UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Špela Podgoršek

Numerične metode za vrednotenje življenjskih zavarovanj

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir

Ljubljana, 2013

IZJAVA

Podpisana Špela Podgoršek izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom Numerične metode za vrednotenje življenjskih zavarovanj izdelala samostojno pod mentorstvom prof. dr. Tomaža Koširja in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

V Ljubljani, dne 16. 12. 2013 Podpis........................

KAZALO

Slike

Program dela

V magistrskem delu predstavite modele za vrednotenje življenjskih zavarovanj na podlagi tržnih cen. Za osnovo uporabite članek D. Bauer, D. Bergmann, R. Kiesel, On the risk-neutral valuation of life insurance contracts with numerical methods in view.

V Ljubljani, 21. 09. 2013 prof. dr Tomaž Košir

Numerične metode za vrednotenje življenjskih zavarovanj

Povzetek

V zadnjih letih postaja v zavarovalnicah vse bolj priljubeljen pristop vrednotenja na osnovi tržnih cen. To je sprožilo veliko zanimanja tako pri izvajalcih kot tudi v akademskih krogih in posledično je bilo napisanih kar nekaj člankov na to temo. Glavna naloga mojega magistrskega dela je predstavitev in analiza treh numeričnih načinov za vrednotenje življenjskega zavarovanja. Samo delo je vsebinsko razdeljeno na štiri dele. V prvem delu definiramo pojme, ki jih bomo kasneje uporabili. V drugem delu predstavimo generičen model za vrednotenje življenjskih zavarovanj z vgrajeno opcijo. V tretjem delu sledi predstavitev numeričnih metod za vrednotenje, v zadnjem delu pa primerjava posameznih metod v modelu.

Numerical methods for valuation of life insurance contracts

Abstract

In recent years, market-consistent valuation approaches have gainged an increasing importance for life incurance companies. This has triggered a lot of interest among practitioners as well as in academics circles and, consequently, several articles on such valuation approaches have been written. The main topic of this thesis is a presentation and analysis of three numerical mathods for valuation of life insurance contracts. In the first part we define notions that will be used later. In the second part we present our generic model for the valuation of life insurance contracts with an embedded option. In the third part we decribe the numerical valuation approach and in the last part we compare each approach in the asset model.

Math. Subj. Class. (2013): 91G60, 62P05

Ključne besede: Življenjsko zavarovanje, odkupna opcija, Monte Carlo simulacija, PDE metoda, Monte Carlo metoda najmanjših kvadratov, Black - Scholesov model.

Keywords: Life insurance, surrender option, Monte Carlo simulation, PDE methods, Least-square Monte Carlo, Black - Scholes model.

1. Uvod

Leta 2001 je Evropska unija (EU) sprejela nov režim kapitalske ustreznosti zavarovalnic, Solventnost II, za pregled in razširitev prejšnjih zahtev solventnosti. Predvideva se, da bodo predpisi nove ureditve začeli veljati s 1. 1. 2016. Solventnost II je nov evropski sistem nadzora, katerega namen je nadzornim organom pri opravljanju nadzora nad poslovanjem zavarovalnic zagotoviti podlago za uporabo kvalitativnih in kvantitativnih orodij oziroma ukrepov za ocenjevanje kapitalske ustreznosti (po)zavarovalnic z zadostno točnostjo. Nov sistem bo bolj neposredno povezal kapital zavarovalnic z nepričakovanimi bodočimi dogodki v poslovanju, saj se bodo za bodoče dogodke oblikovale rezervacije. Glavni namen nove ureditve je vključitev ustreznega upravljenja s tveganji z metodami za vrednotenje na osnovi tržnih vrednosti. Za vrednotenje zavarovanj se torej uporabljajo metode, razvite za določanje opcijskih cen.

Leta 2004 je EU prevzela uredbo mednarodnega standarda računovodskega poročanja, MSRP 4, ki je prav tako povezana z vrednotenjem sredstev življenjskih zavarovalnic. Podjetja uporabljajo ta standard za zavarovalne pogodbe, ki jih izdajajo, in za pozavarovalne pogodbe, ki jih imajo sklenjene. MSRP 4 je le prva stopnja, ki vodi k kompleksnejši drugi stopnji, t.j. vrednotenje zavarovalnih pogodb po pošteni vrednosti.

Večina zavarovalnic še vedno uporablja preproste modele in Monte Carlo simulacijo za vrednotenje zavarovanj. Glavni vzrok je verjetno to, da so bili prevladujoči programi za vrednotenje (Moses, Prophet, ALM.IT) sprva zasnovani za deterministične napovedi zavarovateljevih računov in kasneje razširjeni za izvajanje Monte Carlo simulacij.

V tem delu bomo opisali problem vrednotenja za življenjske zavarovalnice. Osredotočili se bomo na vrednotenje zavarovalnih polic z odkupno opcijo. Medtem ko večina zavarovanj vsebuje tako opcijo, jo zavarovatelji pogosto ne upoštevajo niti v ceni zavarovanja in niti pri izračunih upravljanja s tveganjem (ang. risk management computations). Najprej bomo definirali nekaj osnovnih pojmov in navedli izreke, ki jih bomo kasneje uporabili. Osnovni pojmi so definirani v drugem poglavju. V tretjem poglavju bomo na kratko povzeli najpogostejše oblike življenjskih zavarovanj in predstavili generičen model za življenjska zavarovanja. V četrtem poglavju bomo predstavili tri numerične metode, s pomočjo katerih lahko vrednotimo življenjska zavarovanja. Izračune s temi numeričnimi metodami bomo primerjali v petem poglavju. Za model sredstev bomo vzeli Black - Scholesov model. Primerjali bomo rezultate in učinkovitost posameznih principov ter analizirali vpliv odkupne opcije za naš izbrani primer na nemškem zavarovalnem trgu. Nemški zavarovalni trg smo izbrali zato, ker imajo zakonsko določeno minimalno obrestno mero, čeasar pa v Sloveniji ni. Ker je več študij pokazalo, da Brownovo gibanje ne opiše vedno statističnih lastnosti podatkov finančnega trga, bomo predstavili še eksponentni Lévyjev model in primerjali rezultate iz obeh modelov.

2. Osnovni pojmi

Najprej definirajmo nekaj pojmov, ki jih bomo kasneje uporabili.

2.1. **Osnovni pojmi iz teorije mere, verjetnosti, slučajnih procesov in finančne matematike.**

Definicija 2.1. $\mathcal{F}$ je σ-algebra podmnožic dane množice Ω, če velja:
(1) $\Omega \in \mathcal{F}$,
(2) $\mathcal{F}$ je zaprta za komplementiranje: $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$,
(3) $\mathcal{F}$ je zaprta za števne unije: $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

V teoriji mere elemente σ-algebre $\mathcal{F}$ imenujemo merljive množice. Če je σ-algeber več, pa $\mathcal{F}$ merljive množice.

Definicija 2.2. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor s σ-algebro. Potem je mera μ na $\mathcal{F}$ funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ za katero velja: če je $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, disjunktna družina, potem je $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.
$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je merljiv prostor z mero μ.

