = \\ &= \int_0^T \theta_z dz. \end{aligned}$$

□

Lema 34. Za vsak t je r_t normalna slučajna spremenljivka z upanjem

$$E(r_t) = r_0 + \int_0^t \theta_s ds \quad (38)$$

in disperzijo

$$D(r_t) = \sigma^2 t. \quad (39)$$

Dokaz. Ker je $W_t \sim N(0, t)$, je $\sigma W_t \sim N(0, \sigma^2 t)$. □

3.2.1. *Diskretizacija in ocena parametrov.* Ho-Leejev model obrestne mere lahko simuliramo na način, opisan spodaj. Po opombi 33 velja

$$r_t = r_u + \int_u^t \theta_s ds + \sigma(W_t - W_u).$$

Da torej simuliramo (kar je tu enako diskretizaciji) obrestno mero ob časih $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, nastavimo

$$r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta_s ds + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \text{ za } i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (40)$$

kjer so Z_1, Z_2, \dots, Z_n neodvisne standardno normalno porazdeljene slučajne spremenljivke [3].

Ker je

$$\theta_t = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + \sigma^2 t,$$

lahko $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta_s ds$ zapišemo kot

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \theta_s ds = [f(0, t_{i+1}) - f(0, t_i)] + \frac{\sigma^2}{2} [t_{i+1}^2 - t_i^2]$$

in zato

$$r_{t_{i+1}} = r_{t_i} + [f(0, t_{i+1}) - f(0, t_i)] + \frac{\sigma^2}{2} [t_{i+1}^2 - t_i^2] + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}. \quad (41)$$

Privzemimo, da je $t_{i+1} - t_i = 1$, potem za diskretizacijo velja

$$\begin{aligned} r_{t_{i+1}} &= r_{t_i} + [f(0, t_i + 1) - f(0, t_i)] + \frac{\sigma^2}{2} [(t_i + 1)^2 - t_i^2] + \sigma Z_{i+1} = \\ &= r_{t_i} + [f(0, t_i + 1) - f(0, t_i)] + \frac{\sigma^2}{2} [2t_i + 1] + \sigma Z_{i+1}. \end{aligned}$$

Oceniti moramo vrednost σ . Po lemi 34 velja

$$D(r_t) = \sigma^2 t$$

in zato

$$\sigma = \sqrt{\frac{D(r_t)}{t}}.$$

Trditev 35. V Ho-Leejevem modelu je cena brezkuponske obveznice ob času t , $0 \leq t \leq T$, z dospetjem T enaka

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-r_t(T-t)}, \quad (42)$$

kjer je

$$A(t, T) = \exp\left(\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 - \int_t^T (T-u)\theta_u du\right). \quad (43)$$

Dokaz. Videli smo že, da velja

$$P(u, T) = e^{-(T-u)r_u - \int_u^T \int_u^s \theta_z dz ds + \frac{1}{6}\sigma^2(T-u)^3}.$$

Torej moramo dokazati še

$$\int_u^T (T-s)\theta_s ds = \int_u^T \int_u^s \theta_z dz ds.$$

Za dokaz enostavno zamenjamo vrstni red integracije v desnem izrazu :

$$\begin{aligned} \int_u^T \int_u^s \theta_z dz ds &= \int_u^T \int_z^T \theta_z ds dz = \\ &= \int_u^T (T-z)\theta_z dz. \end{aligned}$$

□

Trditev 36. V Ho-Leejevem modelu je hipna terminska obrestna mera $f(0, T)$ ob času 0 enaka

$$f(0, T) = r_0 + \int_0^T \theta_z dz - \frac{1}{2}\sigma^2 T^2. \quad (44)$$

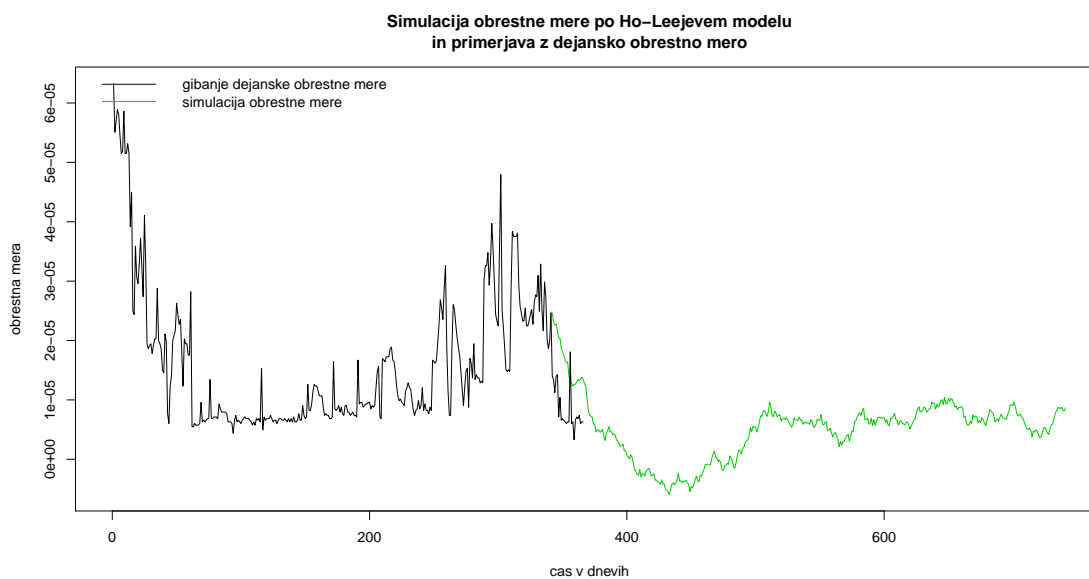
Dokaz. Trditev smo dokazali že v dokazu trditve 32. □

Tu izberimo parameter σ :

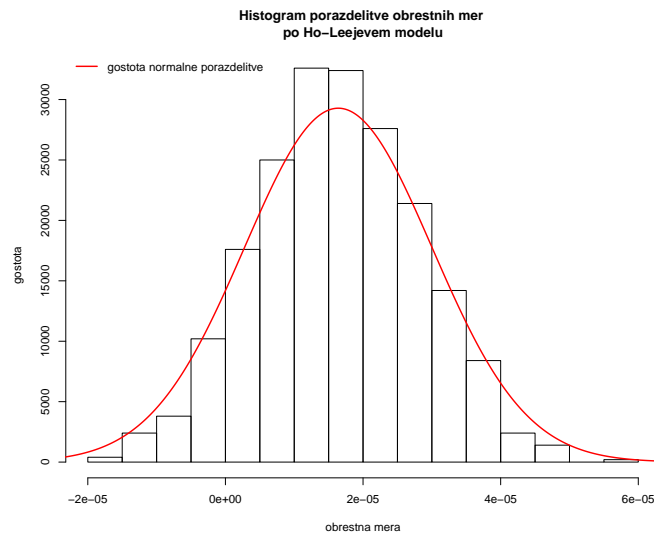
- $\sigma = 6,430438 \cdot 10^{-7}$

Kalkulacija 37. Obrestno mero po Ho-Leejevem simuliramo 1000-krat za časovno obdobje 10 let, oziroma $t = 3650$.

```
> sigma_hl<-6.430438e-07
>
> HoLee <- function(x,st_sim){
+ set.seed(x)
+ Z<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=st_sim)
+ for(i in 1:st_sim){Z[,i]<-rnorm(3650,0,1)}
+
+ r<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=st_sim)
+ r[1,]<-om_vec[length(om_vec)]
+
+ for(i in 2:3650){
+ r[i,] <- r[i-1,] + (tom[i]-tom[i-1]) + (sigma_hl**2)/2*(2*(i-1)+1) +
+ sigma_hl*Z[i,]
+ }
+ r
+ }
>
> matrika_HL<-HoLee(3435,1000)
```

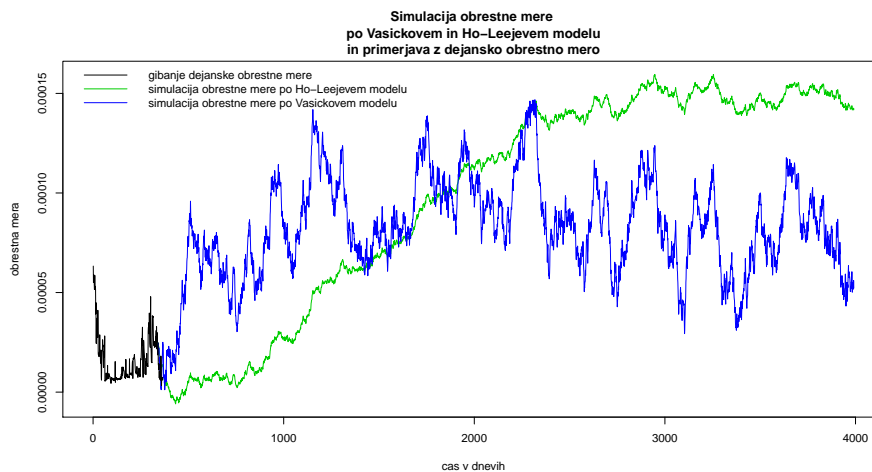


SLIKA 12. Primerjava dejanskega gibanja obrestne mere s primerom gibanja obrestne mere po Ho-Leejevem modelu za izbran parameter σ .



