

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Melinda Kavalir

**Vloga aktuarske matematike v finančni krizi**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Janez Bernik

Ljubljana, 2012

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Začetek krize na hipotekarnem trgu in sekuritizacija	4
2.1. Dejavniki finančne krize	4
2.2. CDO	5
2.3. Pogled od znotraj	8
3. Model Gaussove kopule	9
3.1. Na kratko o kopulah	9
3.2. Gaussova in Gumbelova kopula	9
3.3. Uporaba Gaussove kopule pri vrednotenju CDO-jev	12
3.4. CDS in sintetični CDO	12
4. Pomanjkljivosti modela kopule pri kreditnem tveganju	14
5. Težave pri vrednotenju CDO-jev	15
5.1. Občutljivost mezzanine tranše na koreliranost propadov	15
5.2. CDO-squared (dvakratni CDO)	17
6. Marshall-Olkinova kopula	18
6.1. Bivariatna Marshall-Olkinova kopula	18
6.2. Multivariatna Marshall-Olkinova kopula	19
6.3. Uporaba	20
7. Primera neprimernega upravljanja s tveganjem	22
7.1. AIG	22
7.2. Freddie Mac in Fannie Mae	24
8. Zaključek	26
Literatura	27

## Vloga aktuarske matematike v finančni krizi

Posledica finančne krize, ki se je začela avgusta leta 2007, so tudi kritike, ki letijo na matematike in še posebno Gaussovo kopulo, strukturo, ki jo je David X. Li predstavil širšemu finančnemu svetu kot način vrednotenja kreditnih finančnih instrumentov. Prevelika razširjenost in zloraba formule sta bili zares en od usodnih dejavnikov. V diplomskem seminarju bom predstavila okvir finančne krize in proces listninjenja, osrednji del pa bo osnovna teorija kopul, model Gaussove kopule skupaj z njegovimi prednostmi in pomanjkljivostmi ter njegova uporaba. Opisana sta dva možna alternativna pristopa s kopulo, in sicer Gumbelova ter Marshall-Olkinova kopula. V zaključku bom podala še dva primera neprimernega upravljanja s tveganjem, in sicer v zavarovalniški družbi AIG ter v hipotekarnih podjetjih Freddie Mac in Fannie Mae.

## The role of actuarial mathematics in the financial crisis

In the aftermath of the financial crisis that started in August 2007, various criticisms of mathematics appeared, especially of the Gaussian copula, the structure that David X. Li presented to financial world as a way of pricing credit derivatives. Its widespread use and also misuse in financial industry were indeed one of the main factors. In my thesis I will first present the origins of the financial crisis and securitization, but the main part will be the Gaussian copula model with its advantages, drawbacks and its use. I will also describe two possible alternative approaches, the Gumbel and Marshall-Olkin copulas. At the end there are two examples of inappropriate risk modelling in the insurance group AIG and mortgage companies Freddie Mac and Fannie Mae.

**Math. Subj. Class. (2010):** 62H05, 62P05, 91G20

**Ključne besede:** Finančna kriza, upravljanje s tveganjem, kopula, Gaussova kopula, Marshall-Olkinova kopula, korelacija, struktura odvisnosti, AIG

**Keywords:** Financial crisis, risk management, copula, Gaussian copula, Marshall-Olkin copula, correlation, dependence structure, AIG

## 1. UVOD

Septembra leta 1999 je David X. Li objavil članek z naslovom »On Default Correlation: A Copula Function Approach«. V njem je preučil problem korelacije bankrota oziroma propada med več enotami (finančnimi instrumenti). Prikazal je, zakaj je pristop s kopulo, to je funkcija, ki opisuje odvisnost med slučajnimi spremenljivkami, uporaben pri določanju skupne porazdelitve preživetvenih časov (to je čas do propada podjetja). Pri tem uporabimo robne porazdelitve preživetvenih časov, pridobljene iz informacij trga, kot so na primer gibanje cen tveganih obveznic v preteklosti. Kot primer je navedel uporabo kopul pri vrednotenju kreditnih izvedenih finančnih instrumentov, oziroma specifičneje, pri zamenjavi kreditnega tveganja (ang. *credit default swap*). Ta model so zaradi njegove preprostosti začeli na veliko uporabljati na Wall Streetu in v bonitetnih agencijah, sčasoma pa je postal izjemno priljubljen v celotnem finančnem svetu.

Leta 2012 smo sredi globalne krize, ki počasi dobiva ime velika kriza. Leta 2009 je Salmon objavil članek v *Wired Magazine* z naslovom »Recipe for disaster: the formula that killed Wall Street«, kmalu je sledil članek S. Jonesa v časopisu *Financial Times*: »Of couples and copulas: the formula that felled Wall St«. Oba članka se nanašata na Lijev model in poskušata razložiti njegove pomanjkljivosti ter vlogo v finančni krizi v letih 2007 in 2008, ki se je razvila v današnjo. Dajeta vtis, da je Li razvil matematični model, ki je povzročil zlom bank na Wall Streetu.

Kritike modela, ki se neutemeljeno osredotočajo na človeka, ki ga je predstavil svetu kreditnih izvedenih finančnih instrumentov, so z obtoževanjem usmerjene k finančnim matematikom. Vendar pa, kot pravi matematik L.C.G. Rogers, težava ni bila v uporabi matematike v bančni industriji, temveč njeni zlorabi. Zaposleni so znali zgraditi modele, ki so bili prilagojeni cenam na trgu. Če pa bi prišlo do večjih odstopanj, bi tudi pri računanju prišlo do velikih napak. Poleg tega je model preveč enostaven; ne zajame vseh pomembnih dejavnikov in lastnosti. Kljub temu je bil in je še vedno zelo pomemben pri vrednotenju kreditnih derivativov, trgovanje z njimi pa je igralo veliko vlogo v krizi. Pojavlja se tudi veliko obtoževanj glede tega, da naj bi le malo ljudi vedelo o pomanjkljivostih in napakah modela. Vendar pa to ni res. Veliko akademikov in praktikov je opozarjalo nanje.

Moj diplomski seminar temelji na članku »The devil is in the tails: actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis« avtorjev Paula Embrechtsa in Catherine Donnelly, objavljenega 4. 1. 2010. Najprej bom predstavila okvir finančne krize, nato pa proces sekuritizacije. Ta je imel veliko vlogo pri nastajanju balona, ki se je razpočil avgusta leta 2007. Glavni del diplomskega seminarja je model Gaussove kopule in njegova uporaba v vrednotenju CDO-jev, kot jo je predstavil Li leta 1999. Sledi analiza pomanjkljivosti modela ter predstavitev alternativne možnosti za vrednotenje, Marshall-Olkinove kopule. Na koncu sta opisana primera neprimernega upravljanja s tveganjem, in sicer v zavarovalniški družbi AIG (American International Group), ki jo je skoraj pokopalo trgovanje z zamenjavami kreditnega tveganja, ter hipotekarnih podjetjih Fannie Mae in Freddie Mac.

## 2. ZAČETEK KRIZE NA HIPOTEKARNEM TRGU IN SEKURITIZACIJA

### 2.1. Dejavniki finančne krize.

Zelo pomemben dejavnik pri nastanku krize je bila ekspanzivna monetarna politika, ki jo je izvajal FED, torej nizke obrestne mere, ki so spodbujale prekomerno

zadolževanje, oziroma bolj konkretno, jemanje hipotek. Tudi vlada je spodbujala nakupovanje nepremičnin s poudarjanjem koristi za posameznika in družino, ki jo prinese posedovanje lastnine. Poleg tega je ameriški kongres že od leta 1992 pritiskal na Fannie Mae (The Federal National Mortgage Association) in organizacijo Freddie Mac (The Federal Home Loan Mortgage Corporation), ki sta podjetji za razširitev hipotekarnih posojil na sekundarnem trgu v ZDA, da povečata delež hipotekarnega financiranja med posojiljemalci z nižjimi dohodki. Vir [8] omenja, da je bil leta 1996 Fannie in Freddie predpisan cilj, da mora biti 42 odstotkov njunega hipotekarnega financiranja pripadati posojiljemalcem z dohodkom pod medianskim v njihovem območju. Ta tarča se je povečala na 50 odstotkov v letu 2000 in 52 v 2005. Načrt za leto 2008 je bil, da bi bilo kar 28 odstotkov hipotekarnih posojil odobrenih posojiljemalcem, katerih dohodek je le 60 % medianskega.

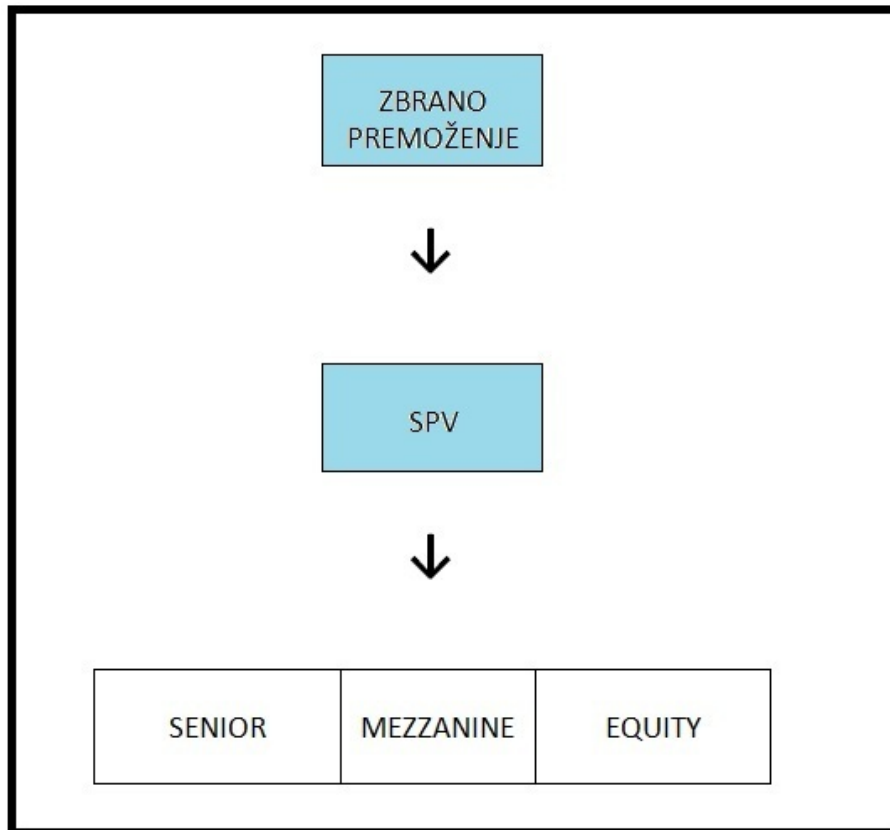
Glavni izvor krize pa je bil prenos hipotekarnega tveganja preko raznih inovacij od posojilodajalcev na širši finančni trg, torej na banke, sklade tveganega kapitala in zavarovalnice. Transfer je potekal skozi proces, ki se imenuje sekuritizacija oziroma listninjenje. Ta poteka tako, da banka zbere hipoteke, ki jih je odobrila in vzporedno ustanovi sklad SPV («special-purpose vehicle»), ki ni vključen v njeno bilanco in je neodvisen od stečaja banke. SPV izda finančne instrumente, ki so vezani na hipoteke. Plačila hipotek so usmerjena neposredno v SPV sklad in ne v banke. Po plačilu stroškov SPV izplača kupone imetnikom teh instrumentov, to so ponavadi banke, skladi tveganega kapitala in zavarovalnice. Banke na ta način preidejo iz »originate to hold«, to je tradicionalen model, v »originate to distribute« model, kjer hipoteke na veliko prodajajo naprej. Listninjenje se je močnejše razvilo okoli leta 1997. Postopoma se je razmahnilo iz hipotekarne industrije k izdaji komercialnih papirjev, študentskih posojil in drugih kategorij posojil. Načeloma ni s tem procesom nič narobe. Ima veliko prednosti. Poveča učinkovitost finančnih trgov, saj prenaša hipotekarno tveganje na tiste, ki so ga pripravljene prevzeti. Poleg tega mora imeti banka kritje za kapital za posojila, ki pa ga ob prodaji posojil lahko uporablja naprej.