Definicija 2.3. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ poljuben merljiv prostor. Mera ν na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je absolutno zvezna glede na mero μ, če za vsak $A \in \mathcal{F}$ velja

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0.$$

Meri μ in ν sta ekvivalentni, če sta medsebojno absolutno zvezni, t.j. če velja

$$\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0.$$

Definicija 2.4. Prostor z mero $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je verjetnostni prostor, če velja $\mu(\Omega) = 1$. V tem primeru meri pravimo verjetnostna mera oziroma verjetnost.

Definicija 2.5. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor, $\Lambda \neq \emptyset$ indeksna množica in naj bo (E, ξ) merljiv prostor. Slučajni proces, parametriziran z Λ, je družina slučajnih spremenljivk $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, kjer $X_\lambda : \Omega \to E$, za vsak $\lambda \in \Lambda$. Pri tem je (E, ξ) prostor stanj.

Običajno, ne pa nujno, je Λ bodisi $\mathbb{N}_0$, ko govorimo o procesih v diskretnem času, bodisi je $\Lambda = [0, \infty)$, ko govorimo o procesih v zveznem času. Če fiksiramo $\omega \in \Omega$, potem preslikavo $\Lambda \to E$ določeno z $\lambda \to X_\lambda(\omega)$ imenujemo trajektorija oziroma realizacija.

Definicija 2.6. Slučajni proces X s prostorom stanj $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ in indeksno množico $\Lambda = [0, \infty)$ ima neodvisne prirastke, če za vsak nabor $0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_k$ velja, da je slučajni vektor $(X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$ vektor neodvisnih slučajnih spremenljivk.

Definicija 2.7. Poces štetja je slučajni proces $N = (N_t)_{t \ge 0}$, pri katerem so trajektorije $t \mapsto N_t(\omega)$ odsekoma konstantne, nepadajoče in zvezne z desne z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$.

Pri danem procesu štetja $(N_t)_{t\geq 0}$ lahko definiramo zaporedje časov skokov kot:

$$S_1 = \inf\{t \geq 0, N_t \neq N_0\},$$
$$\vdots$$
$$S_{k+1} = \inf\{t \geq S_k, N_t \neq N_{S_k}\}.$$

Definicija 2.8. Naj bo $\rho : [0,\infty) \to (0,\infty)$ dana zvezna funkcija. Proces štetja $(N_t)_{t\geq 0}$, z $N_0 = 0$ in skoki velikosti 1, se imenuje nehomogen Poissonov proces s trenutno intenziteto $\rho(t)$, če velja, da ima $(N_t)_{t\geq 0}$ neodvisne prirastke in

$$\begin{aligned} P(N_{t+h} - N_t = 1) &= \rho(t)h + \mathcal{O}_1(h) \\ P(N_{t+h} - N_t \geq 2) &= \mathcal{O}_2(h). \end{aligned}$$

Pri tem mora veljati:

$$\begin{aligned} \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathcal{O}_1(h)}{h} &= 0 \text{ enakomerno za } t \in [0,T], \text{ za vsak } T > 0, \\ \lim_{h\downarrow 0} \frac{\mathcal{O}_2(h)}{h} &= 0 \text{ enakomerno za } t \in [0,T], \text{ za vsak } T > 0. \end{aligned}$$

Definicija 2.9. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor. Standardno Brownovo gibanje na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je proces $(W_t)_{t\geq 0}$ z lastnostmi:

(1) $W_0 = 0$ skoraj gotovo,
(2) za vsak $n \in \mathbb{N}$ in $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ so prirastki $(W_{t_i} - W_{t_{i-1}})_{i=1}^n$ neodvisni in porazdeljeni normalno $N(0, t_i - t_{i-1})$,
(3) skoraj gotovo so trajektorije $t \mapsto W_t(\omega)$ zvezne, oz. množica $\{\omega, t \mapsto W_t(\omega)\}$ vsebuje $A \in \mathcal{F}$, če je $P(A) = 1$.

V splošnem, za $\mu_t = \mu$ in $\sigma_t = \sigma$, kjer je $\sigma > 0$, je proces $X(t)$ Brownovo gibanje z lokalno tendenco μ in lokalno nestanovitnostjo σ^2, če je

$$\frac{X(t) - \mu t}{\sigma}$$

standardno Brownovo gibanje. Tako lahko konstruiramo X iz standardenga Brownovega gibanja W z

$$X(t) = \mu t + \sigma W(t),$$

torej je $X(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Še več, X reši stohastično diferencialno enačbo

$$dX(t) = \mu dt + \sigma dW(t).$$

Slučajni proces $S(t)$ je geometrično Brownovo gibanje, če je $\log S(t)$ Brownovo gibanje z začetno vrednostjo $\log S(0)$. Z drugimi besedami, geometrično Brownovo gibanje je eksponentno Brownovo gibanje.

Definicija 2.10. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor in naj bo $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ naraščajoča družina σ-algeber, t.j. $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ za $s \leq t$. Taka družina se imenuje filtracija, prostor pa filtritan verjetnostni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$.

Definicija 2.11. (1) Filtracija $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ je zvezna z desne, če velja $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$, $\forall t \geq 0$, kjer je $\bigcap_{h\downarrow 0} \mathcal{F}_{t+h} =: \mathcal{F}_{t+}$

(2) Filtracija je polna, če $\mathcal{F}_0$ vsebuje vse elemente $\mathcal{F}$ z mero 0, t.j. če $A \in \mathcal{F}$ in $P(A) = 0$, potem je $A \in \mathcal{F}_0$.

(3) Če ima filtracija $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ obe zgornji lastnosti, rečemo, da zadošča običajnim pogojem.

Definicija 2.12. Naj bosta $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ in $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ dve filtraciji na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Potem je $\mathbb{A}$ subfiltracija $\mathbb{F}$, če je $\mathcal{A}_t \subset \mathcal{F}_t$ za vse $t \in \mathbb{R}_+$.

Definicija 2.13. Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ filtritan verjetnostni prostor. Slučajni proces $(X_t)_{t\geq 0}$ je martingal, če je $X_t \in L^1(\Omega)$, za vsak $t \geq 0$, in je za vsak t, s $(s < t)$ $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ skoraj gotovo.

Definicija 2.14 (Lastnost Markova)**.** Naj bo $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verjetnostni prostor s filtracijo $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$ za linearno urejeno množico točk $T \in \mathbb{R}_+$ in naj bo $(S, \mathcal{S})$ merljiv prostor. Slučajni proces $X = (X_t)_{t\in T}$ prilagojen filtraciji ima lastnost Markova glede na $\mathcal{F}_t$, če za $\forall A \in \mathcal{S}$ in $\forall s, t \in T$, kjer je $s < t$, velja

$$P(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = P(X_t \in A|X_s).$$

Markovski proces je slučajni proces, ki zadosti lastnosti Markova.

Definicija 2.15. Naj bo W_t Brownovo gibanje, μ_t lokalna tendenca in σ_t lokalna nestanovitnost. Procesom oblike

$$X_t = \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + X_0$$

rečemo Itôvi procesi.