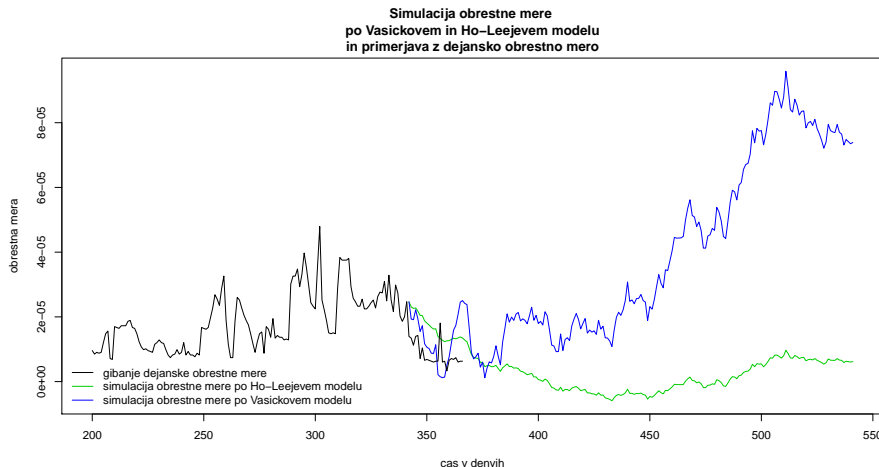
SLIKA 13. Porazdelitev vzorcev obrestnih mer po Ho-Leejevem modelu za $t = 345$ (1000 vzorcev hipnih obrestnih mer) in gostota normalne porazdelitve.

3.3. **Primerjava modelov.** Sedaj lahko primerjamo gibanje hipnih obrestnih mer po Vasičkovem in Ho-Leejevem modelu z dejanskim gibanjem obrestne mere.



SLIKA 14. Primerjava hipnih obrestnih mer.

Pri simulaciji celotnega časovnega obdobja, tj. 10 let, opazimo, da je Ho-Leejev model povsem neprimeren za tako dolg časovni horizont, saj s časom povprečje hipne obrestne mere raste. Zato $\lim_{t \rightarrow \infty} r_t = \infty$ s.g.



SLIKA 15. Primerjava hipnih obrestnih mer v krajšem časovnem obdobju.

4. MODEL GIBANJA STANJA DEPOZITOV

Naj bo stanje depozitov V_t slučajni proces, prilagojen filtraciji \mathcal{F}_t . Uporabimo lahko dva različna modela: normalni in lognormalni model.

4.1. Normalni model.

Definicija 38. V normalnem modelu je stanje depozitov V_t definirano kot

$$V_t = f(t) + X_t, \quad (45)$$

kjer je $f(t) = a + b \cdot t$ deterministična linearna funkcija, ki določa trend procesa V_t , X_t pa je Ornstein-Uhlenbeckov proces z upanjem 0 (iz opombe 5)

$$dX_t = -\rho_V X_t dt + \sigma_V d\widetilde{W}_t, \quad (46)$$

s konstantama ρ_V in $\sigma_V > 0$ ter standardnim Brownovim gibanjem \widetilde{W}_t , ki je neodvisno od Brownovega gibanja W_t iz modelov obrestnih mer.

Opomba 39. Običajno zasledimo, da Brownovo gibanje v modelih za višino depozitov ni neodvisno od Brownovega gibanja iz modelov obrestnih mer. Običajno je oblike

$$\widetilde{W}_t = cW_t^{(1)} + \sqrt{1 - c^2}W_t^{(2)},$$

kjer sta $W_t^{(1)}$ in $W_t^{(2)}$ neodvisni standardni Brownovi gibanji in $W_t^{(1)}$ iz modela obrestnih mer, c pa je konstanta, pridobljena z analizo glavnih komponent, v literaturi poznano kot "Principal Component Analysis" ali "PCA" [7], ki ni ocenjena pod do tveganja nevtralnno verjetnostjo, na kateri slonijo naši modeli. Kot rečeno, model poenostavimo, in za višino depozitov vzamemo nočne depozite, za katere je najbolj verjetno, da so neodvisni od obrestne mere na trgu.

4.1.1. Diskretizacija normalnega modela in ocena parametrov. Model spet lahko diskretiziramo po Eulerjevi metodi iz drugega poglavja. Naj bo $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$.

Potem je

$$\hat{X}_0 = X_0, \quad (47)$$

$$\hat{X}_{t_{i+1}} = \hat{X}_{t_i} - \rho_V \hat{X}_{t_i} [t_{i+1} - t_i] + \sigma_V \sqrt{t_{i+1} - t_i} \tilde{Z}_{i+1} \text{ za } i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (48)$$

kjer so \tilde{Z}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, neodvisne standardno normalno porazdeljene slučajne spremenljivke, neodvisne od standardno normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk Z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, iz modela obrestnih mer. Tako velja

$$V_{t_i} = f(t_i) + X_{t_i} \text{ za } i = 0, 1, \dots, n. \quad (49)$$

Parametre a , b , ρ_V in σ_V ocenimo iz preteklega zaporedja stanj depozitov. In sicer sta a in b v funkciji trenda $f(t)$ ocenjena z modelom linearne regresije. Naj bo število opazovanih podatkov enako n . Označimo

$$\begin{aligned} S_t &= \sum_{k=0}^{n-1} t_k, \\ S_{f(t)} &= \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k), \\ S_{t,t} &= \sum_{k=0}^{n-1} t_k^2, \\ S_{t,f(t)} &= \sum_{k=0}^{n-1} t_k \cdot f(t_k). \end{aligned}$$

Cenilki največjega verjetja za a in b v modelu linearne regresije sta

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \frac{nS_{t,f(t)} - S_t S_{f(t)}}{nS_{t,t} - S_t^2}, \\ \hat{a} &= \frac{S_{f(t)} - \hat{b} S_t}{n}. \end{aligned}$$

Označimo opazovani vzorec stanj z v_0, v_1, \dots, v_{n-1} . Da bi ocenili ρ_V in σ_V moramo od vzorca odšteti njegov trend:

$$\bar{v}_i = v_i - (a + (i - (n - 1)) [t_{i+1} - t_i] b).$$

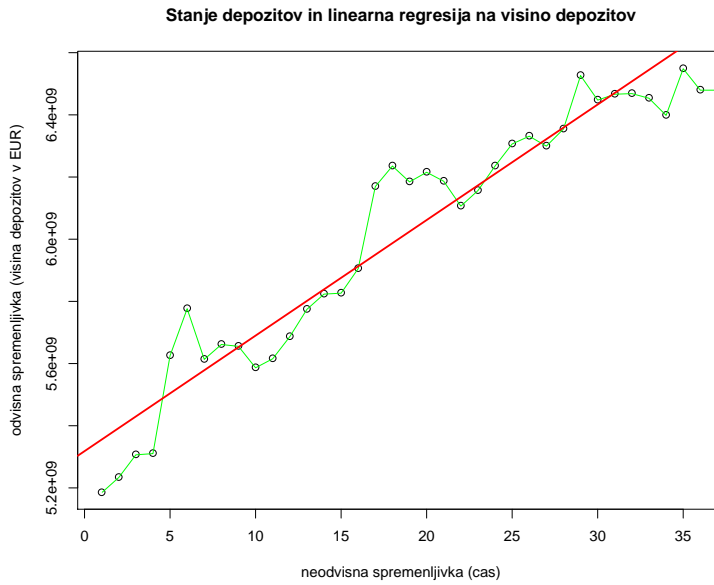
Z uporabo

$$\hat{X}_{t_{i+1}} - \hat{X}_{t_i} + \rho_V \hat{X}_{t_i} [t_{i+1} - t_i] = \sigma_V \sqrt{t_{i+1} - t_i} \tilde{Z}_{i+1} \text{ za } i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (50)$$

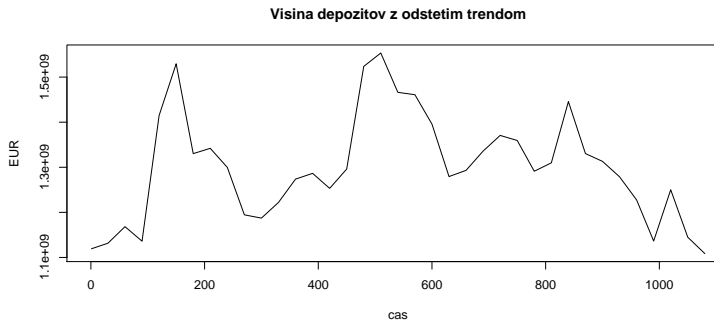
pa iz vzorca $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1}$ dobimo vzorec normalno porazdeljenih slučajnih spremenljivk u_1, u_2, \dots, u_{n-1} z upanjem 0 in disperzijo $\sigma_V^2 (t_{i+1} - t_i)$ (od tu izračunamo σ_V , ampak po izračunu ρ_V). Parameter ρ_V izberemo tako, da ima tudi leva stran enačbe (50) upanje 0.

b	1208564
a	5369584332

TABELA 1. Ocenjene vrednosti.



SLIKA 16. Linearna regresija na podatkih za stanje depozitov.



SLIKA 17. Višina depozitov z odštetim trendom.

ρ_V	$-7,585254 \cdot 10^{-6}$
σ_V	3091787

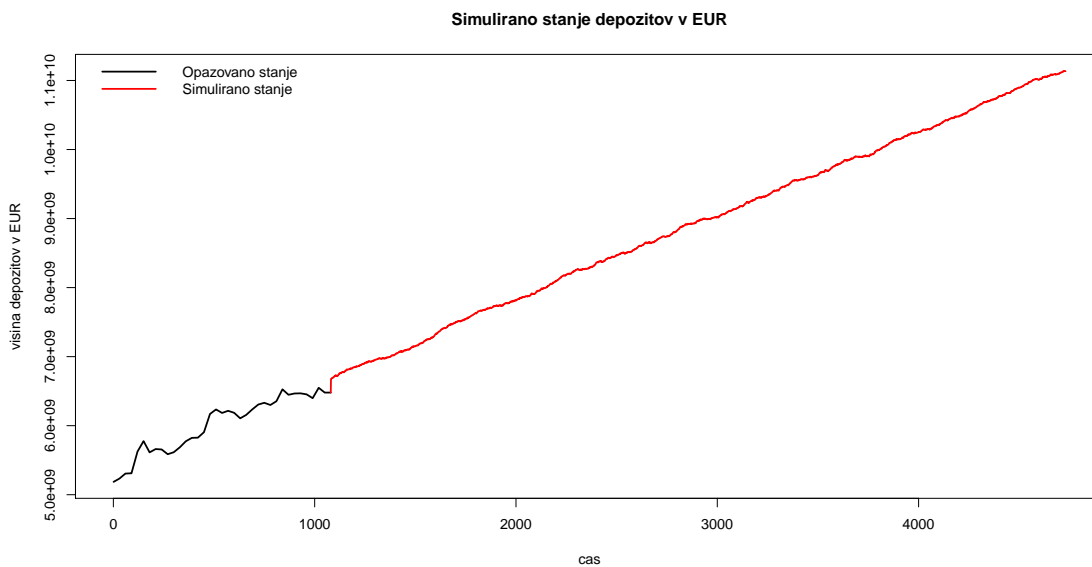
TABELA 2. Ocenjene vrednosti.