## 2.2. CDO.

Zadolžnice, zavarovane z dolgom (collateralized debt obligation, v nadaljevanju CDO), so vrednostni papirji, ki so zavarovani z različnimi dolžniškimi instrumenti, kot so obveznice, posojila in hipotekarne obveznice. Sklad SPV posreduje kupone v CDO, ki je navadno razdeljen na tranše oziroma nekakšne razrede glede na resnost tveganja in donose. Ta delitev je smiselna, saj so različni razredi privlačni za različne investitorje. Recimo, da imamo tri tranše, senior, mezzanine in equity (višjo, srednjo in nižjo).

Slika 1 prikazuje prenos kuponov iz skladov SPV k imetnikom CDO-jev senior, mezzanine in equity tranše. Te se razlikujejo po prioriteti. Ko SPV plača stroške, prvi dobijo kupone imetniki CDO senior tranše, potem mezzanine in nazadnje še equity. Če se zgodi neodplačevanje hipoteke oziroma več hipotek, potem bodo za kupon prikrajšani imetniki CDO equity tranše. Če se stanje poslabša in je neodplačevanje pogostejše ter imetniki CDO-ja equity tranše ne dobivajo več kuponov, potem bodo naslednji prikrajšani imetniki CDO-ja mezzanine tranše. Nazadnje so na vrsti imetniki CDO-ja senior tranše.

Posledično so tudi kreditne ocene tranš različne. Najvišja je ocena senior tranše, saj je tveganje najmanjše. Razlikovanje po razredih je dobro s tega stališča, da bi



SLIKA 1. Diagram delitve CDO na tri tranše: senior, mezzanine in equity

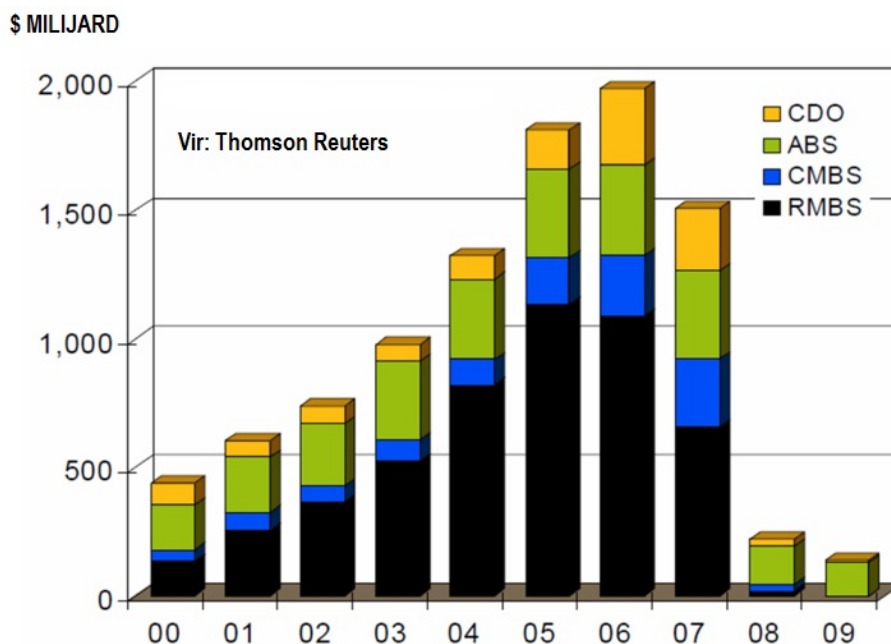
sicer celoten CDO dobil na primer kreditno oceno BBB, tako pa njegov najboljši del lahko dobi celo oceno AAA. SPV želi maksimizirati velikost senior in mezzanine tranše.

Slika 2 prikazuje aktivnost na trgu listninjenja v milijardah dolarjev. ABS (asset-backed security) je s sredstvi zavarovan vrednostni papir, CMBS (commercial mortgage-backed security) tržni vrednostni papir, zavarovan s hipoteko na poslovne prostore, RMBS (residential mortgage-backed security) pa vrednostni papir, zavarovan s hipoteko na stanovanjske nepremičnine. Vidimo trend naraščanja vključno z letom 2006, potem pa zaradi krize na hipotekarnem trgu zmeren upad v letu 2007 in ogromen padec v letu 2008, pravzaprav kar nazadovanje na stopnjo pred letom 2000. Pri tem padcu je seveda veliko vlogo igral kreditni krč in pa splošno nezaupanje na trgu.

Banke so z ustanavljanjem SPV sicer razpršile kreditno tveganje, vendar pa je to za sabo potegnilo druge vrste tveganj. Najpomembnejši v procesu sekuritizacije je bil moralni hazard:

- banke naj bi se držale pravila, da morajo obdržati najbolj tvegane dele zbranih hipotek, saj če banka ni izpostavljena hipotekarnemu tveganju, potem nima interesa za nadzor in vzdrževanje kakovosti posojil, ki jih odobri. Vendar pa se tega niso držale, temveč so imele v lasti v glavnem CDO-je senior tranše, ki so jim še osvobajali kapital.
- Drug primer je, da so bonitetne agencije hkrati svetovale svojim strankam, kako naj najboljše listninijo finančne instrumente, hkrati pa so jim še dodelile bonitetno oceno. Bile so torej v konfliktu s svojimi interesi. Poleg tega so

## TRŽNA AKTIVNOST LISTNINJENJA



SLIKA 2. Tržna aktivnost listninjenja

napačno ocenile velika tveganja (kot na primer kolaps vrednosti nepremičnin tolikšne razsežnosti) in posledično pripisovale previsoke ocene CDO-jem in ostalim finančnim instrumentom, kritim z nepremičninami. Kljub njihovi kompleksnosti so jih ocenjevale kot navadne obveznice brez natančnejšega pregledovanja posameznih hipotek v košarici.

- Poleg tega je bila veriga od prvotnih posojilodajalcev do kupcev večkrat predolga. To je povzročilo nejasnost oziroma izgubo informacij o kakovosti instrumentov.
- Velika podjetja so mislila, da so prepomembna in da ne morejo propasti. Verjela so, da jih bo država zaščitila v primeru težav.

Število odobrenih posojil se je iz leta v leto povečevalo, njihova kvaliteta pa se je poslabševala. Naj omenim primer t. i. »NINJA« posojil (No Income, No Job, (and) no Assets), kjer je posojiljemalec moral pokazati le svojo kreditno oceno, da je pridobil posojilo. Taki krediti največkrat niso bili poplačani. Poleg tega so ljudi celo spodbujali k laganju o zmožnostih odplačevanja.

Vse to je vodilo k povečanju tveganja propada hipotek. Večina udeležencev trga se tega ni zavedala oziroma niso mislili, da bo to pomembno. Vendar pa se je v februarju leta 2007 neodplačevanje nekvalitetnih posojil povečalo in stanje se je začelo poslabševati. Katalizatorji krize so bili še medsebojna odvisnost in povezanost, pomen, ki so ga banke pripisovale rasti in dohodku in posledično prenizek delež rezerv, pomanjkanje regulacije...

### 2.3. Pogled od znotraj.

Bančni nadzorniki so vedeli, da je združevanje hipotekarnih posojil za ponovno prodajo grožnja tako za investitorje kot za posojilojemalce, a vseeno niso ukrepali. O tem govori tudi članek, objavljen v časopisu *The Economist* 7. 8. 2008 z naslovom »Confessions of a risk manager«, kjer je predstavljen osebni pogled upravljavca s tveganji v eni od velikih svetovnih bank. Govori o tem, da niso predvidevali kakšne večje krize, saj so bile do takrat zgodovinsko značilne nizke stopnje volatilitnosti, na njihov optimizem pa je vplivalo tudi štiriletno obdobje nizkih obrestnih mer, nizko število propadov in padajoči kreditni pribitki. Zavedali so se možnosti težav z likvidnostjo, vendar so predvidevali, da bi ob pomanjkanju priteklo veliko dodatnega denarja, saj so bili institucionalni investitorji, skladi tveganega kapitala in privatna podjetja izjemno zainteresirani za vlaganje v nepremičnine.

Kot večina bank je tudi njegova imela portfelj z različnimi tranšami CDO-jev. Njihova glavna strategija je bila nakup košarice sredstev, pretežno obveznic, ki so jih razporedili v CDO-je ter jih kasneje prodali investitorjem. Maja 2005 so držali CDO-je AAA tranše, saj so pričakovali, da se bo njihova vrednost povečala, prodali pa so CDO-je z zelo slabo oceno, saj so pričakovali, da bo njihova cena padla. Vendar pa se je zgodilo ravno obratno, saj je bila povpraševanje po prvih manjše in je cena padla. Po tem dogodku bi morali biti bolj previdni, vendar niso sploh pomislili na možnost, da bi lahko cene AAA instrumentov padle za več kot 1 odstotek. 20-odstotni padec je bil nepredstavljen, prav to pa se je zgodilo. Zaposleni na oddelku za upravljanje s tveganjem so napačno predvidevali, da bi se lahko v primeru težav na trgu hitro prilagodili in likvidirali svoje pozicije, še posebej pri instrumentih, ocenjenih z AAA.

Pri CDO ni nobeden od oddelkov zares prevzel naloge ocenjevanje tveganja. Oddelek za upravljanje s tržnim tveganjem je verjel, da je to pravzaprav domena oddelka za upravljanje s kreditnim tveganjem, zaposleni na tem oddelku pa so mislili prav obratno. Veliko je bilo tudi zaupanje bonitetnim agencijam. Večji problem je bil tudi pritisk na zaposlene na oddelku za upravljanje s tveganjem, saj so ostali želeli, da bi prišlo do čim več transakcij. Težava pa je v tem, da so najbolj donosne investicije tudi najbolj tvegane. Večkrat so upravljavci morali neupravičeno pristati na transakcije.

Sčasoma se je izoblikoval velik portfelj instrumentov z »zelo nizkim« tveganjem, ki pa so se izkazali za zelo tvegane. Majhna sprememba v gibanju cene pa v milijardi dolarjev vrednem portfelju povzroči ogromne izgube, kar se je tudi zgodilo.



### 3. MODEL GAUSSOVE KOPULE

V Lijevelem članku iz leta 1999 je predstavljen pristop z modelom Gaussove kopule za modeliranje neplačanja dolga v košarici instrumentov, s katerimi je generiran nek kreditni izvedeni finančni instrument, naprimer CDO. Recimo, da bi radi ocenili vrednost CDO-ja, ki se nanaša na portfelj s  $d$  obveznicami. To lahko naredimo tako, da poiščemo skupno porazdelitev neplačevanja dolga  $d$  obveznic. Naj bo  $T_i$  čas do propada  $i$ -te obveznice (preživetveni čas) za  $i = 1, \dots, d$ . Radi bi določili porazdelitev skupnega časa propada, torej  $P[T_1 \leq t_1, \dots, T_d \leq t_d]$ .