Za Itôve procese lahko definiramo proces kvadratične variacije $\langle X\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 ds$. Za Brownovo gibanje velja $W_t = \int_0^t dW_s$, torej je kvadratična variacija enaka $\langle W\rangle_t = \int_0^t 1ds = t$. Naj bo $f(X_t, t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^{2,1}$. Če želimo predstaviti proces $Y_t = f(X_t, t)$, kot Itôv proces, to naredimo s pomočjo Itôve formule:

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial X} dX_t + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} d\langle X\rangle_t.$$

Definicija 2.16. Prilagojen slučajni proces $X = \{X_t, t \leq 0\}$ na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ z vrednostmi v $\mathbb{R}_0$, za katerega velja, da je $X_0 = 0$, se imenuje Lévyjev proces, če ima spodnje lastnosti:

(1) Neodvisnost prirastkov: $X_t - X_s$ je neodvisen od $\mathcal{F}_s$, $0 \leq s < t < \infty$.

(2) Stacionarnost prirastkov: $X_t - X_s$ ima enako porazdelitev kot X_{t-s}, $0 \leq s < t < \infty$.

(3) Stohastična zveznost: $\lim_{t\to s} X_t = X_s$, kjer je limita dosežena v verjetnosti.

Glede na $X = \{X_t : t \in [0, T]\}$ je slučajna mera J_X na $[0, T] \times \mathbb{R}$ definirana kot

$$J_X(\omega, \cdot) = \sum_{t\in[0,T]}^{\Delta X_t \neq 0} 1_{(t,\Delta X_t)}$$

in se imenuje mera skokov.

Za vsako merljivo podmnožico $B \subset \mathbb{R}$, mera $J_X([0,T] \times B)$ šteje število skokov X, ki se pojavijo med 0 in t in katerih amplitude pripadajo B. Intenzivnost J_X je dana z Lévyjevo mero.

Definicija 2.17. Naj bo X Lévyjev proces. Mero $\nu \in \mathbb{R}$, definirano kot

$$\nu(B) = \mathbb{E}[\sharp\{t \in [0,1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in B\}],\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

imenujemo Lévyjeva mera, ki pripada X. Pričakovano število skokov na enoto časa, katerih velikost vsebuje množica B, označuje $\nu(B)$.

Lévyjeva mera zadošča pogoju

$$\int_{\mathbb{R}} 1 \wedge z^2 \nu(dz) < \infty.$$

Izrek 2.18 (Lévy - Itôva dekompozicija)**.** *Naj bo X Lévyjev proces in ν Lévyjeva mera. Potem obstajajo taki γ, σ in standardno Brownovo gibanje W, da velja*

$$\begin{aligned} X_t &= \gamma t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{|x|\geq 1} s J_X(ds, dx) \\ &\quad + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{\epsilon \leq |x| \leq 1} x (J_X(ds, dx) - \nu(dx) ds) \\ &= \gamma t + \sigma W_t + \sum_{0 \leq s \leq t} \delta X_s 1_{\{|\delta X_s| \geq 1\}} \\ &\quad + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{\epsilon \leq |x| \leq 1} x \tilde{J}_X(ds, dx), \end{aligned}$$

kjer je J_X mera skokov procesa X.

Trojček (σ^2, ν, γ) je karakteristični trojček Lévyjevega procesa X.

Definicija 2.19. Coxov proces je posplošeni Poissonov proces, v katerem je intenziteta lahko slučajna. To pomeni, da če pogojimo na realizacijo intenzitete $\mu(\cdot, Y_t^M)$, postane proces skokov nehomogeni Poissonov proces z intenziteto $\mu(x + t, Y_t^M)$.

Definicija 2.20. Verjetnostno mero Q na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ imenujemo ekvivalentna martingalska mera, če velja:

- P in Q sta ekvivalentni meri
- proces diskontiranih vrednosti vsakega vrednostnega papirja v modelu je matringal glede na mero Q.

Izrek 2.21 (Zakon velikih števil)**.** *Naj bodo $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neodvidni procesi s končnim matematičnim upanjem $E(X_j) = \mu$ in s končno varianco $V(X_j) = \sigma^2$. Naj bo $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Potem za vsak $\varepsilon > 0$ velja*

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - \mu\Big| \geq \varepsilon\Big) \to 0,$$

ko $n \to \infty$. Ekvivalentno, velja tudi

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) \to 1,$$

ko $n \to \infty$.

2.2. **Osnovni pojmi v zavarovalništvu.**

Zavarovana oseba ali zavarovanec je oseba, ki se zavaruje in od katere smrti oziroma preživetja je odvisno izplačilo zavarovalne vsote.

Zavarovalec je fizična ali pravna oseba, ki z zavarovalnico sklene zavarovalno pogodbo in se zaveže plačevati zavarovalno premijo.

Upravičenec je oseba, v korist katere je sklenjeno zavarovanje in je v primeru nastanka zavarovalnega primera upravičena do zavarovalnine.

Zavarovalna vsota je v zavarovalni pogodbi oziroma polici navedena obveznost, ki jo izpolni zavarovalnica, če se dogodi zavarovalni primer. Višina zavarovalne vsote je določena v sporazumu med pogodbenima strankama.

Premija je znesek, ki ga je zavarovalec zavezan plačevati zavarovalnici. Premija je lahko dogovorjena v obliki enkratnega plačila ali kot obročna premija.

Zavarovalna polica je listina o sklenjeni zavarovalni pogodbi in mora vsebovati vse bistvene elemente zavarovalne pogodbe.

Odkup pomeni prenehanje zavarovanja na prošnjo zavarovalca. Odkup je možen, če zavarovalec izpolnjuje pogoje za odkup, ki so določeni na polici. Zavarovalnica v tem primeru izplača odkupno vrednost police.

3. Življenjska zavarovanja

Poznamo različne oblike življenjskih zavarovanj, ki jim lahko priključimo dodana zavarovanja in jih tako nadgradimo. Najbolj pogoste oblike življenjskega zavrovanja so:

Življenjsko zavarovanje za primer doživetja: zavarovalnica izplača zavarovalno vsoto in pripisan dobiček v primeru, da zavarovana oseba doživi dogovorjeno dobo. Ob morebitni smrti zavarovane osebe med trajanjem zavarovanja vse obveznosti zavarovalnice prenehajo.

Življenjsko zavarovanje za primer smrti: zavarovalnica izplača dogovorjeno zavarovalno vsoto, če zavarovana oseba umre v času trajanja zavarovanja. Zavarovalna vsota se izplača ne glede na vzrok smrti (naravna ali nezgodna smrt). Možne oblike tega zavarovanja:

- zavarovanje za primer smrti za vse življenje, pri katerem upravičenec ob smrti zavarovane osebe v vsakem primeru dobi zavarovalno vsoto,

- časovno omejeno zavarovanje za primer smrti, pri katerem se zavarovalna vsota izplača le, če zavarovanec umre v naprej določenem času trajanja zavarovanja,
- zavarovanje za primer smrti s padajočo zavarovalno vsoto, pri katerem se zavarovalna vsota znižuje s preostalo zavarovalno dobo.