Opomba 40. Podobno kot v modelih za obrestne mere, lahko tudi tu privzamemo, da je $t_{i+1} - t_i = 1$:

$$\hat{X}_{t_{i+1}} - \hat{X}_{t_i} + \rho_V \hat{X}_{t_i} = \sigma_V \tilde{Z}_{i+1} \text{ za } i = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (51)$$

Kalkulacija 41. Stanje depozitov simuliramo 1000-krat za časovno obdobje 10 let, oziroma $t = 3650$.

```
> stanje <- function(x,st_sim){
+ set.seed(x)
+ Z<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=st_sim)
+ for(i in 1:st_sim){Z[,i]<-rnorm(3650,0,1)}
+
+ simdepX<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=st_sim)
+ simdepX[1,]<-rep(0,st_sim)
+
+ for(i in 2:3650){
+ simdepX[i,] <- simdepX[i-1,] - ro_v*simdepX[i-1,] + sigma_v*Z[i,]
+ }
+ simdep<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=st_sim)
+ for(i in 1:3650){
+ simdep[i,]<- a+b*(i+1080) + simdepX[i,]
+ }
+ simdep
+ }
>
> stanje<-stanje(215,1000)
```



SLIKA 18. Primer simuliranega stanja depozitov po normalnem modelu.

4.2. **Lognormalni model.** Lognormalni model je definiran zelo podobno kot normalni. Edina razlika je v tem, da vrednosti stanj depozitov ne morejo pasti pod 0.

Definicija 42. V lognormalnem modelu je stanje depozitov V_t definirano kot

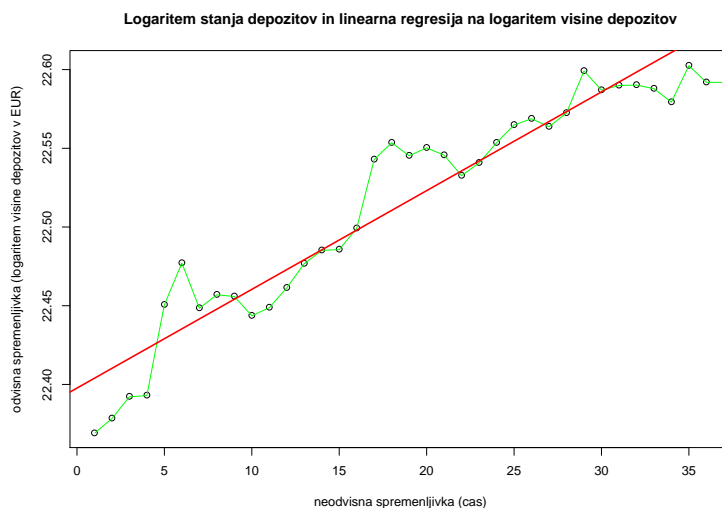
$$V_t = e^{f(t)+X_t}, \quad (52)$$

kjer je $f(t) = a + b \cdot t$ deterministična linearna funkcija, ki določa trend procesa V_t , X_t pa je Ornstein-Uhlenbeckov proces z upanjem 0 (iz opombe 5)

$$dX_t = -\rho_V X_t dt + \sigma_V d\tilde{W}_t, \quad (53)$$

s konstantama ρ_V in $\sigma_V > 0$ ter Brownovim gibanjem \tilde{W}_t , ki je neodvisno od Brownovega gibanja W_t iz modelov obrestnih mer.

Procedura za oceno parametrov je enaka kot v normalnem modelu, paziti moramo le, da opazovan vzorec za stanje depozitov zamenjamo z njegovim logaritmom.



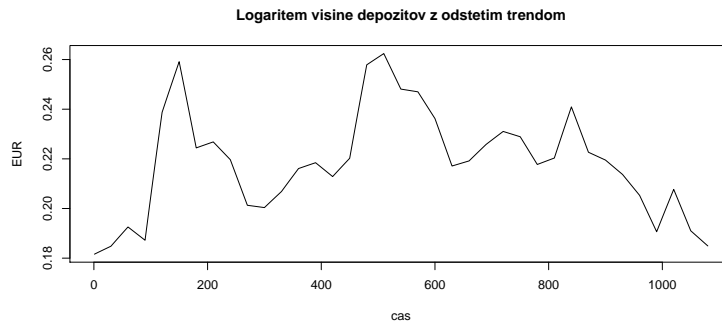
SLIKA 19. Linearna regresija na logaritmiranih podatkih za stanje depozitov.

b	$2,032942 \cdot 10^{-4}$
a	22,40677

TABELA 3. Ocenjene vrednosti.

ρ_V	$1,396457 \cdot 10^{-5}$
σ_V	$5,282014 \cdot 10^{-4}$

TABELA 4. Ocenjene vrednosti.



SLIKA 20. Logaritem višine depozitov z odštetim trendom.

Kalkulacija 43. *Logaritmirano stanje depozitov simuliramo 1000-krat za časovno obdobje 10 let, oziroma $t = 3650$.*

```

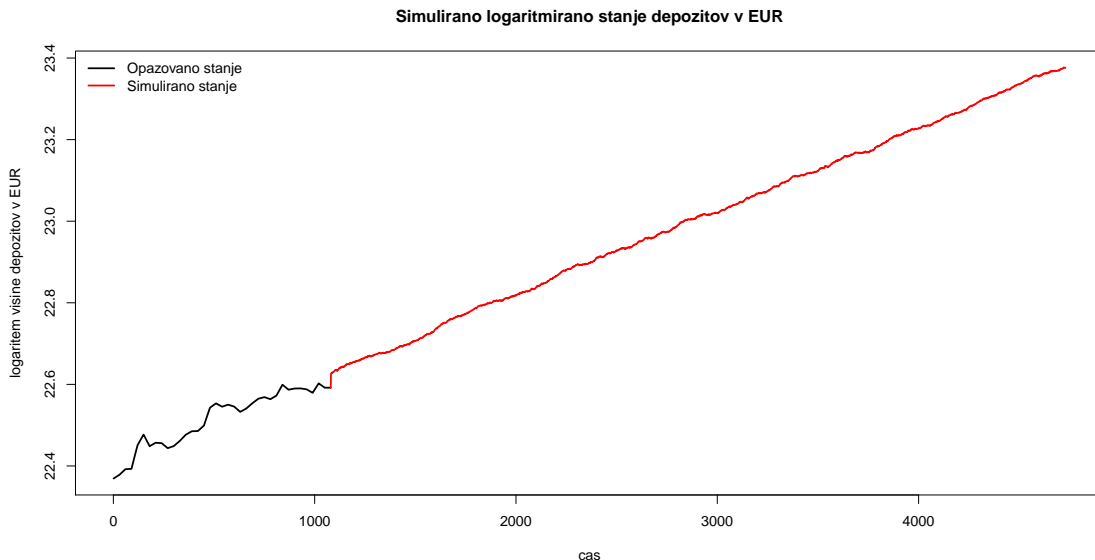
> logstanje <- function(x,st_sim){
+ set.seed(x)
+ Z<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=st_sim)
+ for(i in 1:st_sim){Z[,i]<-rnorm(3650,0,1)}
+
+ simdepX<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=st_sim)
+ simdepX[1,]<-rep(0,st_sim)
+
+ for(i in 2:3650){
+ simdepX[i,] <- simdepX[i-1,] - lro_v*simdepX[i-1,] + lsigma_v*Z[i,]
+ }
+ simdep<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=st_sim)
+ for(i in 1:3650){
+ simdep[i,]<- a_l+b_l*(i+1080) + simdepX[i,]
+ }
+ simdep
+ }
>
> logstanje<-logstanje(215,1000)

```

5. NETO SEDANJA VREDNOST DEPOZITOV

Kot že omenjeno, so obrestne mere na depozite večinoma nižje od obrestnih mer na trgu, zato imajo le-ti za banko pozitivno vrednost.

Razdelimo časovni interval na $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Upoštevamo, da banka v vsaki od časovnih točk vloži vse svoje depozite po obrestni meri r_{t_i} , prav tako pa mora v vsaki časovni točki izplačati obresti d_{t_i} lastnikom depozitov. Plačilo



SLIKA 21. Primer simuliranega logaritmiranega stanja depozitov po lognormalnem modelu.

$V_{t_i}(r_{t_i} - d_{t_i})$ banka prejme šele ob času t_{i+1} . Neto sedanja vrednost depozitov¹³ je definirana kot kot (glej [6])

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{V_{t_i}(r_{t_i} - d_{t_i})}{B_{t_{i+1}}}\right) = E\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{V_{t_i}(r_{t_i} - d_{t_i})}{\exp\left(\sum_{j=1}^{i+1} r_{t_{j-1}}(t_j - t_{j-1})\right)}\right) \quad (54)$$

kjer so

- r_{t_i} iz modela obrestnih mer,
- d_{t_i} obrestna mera na depozite,
- B_{t_i} bančni račun (uporabimo aproksimacijo $\int_0^{t_{i+1}} r_s ds \approx \sum_{j=1}^{i+1} r_{t_{j-1}}(t_j - t_{j-1})$),
- V_{t_i} iz modela za stanje depozitov.