#### 3.1. Na kratko o kopulah.

Uporaba kopul nam omogoča ločiti posamezno obnašanje robnih porazdelitev od njihove skupne odvisnosti. Naj bosta  $X$  in  $Y$  dve slučajni spremenljivki na običajnem verjetnostnem prostoru. Lahko na primer predstavljata preživetvena časa dveh podjetij. Ker želimo določiti njuno medsebojno odvisnost, moramo poiskati skupno porazdelitev  $X$  in  $Y$ , torej porazdelitveno funkcijo  $H(x, y) := P[X \leq x, Y \leq y]$ . Če bi predpostavili, da sta preživetvena časa podjetij neodvisna, bi bilo to precej preprosto, vendar pa v realnosti ni tako. Navadno sta preživetvena časa bolj odvisna v času recesije. Če poznamo porazdelitveni funkciji  $X$  in  $Y$ , potem lahko skupno porazdelitveno funkcijo najdemo na veliko načinov. Priročen in preprost način je pristop s kopulo. Ta namreč določa strukturo odvisnosti med  $X$  in  $Y$ , torej kako se  $X$  in  $Y$  obnašata skupaj.

**Definicija 3.1.**  $d$ -dimenzionalna kopula  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$  je porazdelitvena funkcija z enakomernimi robnimi porazdelitvami.

Primer kopule je neodvisnostna kopula

$$C^\perp(u, v) := uv, \quad \forall u, v \in [0, 1].$$

Z lahkoto preverimo, da  $C^\perp$  zadošča definiciji 3.1. Pri določanju skupne porazdelitve lahko izbiramo med številnimi kopulami. Izberemo tisto, ki ustreza željeni strukturi odvisnosti. Naslednji izrek nam pove, kako tvorimo skupno porazdelitev iz kopule in robnih porazdelitev. To je lažji del Sklarovega izreka, dokaz pa lahko najdemo npr. v [13].

**Izrek 3.2.** Naj bo  $C$  kopula in  $F_1, \dots, F_d$  univariatne porazdelitvene funkcije. Če definiramo

$$H(x_1, \dots, x_d) := C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad \forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

potem je  $H$  skupna porazdelitvena funkcija z robnimi funkcijami  $F_1, \dots, F_d$ .

#### 3.2. Gaussova in Gumbelova kopula.

Omejili se bomo na bivariatni primer,  $d = 2$ . Gaussova kopula se pogosto uprablja za modeliranje strukture odvisnosti v primeru kreditnega propada. Za ponazoritev jo bomo primerjali z Gumbelovo kopulo. Naj bosta  $X$  in  $Y$  slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama  $F$  in  $G$ . Imejmo bivariatno Gaussovo kopulo  $C_\rho^{gau}$ , ki jo je mogoče izraziti kot integral. S  $\Phi$  označimo univariatno standardno normalno porazdelitveno funkcijo. Potem je bivariatna Gaussova kopula  $C_\rho^{gau}$  enaka

$$C_{\rho}^{gau}(u, v) := \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right\} ds dt, \quad (2.1)$$

za vse  $u, v \in [0, 1]$ ,  $|\rho| < 1$ . Parameter  $\rho$  je korelacijski koeficient. Pri  $\rho = 0$  sta robni porazdelitveni funkciji neodvisni in zato je  $C_0^{gau} = C^{\perp}$ .

Če uporabimo Izrek 3.2 na bivariatni Gaussovi kopuli  $C_{\rho}^{gau}$ , potem je skupna porazdelitvena funkcija  $H$  slučajnih spremenljivk  $X$  in  $Y$  enaka

$$H(x, y) := C_{\rho}^{gau}(F(x), G(y)), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Naslednji izrek, ki je manj trivialni del Sklarjevega izreka, nam zagotavlja, da lahko Gaussovo kopulo dobimo iz multivariatne normalne porazdelitve. Dokaz lahko najdemo v [13].

**Izrek 3.3.** *Naj bo  $H$  skupna porazdelitvena funkcija z robnimi porazdelitvenimi funkcijami  $F_1 \dots F_d$ . Potem obstaja kopula  $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ , tako da za vse  $(x_1 \dots x_d) \in \mathbb{R}^d$  velja*

$$H(x_1 \dots x_d) := C(F_1(x_1) \dots F_d(x_d)).$$

Če so robne porazdelitvene funkcije zvezne, je  $C$  enolična. Sicer pa je  $C$  enolično določena z  $\text{Ran}(F_1) \times \dots \times \text{Ran}(F_d)$ , kjer je  $\text{Ran}(F_i)$  oznaka za rang porazdelitvene funkcije  $F_i$ .

Pokažimo, od kod pride Gaussova kopula. Naj bo  $Z = (Z_1, Z_2)$  dvodimenzionalen slučajni vektor, ki je multivariatno normalno porazdeljen s povprečjem 0, njegova kovariančna matrika pa je enaka

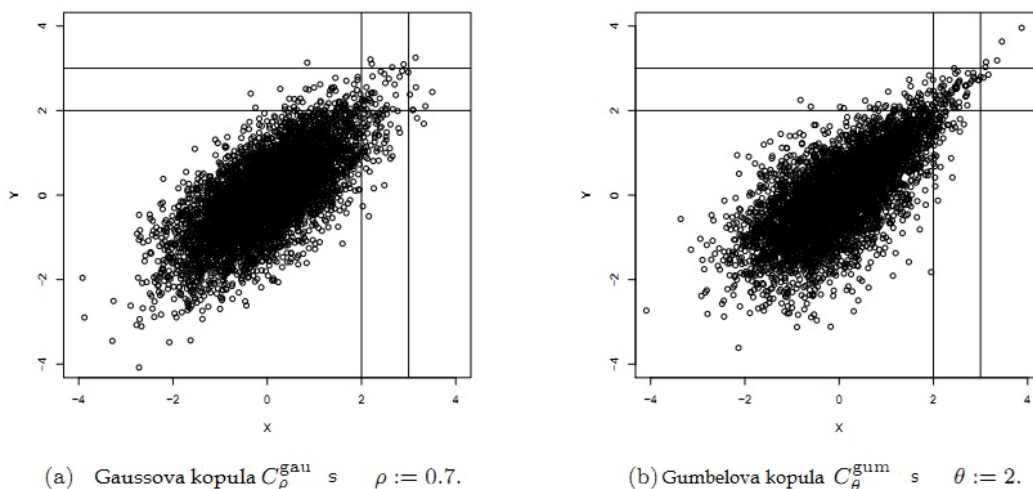
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

Porazdelitveno funkcijo slučajnega vektorja  $Z$  označimo s  $\Phi_2$ . Vemo, da so robne porazdelitvene funkcije kateregakoli multivariatno normalno porazdeljenega slučajnega vektorja porazdeljene univariatno normalno. Tako velja, da  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$ , porazdelitvena funkcija  $Z_1$  in  $Z_2$  pa je  $\Phi$ . Če Izrek 3.3 uporabimo na  $\Phi_2$  in robnih porazdelitvenih funkcijah  $\Phi$ , dobimo:

$$\Phi_2(x, y) = C_{\rho}^{gau}(\Phi(x), \Phi(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Iz tega je razvidno, da lahko multivariatno normalno porazdelitev dobimo s kombinacijo univariatne normalne porazdelitve in Gaussove kopule. Graf na sliki 3 prikazuje simulacijo skupne porazdelitvene funkcije  $X$  in  $Y$ , če sta oba porazdeljena s povprečjem 0 in standardnim odklonom 1, njuna odvisnostna struktura pa je podana z Gaussovo kopulo pri  $\rho = 0,7$ . To je kar bivariatna normalna porazdelitev, kjer je linearna korelacija med  $X$  in  $Y$  enaka 0,7.

Slika 3 prikazuje 5000 naključnih točk slučajnega vektorja  $(X, Y)$ . V obeh primerih sta komponenti normalno porazdeljeni. Razlika je v odvisnostni strukturi, saj je na grafu a podana z Gaussovo kopulo, na grafu b pa s Gumbelovo. Opazimo, da je nad vodoravno črto  $x = 2$  in navpično  $y = 2$  na grafu Gaussove kopule 43 točk, na istem območju v drugem primeru pa kar 70. V ekstremnejšem primeru, da sta tako



SLIKA 3. Gaussova in Gumbelova kopula

$x$  in  $y$  večja od 3, je na levem grafu le 1 taka točka, na desnem pa 5. Mimogrede, bivariatna Gumbelova kopula, s katero primerjamo Gaussovo, je enaka:

$$C_{\theta}^{\text{Gum}}(u, v) = \exp\{-((-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}\}, \quad 1 \leq \theta < \infty \quad \forall u, v \in [0, 1].$$

Parameter  $\theta$  je v povezavi s Kendallovim koeficientom konkordance, ki je tako kot korelacijski koeficient mera odvisnosti med  $X$  in  $Y$ . Korelacijski koeficient meri, kako daleč je  $Y$  od oblike  $aX + b$  za neko konstanto  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ , Kendallov pa nagnjenost  $X$ -a k povečanju, če se poveča  $Y$ . Če ga želimo izračunati, vzamemo drug par slučajnih spremenljivk  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ , ki ima enako porazdelitveno funkcijo kot slučajni vektor  $(X, Y)$ , a je od njega neodvisen. Kendallov koeficient konkordance je definiran kot:

$$\rho_{\tau}(X, Y) := P[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) > 0] - P[(X - \tilde{X})(Y - \tilde{Y}) < 0].$$

Pozitivna vrednost Kedallovega koeficienta pomeni, da se bosta  $X$  in  $Y$  bolj verjetno povečala hkrati, negativna pa, da je bolj verjetno, da če en naraste, drugi pade. Za Gumbelovo kopulo je Kendallov koeficient  $\rho_{\tau}^{\text{Gum}}(X, Y) = 1 - \frac{1}{\theta}$  (dokaz npr. v [7]). Če fiksiramo  $\theta \in [1, \infty)$ , potem je skupna porazdelitev  $X$  in  $Y$  z uporabo Gumbelove kopule enaka:

$$H(x, y) = C_{\theta}^{\text{Gum}}(F(x), G(y)) = \exp\{-((-\ln(F(x)))^{\theta} + (-\ln(G(y)))^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}\}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Če si še enkrat ogledamo sliko 3, opazimo, da ima levi graf obliko elipse, desni pa solze, čeprav imata skoraj enako linearno korelacijo. To pomeni, da linearna korelacija in robne porazdelitve ne določajo enolično skupne porazdelitve dveh slučajnih spremenljivk. Poleg tega opazimo tudi, da je pogostost ekstremnih dogodkov v primeru uporabe Gumbelove kopule večja, kot če uporabimo Gaussovo, kljub skoraj enakim robnim porazdelitvam in linearni korelaciji. S te slike je razvidno, da je odločitev, katero kopulo uporabimo, odločilna pri določanju verjetnosti ekstremnih dogodkov, saj nam sami podatki ne povedo veliko.