Življenjsko zavarovanje za primer smrti in doživetja: je hkrati varčevanje in zavarovnje za primer smrti:
- ob poteku zavarovalne dobe se izplača dogovorjena zavarovalna vsota z do tedaj pripisanim dobičkom,
- v primeru smrti med trajanjem zavarovanja se upravičencu izplača zavarovalna vsota za primer smrti z do tedaj pripisanim dobičkom

Naložbeno življenjsko zavarovanje: združuje zavarovanje za primer smrti in varčevanje v enem ali več skladih s privzetim naložbenim tveganjem. Zavarovalec sam odloča, v kateri sklad bo naložil sredstva in kako bo razdelil premijo med posamezne sklade. Višina zavarovalne vsote je ves čas zajamčena, ne glede na to, kaj se dogaja s skladi.

Zavarovanja za točno določen rok: se sklenejo le za določeno obdobje. V naprej dogovorjena zavarovalna vsota se izplača po poteku izbranega obdobja, ne glede na to, ali je zavarovanec med tem umrl ali je še živ.

3.1. **Generična zavarovanja.**

Osredotočili se bomo na življenjska zavarovnanja za primer smrti z odkupno opcijo. Odkupno opcijo lahko izvršimo v vsakem trenutku, le v času sklenitve zavarovanja ne.

Predpostavimo, da finančni agenti lahko neprekinjeno trgujejo na finančnem trgu s končnim časovnim obdobjem T, na katerem ni arbitraže in trenja (ang. frictionless).

Naj bo $(\Omega^F, \mathcal{F}^F, Q^F, \mathbb{F}^F = (\mathcal{F}_t^F)_{t\in[0,T]})$ poln, filtriran verjetnostni prostor, kjer je Q^F cenovna mera in kjer predpostavimo, da $\mathbb{F}^F$ zadosti običajnim pogojem. V ta verjetnostni prostor vpeljemo q_1-dimenzialen lokalno omejen in prilagojen markovski proces

$$(Y_t^F)_{t\in[0,T]} = (Y_t^{F,(1)}, \ldots, Y_t^{F,(q_1)})_{t\in[0,T]},$$

ki ga poimenujemo proces stanj finančnega trga. Znotraj tega trga predpostavimo obstoj lokalno netveganih sredstev $(B_t)_{t\in[0,T]}$, definiranih z $B_t = \int_0^t r_u du$, kjer je $r_t = r(t, Y_t^F)$ kratkoročna obrestna mera. Poleg tega za $n \in \mathbb{N}$ dovolimo druga tvegana sredstva $(A_t^{(i)})_{t\in[0,T]}$[1], $1 \leq i \leq n$, ki so trgovana na trgu,

$$A_t^{(i)} = A^{(i)}(t, Y_t^{(F)}),\ 1 \leq i \leq n.$$

Za vključitev komponentne smrtnosti določimo drug verjetnostni prostor (Ω^M, G^M, P^M) in homogeno populacijo x-let starih posameznikov. Predpostavimo, da imamo na $(\Omega^M, \mathcal{G}^M, \mathcal{P}^M)$ podan q_2-dimenzialen lokalno omejen markovski proces

$$(Y_t^M)_{t\in[0,T]} = (Y_t^{M,(q_1+1)}, \ldots, Y_t^{M,(q)})_{t\in[0,T]},$$

[1]Z $A_t^{(i)}$ označimo sredstva, ki niso samo predmet obrestnega tveganja, t.j. delnice ali nepremičnine.

kjer je $q = q_1 + q_2$. Naj bo $\mu(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{q_2} \to \mathbb{R}_+$ pozitivno zvezna funkcija in naj bo čas smrti posameznika T_x definiran kot prvi časovni skok Coxovega procesa z inteziteto $(\mu(x+t, Y_t^M))_{t\in[0,T]}$, t.j.

$$T_x = \inf\Big\{t \Big| \int_0^t \mu(x+s, Y_s^M)ds \geq E\Big\},$$

kjer je E eksponentno porazdeljena slučajna spremenljivka, neodvisna od $(Y_t^M)_{t\in[0,T]}$ in medsebojno neodvisna za različne posameznike. Prav tako definirajmo subfiltraciji $\mathbb{F}^M = (\mathcal{F}_t^M)_{t\in[0,T]}$ in $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\in[0,T]}$ kot razširjeni subfiltraciji, zaporedoma generirani z $(Y_t^M)_{t\in[0,T]}$ in $(1_{\{T_x\leq t\}})_{t\in[0,T]}$. Določimo $\mathcal{G}_t^M = \mathcal{F}_t^M \vee \mathcal{H}_t$ in $\mathbb{G}^M = (\mathcal{G}_t^M)_{t\in[0,T]}$.

Zavarovalne police sedaj lahko upoštevamo na sestavljenem filtriranem verjetnostnem prostoru

$$(\Omega, \mathcal{G}, \mathcal{Q}, \mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\in[0,T]}),$$

kjer je $\Omega = \Omega^M \times \Omega^F$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}^F \vee \mathcal{G}^M$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^F \vee \mathcal{G}_t^M$ in kjer je $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^F \otimes \mathcal{P}^M$ produktna mera neodvisnih finančnih in preživetvenih dogodkov.

Od sedaj naprej bomo privzeli, da je $\mu(x+t, Y_t) := \mu(x+t, Y_t^M)$ in $r(t, Y_t) := r(t, Y_t^F)$, kjer je $(Y_t)_{t\in[0,T]} := (Y_t^F, Y_t^M)_{t\in[0,T]}$ proces stanj.

Izrek 3.1. *Naj bo $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, kjer je $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^F \vee \mathcal{F}_t^M$. Za $\mathcal{F}_t$- merljivo plačilo C_t imamo za $u \leq t$*

$$\begin{aligned} & B_t \mathbb{E}^Q\Big[B_t^{-1} C_t 1_{\{T_x>t\}}\Big|\mathcal{G}_u\Big] \\ = \;& 1_{\{T_x>u\}} B_u \mathbb{E}^Q\Big[B_t^{-1} C_t \exp\big(-\int_u^t \mu(x+s, Y_s)ds\big)\Big|\mathcal{F}_u\Big]. \end{aligned} \tag{1}$$

Zgornji rezultat lahko uporabimo za vrednotenje zavarovalnih polic.