6. DOLOČANJE REPLIKATIVNEGA PORTFELJA

Preden se lotimo konstrukcije replikativnega portfelja, opozorimo, da V_t predstavlja stanje depozitov, ki vključuje tudi morebiten porast, namen replikativnega portfelja v času 0 pa je pokriti trenutno stanje. Zato mora biti replikativni portfelj osnovan na stabilnem procesu, ki ignorira prihodnje poraste. Naravna izbira je proces

$$M_t = \min_{0 \leq s \leq t} V_s, \quad (55)$$

oziroma, v diskretnem primeru ($t_0 = 0$),

¹³Spomnimo se, da velja $E(\cdot) := E_Q(\cdot)$. Torej je to do tveganja nevtralnno vrednotenje glede na dan numerar.

$$M_{t_i} = \min_{0 \leq s \leq t_n} V_s, \quad (56)$$

ki definira stanje, ki je zagotovo dosegljivo za investicijo skozi celotno obdobje [7]. Proces M_t torej določa glavnino, ki se jo vloži v obveznice z dospelji od treh mesecev do deset let, spreminjajoči del pa se, kot rečeno, vloži čez noč.

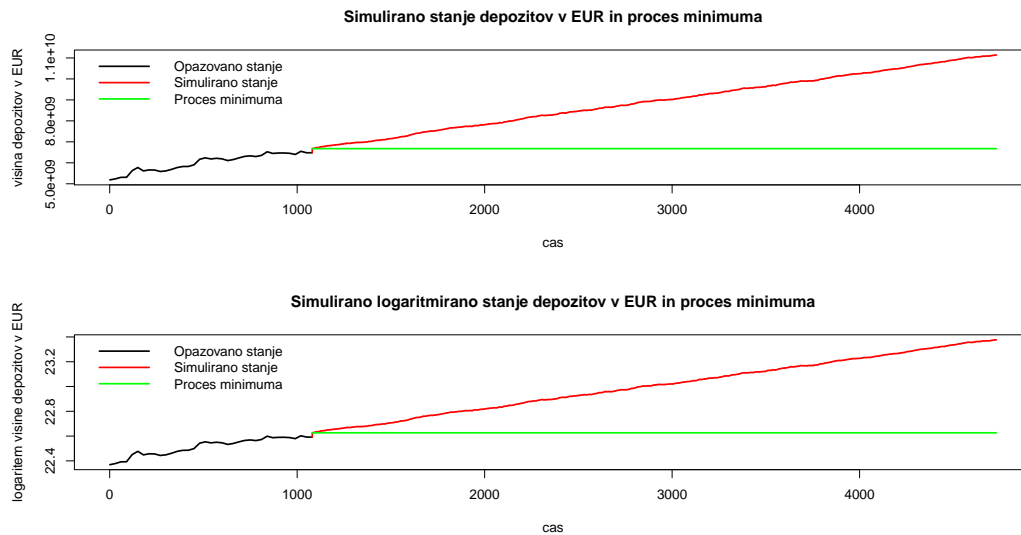
Lema 44. M_{t_i} je nenaraščajoč

$$M_{t_i} \geq M_{t_j} \text{ za } t_i \leq t_j \quad (57)$$

in velja

$$M_{t_i} \leq V_{t_i}. \quad (58)$$

Dokaz. Očitno. □



SLIKA 22. Primer procesa minimuma za stanje depozitov in primer procesa minimuma za logaritmirano stanje depozitov.

Pravo vrednost našega portfelja torej določa enačba

$$E \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_{t_i} (r_{t_i} - d_{t_i})}{B_{t_{i+1}}} \right). \quad (59)$$

Skonstruirati želimo portfelj s približno tako vrednostjo. Problem lahko predstavimo kot minimizacijski problem

$$\min \left(E \left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_{t_i} (r_{t_i} - d_{t_i})}{B_{t_{i+1}}} \right) - \sum_{j=1}^m w_j \cdot P_j \right) \quad (60)$$

pri pogojih

$$\begin{aligned}w_j &\geq 0 \text{ za } j = 1, 2, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^m w_j &= 1, \\ E\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_{t_i}(r_{t_i} - d_{t_i})}{B_{t_{i+1}}}\right) &\geq \sum_{j=1}^m w_j \cdot P_j,\end{aligned}$$

kjer so

- w_j utež obveznice z dospeljem v času t_j ,
- d_{t_i} obrestna mera na depozite (pri nas konstantna v času),
- P_j cena brezkuponske obveznice v času 0 z dospeljem v času t_j ,
- $M_{t_i} = \min_{0 \leq s \leq t_n} V_s$.

Opomba 45. Prvi pogoj v minimizacijskem problemu ne dovoljuje kratke pozicije.

7. PRIMERJAVA MODELOV

7.1. Vasičkov in Ho-Leejev model obrestnih mer ter normalni model višine depozitov.

Kalkulacija 46. Generirali smo 1000 vzorcev hipnih obrestnih mer in stanja depozitov za obdobje 10 let. Izračunajmo sedaj neto sedanjo vrednost depozitov (kjer upoštevamo procese minimumov) po obeh modelih hipnih obrestnih mer in normalnem modelu za višino depozitov.

```
> Pmin<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=1000)
> for(j in 1:1000){
+ for(i in 1:3650){
+ Pmin[i,j]<-min(stanje[1:i,j])
+ }
+ }
>
>
> NSV<-function(matrika_R,min,st_sim){
+ B<-matrix(rep(0,3650*st_sim),nrow=3650)
+ for(i in 1:st_sim){
+ B[,i]<-exp(cumsum(matrika_R[,i])) #to je B(i+1)
+ }
+
+ ulomek<-matrix(rep(0,3650*st_sim),nrow=3650)
+ for(i in 1:3650){
+ ulomek[i,]<-(min[i,]*(matrika_R[i,]-0.001/365))/B[i,]
+ }
+ oklepaj<-numeric(st_sim)
```

```

+ for(i in 1:st_sim){
+ oklepaj[i]<-sum(ulomek[,i])
+ }
+ mean(oklepaj) #TO JE NSV
+ }
>
>
> (nsv_V<-NSV(matrika_V,Pmin,1000)) #Pmin je matrika procesov
minimuma za stanje depozitov.
[1] 1576557208
> (nsv_HL<-NSV(matrika_HL,Pmin,1000)) #Pmin je matrika procesov
minimuma za stanje depozitov.
[1] 1668722979

```

Neto sedanja vrednost depozitov (z upoštevanimi procesi minimumov) po Vasičkovem modelu znaša 1576557208 enot, po Ho-Leejevem modelu pa 1668722979 enot. Opazimo, da je neto sedanja vrednost depozitov višja v primeru, ko obrestno mero simuliramo po Ho-Leejevem modelu. Sklepamo, da je razlog v tem, da povprečje hipne obrestne mere po Ho-Leejevem modelu vseskozi raste, medtem ko se hipna obrestna mera po Vasičkovem modelu stabilizira.

Kalkulacija 47. *Sledi izračun replikativnega portfelja. Pomagali smo si s funkcijo `constrOptim`, ki s pomočjo začetne dopustne rešitve pri danih pogojih iterativno poišče rešitev danega minimizacijskega problema. Opomnimo naj, da v optimizaciji ne dodajamo pogoja, da mora biti vsota uteži enaka 1 zaradi velikostnega reda cen obveznic, ki so manjše od 1 in velikostnega reda neto sedanje vrednosti (z upoštevanim minimumom), ki ima red 10^9 . Kot rešitev dobimo število posameznih obveznic. Končno rešitev, tj. količino denarja, ki ga moramo vložiti v dane obveznice, dobimo tako, da koeficiente, ki jih dobimo, pomnožimo s ceno obveznic. Nadalje je lahko izračunati posamezne uteži za dane obveznice.*

```

> #####
> #REPLIKATIVNI PORTFELJ
> #####
>
> t<-c(91,182,274,seq(365,3650,365))
> cena<-numeric(13)
> for(i in 1:length(t)){cena[i]<-exp(-sum(tom[1:t[i]]))}
> cena
[1] 0.9999732 0.9998252 0.9994002 0.9985968 0.9903312 0.9734018
0.9491874
[8] 0.9200274 0.8881550 0.8553147 0.8226994 0.7910492 0.7607645
>
> #####
> #Vasicek in normalni model
> #####

```



```

>
> fnc_nsv_V<-function(w){nsv_V-sum(w*cena)}
>
> A<-matrix(c(as.vector(diag(13)),-cena),nrow=14,ncol=length(cena),
byrow=TRUE)
> b_vec<-matrix(c(rep(0,13),-nsv_V),ncol=1)
>
> theta<-rep(10e7,13)
>
> ## Dopustnost zacetne resitve: ##
> A%%theta - b_vec
      [,1]
[1,] 100000000
[2,] 100000000
[3,] 100000000
[4,] 100000000
[5,] 100000000
[6,] 100000000
[7,] 100000000
[8,] 100000000
[9,] 100000000
[10,] 100000000
[11,] 100000000
[12,] 100000000
[13,] 100000000
[14,] 381684600
>
> (utezi_V<-constrOptim(theta,fnc_nsv_V,NULL,A,b_vec,
control = list(maxit=10000,reltol=1e-8),outer.iterations = 100))
$par
 [1] 75870848 221090423 149638966 136793283 149021486 130427640
169379374
 [8] 117833936 111619429 150551976 74375793 112632593 94079304

$value
[1] -2.384186e-07

$count
function gradient
      750      NA

$convergence
[1] 0

$message
NULL