### 3.3. Uporaba Gaussove kopule pri vrednotenju CDO-jev.

Spomnimo se na preživetvene čase  $T_i$   $d$  obveznic, na katere se nanaša nek CDO, iz začetka 3. poglavja. Z  $F_i$  označimo porazdelitveno funkcijo časa  $T_i, i = 1, \dots, d$ . Li-jev pristop s kopulo je definicija skupnega preživetvenega časa kot:

$$P[T_1 \leq t_1, \dots, T_d \leq t_d] := C(F_1(t_1), \dots, F_d(t_d)), \quad \forall (t_1, \dots, t_d) \in [0, \infty)^d, \quad (3.2)$$

kjer je  $C$  kopula. Izraz Lijeve formula se je uveljavil kot zgornja formula, kjer za  $C$  uporabimo Gaussovo formulo. V praksi se Lijev model uporablja znotraj okvirja enega faktorja oziroma večih. Pogledali si bomo primer pristopa Gaussove kopule z enim faktorjem. V portfelju imamo  $d$  obveznic  $d$  podjetij. Z  $Z_i$  označimo vrednost premoženja podjetja  $i$ . V primeru Gaussove kopule z enim faktorjem predpostavimo, da je

$$Z_i = \sqrt{\rho} Z + \sqrt{1 - \rho} \epsilon_i, \quad \forall i = 1, \dots, d,$$

kjer je  $\rho \in (0, 1)$ ,  $Z, \epsilon_1, \dots, \epsilon_d$  pa neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene standardno normalno. Slučajna spremenljivka  $Z$  predstavlja tržni faktor, ki je enak za vsa podjetja,  $\epsilon_i$  pa faktor, specifičen za podjetje  $i$  za vsak  $i = 1, \dots, d$ . Pri tej predpostavki je vektor  $(Z_1, \dots, Z_d)^T$  multivariatno normalno porazdeljen s povprečjem 0 in kovariančno matriko

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho \\ \rho & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho & \cdots & \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

V tem primeru  $\rho$  interpretiramo kot korelacijo med vrednostmi premoženja vsakega para podjetij.

Opredelimo, da do propada pride, če vrednost premoženja  $Z_i$  podjetja  $i$  pade pod nek prag. Preživetveni čas je s strukturo enega faktorja povezan z enačbo  $Z_i = \Phi^{-1}(F_i(T_i))$ . Skupna porazdelitvena funkcija preživetvenih časov je potem podana s formulo (3.2),  $C := C_\rho^{gau}$ , kjer ima  $\rho$  vlogo korelacijskega koeficienta med vrednostmi premoženja. Ko izberemo robne porazdelitve  $F_i$ , imamo celoten enofaktorski Li-jev model.

Pogosto se predpostavlja, da so komponente slučajnega vektorja  $(T_1, \dots, T_d)$  eksponentno porazdeljene. V tem primeru je mogoče povprečje vsakega preživetvenega časa  $T_i$  pridobiti iz informacij trga, na primer iz preteklih podatkov o propadih obveznic in tržnih cen. Investitorji lahko z uporabo eksponentno porazdeljenih robnih funkcij in cen CDO tranš izračunajo pripadajočo korelacijo premoženja  $\rho$  za vsako tranšo.

### 3.4. CDS in sintetični CDO.

**CDS** (credit default swap) ali zamenjava kreditnega tveganja je pogodba, ki prenese kreditno tveganje neke enote, na primer obveznice ali posojila, s kupca na prodajalca. Kupec CDS-a plača prodajalcu premijo. Če pride do kreditnega dogodka, torej v osnovni enoti, na katero je napisana pogodba, pride do bankrota oziroma nezmožnosti poplačanja dolga, potem prodajalec CDS-a plača kupcu dogovorjeno vsoto, zapisano v pogodbi. Ta finančni instrument se uporablja iz dveh razlogov:

- z namenom zaščite oziroma zavarovanja pred kreditnim tveganjem. Kupec CDS-a se v tem primeru zavaruje pred neizpolnitvijo poplačila vrednostnega papirja s strani izdajatelja. Od tradicionalne zavarovalne police se razlikuje v tem, da lahko CDS kupi kdorkoli, celo investitor, ki ni imetnik dolžniškega instrumenta.
- z namenom špekulacije. Namreč, investitor, ki ni imetnik dolžniškega instrumenta neke enote (podjetja), z nakupom CDS-a namreč stavi na poslabšanje kreditne ocene te enote v prihodnosti (smiselno je, da je pri višji kreditni oceni pribitek za kreditno tveganje na CDS nižji). Če se to zgodi, CDS proda dražje, kot ga je kupil, in s tem zasluži.

CDS je najbolj razširjen med kreditnimi izvedenimi finančnimi instrumenti. Obstaja od zgodnjih 90-ih prejšnjega stoletja. Najprej so z njim trgovale le banke, za zaščito njihovih posojil, poleg tega pa so s tem še osvobodile svoj kapital. Ko so drugi investitorji, na primer hedge skladi, v tem videli priložnost za zaslužek, so začeli špekulirati. Uporaba CDS-ov v ta namen je dominirala nad uporabo za zaščito do leta 2002. Po letu 2003 se je razširjenost teh pogodb močno povečala. Na koncu leta 2007 je vrednost v CDS-ih znašala 62,2 bilijona ameriških dolarjev, zaradi finančne krize pa je do sredine leta 2010 padla na 26,3 bilijona dolarjev.

Obstajata dve kategoriji CDS-ov:

- CDS, ki ščiti pred kreditnim dogodkom le ene referenčne enote, se nanaša na eno samo obveznost (single-name CDS)
- CDS, ki ščiti pred kreditnim dogodkom v košarici referenčnih enot (multi-name CDS)

S CDS-i se ne trguje organiziranim trgu, temveč na OTC-trgu (over-the-counter). Še posebej pred krizo je bilo značilno pomanjkanje regulacije. Udeležnim ni bilo treba poročati vladni agenciji o transakcijah. Posledica tega je, da je CDS označen kot kontroverzen finančni instrument, namreč, prisotno je mnogo tveganja, ki pa ni bilo povsem pod kontrolo. Med drugim je kupec CDS-a izpostavljen tveganju, da prodajalec CDS-a ne bi bil zmožen poplačati dogovorjene vsote v primeru propada osnovne enote, prodajalec CDS-a pa tvega, da kupec ne bi mogel plačevati denarnih tokov, h katerim se je zavezal. V teh dveh primerih bi prišlo do prodaje CDS-a, katerega cena pa se je ta čas že spremenila, zato lahko pride do izgube na dolgi ali kratki strani. Prisotno je tudi likvidnostno tveganje, saj morata ponavadi obe strani položiti neko začetno kritje na poravnalnem računu, višina marginalnega kritja pa se v času lahko spreminja.

**Sintetični CDO** je kompleksen finančni instrument, ki se uporablja za špekulacije oziroma upravljanje s kreditnim tveganjem. V času, ko se je trg CDS-ov širil, je imela banka v knjigah kopico single-name CDS-jev, ki jih je združila in uporabila kot portfelj za CDO, ki je dobil ime sintetični CDO. Za primerjavo, denarni CDO-ji, ki sem jih definirala v poglavju 2.2, se nanašajo na tradicionalnejše finančne instrumente, kot so obveznice in posojila. S sintetičnimi CDO-ji največkrat trgujejo investicijske banke in hedge skladi. Tako kot navadni CDO so lahko razporejeni v tranše in prodani investitorjem. Kupci ponavadi prejmejo premijo, ki je večja za nižje razrede. Za najnižji razred je prejeta premija lahko vredna tudi do 20–50 % nominalne vrednosti portfelja.

Na trgovanje s sintetičnimi CDO-ji sodeč po viru [10] leti veliko kritik zaradi njihove vloge v finančni krizi. Omogočili so visoke stave na vrednosti hipotekarnih

finančnih instrumentov, kar je prispevalo k nižjim standardom posojanja in k prevaram. Bili so zelo razširjeni, med letoma 2005 in 2007 je bila vrednost izdanih kar 108 milijard dolarjev. Dejanski obseg je bil še večji, saj so bili sintetični CDO-ji prav tako neregulirani in pogosto neprijavljeni finančnemu trgu.

#### 4. POMANJKLJIVOSTI MODELA KOPULE PRI KREDITNEM TVEGANJU

Model Gaussove kopule se je največ uporabljal pri vrednotenju kreditnih finančnih instrumentov, vendar pa je potreba po njegovi uporabi usahnila, ko se je trg razširil, saj je bila cena eksogeno določena s povpraševanjem in ponudbo. Vseeno se uporablja za izračun primerne cene, še vedno pa ima zelo pomembno vlogo pri vrednotenju sintetičnih CDO-jev.

Omenimo najprej nekaj prednosti modela, ki so botrovale začetku njegove uporabe treh glavnih bonitetnih agencij - Fitch Ratings, Moody's in Standard & Poor's. Omogoča hitre izračune, preprost je za razumevanje in uporabo, saj potrebujemo le oceno korelacijskega koeficienta  $\rho$ . Opazimo pa, da se zanaša na to, da imajo vsa sredstva v portfelju enako korelacijski koeficient, če jih primerjamo po parih.

Glavne tri slabosti modela Gaussove kopule pa so naslednje:

- ne upošteva pojava domino efekta v portfelju;
- pričakovali bi, da so izračunani korelacijski koeficienti vsake tranše CDO-ja enaki, saj naj bi bila korelacija funkcija portfelja in ne tranše, ki se nanaša na ta portfelj. Izkaže se, da to ni res.
- Model ne zajema vpliva ekonomskih dejavnikov na propade, kar zmanjša sposobnost testa stresa.

Poglejmo si vsako od slabosti podrobneje.

#### Neprimerno modeliranje v primeru ekstremnih dogodkov (domino efekta)

V času krize pride navadno do pojava, da ob propadu nekega podjetja postanejo tudi propadi drugih podjetij v prihodnosti bolj verjetni. Ker pa je propad dolžnika ekstremni dogodek, Gaussova kopula pa je, kot bomo pokazali spodaj, asimptotično neodvisna, modeliranje z njo ni primerno. Matematično to lahko pokažemo z repno odvisnostjo. Mera repne odvisnosti pove, kolikšna je odvisnost v repih bivariatne porazdelitve. Poglejmo si mero odvisnosti zgornjega repa (to je desna stran porazdelitvene funkcije). Uporabimo posplošeni inverz, ki je definiran kot  $F^{\leftarrow}(y) := \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq y\}$ . Če je  $F$  zvezna in strogo naraščajoča, potem je  $F^{\leftarrow}$  enak navadnemu inverzu  $F^{-1}$  funkcije  $F$ .

**Definicija 4.1.** Naj bosta  $X$  in  $Y$  slučajni spremenljivkami s porazdelitvenima funkcijama  $F$  in  $G$ . Potem je koeficient odvisnosti zgornjega repa  $X$  in  $Y$  definiran kot:

$$\lambda_u := \lambda_u(X, Y) := \lim_{q \rightarrow 1^-} P(Y > G^{\leftarrow}(q) | X > F^{\leftarrow}(q)),$$

če ta limita  $\lambda_u \in [0, 1]$  obstaja. Če je  $\lambda_u \in (0, 1]$ , potem pravimo, da  $X$  in  $Y$  kažeta odvisnost zgornjega repa. Če pa je  $\lambda_u = 0$ , pa pravimo, da sta  $X$  in  $Y$  asimptotično neodvisna v zgornjem repu.

Opazimo, da je  $\lambda_u$  odvisna le od kopule  $C$  in ne od robnih porazdelitvenih funkcij  $F$  in  $G$ . Naj bo skupna porazdelitev  $X$  in  $Y$  podana z Gaussovo kopulo  $C_\rho^{gau}$ . Po viru [14] se izkaže, da če je  $\rho < 1$ , je koeficient odvisnosti zgornjega repa  $X$  in  $Y$  enak 0. To pomeni, da če gremo dovolj daleč po zgornjem repu skupne porazdelitve  $X$  in  $Y$ , se ekstremni dogodki zgodijo neodvisno.