Dokaz. Najprej pokažimo, da je

$$\mathbb{E}^Q(1_{\{T_x>t\}}|\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_u) = 1_{\{T_x>u\}} \exp\Big(-\int_u^t \mu(x+s, Y_s)ds\Big) \tag{2}$$

V izračunu bomo upoštevali, da je pogojno matematično upanje na množici $\{T_x \leq u\}$ enako 0 in da je množica $\{T_x > u\}$ atom $\mathcal{H}_u$. Torej je

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^Q(1_{\{T_x>t\}}|\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_u) &= 1_{\{T_x>u\}} \mathbb{E}^Q(1_{\{T_x>t\}}|\mathcal{F}_t \vee \mathcal{H}_u) \\ &= 1_{\{T_x>u\}} \frac{P^Q(\{T_x>t\} \cap \{T_x>u\}|\mathcal{F}_t)}{P^Q(T_x>u|\mathcal{F}_t)} \\ &= 1_{\{T_x>u\}} \frac{P^Q(T_x>t|\mathcal{F}_t)}{P^Q(T_x>u|\mathcal{F}_t)} \\ &= 1_{\{T_x>u\}} \frac{\exp\left(-\int_0^t \mu(x+s, Y_s)ds\right)}{\exp\left(-\int_0^u \mu(x+s, Y_s)ds\right)} \\ &= 1_{\{T_x>u\}} \exp\big(-\int_u^t \mu(x+s, Y_s)ds\big). \end{aligned}$$

S tem smo dokazali (2).
Razmislimo sedaj še o (1):

$$\begin{aligned} B_u\mathbb{E}^Q(B_t^{-1}C_t 1_{\{T_x>t\}}|\mathcal{G}_u) &= B_u\mathbb{E}^Q\Big(\mathbb{E}^Q(B_t^{-1}C_t 1_{\{T_x>t\}}|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_u)|\mathcal{G}_u\Big)\\ &= B_u\mathbb{E}^Q\Big(B_t^{-1}C_t\mathbb{E}^Q(1_{\{T_x>t\}}|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_u)|\mathcal{G}_u\Big)\\ &= 1_{\{T_x>u\}}B_u\mathbb{E}^Q\Big(B_t^{-1}C_t\exp\big(-\int_u^t\mu(x+s,Y_s)ds\big)|\mathcal{G}_u\Big). \end{aligned}$$

Matematično upanje pogojeno na $\mathcal{G}_u$ želimo zamenjati z matematičnim upanjem pogojenim na $\mathcal{F}_u$. Naj bo E eksponentna slučajna spremenljivka s parametrom 1, ki je neodvisna od σ-algebre $\mathcal{F}_t$. V posebnem je E neodvisna od

$$\sigma\Big(\exp\big(-\int_u^t\mu(x+s,Y_s)ds\big)\Big)\vee\mathcal{F}_u$$

in zato je

$$\mathbb{E}\Big(\exp\big(-\int_u^t\mu(x+s,Y_s)ds\big)|\mathcal{F}_u\vee\sigma(E)\Big)=\mathbb{E}\Big(\exp\big(-\int_u^t\mu(x+s,Y_s)ds\big)|\mathcal{F}_u\Big).$$

Na σ-algebri velja

$$\mathcal{F}_u\subset\mathcal{F}_u\vee\mathcal{H}_u\subset\mathcal{F}_u\vee\sigma(E). \tag{3}$$

S kombinacijo (2) in (3) dobimo

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^Q\Big(B_t^{-1}C_t\exp\big(-\int_u^t\mu(x+s,Y_s)ds\big)|\mathcal{F}_u\vee\mathcal{H}_u\Big)\\ =\;&\mathbb{E}^Q\Big(B_t^{-1}C_t\exp\big(-\int_u^t\mu(x+s,Y_s)ds\big)|\mathcal{F}_u\Big), \end{aligned}$$

kar je to, kar smo želeli dokazati. □

Kot zanimivost, verjetnost dejanskega oziroma realiziranega preživetja

$$\begin{aligned} {}_tp_x^{(t)}:&=\mathbb{E}^Q\big[1_{\{T_x>t\}}\big|\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_0\big]=\exp\big(-\int_0^t\mu(x+s,Y_s)ds\big)\text{ in}\\ {}_{t-u}p_{x+u}^{(t)}:&=\frac{{}_tp_x^{(t)}}{{}_up_x^{(u)}}=\exp\big(-\int_u^t\mu(x+s,Y_s)ds\big),\ 0\le u\le t, \end{aligned}$$

lahko predstavimo kot pripadajočo enoletno verjetnost dejanske oziroma realizirane smrtnosti

$$q_{x+t-1}^{(t)}:=1-p_{x+t-1}^{(t)}=1-{}_1\,p_{x+t-1}^{(t)}.$$

Medtem, ko je $\mathcal{Q}^F$ definirana kot neka dana ekvivalentna martingalska mera, imamo nekaj več svobode pri izbiri $\mathcal{P}^M$. Na popolnem finančnem trgu, t.j. če je $\mathcal{Q}^F$ določena z deterministično oceno smrtnosti pod predpostavko do tveganja nevtralnosti zavarovalnic glede na stopnjo smrtnosti in če $\mathcal{P}^M$ označuje fizično mero, potem $\mathcal{Q}^F$ imenujemo *minimalna martingalska mera.* Ko je izbrana minimalna martingalska mera $\mathcal{Q}^F$ za finančni trg, lahko rezultat razširimo na nepopoln finančni trg. Izbira mere je odvisna od razpoložljivosti primerne smrtnosti, povezane z vrednostnimi papirji na trgu in/ali želja zavarovlnice. Od sedaj naprej predpostavimo, da je zavarovalnica za namen vrednotenja izbrala mero $\mathcal{P}^M$, tako da je izbira posebne mere vrednostenja $\mathcal{Q}^F$ dana.

Za pridobitev modela za generično življenjsko zavarovanje analiziramo upravljanje z zavarovalnimi policami v življenjskih zavarovalnicah. Pomembno je, da ponavadi denarni tokovi, kot so plačila premije, izplačila zavarovalnih vsot ali prekinitve zavarovanja, niso zvezni, ampak se zgodijo v diskretnih časovnih točkah. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da do teh diskretnih časovnih točk pride ob koncu vsakega polnega leta zavarovanja. Te obletnice sklenitve zavarovanja bomo označili z $\nu \in \{0, \dots, T\}$. Torej je formula za vrednost police življenjskega zavarovanja V_ν v času ν, glede na do tveganja nevtralno vrednotenje, pod predpostavko, da je zavarovanec živ, enaka:

$$V_\nu = B_\nu \sum_{\mu=\nu}^{T} \mathbb{E}^Q \left[B_\mu^{-1} C_\mu \middle| \mathcal{F}_\nu \right],$$

kjer je C_μ denarni tok v času $0 \leq \mu \leq T$.