```

```

$outer.iterations
[1] 10

$barrier.value
[1] -3159509

> ## Vlozeni denar: ##
> (portfelj<-utezi_V$par*cena)
[1] 75868813 221051781 149549218 136601333 147580622
126958502 160772773
[8] 108410450 99135357 128769322 61188922 89097923
71572192
> utez1<-utezi_V$par*cena/sum(utezi_V$par*cena)
>
> ## Nevlozeni denar: ##
> (nsv_V-sum(utezi_V$par*cena))
[1] -2.384186e-07
>
>
> #####
> #Ho-Lee in normalni model
> #####
> fnc_nsv_HL<-function(w){nsv_HL-sum(w*cena)}
>
> A<-matrix(c(as.vector(diag(13)),-cena),nrow=14,ncol=length(cena),
byrow=TRUE)
> b_vec<-matrix(c(rep(0,13),-nsv_HL),ncol=1)
>
> theta<-rep(10e7,13)
>
> ## Dopustnost zacetne resitve: ##
> A%*%theta - b_vec
      [,1]
[1,] 100000000
[2,] 100000000
[3,] 100000000
[4,] 100000000
[5,] 100000000
[6,] 100000000
[7,] 100000000
[8,] 100000000
[9,] 100000000
[10,] 100000000
[11,] 100000000
[12,] 100000000
[13,] 100000000
[14,] 473850372

```

```

>
> (utezi_HL<-constrOptim(theta,fnc_nsv_HL,NULL,A,b_vec,
control = list(maxit=10000,reltol=1e-8),outer.iterations = 100))
$par
 [1] 112409253 250525425 175540845 122923496 132154829 141118585
180541893
 [8] 111789319 118032831 115766933 124699374 100829404 103828892

$value
 [1] -2.384186e-07

$counts
function gradient
      756      NA

$convergence
 [1] 0

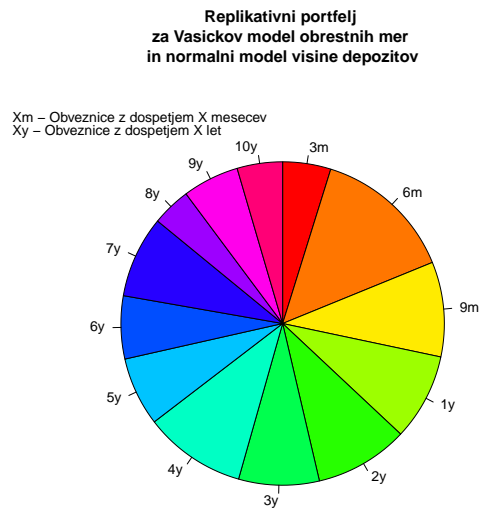
$message
NULL

$outter.iterations
 [1] 10

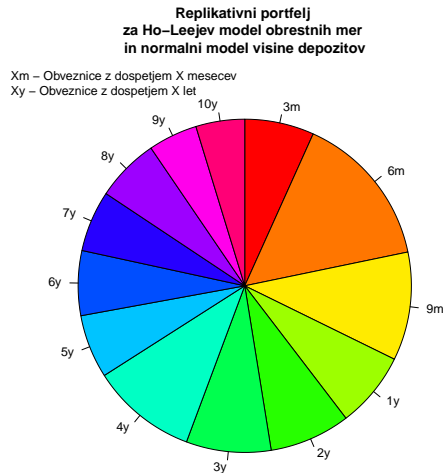
$barrier.value
 [1] -3349527

> ## Vlozeni denar: ##
> (portfelj<-utezi_HL$par*cena)
 [1] 112406237 250481639 175435562 122751008 130877046 137365087
171368095
 [8] 102849237 104831452  99017163 102590102  79761019  78989332
> utez2<-utezi_HL$par*cena/sum(utezi_HL$par*cena)
>
> ## Nevlozeni denar: ##
> (nsv_HL-sum(utezi_HL$par*cena))
 [1] -2.384186e-07

```

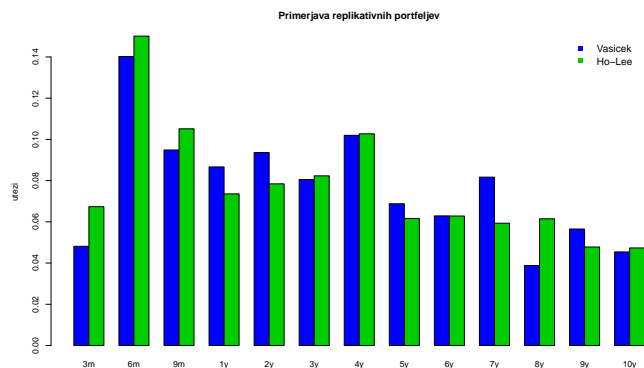


SLIKA 23. Replikativni portfelj za Vasičkov model obrestnih mer in normalni model višine depozitov.



SLIKA 24. Replikativni portfelj za Ho-Leejev model obrestnih mer in normalni model višine depozitov.

Na sliki 25 lahko vidimo, da razlike med replikativnima portfeljema niso pretirane. Rezultat je razumljiv in pričakovan, saj je razlika le v neto sedanjih vrednostih. Največ vložimo v obveznice z ročnostjo 6 mesecev.



SLIKA 25. Primerjava replikativnih portfeljev za Vasičkov in Ho-Leejev model obrestnih mer ter normalni model višine depozitov.

7.2. Vasičkov in Ho-Leejev model obrestnih mer ter lognormalni model višine depozitov.

Kalkulacija 48. *Generirali smo 1000 vzorcev hipnih obrestnih mer in logaritmiranega stanja depozitov za obdobje 10 let. Izračunajmo sedaj neto sedanjo vrednost depozitov (kjer upoštevamo procese minimumov) po obeh modelih hipnih obrestnih mer in lognormalnem modelu za višino depozitov.*

```

> logPmin<-matrix(NA,nrow=3650,ncol=1000)
> for(j in 1:1000){
+ for(i in 1:3650){
+ logPmin[i,j]<-min(logstanje[1:i,j])
+ }
+ }
>
>
> logNSV<-function(matrika_R,logmin,st_sim){
+ B<-matrix(rep(0,3650*st_sim),nrow=3650)
+ for(i in 1:st_sim){
+ B[,i]<-exp(cumsum(matrika_R[,i]))#to je B(i+1)
+ }
+
+ ulomek<-matrix(rep(0,3650*st_sim),nrow=3650)
+ for(i in 1:3650){
+ ulomek[i,<-exp(logmin[i,])*(matrika_R[i,]-0.001/365))/B[i,]
+ }
+ oklepaj<-numeric(st_sim)
+ for(i in 1:st_sim){
+ oklepaj[i]<-sum(ulomek[,i])
+ }
+ mean(oklepaj) #TO JE logNSV
+ }

```

```

>
>
> (logNSV_V<-logNSV(matrika_V,logPmin,1000))    #logPmin je matrika
procesa minimuma za logaritmirano stanje depozitov.
[1] 1583954571
> (logNSV_HL<-logNSV(matrika_HL,logPmin,1000))  #logPmin je matrika
procesa minimuma za logaritmirano stanje depozitov.
[1] 1676552430

```

Neto sedanja vrednost depozitov (z upoštevanimi procesi minimumov) po Vasičkovem modelu znaša 1583954571 enot, po Ho-Leejevem modelu pa 1676552430 enot. Tako kot pri normalnem modelu tudi tu opazimo, da je neto sedanja vrednost depozitov (z upoštevanimi procesi minimumov) višja, če upoštevamo Ho-Leejev model obrestnih mer.

Kalkulacija 49. *Sledi izračun replikativnega portfelja. Tu smo si prav tako pomagali s funkcijo `constrOptim`, ki s pomočjo začetne dopustne rešitve pri danih pogojih iterativno poišče rešitev danega minimizacijskega problema. Tudi tu v optimizaciji ne dodajamo pogoja, da mora biti vsota uteži enaka 1.*

```

> #####
> #REPLIKATIVNI PORTFELJ
> #####
>
>
> #####
> #Vasicek in lognormalni model
> #####
> fnc_lognsv_V<-function(w){logNSV_V-sum(w*cena)}
>
> A<-matrix(c(as.vector(diag(13)),-cena),nrow=14,ncol=length(cena),
byrow=TRUE)
> b_vec<-matrix(c(rep(0,13),-logNSV_V),ncol=1)
>
> theta<-rep(10e7,13)
>
> ## Dopustnost zacetne resitve: ##
> A%*%theta - b_vec
      [,1]
[1,] 100000000
[2,] 100000000
[3,] 100000000
[4,] 100000000
[5,] 100000000
[6,] 100000000
[7,] 100000000

```

```

[8,] 100000000
[9,] 100000000
[10,] 100000000
[11,] 100000000
[12,] 100000000
[13,] 100000000
[14,] 389081964
>
> (utezi_log_V<-constrOptim(theta,fnc_lognsv_V,NULL,A,b_vec,
control = list(maxit=10000,reltol=1e-8),outer.iterations = 100))
$par
[1] 126021152 165171107 160119376 117072520 139279848 120603418
126917601
[8] 121320492 104498664 167865145 87381617 153841920 129440286

$value
[1] 0

$counts
function gradient
      748      NA

$convergence
[1] 0

$message
NULL

$outer.iterations
[1] 10

$barrier.value
[1] -3204713

>
> ## Vlozeni denar: ##
> (portfelj<-utezi_log_V$par*cena)
[1] 126017771 165142239 160023342 116908242 137933174 117395586
120468591
[8] 111618178 92811013 143577530 71888806 121696528 98473571
> utez3<-utezi_log_V$par*cena/sum(utezi_log_V$par*cena)

> ## Nevlozeni denar: ##
> (logNSV_V-sum(utezi_log_V$par*cena))
[1] 0
>
> #####