Prav zaradi zgoraj omenjene lastnosti, da propadu podjetij sledijo tudi propadi drugih, je asimptotska neodvisnost v modelu nezaželena, poleg tega pa je njen vpliv prisoten ne le v limiti. Za primerjavo, koeficient odvisnosti zgornjega repa pri Gumbelovi kopuli je po viru [7] podan z  $\lambda_u^{gum} := 2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$ , torej je pri  $\theta > 1$  za Gumbelovo kopulo značilna odvisnost zgornjega repa in je ta zato primernejša za modeliranje propadov pri obveznicah. Torej boljše alternative obstajajo, na kar je opozarjalo mnogo akademikov.

Podoben problem je prisoten pri modelu Blacka, Scholesa in Mertona, ki podcenjuje ekstremne dogodke. Oba modela torej neuspešno modelirata njihovo pogostost in resnost. To pa je nesprejemljivo pri obvladovanju tveganja, prav tako je napačno zanašanje na to, da so dogodki porazdeljeni normalno brez premisleka. Omenjena modela bi morala biti uporabljena skupaj še s kakšnimi boljšimi, omejitve in slabosti pa bi morale biti znane vsem, ki jih uporabljajo.

## Nekonsistentna korelacija v tranšah

Pri izračunu implicirane korelacije za vsako tranšo z znano tržno ceno, ki bi ustrezala modelu Gaussove kopule, bi pričakovali, da so korelacijski koeficienti znotraj vsake tranše (senior, mezzanine, equity) enaki, saj so odvisni le od portfelja, na katerega se tranša nanaša, vendar pa enofaktorski model Gaussove kopule vrne različne korelacijske koeficiente. Poleg tega se korelacije ne gibljejo skupaj, saj se korelacijski koeficient za equity tranšo lahko bolj poveča kot pa za mezzanine.

## Možnost obremenitvenega testa

Uporaba kopule zmanjšuje možnost testiranja sistemskih ekonomskih faktorjev, saj kopula ne modelira ekonomske realnosti. Je matematična struktura, ki ustreza zgodovinskim podatkom. Do problema pride, ko model uporabimo za dinamičen, hitro spreminjajoč se trg, poleg tega pa je model preveč statičen. Podjetja, ki so uporabljala Gaussovo kopulo za obremenitvene teste, so večkrat kupila npr. finančni instrument z bonitetno oceno AAA, kot bi ga, če bi uporabila Gumbelovo ali kakšno drugo, npr. Claytonovo ali pa model t–kopule.

Kopule so torej zelo uporabne za obremenitvene teste pri zelo statičnih portfeljih, kjer so informacije o robnih porazdelitvah izgub že dosegljive (primer za to so neživiljenjska zavarovanja), pri kompleksnih in dinamičnih trgih pa ponavadi odpovejo.

## 5. TEŽAVE PRI VREDNOTENJU CDO-JEV

### 5.1. Občutljivost mezzanine tranše na koreliranost propadov.

Pri vrednotenju CDO-jev je glavni problem občutljivost mezzanine tranše na korelacijo med propadi. Poglejmo naslednji primer: imamo CDO, ki je vezan na 125

obveznic z enoletnim časom dospelja. Vsaka obveznica plača kupon ene enote, znesek pa je potem razdeljen med imetnike tranš. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da če obveznica propade, je nič ne nadomesti.

Radi bi vrednotili prve tri (najbolj tvegane) CDO tranše, imenujmo jih senior, mezzanine in equity. Equity tranša je izpostavljena prvim trem propadom obveznic, mezzanine naslednjim trem, senior tranša pa dobi manj kuponov, če propade vsaj 6 obveznic. Predpostavimo še, da je verjetnost propada vsake obveznice v času enega leta fiksna in da so korelacijski koeficienti enaki za vsak par dogodkov propada obveznic. Izračunajmo pričakovano škodo v vsaki tranši ob koncu leta.

Zapišemo zaporedoma pričakovane škode tranš, kjer so  $P_1 = P[k \text{ obveznic propade do konca leta}]$ ,  $P_2 = P[k+3 \text{ obveznic propade do konca leta}]$  in  $P_3 = P[k+6 \text{ obveznic propade do konca leta}]$ :

- pričakovana škoda equity tranše:

$$\sum_{k=1}^3 k \cdot P_1$$

- pričakovana škoda mezzanine tranše:

$$\sum_{k=1}^3 (k+3) \cdot P_2$$

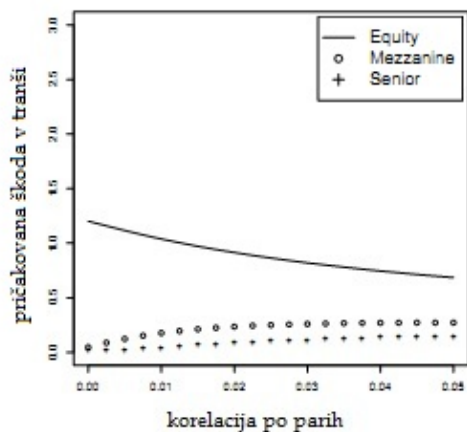
- pričakovana škoda senior tranše:

$$\sum_{k=1}^3 (k+6) \cdot P_3$$

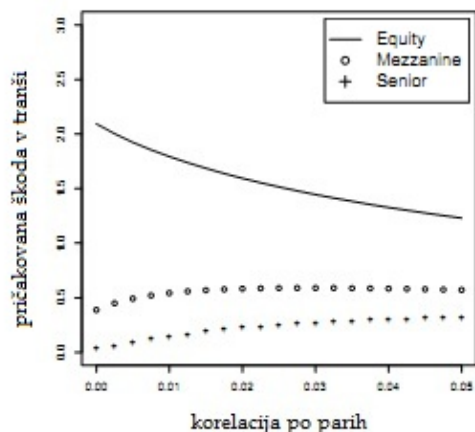
Na Sliki 4 so grafi pričakovanih škod glede na tranše v odvisnosti od korelacije po parih pri različnih individualnih verjetnostih propada. Vidimo, da se pričakovana škoda v equity tranši s povečevanjem korelacije po parih zmanjšuje, pri večji individualni verjetnosti propada pa krivulja bolj strmo pada. Razlog za to je ta, da ko koreliranost naraste, je bolj verjetno, ali da veliko obveznic propade ali pa da veliko obveznic ne propade in ker kakršnikoli propadi povzročijo izgubo v equity tranši, povečanje verjetnosti, da se ne bo zgodilo veliko propadov, zmanjša pričakovano izgubo equity tranše. Pri senior tranši opazimo ravno nasprotno; s povečanjem medsebojne koreliranosti se pričakovana škoda v tranši poveča, saj mora več kot 6 obveznic propasti, preden senior tranša utрпи izgubo. Povečanje koreliranosti zato poveča verjetnost, da bo več obveznic propadlo in to povzroči povečanje pričakovane škode v senior tranši.

Za mezzanine tranšo pa ne moremo povedati nič specifičnega. Na prvem grafu Slika 4(a) krivulja narašča, pri povečani individualni verjetnosti propada v četrtem grafu Slika 4(d) pa krivulja pada. Torej ne moremo izluščiti nekega splošnega pravila odvisnosti pričakovane škode v mezzanine tranši glede na korelacijo obveznic po parih. Dan primer kaže na slabosti in pomanjkljivosti pri vrednotenju CDO-jev zaradi občutljivosti mezzanine tranše na korelacijo propadov, ki se odražajo v nenančnostih ocen. Če pomislimo na velikost trga CDO-jev in do kolikšnih napak pride pri takem volumnu, se zavemo, da je kreditna kriza morala slej ko prej izbruhniti.

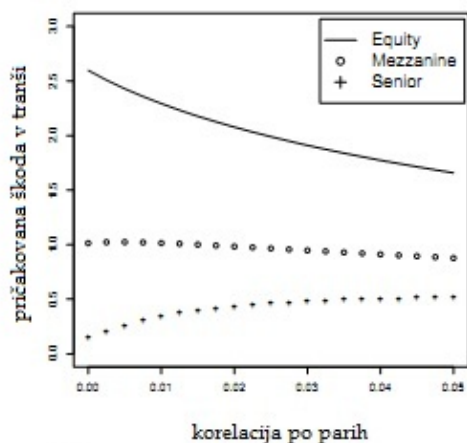




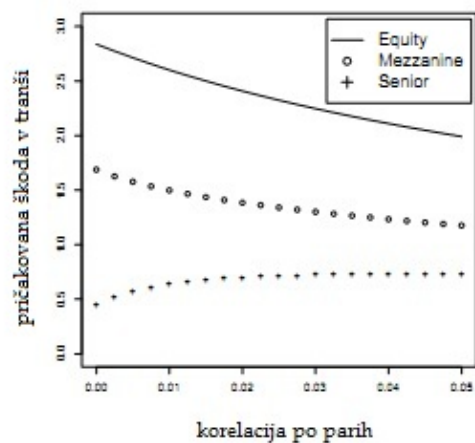
a) individualna verjetnost propada je 1%



b) individualna verjetnost propada je 2%



c) individualna verjetnost propada je 3%



d) individualna verjetnost propada je 4%

SLIKA 4. Pričakovana škoda CDO-ja, ki se nanaša na 125 obveznic. Korelacijski koeficienti med vsakim parom so enaki. Črta označuje pričakovano škodo v equity tranši (0 - 3 enote v nevarnosti), krogi pričakovano škodo v mezzanine tranši (3 - 6 enot v nevarnosti), križi pri pričakovano škodo v senior tranši (6 - 9 enot v nevarnosti)

## 5.2. CDO-squared (dvakratni CDO).

CDO-squared (dvojni CDO) je finančni instrument, v osnovi CDO, ki se nanaša na košarico CDO tranš. Te so ponavadi mezzanine tranše, saj jih je najtežje prodati. Namreč, za veliko investitorjev so preveč tvegane, saj je njihova bonitetna ocena pogosto BBB, za nekatere (npr. hedge sklade) pa premalo tvegane, ti raje trgujejo s CDO-ji equity tranše. Kot navaden CDO je tudi CDO-squared lahko razdeljen na tranše.

Vrednotenje CDO-squared je zelo zahtevno, saj kot smo videli v zgornjem primeru, do težav pride prav pri mezzanine tranši. CDO-squared pa vsebuje kar od 150-200 mezzanine tranš v portfelju, na katerega je vezan. Če predpostavimo, da je 150 mezzanine tranš v tem portfelju in je vsaka od mezzanine tranš vezana na portfelj 150 obveznic, potem to pomeni, da imamo skupaj kar 22.500 obveznic. Veliko jih

je sicer istih. Ali torej lahko sploh korektno in natančno ocenimo vrednost tega finančnega instrumenta? Težava, ki se tudi pojavlja, je ta, da so že pogodbe za vsako mezzanine tranšo posebej dolge okoli 150 strani, to pomeni 22.500 strani pogodbe za CDO-squared. Posledica tega je izguba preglednosti, jasnosti in informiranosti. Tudi programiranje prikaza denarnih tokov je zahtevno in dolgotrajno, zato lahko hitro pride do napak. Obstaja torej vrsta sistemskih faktorjev, ki vplivajo na vrednost CDO-squared, zato je korektno vrednotenje vprašljivo.