Ker je vrednost v času t odvisna le od ocene smrtnosti ter finančnega trga, in ker je to spet odvisno le od ocene $(Y_s)_{s\in[0,t]}$ lahko zapišemo:

$$V_t = \tilde{V}(t, Y_s, s \in [0, t]).$$

Pri vrednotenju zavarovanja je pomembno, kaj se je do tega trenutka dogajalo s polico (delni odkup, mirovanje police, itd.). Shranjevanje vse zgodovine zavarovalne police je nerodno in, na srečo, nepotrebno. Znotraj knjigovodskega sistema zavarovalnic, so police življenjskega zavarovanja ponavadi vodene (oziroma predstavljene) z več računi, ki shranjujeno informacije o zgodovini zavarovalne police, na primer vrednost zavarovalne police, odkupno vrednost police, trenutne zavarovalne vsote, itd. Zato, za shranjevanje zgodovine, vpeljemo $m \in \mathbb{N}$ navideznih (virtualnih) računov $(D_t^{(1)}, \dots, D_t^{(m)})_{t\in[0,T]}$, tako imenovanih spremenljivk stanj. Odkar so pomembne informacije o zgodovini v času t vsebovane v (Y_t, D_t), lahko dosežemo markovsko strukturo. Še več, opazimo, da se ti navidezni računi ne posodabljajo stalno, ampak so popravki, kot so knjiženja obresti, pogosto nare-jeni ob določenih ključnih datumih. Prav tako se odločitve zavarovancev, na primer za odkup zavarovanja, za prekinitev zavarovanja ali za spremembe na zavarovalnem računu, pogosto zgodijo na prej določen datum. Zaradi poenostavitve spet predpostavimo, da so ti datumi ob obletnici zavarovanja. Zato je za določitev vrednosti zavarovalne police ob času t, pod pogojem, da je zavarovanec živ, dovolj vedeti le trenutno stanje police in vrednost spremenljivke stanj ob času $\lfloor t \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N} | n \leq t\}$, torej se vrednost generičnega življenjskega zavarovanja lahko zapiše kot:

$$V_t = V(t, Y_t, D_t) = V(t, Y_t, D_{\lfloor t \rfloor}),\, t \in [0, T].$$

Množico vseh možnih vrednosti (Y_t, D_t) označimo s Θ_t.

Ta okvir je generičen v smislu, da ne obravnavamo posebej specifikacij zavarovalnih pogodb, ampak modeliramo generično življenjsko zavarovanje, ki omogoča plačila, odvisna od posameznikovega preživetja. Medtem, ko bolj generična zavarovanja, odvisna od zdravja zavarovanca, niso obravnavana v naših modelih, bi bila njihova vključitev podobna klasičnim primerom.

4. Pregled numeričnih metod

Življenjska zavarovanja so pogosto zapletena, instrumenti so odvisni od poti in v veliko primerih analitični problem vrednotenja nima rešitve. Torej se je potrebno zateči k numeričnim metodam. V tem poglavju bomo predstavili različne načine numeričnega reševanja problema vrednotenja zavarovalne police.

4.1. **Monte Carlo simulacija.**

4.1.1. *Dinamično programiranje.*

Dinamično programiranje je metoda za reševanje problemov s podproblemi, ki se prekrivajo. Rešitev problema dobimo iz množice rešenih podproblemov.

Osnova za dinamično programiranje je rekurzivna enačba, ki se imenuje Bellmanova enačba. Vsak problem, rešen s pomočjo metode dinamičnega programiranja, ima svojo Bellmanovo enačbo. Osnovna lastnost dinamičnega programiranja je, da temelji na pravilu optimalnosti, ki pravi, da je optimalna rešitev problema sestavljena iz optimalnih rešitev podproblemov in obratno.

Pri formuliranju rekurzivnih izrazov dinamičnega programiranja lahko uporabimo dva različna pristopa, in sicer naprejšnji pristop (ang. forward approach) in nazajšnji pristop (ang. backward approach). Naj bodo $x_1, \dots, x_n$ spremenljivke, ki nastopajo v problemu. V naprejšnjem pristopu se formulacija za spremenljivko x_i izvede kot funkcija $f(x_{i+1}, \dots, x_n)$, kar pomeni, da rešujemo naprej, od x_1 do x_n. V nazajšnjem pristopu se pa formulacija izvede kot funkcija $f(x_1, \dots, x_{i-1})$, kar pomeni, da rešujemo nazaj, od x_n do x_1.

4.1.2. *Monte Carlo simulacija.*

Monte Carlo simulacija je preprosta in še kar uporabna za vrednotenje zavarovalnih polic, pod pogojem, da upoštevana polica ne vsebuje predčasnih sprememb, t.j. zavarovanci ne morejo spreminjati ali (delno) odkupiti zavarovanja v času njegove veljavnosti. Taka zavarovanja imenujemo *evropska zavarovanja.*

V tem primeru lahko simuliramo K poti procesa stanj $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ kot $(Y_t^{(k)})_{t\in[0,T]}$, kjer je $k = 1, \dots, K$ in izračunamo numerarjev proces, realizirano verjetnost preživetja kot tudi spremenljivke stanj ob vsaki obletnici zavarovanja. Vrednost police v koraku k, $V_0^{(k)}$, $1 \leq k \leq L$, je dana kot vsota diskontiranih denarnih tokov v koraku k in z zakonom velikih števil lahko ocenimo začetno do tveganja nevtralno vrednost zavarovalne police, V_0, z matematičnim upanjem za dovolj velik K.

Če polica vključuje tudi predčasne spremembe, je problem bolj zapleten, ker je zagotovljena vrednost ali vrednost opcije odvisna od obnašanja zavarovanca. Vprašanje, kako v model vključiti zavarovančevo obnašanje, nima točnega odgovora. Z ekonomskega vidika bi lahko predpostavili, da zavarovanec maksimizira svojo koristnost, kar pripelje do netrivialnega problema vodenja. Predpostavka o homogenih zavarovancih pravzaprav ni najboljša. Prav tako v praksi ne velja, da so opcije znotraj polic z enakimi značilnostmi izvršene ob istem času. Ne vemo tudi, kako upoštevati raznolikost med zavarovanci.

Vendar pa obnašanje zavarovancev lahko ocenimo z opazovanjem. Velja, da lahko z regresijo zgodovinskih primerov verjetnosti spremenljivk stanj dobimo primerno oceno prihodnjih primerov obnašanja. Poleg težavnosti pridobivanja primernih podatkov se zavarovalnice soočajo tudi s tveganjem sistematične spremenljivosti obnašanja zavarovancev, kar je povzročalo probleme že v preteklosti. Na primer, življenjsko zavarovalnico Equtable life, najstarejšo zavarovalnico na svetu, so zaprli zaradi problema solventnosti, ki izhaja iz napačnih presoj o obnašanju zavarovancev do zajamčenih rent znotraj posameznikovega pokojninskega zavarovanja.

Zato, v skladu z zamislimi iz Solventnosti II in predpisi finančnega poročanja, uporabimo drugačni pristop in vrednotimo vgrajene opcije kot če bi bile trgovane na finančnem trgu. Medtem, ko za zavarovalnice končna vrednost lahko presega dejansko ali realizirano vrednost, je to enolično določeno minimalno nadvrednotenje v smislu, da imajo zavarovanci možnost optimalnega obnašanja glede na finančno vrednost njihovih zavarovanj.

Če želimo določiti vrednost police, moramo rešiti problem optimalnega vodenja. Najprej si oglejmo življenjsko zavarovalno polico z odkupno opcijo. Opcija ima najvišjo vrednost, če se zavarovanec obnaša finančno racionalno, t.j.