```

```

> #Ho-Lee in lognormalni model
> #####
> fnc_lognsv_HL<-function(w){logNSV_HL-sum(w*cena)}
>
> A<-matrix(c(as.vector(diag(13)),-cena),nrow=14,ncol=length(cena),
byrow=TRUE)
> b_vec<-matrix(c(rep(0,13),-logNSV_HL),ncol=1)
>
> theta<-rep(10e7,13)
>
> ## Dopustnost zacetne resitve: ##
> A%*%theta - b_vec
      [,1]
[1,] 100000000
[2,] 100000000
[3,] 100000000
[4,] 100000000
[5,] 100000000
[6,] 100000000
[7,] 100000000
[8,] 100000000
[9,] 100000000
[10,] 100000000
[11,] 100000000
[12,] 100000000
[13,] 100000000
[14,] 481679823
>
> (utezi_log_HL<-constrOptim(theta,fnc_lognsv_HL,NULL,A,b_vec,
control = list(maxit=10000,reltol=1e-8),outer.iterations = 100))
$par
 [1] 151569164 180245124 162165436 140791015 148979217 136115463
199984046
 [8] 114633258 133336611 160969126 93944905 81513524 90590096

$value
 [1] 0

$count
function gradient
      752      NA

$convergence
 [1] 0

$message
NULL

```



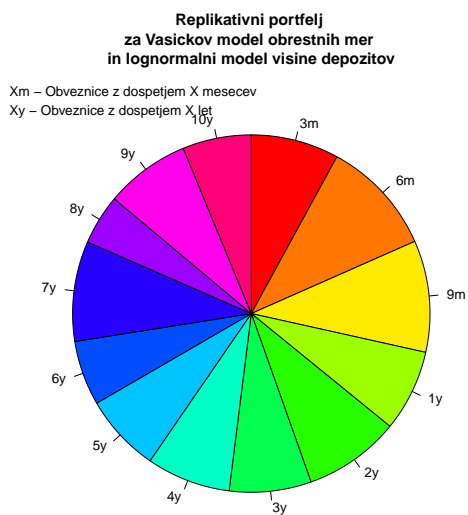
```

$outer.iterations
[1] 8

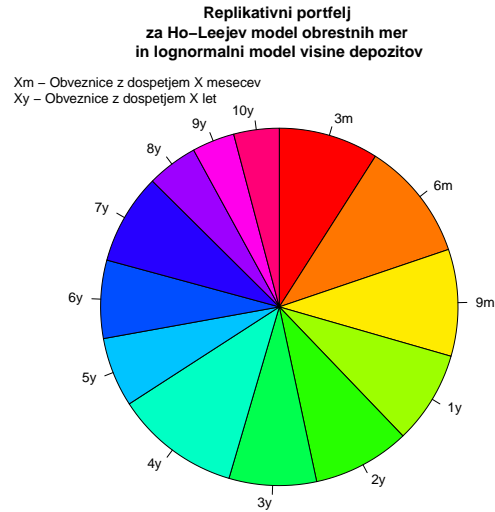
$barrier.value
[1] -3357875

>
>
> ## Vloženi denar: ##
> (portfelj<-utezi_log_HL$par*cena)
[1] 151565098 180213621 162068175 140593456 147538761 132495039
189822342
[8] 105465739 118423581 137679264 77288418 64481208 68917727
> utez4<-utezi_log_HL$par*cena/sum(utezi_log_HL$par*cena)
>
> ## Nevloženi denar: ##
> (logNSV_HL-sum(utezi_log_HL$par*cena))
[1] 0

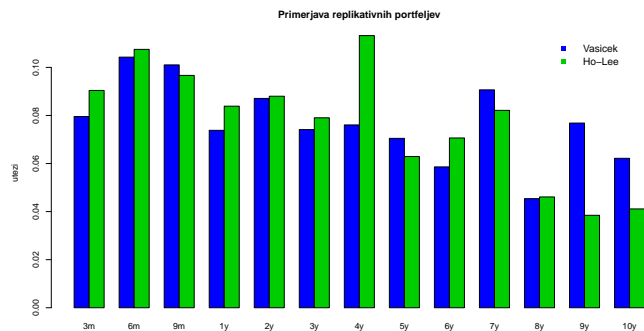
```



SLIKA 26. Replikativni portfelj za Vasickov model obrestnih mer in lognormalni model visine depozitov.



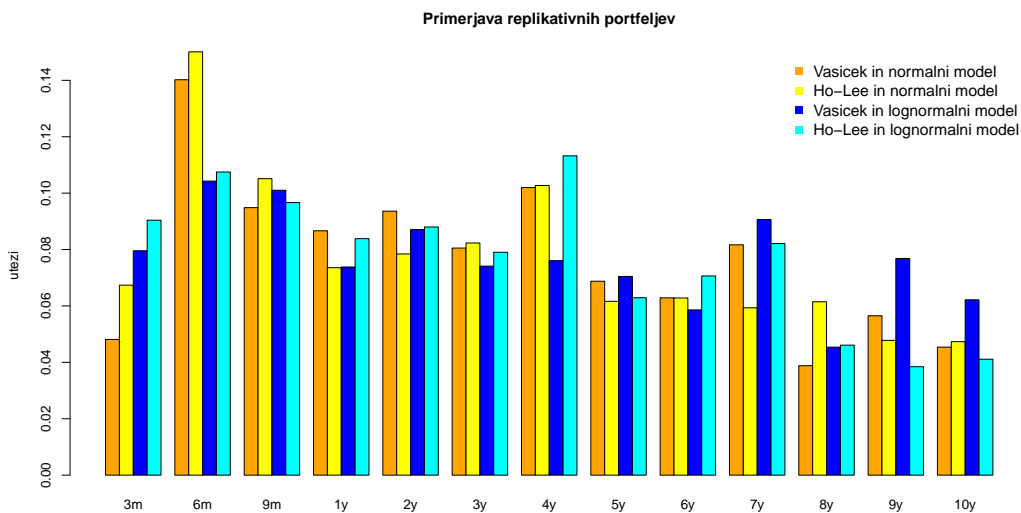
SLIKA 27. Replikativni portfelj za Ho-Leejev model obrestnih mer in lognormalni model višine depozitov.



SLIKA 28. Primerjava replikativnih portfeljev za Vasičkov in Ho-Leejev model obrestnih mer ter lognormalni model višine depozitov.

Na sliki 28 vidimo razliko med replikativnima portfeljema. V Vasičkovem modelu največ vložimo v obveznice z ročnostjo 6 mesecev, v Ho-Leejevem pa v obveznice z ročnostjo 4 leta. Največja razlika je v vložkih z ročnostmi 4, 9 in 10 let.

Na sliki 29 vidimo, da se replikativni portfelji med seboj bistveno ne razlikujejo. Opazimo, da se pri lognormalnem modelu portfelja razlikujeta bolj kot pri normalnem modelu.



SLIKA 29. Primerjava replikativnih portfeljev za Vasičkov in Ho-Leejev model obrestnih mer ter normalni in lognormalni model višine depozitov.

8. ZAKLJUČEK

Pri uporabi teoretičnih modelov v praksi moramo biti pazljivi in rezultatov ne smemo jemati za gotove.

Ugotovili smo namreč, da rezultati pri Vasičkovem modelu hipnih obrestnih mer lahko zelo nihajo glede na dane začetne približke. To bi načeloma lahko pomenilo, da pri različnih metodah optimizacije in začetnih približkih rezultate lahko prilagajamo sebi v prid, zato model najverjetneje ne bi bil primeren za dejansko simulacijo obrestne mere v raznih depozitnih inštitucijah.

Če nas zanima daljše časovno obdobje, pa prav tako ni primeren niti drugi obravnavani model, tj. Ho-Leejev model hipnih obrestnih mer, saj se v tem modelu s časom povečuje upanje hipne obrestne mere.

Modeli za višine depozitov ne vplivajo bistveno na sestavo replikativnega portfelja.

Če bi modeli za hipne obrestne mere bolje posnemali realne podatke, bi bilo za natančno simulacijo dobro, da bi parametre prekalibrirali v vsakem trenutku, kjer simuliramo obrestno mero. Za natančnejše izračune bi morali replikativni portfelj prekalkulirati vsak trenutek posebej, saj se tudi hipne terminske obrestne mere spreminjajo vsak trenutek, sploh pa, ker je naš časovni horizont precej dolg (v depozitnih inštitucijah se dejansko uporablja tako dolg časovni horizont).

Opazili smo, da je do tveganja nevtralna procedura lažja za implementacijo, saj bi morali v nasprotnem primeru poznati še proces premij za tveganje.

Za nadaljnje raziskovanje bi vsekakor morali poskusiti simulirati obrestno mero še po kakšnem drugem modelu. Seveda moramo vedno ubrati neko srednjo pot med tem, kako dobro model opisuje realnost in težavnostjo aplikacije.