Z razvojem trga CDO-squared se je tudi razširil prostor za moralni hazard. Namreč, z združevanjem CDO-jev v nov CDO se je še podaljšala veriga od prvotnih prodajalcev osnovnih finančnih instrumentov (npr. hipotekarnih) do kupcev. Na tem mestu naj še omenim tudi nastanek CDO-cubed, to je CDO, vezan na košarico CDO-squared mezzanine tranš.

Tveganje, ki ga s takim operiranjem dosežemo, je ogromno. Finančna industrija je hlepela po velikih zasluškah in premalo regulacije je pripeljalo do krize, v kateri smo. Torej glavni problem niti ni model, ki se uporablja pri obvladovanju tveganja, temveč miselnost in struktura trga, ki je dovoljevala proizvajanje takih nesmiselnih finančnih instrumentov v tolikšnem obsegu.

## 6. MARSHALL-OLKINOVA KOPULA

Predstavila bom Marshall-Olkinovo kopulo, ki v nasprotju z Gaussovo kaže odvisnost zgornjega repa. Najprej bom opisala bivariatno, nato pa n-dimenzionalen primer. Sledi analiza uporabnosti Marshall-Olkinove kopule v modeliranju tveganja, kjer so šoki odvisni med sabo. To poglavje je povzeto po [7].

### 6.1. Bivariatna Marshall-Olkinova kopula.

Imejmo sistem dveh komponent, ki je podvržen šokom, ti pa so usodni za eno ali obe komponenti. Naj bosta  $X_1$  in  $X_2$  njuna preživetvena časa. Nadalje predpostavimo, da šoki tvorijo tri neodvisne Poissonove procese s parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12} \geq 0$ , kjer indeks označuje, ali šoki vplivajo samo na prvo, drugo ali obe komponenti. Potem so prvi časi šokov  $Z_1, Z_2, Z_{12}$  neodvisne eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke s parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$ . Ob času  $Z_1$  propade prva, ob času  $Z_2$  druga, ob času  $Z_{12}$  pa obe komponenti.

Bivariatna preživetvena funkcija je potem:

$$\bar{H}(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = P(Z_1 > x_1)P(Z_2 > x_2)P(Z_{12} > \max\{x_1, x_2\}).$$

Univariatni preživetveni funkciji  $X_1$  in  $X_2$  sta enaki:

$$\bar{F}_1(x_1) = P(X_1 > x_1) = P(Z_1 > x_1)P(Z_{12} > x_1) = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_1)$$

in

$$\bar{F}_2(x_2) = P(X_2 > x_2) = P(Z_2 > x_2)P(Z_{12} > x_2) = \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{12})x_2).$$

Ker je

$$\max(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \min\{x_1, x_2\},$$

je

$$\bar{H}(x_1, x_2) = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_1 - (\lambda_2 + \lambda_{12})x_2 + \lambda_{12} \min\{x_1, x_2\})$$

$$= \bar{F}_1(x_1)\bar{F}_2(x_2) \min\{\exp(\lambda_{12}x_1), \exp(\lambda_{12}, x_2)\}.$$

Naj bosta  $\alpha_1 = \lambda_{12}/(\lambda_1 + \lambda_{12})$  in  $\alpha_2 = \lambda_{12}/(\lambda_2 + \lambda_{12})$ . Potem je  $\exp(\lambda_{12}x_1) = \bar{F}_1(x_1)^{-\alpha_1}$  in  $\exp(\lambda_{12}x_2) = \bar{F}_2(x_2)^{-\alpha_2}$ . Sledi, da je preživetvena kopula slučajnega vektorja  $(X_1, X_2)^T$  pri  $u_1 = \bar{F}_1(x_1)$  in  $u_2 = \bar{F}_2(x_2)$  podana s formulo

$$\begin{aligned} \hat{C}(u_1, u_2) &= u_1 u_2 \min\{u_1^{-\alpha_1}, u_2^{-\alpha_2}\} = \min\{u_1^{1-\alpha_1} u_2, u_1 u_2^{1-\alpha_2}\} = \\ &= \begin{cases} u_1^{1-\alpha_1} u_2, & u_1^{\alpha_1} \geq u_2^{\alpha_2}, \\ u_1 u_2^{1-\alpha_2}, & u_1^{\alpha_1} \leq u_2^{\alpha_2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ta družina je znana kot Marshall-Olkinova družina. Komponente kopule te vrste so absolutno zvezne in singularne. Ker je

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{\alpha_1, \alpha_2}(u_1, u_2) &= \\ &= \begin{cases} u_1^{-\alpha_1}, & u_1^{\alpha_1} > u_2^{\alpha_2}, \\ u_2^{-\alpha_2}, & u_1^{\alpha_1} < u_2^{\alpha_2}, \end{cases} \end{aligned}$$

in je

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1, u_2) du_1 du_2 < 1,$$

vidimo da obstaja singularna komponenta, katere gostota je zbrana na krivulji  $u_1^{\alpha_1} = u_2^{\alpha_2}$  v  $[0, 1]^2$ . To prikazuje slika 5.

Koeficient odvisnosti zgornjega repa je po viru [7] enak  $\lambda_u = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$ , torej Marshall-Olkinove kopule kažejo odvisnost zgornjega repa.

## 6.2. Multivariatna Marshall-Olkinova kopula.

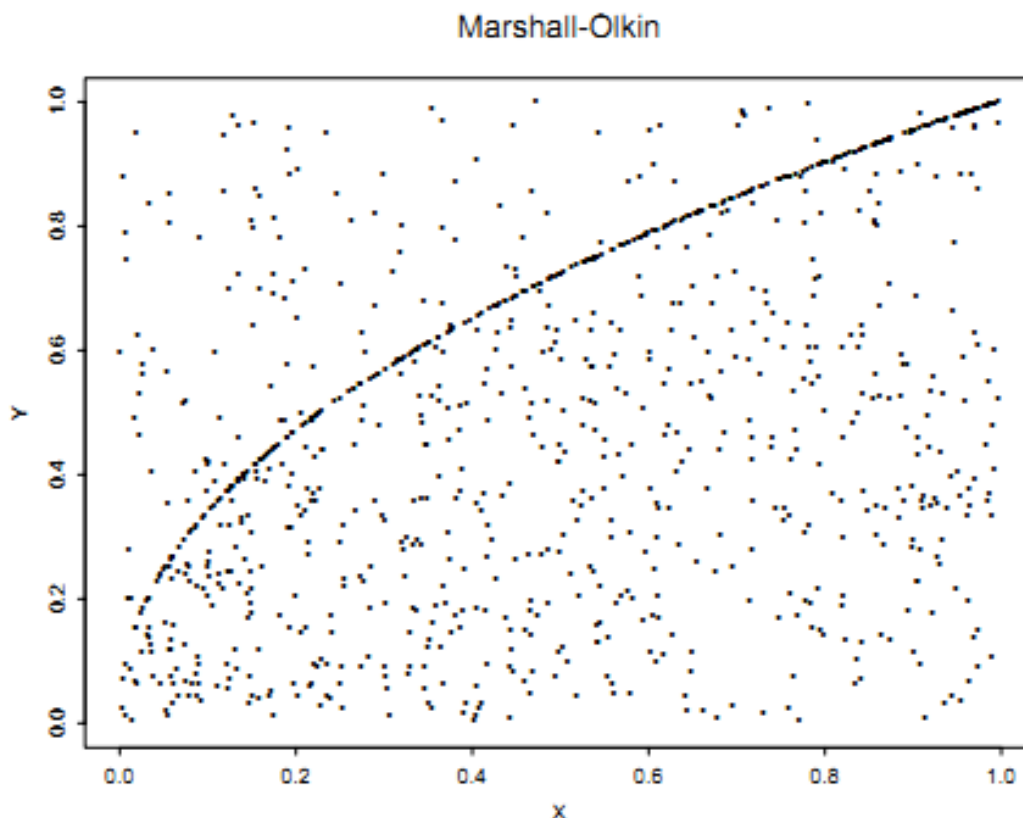
Zdaj bom predstavila multivariatno razširitev bivariatne družine Marshall - Olkinovih kopul. Imejmo sistem z  $n$  komponentami, kjer je vsaki neprazni množici komponent dodeljen šok, ki je usoden za vse komponente te množice. Naj bo  $S$  množica nepraznih podmnožic  $\{1, \dots, n\}$ ,  $X_1, \dots, X_n$  pa preživeteni časi komponent. Predpostavimo, da so šoki, ki ogrožajo različne množice  $s, s \in S$ , neodvisni Poissonovi procesi z intenzivnostjo  $\lambda_s$ . Naj bo  $Z_s, s \in S$ , čas prvega pojava šoka v procesu šokov, ki ogrožajo množico  $s$ . Potem so časi dogodkov  $Z_s$  neodvisne eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke s parametri  $\lambda_s$  in velja enakost  $X_j = \min\{Z_s, j \in s\}$  za  $j = 1, \dots, n$ .

Vseh procesov šokov je  $2^n - 1$ , saj je vsak dodeljen eni od nepraznih podmnožic množice  $\{1, \dots, n\}$ .

**Primer 6.1.** Naj bo  $n=4$ . Potem je

$$\begin{aligned} X_1 &= \min\{Z_1, Z_{12}, Z_{13}, Z_{14}, Z_{123}, Z_{124}, Z_{134}, Z_{1234}\} \\ X_2 &= \min\{Z_2, Z_{12}, Z_{23}, Z_{24}, Z_{123}, Z_{124}, Z_{234}, Z_{1234}\} \\ X_3 &= \min\{Z_3, Z_{13}, Z_{23}, Z_{34}, Z_{123}, Z_{234}, Z_{134}, Z_{1234}\} \\ X_4 &= \min\{Z_4, Z_{14}, Z_{24}, Z_{34}, Z_{124}, Z_{134}, Z_{234}, Z_{1234}\} \end{aligned}$$

Če je npr.  $\lambda_{13} = 0$ , potem je  $Z_{13} = \infty$  skoraj gotovo.



SLIKA 5. Simulacija Marshall-Olkinove kopule z  $\lambda_1 = 1.1$ ,  $\lambda_2 = 0.2$  in  $\lambda_{12} = 0.6$ .

Nadaljujmo z Marshall-Olkinovo  $n$ -kopulo.  $l := |S| = 2^n - 1$  nepraznih podmnožic množice  $\{1, \dots, n\}$  oštevilčimo s  $s_1, \dots, s_l$  in naj bo  $\lambda_k = \lambda_{s_k}$  (parameter toka  $Z_{s_k}$ ) za  $k = 1, \dots, l$ . Naslednji algoritem generira slučajni vektor iz Marshall-Olkinove  $n$ -kopule.

#### Algoritem

- Generiraj slučajni vzorec  $(v_1, \dots, v_l)$  velikosti  $l$ , porojen iz enakomerne porazdelitve na intervalu  $(0, 1)$
- $x_i$  naj bo enak  $\min_{1 \leq k \leq l, i \in s_k, \lambda_k \neq 0} (-\ln v_k / \lambda_k)$ , za  $i = 1, \dots, n$ .
- $\Lambda_i$  naj bo  $\sum_{k=1}^l 1\{i \in s_k\} \lambda_k$ , za  $i = 1, \dots, n$ .
- $u_i$  naj bo  $\exp(-\Lambda_i x_i)$ , za  $i = 1, \dots, n$ .

Potem je  $(x_1, \dots, x_n)^T$   $n$ -dimenzionalen vektor iz  $n$ -dimenzionalne Marshall-Olkinove porazdelitve,  $(u_1, \dots, u_n)^T$  pa  $n$ -dimenzionalen vektor iz pripadajoče Marshall-Olkinove  $n$ -kopule.  $\Lambda_i$  je intenzivnost skupnega šoka, ki ga doživi komponenta  $i$ .