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{Y}_0} \mathbb{E}^Q \Big[(B_\tau)^{-1} {}_\tau p_x^{(\tau)} C(\tau, Y_\tau, D_\tau) + \sum_{\nu=0}^{\tau-1} (B_{\nu+1})^{-1} {}_\nu p_x^{(\nu)} q_{x+\nu}^{(\nu+1)} f(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_\nu) \Big| \mathcal{F}_0 \Big],$$

kjer je $C(\nu, y_\nu, d_\nu)$ odkupna vrednost v času ν, $f(\nu, y_\nu, d_{\nu-1})$ je vrednost izplačila v primeru smrti na intervalu $[\nu - 1, \nu]$, če proces stanj ter spremenljivka stanj zavzameta vrednost y_ν in d_ν ($d_{\nu-1}$ ob $t = \nu - 1$) zaporedoma, in kjer $\mathcal{Y}_0$ označuje množico vseh časov ustavljanja v $\{1, \ldots, T\}$. Na vsakem majhnem koščku maksimiziramo izvršilno vrednost in za različne vrste polic izračunamo matematično upanje, t.j.

$$\Pi^{opt} = \mathbb{E}^Q \Big(\max_{\tau \in \{1,\ldots,T-1\}} \big[(B_\tau)^{-1} {}_\tau p_x^{(\tau)} \max\big(0, C(\tau, Y_\tau, D_\tau)\big) \big] \Big).$$

Na ta način precenimo vrednost police.

Za določitev Monte Carlo aproksimacije vrednosti police se moramo opreti na tako imenovane *vgnezdene simulacije*. Ker v trenutku sklenitve zavarovanja odkupna opcija ni mogoča, lahko definiramo $C(0, y_0, d_0) := 0$. Optimalno vrednost dobimo s pomočjo dinamičnega programiranja. Vrednost police je rekurzivno, z Bellmanovo enačbo, določena kot:

$$\begin{aligned}
& V(T, y_T, d_T) = C(T, y_T, d_T) && (4)\\
& V(\nu, y_\nu, d_\nu) && (5)\\
= \quad & \max\Big\{C(\nu, y_\nu, d_\nu), B_\nu \mathbb{E}^Q\big[B_{\nu+1}^{-1} p_{x+\nu}^{(\nu+1)} V(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_{\nu+1})\big|(Y_\nu, D_\nu) = (y_\nu, d_\nu)\big]\\
& + B_\nu \mathbb{E}^Q\big[B_{\nu+1}^{-1} q_{x+\nu}^{(\nu+1)} f(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_\nu)\big|(Y_\nu, D_\nu) = (y_\nu, d_\nu)\big]\Big\}
\end{aligned}$$

S pomočjo Bellmanove enačbe dobimo, da je vrednost zavarovanja v času ν, $\nu \in \{0, \dots, T-1\}$, enaka višji izmed odkupne vrednosti (vrednost izvršene opcije) in prihodnje vrednosti zavarovanja (ang. continuation value). Slednja je enaka uteženi vsoti diskontiranih pričakovanih vrednosti police glede na informacijo $(y_\nu, d_\nu) \in \Theta_\nu$.

Sedaj generiramo slučajno drevo s T časovnimi koraki, ki ima $b \in \mathbb{N}$ povezav iz vsakega vozlišča. Začnemo z začetno vrednost Y_0 in generiramo b neodvisnih naslednikov $Y_1^1, \dots, Y_1^b$. Iz vsakega vozlišča spet generiramo b neodvisnih naslednikov in tako nadaljujemo. S to metodo dobimo dve konsistentni cenilki. Ena je visoko pristranska, druga pa nizko pristranska, obe pa konvergirata k pravi vrednosti zavarovanja. Tako lahko merimo in preverimo napako, ko se povečuje računska zahtevnost. Pomankljivost metode slučajnega drevesa je ravno računska zahtevnost, saj raste eksponentno z rastjo T.

Najprej si poglejmo, kako sta lahko dve pristranski cenilki skoraj tako učinkoviti kot ena nepristranska cenilka. Predpostavimo, da sta $\hat{V}_0(K, b)$ in $\hat{v}_0(K, b)$ dve povprečji slučajnega vzorca s K neodvisnimi ponovitvami za vsako vrednost parametra b. Predpostavimo še, da sta kot cenilki za V_0 visoko in nizko pristranski, v smislu, da

$$\mathbb{E}^Q[\hat{V}_0(K, b)] \geq V(0, X_0) \geq \mathbb{E}^Q[\hat{v}_0(K, b)]. \tag{6}$$

Predpostavimo, da je interval s širino $2H_0(K, b)$,

$$\hat{V}_0(K, b) \pm H_0(K, b),$$

95% interval zaupanja za $\mathbb{E}^Q[\hat{V}_0(K, b)]$ in podobno, da je interval s širino $2L_0(K, b)$,

$$\hat{v}_0(K, b) \pm L_0(K, b),$$

95% interval zaupanja za $\mathbb{E}^Q[\hat{v}_0(K, b)]$. Če vzamemo spodnjo mejo intervala zaupanja nizke cenilke in zgornjo mejo intervala zaupanja visoke cenilke, dobimo interval

$$\Big(\hat{v}_0(K, b) - L_0(K, b), \hat{V}_0(K, b) + H_0(K, b)\Big), \tag{7}$$

ki vsebuje neznano vrednost $V(0, X_0)$ z vsaj 90% verjetnostjo. Tako lahko ustvarimo veljaven interval zaupanja s kombinacijo dveh cenilk. Neenačaj v (6) postane enačaj, ko $b \to \infty$ in, ko gre $K \to \infty$ gresta širini polintervalov $H_0(K, b)$ ter $L_0(K, b)$ proti 0.

Z metodo slučajnega drevesa torej dobimo visoko in nizko cenilko z nazajšnjo indukcijo v vsakem vozlišču. Najprej poiščimo visoko cenilko za V_ν, $\nu \in \{0, \dots, T\}$, na vozlišču $Y_\nu^{l_1 \dots l_\nu}$. Označimo $X_\nu^{l_1 l_2 \dots l_\nu} = (Y_\nu^{l_1 l_2 \dots l_\nu}, D_\nu^{l_1 l_2 \dots l_\nu})$ in uporabimo formulacijo (4) in (5).

Izrek 4.1. *Naj bo $B_\nu^{l_1 \dots, l_\nu}$ vrednost bančnega računa in naj bosta $p_{x+\nu-1}^{l_1 \dots l_\nu}$ in $q_{x+\nu-1}^{l_1 \dots, l_\nu}$ enoletni verjetnosti preživetja in smrti ob $t = \nu$, v vzorcu poti $(Y_0, Y_1^{l_1}, \dots, Y_\nu^{l_1 \dots l_\nu})$. Visoka cenilka za V_ν na vozlišču $Y_\nu^{l_1 \dots l_\nu}$ je visoko pristranska in je za $\nu = T$ enaka*

$$\hat{V}_T^{l_1 l_2 \dots l_T} = C(T, X_T^{l_1 \dots l_T}), \tag{8}$$

za $\nu \in \{0, \dots, T-1\}$ pa

$$\begin{aligned} \hat{V}_\nu^{l_1 l_2 \dots l_\nu} &= \max \Big\{ C(\nu, X_\nu^{l_1 \dots l_\nu}), \frac{B_\nu^{l_1 \dots l_\nu}}{b} \sum_{l=1}^{b} (B_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l})^{-1} p_{x+\nu}^{l_1 \dots l_\nu l} \hat{V}_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l} \\ &\quad + \frac{B_\nu^{l_1 \dots l_\nu}}{b} \sum_{l=1}^{b} (B_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l})^{-1} q_{x+\nu}^{l_1 \dots l_\nu l} f(\nu + 1, Y_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l} D_\nu^{l_1 \dots l_\nu}) \Big\} \end{aligned} \tag{9}$$