LITERATURA

- [1] M. Bohner, *Extended One-Factor Short-Rate Models*, [ogled 25.7.2012], dostopno na <http://web.mst.edu/~bohner/fim-10/fim-chap5.pdf>
- [2] M. Bohner, *One-Factor Short-Rate Models*, [ogled 25.7.2012], dostopno na <http://web.mst.edu/~bohner/fim-10/fim-chap4.pdf>
- [3] P. Glasserman, *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Applications of Mathematics, Stochastic Modeling and Applied Probability **53**, Springer, New York, 2004 .
- [4] N. Herrala, *Vasicek interest rate model: parameter estimation, evaluation of the short-term interest rate and term structure*, Bachelor's thesis, School of Business, Lappeenranta University of Technology, 2009.
- [5] T. Ho, S. Lee, *Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*, Journal of Finance **41/5** (1986) 1011-1029.
- [6] R. A. Jarrow, D. R. van Deventer, *The arbitrage-free valuation and hedging of demand deposits and credit card loans*, Journal of Banking & Finance **22** (1998) 249-272.
- [7] M. Kalkbrenner, J. Willing, *Risk management of non-maturing liabilities*, Journal of Banking & Finance **28** (2004) 1547-1568.
- [8] R. Kraševc, *Ho-Leejev model časovne strukture obrestnih mer*, Delo diplomskega seminarja, Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani, 2011.
- [9] S. Lalley, *The fundamental theorem of arbitrage pricing*, [ogled 10.10.2012], dostopno na <http://galton.uchicago.edu/~lalley/Courses/390/Lecture1.pdf>
- [10] S.R.S. Varadhan, *Chapter 4, Stochastic Differential Equations.*, [ogled 10.10.2012], dostopno na <http://www.math.nyu.edu/faculty/varadhan/processes/chapter4.pdf>
- [11] O. Vasicek, *An equilibrium characterization of the term structure*, Journal of Financial Economics **5** (1977) 177-188.
- [12] Y. Yolcu, *One-factor interest rate models: Analytic solutions and approximations*, Master's Thesis, The Graduate School of Applied Mathematics, The Middle East Technical University, 2005.
- [13] *General description of ECB yield curve methodology*, [ogled 25.10.2012], dostopno na http://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/technical_notes.pdf
- [14] *Ho-Lee model*, [ogled 25.7.2012], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Ho-Lee_model
- [15] *Vasicek model*, [ogled 25.7.2012], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Vasicek_model
- [16] *Yield curve*, [ogled 25.7.2012], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Yield_curve

PRILOGE

Txt datoteke:

- depoziti.txt

datum depoziti	datum depoziti	datum depoziti
2004Jan 3348000000	2007Jul 5686000000	2011Jan 6308000000
2004Feb 3386000000	2007Aug 5616000000	2011Feb 6333000000
2004Mar 3437000000	2007Sep 5619000000	2011Mar 6301000000
2004Apr 3461000000	2007Oct 5390000000	2011Apr 6356000000
2004May 3490000000	2007Nov 5122000000	2011May 6528000000
2004Jun 3545000000	2007Dec 5422000000	2011Jun 6449000000
2004Jul 3530000000	2008Jan 5327000000	2011Jul 6468000000
2004Aug 3545000000	2008Feb 5284000000	2011Aug 6470000000
2004Sep 3591000000	2008Mar 5417000000	2011Sep 6455000000
2004Oct 3586000000	2008Apr 5364000000	2011Oct 6400000000
2004Nov 3628000000	2008May 5540000000	2011Nov 6550000000
2004Dec 3931000000	2008Jun 5659000000	2011Dec 6481000000
2005Jan 3937000000	2008Jul 5373000000	2012Jan 6640000000
2005Feb 3862000000	2008Aug 5425000000	2012Feb 6604000000
2005Mar 3739000000	2008Sep 5449000000	
2005Apr 4012000000	2008Oct 5285000000	
2005May 3913000000	2008Nov 5335000000	
2005Jun 4172000000	2008Dec 5281000000	
2005Jul 4185000000	2009Jan 5186000000	
2005Aug 4150000000	2009Feb 5235000000	
2005Sep 4193000000	2009Mar 5308000000	
2005Oct 4213000000	2009Apr 5312000000	
2005Nov 4221000000	2009May 5627000000	
2005Dec 4979000000	2009Jun 5778000000	
2006Jan 4896000000	2009Jul 5615000000	
2006Feb 4935000000	2009Aug 5663000000	
2006Mar 5007000000	2009Sep 5657000000	
2006Apr 5097000000	2009Oct 5588000000	
2006May 5222000000	2009Nov 5617000000	
2006Jun 5325000000	2009Dec 5688000000	
2006Jul 5278000000	2010Jan 5776000000	
2006Aug 5266000000	2010Feb 5825000000	
2006Sep 5223000000	2010Mar 5828000000	
2006Oct 5184000000	2010Apr 5907000000	
2006Nov 5210000000	2010May 6171000000	
2006Dec 5560000000	2010Jun 6237000000	
2007Jan 5420000000	2010Jul 6186000000	
2007Feb 5464000000	2010Aug 6217000000	
2007Mar 5478000000	2010Sep 6188000000	
2007Apr 5467000000	2010Oct 6108000000	
2007May 5605000000	2010Nov 6158000000	
2007Jun 5728000000	2010Dec 6237000000	

- InstForwardRates.txt

dospetje om		dospetje om		dospetje om	
3M	0.00022	3Y11M	0.02769	7Y7M	0.03890
4M	0.00042	4Y	0.02820	7Y8M	0.03895
5M	0.00069	4Y1M	0.02870	7Y9M	0.03900
6M	0.00102	4Y2M	0.02918	7Y10M	0.03905
7M	0.00140	4Y3M	0.02965	7Y11M	0.03909
8M	0.00184	4Y4M	0.03010	8Y	0.03916
9M	0.00232	4Y5M	0.03054	8Y1M	0.03918
10M	0.00284	4Y6M	0.03097	8Y2M	0.03920
11M	0.00340	4Y7M	0.03139	8Y3M	0.03922
1Y	0.00400	4Y8M	0.03178	8Y4M	0.03923
1Y1M	0.00462	4Y9M	0.03217	8Y5M	0.03924
1Y2M	0.00527	4Y10M	0.03254	8Y6M	0.03925
1Y3M	0.00594	4Y11M	0.03291	8Y7M	0.03925
1Y4M	0.00663	5Y	0.03325	8Y8M	0.03925
1Y5M	0.00733	5Y1M	0.03359	8Y9M	0.03925
1Y6M	0.00805	5Y2M	0.03391	8Y10M	0.03924
1Y7M	0.00878	5Y3M	0.03422	8Y11M	0.03924
1Y8M	0.00952	5Y4M	0.03452	9Y	0.03922
1Y9M	0.01027	5Y5M	0.03481	9Y1M	0.03921
1Y10M	0.01102	5Y6M	0.03508	9Y2M	0.03919
1Y11M	0.01177	5Y7M	0.03535	9Y3M	0.03917
2Y	0.01252	5Y8M	0.03560	9Y4M	0.03915
2Y1M	0.01328	5Y9M	0.03584	9Y5M	0.03913
2Y2M	0.01403	5Y10M	0.03607	9Y6M	0.03910
2Y3M	0.01477	5Y11M	0.03629	9Y7M	0.03907
2Y4M	0.01552	6Y	0.03650	9Y8M	0.03904
2Y5M	0.01625	6Y1M	0.03670	9Y9M	0.03900
2Y6M	0.01698	6Y2M	0.03690	9Y10M	0.03897
2Y7M	0.01770	6Y3M	0.03708	9Y11M	0.03893
2Y8M	0.01842	6Y4M	0.03725	10Y	0.03889
2Y9M	0.01912	6Y5M	0.03741	10Y1M	0.03885
2Y10M	0.01981	6Y6M	0.03757		
2Y11M	0.02049	6Y7M	0.03772		
3Y	0.02116	6Y8M	0.03785		
3Y1M	0.02182	6Y9M	0.03798		
3Y2M	0.02247	6Y10M	0.03811		
3Y3M	0.02310	6Y11M	0.03822		
3Y4M	0.02373	7Y	0.03833		
3Y5M	0.02433	7Y1M	0.03843		
3Y6M	0.02493	7Y2M	0.03852		
3Y7M	0.02551	7Y3M	0.03861		
3Y8M	0.02608	7Y4M	0.03869		
3Y9M	0.02663	7Y5M	0.03877		
3Y10M	0.02717	7Y6M	0.03883		

- InstShortRates.txt

datum	om	datum	om	datum	om
2.1.2009	0.0231	7.5.2009	0.0022	9.12.2009	0.0029
5.1.2009	0.0201	18.5.2009	0.0045	14.12.2009	0.0029
6.1.2009	0.0208	19.5.2009	0.0051	16.12.2009	0.0028
7.1.2009	0.0215	20.5.2009	0.0073	12.2.2010	0.0023
8.1.2009	0.0212	21.5.2009	0.0076	16.2.2010	0.0023
9.1.2009	0.0199	22.5.2009	0.0079	17.2.2010	0.0023
12.1.2009	0.0188	25.5.2009	0.0096	18.2.2010	0.0022
13.1.2009	0.0189	26.5.2009	0.0089	26.2.2010	0.0016
14.1.2009	0.0214	27.5.2009	0.0083	4.3.2010	0.0024
15.1.2009	0.0188	28.5.2009	0.0086	22.3.2010	0.0027
16.1.2009	0.0188	29.5.2009	0.0066	6.4.2010	0.0023
19.1.2009	0.0194	5.6.2009	0.0045	7.4.2010	0.0024
20.1.2009	0.0188	16.6.2009	0.0074	15.4.2010	0.0023
21.1.2009	0.0143	17.6.2009	0.0071	16.4.2010	0.0022
22.1.2009	0.0164	18.6.2009	0.0071	19.4.2010	0.0024
23.1.2009	0.0091	22.6.2009	0.0064	20.4.2010	0.0025
26.1.2009	0.0089	23.6.2009	0.0064	21.4.2010	0.0026
27.1.2009	0.0131	24.6.2009	0.0103	22.4.2010	0.0025
6.2.2009	0.0112	13.7.2009	0.002	23.4.2010	0.0025
23.2.2009	0.0108	26.8.2009	0.002	26.4.2010	0.0025
26.2.2009	0.012	27.8.2009	0.0022	27.4.2010	0.0024
2.3.2009	0.0136	1.9.2009	0.0021	28.4.2010	0.0023
3.3.2009	0.0118	3.9.2009	0.0021	29.4.2010	0.0021
9.3.2009	0.01	4.9.2009	0.0021	30.4.2010	0.0023
10.3.2009	0.015	7.9.2009	0.0022	3.5.2010	0.0021
11.3.2009	0.012	8.9.2009	0.0035	5.5.2010	0.0025
12.3.2009	0.0071	9.9.2009	0.0023	6.5.2010	0.0024
19.3.2009	0.0068	11.9.2009	0.0024	7.5.2010	0.0025
23.3.2009	0.007	14.9.2009	0.0023	10.5.2010	0.0023
24.3.2009	0.0071	15.9.2009	0.0024	11.5.2010	0.0056
25.3.2009	0.0065	16.9.2009	0.0025	12.5.2010	0.0018
26.3.2009	0.007	18.9.2009	0.0025	14.5.2010	0.0026
27.3.2009	0.0074	22.9.2009	0.0049	17.5.2010	0.0024
30.3.2009	0.0074	14.10.2009	0.0025	18.5.2010	0.0025
31.3.2009	0.0105	2.11.2009	0.0025	19.5.2010	0.0025
1.4.2009	0.0073	3.11.2009	0.0026	20.5.2010	0.0025
2.4.2009	0.0071	4.11.2009	0.0026	21.5.2010	0.0027
3.4.2009	0.0068	5.11.2009	0.0026	25.5.2010	0.0025
6.4.2009	0.0055	11.11.2009	0.0025	26.5.2010	0.0023
7.4.2009	0.0053	30.11.2009	0.0034	27.5.2010	0.0024
8.4.2009	0.0077	1.12.2009	0.0031	28.5.2010	0.0024
21.4.2009	0.0072	2.12.2009	0.0029	31.5.2010	0.0022
29.4.2009	0.0028	3.12.2009	0.0029	1.6.2010	0.0024