### 6.3. Uporaba.

Za modeliranje z Marshall-Olkinovo kopulo potrebujemo pri velikem številu komponent ogromno parametrov, zato so neprivlačne za modeliranje tveganja v takih

primerih. Kljub temu podajam primer, kako je možno zgraditi enostaven model, kjer za preživetveno kopulo časov prvih izgub uporabimo Marshall-Olkinovo kopulo.

Recimo, da nas zanima iguba zavarovalnice, ki posluje v več različnih državah. Naraven pristop k modeliranju odvisnosti med poslovalnicami je, da predpostavimo, da so vse škode povezane s serijo procesov šokov, ki jih ogrožajo. V zavarovalništvu so ti šoki npr. naravne katastrofe, velja pa tudi, da šoki povzročajo različne vrste škode. Zaradi lažje analize pogosto predpostavljamo, da so šoki neodvisni Poissonovi procesi. V praksi poznamo modele usodnih in neusodnih šokov, odvisno od tega, ali obstaja možnost, da komponente preživijo šok ali ne.

Imejmo  $m$  različnih vrst šokov in za  $e = 1, \dots, m$  naj bo  $\{N^{(e)}(t), t \geq 0\}$  Poissonov proces z intenzivnostjo  $\lambda^{(e)}$ , ki šteje število šokov vrste  $e$  do časa  $t$ . Predpostavimo, da so ti procesi med seboj neodvisni. Imejmo škode  $n$  različnih vrst in za  $j = 1, \dots, n$  naj bo  $\{N_j(t), t \geq 0\}$  proces štetja, ki šteje število izgub  $j$ -tega tipa do časa  $t$ . Ko se dogodek tipa  $e$  zgodi  $r$ -tič, nam Bernoullijeva slučajna spremenljivka  $I_{j,r}^{(e)}$  pove, ali se je zgodila škoda tipa  $j$ . Vektorji

$$\mathbf{I}_r^{(e)} = (I_{1,r}^{(e)}, \dots, I_{n,r}^{(e)})^T$$

so za  $r = 1, \dots, N^{(e)}(t)$  neodvisni in enako porazdeljeni multivariatno Bernoullijevo. Drugače povedano, vsak nov dogodek predstavlja novo priložnost za škodo, neodvisno od prejšnjih, vendar če gledamo konkreten dogodek, so lahko škode različnih vrst med seboj odvisne. Oblika odvisnosti je odvisna od podrobnejše opredelitve multivariatne Bernoullijeve porazdelitve.

Za  $p$ -dimenzionalno robno verjetnost bomo uporabili naslednjo notacijo (zaradi poenostavitve spustimo podpisan  $r$ ):

$$P(I_{j_1}^{(e)} = i_{j_1}, \dots, I_{j_p}^{(e)} = i_{j_p}) = p_{j_1, \dots, j_p}(i_{j_1}, \dots, i_{j_p}), i_{j_1}, \dots, i_{j_p} \in \{0, 1\}.$$

S  $p_j^{(e)}(1) = p_j^{(e)}$  označimo enodimenzionalne robne verjetnosti.

Procesi štetja za dogodke in škode so tako povezani s formulo:

$$N_j(T) = \sum_{e=1}^m \sum_{r=1}^{N^{(e)}(T)} I_{j,r}^{(e)}.$$

Zaradi predpostavke, da so šoki Poissonovi procesi in indikatorji škode Bernoullijeve slučajne spremenljivke, so škodni procesi  $\{N_j(t), t \geq 0\}$  očitno tudi Poissonovi, saj so dobljeni preko superpozicije  $m$  neodvisnih (lahko zredčenih) Poissonovih procesov, generiranih z  $m$  procesi šokov. Na slučajni vektor  $(N_1(t), \dots, N_n(t))^T$  lahko gledamo, kot da imamo multivariatno Poissonovo porazdelitev.

Predstavljen neusoden model šokov lahko priredimo tudi v usodnega, saj ima slučajni vektor  $(X_1, \dots, X_n)^T$  časov prvih škod različnih vrst, kjer je  $X_j = \inf\{t \leq 0 | N_j(t) > 0\}$ ,  $n$ -dimenzionalno Marshall-Olkinovo porazdelitev, njegova preživetvena kopula pa je Marshall-Olkinova  $n$ -kopula.

## 7. PRIMERA NEPRIMERNEGA UPRAVLJANJA S TVEGANJEM

Obravnavala bom dva primera neprimernega upravljanja s tveganjem. Prvi je primer zavarovalniškega podjetja AIG (American International Group), ki ga je država rešila pred skorajšnjim bankrotom septembra leta 2008 zaradi portfelja, polnega CDS-jev. Drugi primer sem že omenila v poglavju o dejavnikih finančne krize in sicer primer Fannie Mae in Freddie Maca.

### 7.1. AIG.

AIG je zavarovalniško podjetje, ki je pred letom 2008 zaposlovalo 100.000 ljudi. Kriza ga je tako prizadela, da se je število zaposlenih zmanjšalo na 400. (Podatek za leto 2011 je 57.000 zaposlenih.) Razlog za to je bilo nepravilno upravljanje s tveganjem, čemur je sledilo pomanjkanje denarja.

Družba AIG je razširjena v 130 državah po svetu, polovico njenih dohodkov pa izvira iz poslovanja v ZDA. Ob koncu leta 2007 je njeno premoženje znašalo 1.000 milijard ameriških dolarjev, za primerjavo, to je malo manj kot polovica BDP-ja Francije. Čeprav je bil zavarovalniški sektor dobro reguliran, je bila AIG leta 2008 na robu bankrota.

AIG je ustanovila dve hčerinski družbi, AIG Financial Products Corp in AIG Trading Group, Inc, skupaj imenovani kot AIGFP, kot podružnici, ki sta poslovali s CDS-i. Zagotavljala je kritje vseh njunih obveznosti. AIGFP je v glavnem prodajala zaščito super-senior tranš CDO-jev, kjer je bil referenčen portfelj sestavljen iz posojil, dolniških in s sredstvi oziroma hipotekami zavarovanih finančnih instrumentov. Super-senior tranše kotirajo nad tranšami z bonitetno oceno AAA, ker so manj tvegane. Podjetje AIGFP je na dobiček od poslovanja s CDS-i gledalo kot na lahko zaslužen denar, ker so predvidevali, da CDO-ji super-senior tranše praktično ne morejo propasti. Do 5. marca 2009, kot poroča AIG-jev glavni regulator, ni bilo nobenih kreditnih izgub (zaradi bankrotov ali propadov) od poslovanja s CDS-i, vezanih na CDO-je super-senior tranše. Kljub temu pa sta se AIGFP in tudi AIG izpostavili še drugim tveganjem z možnimi večjimi finančnimi posledicami.

Kot sem že omenila, je kupec CDS-a izpostavljen tveganju, da prodajalec ne bo mogel izplačati dogovorjene vsote v primeru kreditnega dogodka, hkrati pa kupec mogoče ne bo mogel plačevati dogovorjenih premij. Zato morata pogosto obe strani položiti neko kritje na poravnalne račune.

Ob koncu leta 2007 je bila neto vsota CDS-ov, ki jih je AIGFP prodala, 527 milijard dolarjev. Večina teh je bila prodana pred letom 2006. Za 379 milijard dolarjev CDS-ov je bilo prodanih evropskim bankam kot regulatorna kapitalska olajšava, takim CDS-jem pravimo CDS-i regulatornega kapitala. Vezani so na sredstva, kot so posojila podjetjem in stanovanjske hipoteke. S tem, ko so banke kupile CDS-e od AIGFP, so prenesle kreditno tveganje zaradi posojil na AIGFP. Do 2005 je bila AIG ocenjena z bonitetno oceno AAA in je v celoti garantirala za svojo podružnico AIGFP, med drugim tudi zato ni bilo nujno, da bi držala celotno vrednost evropskega regulatornega kapitala. Ostal del CDS-ov, ki jih je prodala AIGFP, je bil razdeljen med tiste, ki so bili vezani na dolgove podjetij in pa tiste, s portfeljem iz CDO-jev multi-sector. CDO multi sektorja je CDO, kjer je referenčni portfelj sestavljen iz hipotekarnih posojil, komercialnih hipotek, posojil (tudi npr. avtomobilskih)... AIG je prodala zaščito večino super-senior tranš teh CDO-jev. Žal pa je večina CDO-jev multi-sektorja, ki so bili zbrani v portfelju prodanih CDS-ov, temeljila na stanovanjskih finančnih instrumentih, zavarovanih s hipotekami, med temi pa je bilo

veliko nekvalitetnih hipotekarnih posojil (okoli 50%). Do leta 2005 so nehali izdajati takšne CDS-je, saj so predvidevali negativne spremembe.

V sredini leta 2008 se je povečalo število bankrotov oziroma propadov posojilojemalcev nekvalitetnih hipotekarnih posojil. Posledica tega je bila izguba 31,1 milijard dolarjev v letu 2007 in do septembra leta 2008. Zaradi padca vrednosti CDO-jev, na katere so bili vezani prodani CDS-i, je morala AIGFP dodajati čedalje več kritja, med 1. julijem 2008 in 31. avgustom 2008 je položila kar 6 milijard dolarjev. To je predstavljalo 34 % denarja, ki ga je AIG imela v gotovini (in instrumentih z isto likvidnostjo). Na sliki 6 vidimo položena kritja za portfelj super-senior tranše CDS-ov. Opazimo, da je količina kritja za CDO multi-sektorja, na katere so vezani CDS-i, zelo narasla do 30. septembra 2008, ta številka predstavlja kar 95% vsega položenega kritja.

AIG je imela v tistem času program posojanja finančnih instrumentov, in sicer: posodili so finančne instrumente v zameno za gotovino, ki je predstavljala 102% poštene vrednosti finančnega instrumenta. To gotovino je AIG vlagala v finančne instrumente z dolgoročno dospelostjo, še posebej v take, zavarovane s stanovanjskimi hipotekarnimi posojili z bonitetno oceno AAA. Ko so v letu 2008 posojilojemalci izvedeli za težave AIG, so zahtevali svoje kritje nazaj v zameno za finančne instrumente. Od 12. do 30. septembra 2008 so zahtevali kar 24 milijard dolarjev v gotovini. V tem času je vrednost finančnih instrumentov, vezanih na hipotekarna posojila, padla, in postali so tudi nelikvidni. Posledica tega je bila, da program posojanja finančnih instrumentov ni imel dovolj denarja, da bi plačal kritje, ki ga je dobil v zameno za posojanje. Zato ga je morala AIG podpreti z milijardami dolarjev gotovine.

Na začetku septembra 2008 AIG ni mogla dobiti dodatnega kapitala zaradi nenadne nelikvidnosti na trgih, zato so ji znižali bonitetno oceno, zaradi česa je morala ponovno položiti kritje v višini 20 milijard dolarjev. 16. septembra je Federal Reserve Board oznanila, da bodo posodili 85 milijard dolarjev AIG, da njene težave ne bi preveč vplivale na celotno ekonomijo, AIG pa je lahko svoje posle opravljala naprej. Ko je novembra kazalo na ponovno znižanje bonitetne ocene, kar bi vodilo k ponovnim klicem glede poravnalnega računa in verjetno tudi h kolapsu AIG, je Federal Reserve Board oznanila dodatno pomoč AIG. Izguba AIG v letu 2008 je znašala okoli 99 milijard dolarjev, pomoč, ki jo je ZDA nudila AIG, pa je približno velikosti 1% BDP-ja ZDA, to je bila največja pomoč kateremukoli podjetju v času krize.