datum	om	datum	om	datum	om
2.6.2010	0.0025	11.8.2010	0.0031	12.11.2010	0.0068
3.6.2010	0.0025	13.8.2010	0.003	15.11.2010	0.0069
4.6.2010	0.0024	16.8.2010	0.0031	16.11.2010	0.0061
7.6.2010	0.0024	17.8.2010	0.0033	17.11.2010	0.006
8.6.2010	0.0025	18.8.2010	0.0029	18.11.2010	0.0054
9.6.2010	0.0024	19.8.2010	0.0032	19.11.2010	0.0045
10.6.2010	0.0023	20.8.2010	0.0028	22.11.2010	0.0039
11.6.2010	0.0025	23.8.2010	0.0027	23.11.2010	0.0036
14.6.2010	0.0023	24.8.2010	0.0033	24.11.2010	0.0037
16.6.2010	0.0025	25.8.2010	0.0033	25.11.2010	0.0035
17.6.2010	0.0023	26.8.2010	0.0029	26.11.2010	0.0034
23.6.2010	0.0026	27.8.2010	0.0029	29.11.2010	0.0033
24.6.2010	0.0023	30.8.2010	0.0027	30.11.2010	0.0042
25.6.2010	0.0023	31.8.2010	0.0028	2.12.2010	0.0044
28.6.2010	0.0024	1.9.2010	0.0029	15.12.2010	0.0047
1.7.2010	0.0028	2.9.2010	0.0027	16.12.2010	0.0044
2.7.2010	0.0024	3.9.2010	0.0027	17.12.2010	0.0043
6.7.2010	0.0024	6.9.2010	0.0026	21.12.2010	0.0036
7.7.2010	0.0033	7.9.2010	0.0061	22.12.2010	0.003
8.7.2010	0.0027	8.9.2010	0.0034	23.12.2010	0.0027
9.7.2010	0.0025	10.9.2010	0.0035	24.12.2010	0.003
12.7.2010	0.0026	14.9.2010	0.0035	27.12.2010	0.0031
13.7.2010	0.0046	15.9.2010	0.0032	28.12.2010	0.0036
14.7.2010	0.003	16.9.2010	0.0033	29.12.2010	0.0031
15.7.2010	0.003	17.9.2010	0.0034	30.12.2010	0.0033
16.7.2010	0.0034	20.9.2010	0.0034	31.12.2010	0.0044
19.7.2010	0.0042	21.9.2010	0.0035	3.1.2011	0.003
20.7.2010	0.0046	22.9.2010	0.0035	4.1.2011	0.0034
21.7.2010	0.0045	23.9.2010	0.0031	5.1.2011	0.003
22.7.2010	0.0045	24.9.2010	0.0033	6.1.2011	0.003
23.7.2010	0.0042	28.9.2010	0.0032	7.1.2011	0.0028
26.7.2010	0.0039	29.9.2010	0.0033	10.1.2011	0.0032
27.7.2010	0.0039	30.9.2010	0.0044	13.1.2011	0.003
28.7.2010	0.0039	1.10.2010	0.0054	18.1.2011	0.0061
29.7.2010	0.0032	4.10.2010	0.0057	19.1.2011	0.006
30.7.2010	0.0027	6.10.2010	0.0026	20.1.2011	0.0059
2.8.2010	0.0028	7.10.2010	0.0025	21.1.2011	0.0061
3.8.2010	0.0027	14.10.2010	0.0062	24.1.2011	0.0072
4.8.2010	0.0027	15.10.2010	0.0061	25.1.2011	0.0083
5.8.2010	0.0025	18.10.2010	0.006	26.1.2011	0.0098
6.8.2010	0.0025	19.10.2010	0.0063	27.1.2011	0.0093
9.8.2010	0.0026	28.10.2010	0.0063	28.1.2011	0.0086
10.8.2010	0.006	10.11.2010	0.0063	31.1.2011	0.0105

datum	om	datum	om	datum	om
1.2.2011	0.0119	30.6.2011	0.0175	10.1.2012	0.0051
2.2.2011	0.0069	1.7.2011	0.0092	11.1.2012	0.0052
3.2.2011	0.0042	4.7.2011	0.0081	24.2.2012	0.0026
4.2.2011	0.0027	5.7.2011	0.0069	29.2.2012	0.0038
7.2.2011	0.0027	6.7.2011	0.0055	13.3.2012	0.0024
8.2.2011	0.0068	7.7.2011	0.0054	15.3.2012	0.0025
9.2.2011	0.0095	8.7.2011	0.0055	19.3.2012	0.0024
10.2.2011	0.0092	11.7.2011	0.0054	22.3.2012	0.0023
11.2.2011	0.0083	12.7.2011	0.0105	23.3.2012	0.0022
14.2.2011	0.0075	13.7.2011	0.014	28.3.2012	0.0023
15.2.2011	0.0069	14.7.2011	0.0137	29.3.2012	0.0023
16.2.2011	0.0064	15.7.2011	0.0137	30.3.2012	0.0066
17.2.2011	0.0054	18.7.2011	0.0137	2.4.2012	0.0022
18.2.2011	0.0043	19.7.2011	0.0139	4.4.2012	0.0023
21.2.2011	0.0033	20.7.2011	0.0107	10.4.2012	0.0012
22.2.2011	0.0045	21.7.2011	0.0094	12.4.2012	0.0024
23.2.2011	0.0054	22.7.2011	0.009	13.4.2012	0.0026
25.2.2011	0.0056	27.7.2011	0.0085	16.4.2012	0.0025
4.3.2011	0.0032	28.7.2011	0.0085	17.4.2012	0.0027
14.3.2011	0.0062	29.7.2011	0.0093	18.4.2012	0.0022
24.3.2011	0.0059	1.8.2011	0.0082	19.4.2012	0.0023
30.3.2011	0.005	2.8.2011	0.0082	20.4.2012	0.0023
31.3.2011	0.0071	3.8.2011	0.0085		
1.4.2011	0.0049	16.8.2011	0.0089		
4.4.2011	0.0052	18.8.2011	0.0092		
5.4.2011	0.005	19.8.2011	0.0083		
6.4.2011	0.005	22.8.2011	0.0096		
7.4.2011	0.0047	23.8.2011	0.0101		
8.4.2011	0.0048	24.8.2011	0.01		
11.4.2011	0.0047	25.8.2011	0.0113		
20.4.2011	0.011	30.8.2011	0.0091		
26.4.2011	0.0119	31.8.2011	0.012		
27.4.2011	0.0119	1.9.2011	0.0092		
2.5.2011	0.0127	5.9.2011	0.0079		
16.5.2011	0.0107	20.10.2011	0.0109		
9.6.2011	0.0121	28.10.2011	0.01		
13.6.2011	0.0145	28.11.2011	0.0074		
21.6.2011	0.0129	14.12.2011	0.0068		
22.6.2011	0.0109	15.12.2011	0.0073		
24.6.2011	0.0089	19.12.2011	0.009		
27.6.2011	0.0085	5.1.2012	0.0051		
28.6.2011	0.0082	6.1.2012	0.0049		
29.6.2011	0.013	9.1.2012	0.0041		

- tsom.txt

30.7.1999

0.026400001 0.0272 0.03 0.030699999 0.031900001 0.036989999
0.040869999 0.043709998 0.04585 0.0477 0.04973 0.05132
0.052659998 0.053839998

26.6.2000

0.044510002 0.045289998 0.046789999 0.04868 0.050079999
0.053449998 0.054910002 0.05586 0.056729999 0.057179999
0.058070002 0.05864 0.059109998 0.059320002

22.12.2006

0.038096001 0.038412001 0.039312999 0.040043001 0.040496001
0.040837002 0.040707998 0.040759001 0.040703001 0.040791001
0.040948 0.041104 0.041290002 0.041500001

5.6.2007

0.041131001 0.042294998 0.043495002 0.044709001 0.045548
0.046739001 0.046890998 0.046936002 0.046981001 0.047013998
0.047108998 0.047241 0.047399998 0.047593002

12.9.2007

0.045092001 0.048232999 0.047747002 0.046465001 0.045548
0.043906999 0.043604002 0.043698001 0.043821001 0.044137001
0.044421 0.044625 0.044998002 0.045387001

11.5.2009

0.006902 0.013773 0.015844001 0.01566 0.015064 0.017653
0.021628001 0.024863999 0.027646 0.030116999 0.032128999
0.033821 0.035225 0.036413

2.11.2010

0.007547 0.009117 0.011938 0.01286 0.013051 0.016397001 0.018154
0.019917001 0.021671 0.023309 0.024739001 0.025996 0.027086
0.028069999