Vrsta CDS-a	Nominalni znesek	Položeno kritje			
		Dec 31 2007	Mar 31 2008	Jun 30 2008	Sep 30 2008
	\$ Milijonov	\$ Milijonov			
<b>Regulatorni kapital</b>	379,000	0	212	319	443
<b>Posojila podjetjem</b>	70,000	161	368	259	902
<b>CDO multi-sektorja</b>	78,000	2,718	7,590	13,241	31,469
<b>SKUPNO</b>	527,000	2,879	8,170	13,819	32,814

SLIKA 6. Položeno kritje AIG na poravnalne račune glede na tri vrste CDS-ov

Analiza dogajanja kaže na neprimerno upravljanje s tveganjem v podjetju AIG.

Največja napaka je bilo veliko podcenjevanje tveganja super-senior tranš CDO-jev multi-sektorja. Le redka podjetja so uporabljala modele za ugotavljanje izpostavljenosti tveganju pri trgovanju s temi CDO-ji. Podjetje AIG med drugim ni modeliralo likvidnostnega tveganja, ki je bilo prisotno pri trgovanju s CDS-i. Ob začetku krize bi morali hitro ukrepati, da bi se izognili velikim položenim kritjem na poravnalnih računih, vendar pa tega zaradi težav z likvidnostjo niso bili zmožni. Ob koncu leta 2007 pa je bilo tako reševanje že zelo drago.

## 7.2. Freddie Mac in Fannie Mae.

Freddie Mac (Federal Home Loan Mortgage Corporation, ustanovljena 1970) in Fannie Mae (Federal National Mortgage Association, ustanovljena med veliko depresijo leta 1938) sta bili do 7. septembra 2008 vladno sponzorirani delniški družbi. Njun namen je bil spodbujanje likvidnosti na hipotekarnem trgu in omogočanje posojil tudi revnejšim. Preko procesa sekuritizacije sta podjetji kupovali hipoteke, ki so izpolnjevale določene pogoje, jih zbrali v košarice finančnih instrumentov, zavarovanih s hipotekami in jih prodali naprej investitorjem.

Vlada ni bila odgovorna za ravnanje podjetij, a vseeno so se investitorji zanašali na pomoč vlade v primeru finančnih težav. Vendar pa sta lahko instituciji zaradi vladnega sponzorstva uživali dovoljeno neplačevanje davkov, poleg tega jima ni bilo treba registrirati finančnih instrumentov pri komisiji za vrednostne papirje in borze (SEC). Tudi izposojali sta si lahko skoraj neomejeno ter po nižji obrestni meri, njune kreditne garancije pa so bile boljše ocenjene kot tiste popolnoma privatnih finančnih institucij. Koristi od tega so imeli tudi posojilojemalci, saj je tudi za njih veljala nižja obrestna mera in večja dostopnost kreditov. Vse to je omogočalo hiter vzpon obeh institucij in dominacijo na sekundarnem trgu hipotek, s katerimi je bilo dovoljeno trgovati in prepričanje investitorjev, da sta "too big to fail".

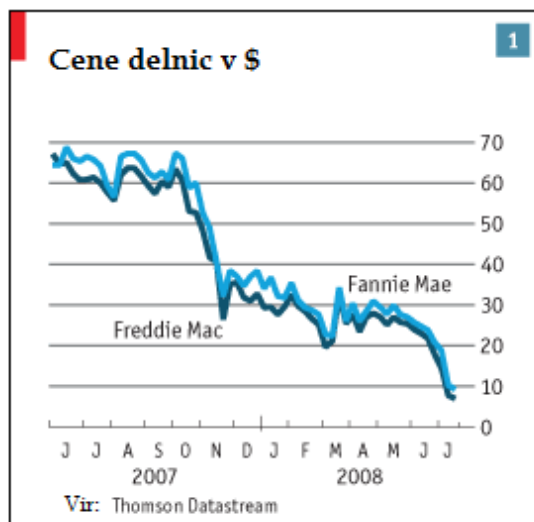
Večino let sta imeli instituciji veliko dobička. Ko pa je prišlo do krize na hipotekarnem trgu, do padca vrednosti in zaplemb nepremičnin, sta utrpeli veliko izgubo. Razlog so bila nekvalitetna posojila in vrednostni papirji privatnih podjetij, ki niso bila v vladni lasti. Zaradi tega sta izgubili pravico do zadolževanja po nizki obrestni meri in zaupanje investitorjev. 7. septembra 2008 je vlada prevzela GSE (government-sponsored enterprise), kamor sta spadali tudi podjetji Fannie Mae in Freddie Mac, da bi okrepila njuno finančno moč in ju ohranila solventni. Garantirala je popolno kritje vseh obveznosti, ki bi jih poplačevala preko kupovanja delnic.

Instituciji sta tako lahko nadaljevali s poslovanjem, medtem ko so privatne finančne institucije propadale. Tako sta imeli leta 2009 v lasti kar polovico hipotek v ZDA.

Glavni razlog za težave teh dveh institucij so bila izdana nekvalitetna posojila. Z rastjo in povečevanjem izdajanja hipotek sta izgubili zmožnost opazovanja in kontrole posojilojemalcev. Tudi konkurenca med GSE in privatnimi institucijami je vplivala na to, da so pogoji za pridobitev kreditov postajali čedalje manj strogi. Niso se zavedali resnosti hipotekarnega in likvidnostnega tveganja, niti niso predvidevali, da bi lahko prišlo do takega povečanja brezposelnosti in posledično neplačevanja hipotek.

V prihodnosti lahko pričakujemo prestrukturiranje teh dveh podjetij. Smiselne so večje obrestne mere na hipoteke in več kratkoročnih hipotek (možno je bilo dobiti





SLIKA 7. Padanje cene delnic Freddie Maca in Fannie Mae

30-letna posojila, kar npr. v Evropi ni prav pogosto). Pričakovati je tudi zamrznitev trga v primeru nove finančne krize.

## 8. ZAKLJUČEK

Visoka brezposelnost, finančne težave bank in vprašljiva prihodnost evra so le nekatere od drastičnih posledic trenutne finančne krize. Pri zlomu bank na Wall Streetu, med katerimi je najbolj znan propad Lehman Brothers 15. septembra 2008, je Li-jeva formula igrala veliko vlogo.

Pet let je Gaussova kopula delovala kot nedvoumno pozitivna iznajdba, ki je omogočala enostavnejše in točnejše modeliranje izjemno kompleksnih tveganj kot kadarkoli prej. Trgovci so lahko začeli prodajati velike količine novih vrednostnih papirjev, kar je povzročilo hitro razširjanje finančnih trgov. Vendar pa je bila formula napačno in pre pogosto uporabljena. Veliko akademikov je opozarjalo na pomankljivosti, še posebej na asimptotično neodvisnost slučajnih spremenljivk in posledično neprimerno modeliranje v primeru ekstremnih dogodkov. Žal so njihove kritike priletele na neplodna tla.

Kakorkoli, kopule so zelo splošno orodje za opisovanje strukture odvisnosti in kljub vlogi Gaussove v finančni krizi so bile večkrat uspešno uporabljene. Uporaba kopul je močno izboljšala modeliranje odvisnosti v praksi. V primerjavi z npr. linearno korelacijo izključuje tipične pasti in je zato modeliranje z njimi matematično konsistentno. Tudi raznolikost drugih možnih struktur odvisnosti, ki jih je možno uporabiti, je posledično narastla. Kot pokazano pa bi bilo bolje uporabljati kakšno drugo kopulo, npr. Gumbelovo, saj nima lastnosti asimptotske neodvisnosti in je zato primernejša za modeliranje ekstremnih dogodkov.

Omenila bom še nekaj drugih pristopov k vrednotenju CDO-jev in drugih vrednostnih papirjev. Na splošno delimo modele na dva glavna razreda: strukturne in modele stopnje nevarnosti. Strukturni pristop modelira propad preko dinamike vrednosti podjetja in je osnovan na delu Mertona (1974). Glavna ideja je, da do propada pride, če vrednost premoženja pade pod znesek obveznosti. Enofaktorski model Gaussove kopule je primer takšnega modela, sem spadajo tudi CreditMetrics in KMV model. Modeli stopnje nevarnosti pa poskušajo modelirati infinitezimalno verjetnost propada, za katerega predpostavljajo, da je nek eksogen proces, ki ni odvisen od podjetja. Najbolj znan od takih je CreditRisk+, predstavljen leta 1997.

Za različne vrednostne papirje uporabljajo različne tehnike vrednotenja. Gaussova kopula je bila prisotna predvsem pri ocenjevanju vrednosti sintetičnih CDO-jev, medtem ko so pri denarnih CDO-jih aplicirali metodo Monte Carlo. Bonitetne agencije so uporabljale še precej enostavnejše modele in manjkrat analizirale scenarije z ekstremnimi dogodki.

Odgovor na sedanjo krizo predvidoma ne bodo novi enostavni modeli, temveč so potrebne zahtevne kvantitativne tehnike, boljši modeli, predvsem pa večje zanimanje in razumevanje ljudi v finančnem svetu, kakšne so omejitve in predpostavke modelov, ki jih uporabljajo.

## LITERATURA

- [1] C. Donnelly in P. Embrechts, *The devil is in the tails: actuarial mathematics and the subprime mortgage crisis*, ASTIN Bulletin **40(1)** (2010) 1–33
- [2] D. Li, *On default correlation: a copula function approach*, Journal of Fixed Income **9(4)** (2000) 43–54
- [3] S. Jones, *Of couples and copulas: the formula that felled Wall St.*, Financial Times (24. 4. 2009)
- [4] S. Lohr, *Wall Street's math wizards forgot a few variables*, Journal of Fixed Income (12. 9. 2009)
- [5] F. Salmon, *Recipe for disaster: the formula that killed Wall Street*, Wired Magazine (23. 2. 2009)
- [6] The Economist, *Confessions of a risk manager*, (7. 8. 2008)
- [7] P. Embrechts, F. Lindskog in A. McNeil, *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Elsevier, (2003) 8. poglavje, 329–384
- [8] A. J. Schwartz, *Origins of the Financial Market Crisis of 2008*, [ogled 10. 8. 2012], dostopno na <http://www.cato.org/pubs/journal/cj29n1/cj29n1-2.pdf>.
- [9] The Congress of the United States, *Fannie Mae, Freddie Mac, and the Federal Role in the Secondary Mortgage Market*, [ogled 10. 8. 2012], dostopno na <http://www.cbo.gov/sites/default/files/cbofiles/ftpdocs/120xx/doc12032/12-23-fanniefreddie.pdf>.
- [10] *Synthetic CDO*, [ogled 10. 8. 2012], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Synthetic\\_CDO](http://en.wikipedia.org/wiki/Synthetic_CDO).
- [11] *Copula (probability theory)*, [ogled 10. 8. 2012], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Copula\\_\(probability\\_theory\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Copula_(probability_theory)).
- [12] *Credit default swap*, [ogled 10. 8. 2012], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Credit\\_default\\_swap](http://en.wikipedia.org/wiki/Credit_default_swap).
- [13] B. Schweizer in A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces*, Elsevier Science Publishing Co., 1983.
- [14] P. Embrechts, R. Frey in A. McNeil, *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques, Tools*, Princeton University Press (2005)