Z drugimi besedami, visoka cenilka je rezultat uporabe navadnega dinamičnega programiranja s slučajnimi drevesi, kjer ima vsaka povezava enako težo. S K ponovitvami drevesa določimo povprečje vzorca $\bar{V}_0(K, b)$ in z zakonom velikih števil dobimo $\bar{V}_0(K, b) \to \mathbb{E}^Q[\hat{V}_0]$, ko $K \to \infty$ skoraj gotovo. Če fiksiramo b, lahko konstruiramo asimptotično veljaven $(1-\delta)$ interval zaupanja za $\mathbb{E}^Q[\hat{V}_0]$. Ampak ta cenilka je visoko pristranska, t.j.

$$\mathbb{E}^Q[\hat{V}_0] \geq V(0, X_0).$$

V splošnem tu velja strogi neenačaj. Cenilka je pod nekaterimi integrabilnimi pogoji asimptotično nepristranska in zato lahko, z večanjem števila povezav b v vsakem vozlišču, zmanjšamo pristranskost.

Pri dokazu izreka (4.1) si bomo pomagali z naslednjim izrekom.

Izrek 4.2 (Jensenova neenakost). *Naj bo f konkavna funkcija na intrevalu I. Če $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ in če za nenegativna števila $t_1, t_2, \dots, t_n$ velja $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, potem velja*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \Big) \geq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i).$$

Dokaz. Jensenovo neenakost dokažemo z indukcijo na n. Predpostavimo, da velja za n in pokažemo, da velja tudi za n+1.

$$
\begin{aligned}
f\Big(\sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i\Big) &= f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i + t_{n+1}x_{n+1}\Big) \\
&\geq (1-t_{n+1})f\Big(\frac{1}{1-t_{n+1}}\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\Big) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&= (1-t_{n+1})f\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{1-t_{n+1}} x_i\Big) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&\geq (1-t_{n+1})\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{1-t_{n+1}} f(x_i) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} t_i f(x_i).
\end{aligned}
$$

S tem smo Jensnovo neenakost dokazali za vsa naravna števila. □

Dokaz Izreka 4.1. S preprosto indukcijo dokažimo, da je visoka cenilka v resnici visoko pristranska v vsakem vozlišču, t.j.

$$\mathbb{E}^Q[\hat{V}_\nu^{l_1 l_2 \ldots l_\nu} | X_\nu^{l_1 \ldots l_\nu}] \geq V_\nu(X_\nu^{l_1 \ldots l_\nu}). \tag{10}$$

Opazimo, da za $\nu = T$ zgornja zveza (z enačajem) velja za vsako vozlišče, ker je $\hat{V}_T^{l_1 l_2 \ldots l_T} = C(T, X_T^{l_1 \ldots l_T})$ in $V(T, y_T, d_T) = C(T, y_T, d_T)$. Sedaj pokažimo, da če (10) velja za $\nu+1$, velja tudi za ν.

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}^Q[\hat{V}_\nu^{l_1 l_2 \ldots l_\nu} | X_\nu^{l_1 \ldots l_\nu}] \\
= \; & \mathbb{E}^Q\Big[\max\big\{C(\nu, X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}), \frac{B_\nu^{l_1\ldots l_\nu}}{b}\sum_{l=1}^{b}(B_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l})^{-1} p_{x+\nu}^{l_1\ldots l_\nu l}\hat{V}_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l} \\
& + \frac{B_\nu^{l_1\ldots l_\nu}}{b}\sum_{l=1}^{b}(B_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l})^{-1} q_{x+\nu}^{l_1\ldots l_\nu l} f(\nu+1, Y_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l} D_\nu^{l_1\ldots l_\nu})\big\} | X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\Big] \\
\geq \; & \max\Big\{C(\nu, X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}), B_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\mathbb{E}^Q\Big[\frac{1}{b}\sum_{l=1}^{b}(B_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l})^{-1} p_{x+\nu}^{l_1\ldots l_\nu l}\hat{V}_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l} \\
& + \frac{1}{b}\sum_{l=1}^{b}(B_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l})^{-1} q_{x+\nu}^{l_1\ldots l_\nu l} f(\nu+1, Y_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l} D_\nu^{l_1\ldots l_\nu}) | X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\Big]\Big\} \\
= \; & \max\Big\{C(\nu, X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}), B_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\mathbb{E}^Q\Big[\frac{1}{b}\sum_{l=1}^{b}(B_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l})^{-1} p_{x+\nu}^{l_1\ldots l_\nu l}\hat{V}_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l} | X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\Big] \\
& + B_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\mathbb{E}^Q\Big[\frac{1}{b}\sum_{l=1}^{b}(B_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l})^{-1} q_{x+\nu}^{l_1\ldots l_\nu l} f(\nu+1, Y_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l} D_\nu^{l_1\ldots l_\nu}) | X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\Big]\Big\} \\
= \; & \max\Big\{C(\nu, X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}), B_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\mathbb{E}^Q\Big[(B_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l})^{-1} p_{x+\nu}^{l_1\ldots l_\nu l}\hat{V}_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu 1} | X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\Big] \\
& + B_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\mathbb{E}^Q\Big[(B_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l})^{-1} q_{x+\nu}^{l_1\ldots l_\nu l} f(\nu+1, Y_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l} D_\nu^{l_1\ldots l_\nu}) | X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\Big]\Big\} \\
\geq \; & \max\Big\{C(\nu, X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}), B_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\mathbb{E}^Q\Big[(B_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l})^{-1} p_{x+\nu}^{l_1\ldots l_\nu l} V_{\nu+1}(X_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu 1}) | X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\Big] \\
& + B_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\mathbb{E}^Q\Big[(B_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l})^{-1} q_{x+\nu}^{l_1\ldots l_\nu l} f(\nu+1, Y_{\nu+1}^{l_1\ldots l_\nu l} D_\nu^{l_1\ldots l_\nu}) | X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}\Big]\Big\} \\
= \; & V_\nu(X_\nu^{l_1\ldots l_\nu}).
\end{aligned}
$$

Pri prvem enačaju uporabimo (9), v drugem koraku pa Jensenovo neenakost. V tretjem koraku upoštevamo, da je pogojno matematično upanje linearno, v četrtem upoštevamo dejstvo, da je b naslednikov vsakega vozlišča pogojno neodvisno in enako porazdeljenih, v petem koraku uporabimo indukcijsko predpostavko v $\nu+1$, zadnji korak pa sledi iz (5). $\square$

Podoben indukcijski argument dokaže, da pod šibkejšimi momentnimi pogoji vsak $\hat{V}_\nu^{l_1 l_2\ldots l_\nu}$ konvergira k pravi vrednosti $V_\nu(X_i^{l_1 l_2\ldots l_\nu})$ za dan $X_i^{l_1 l_2\ldots l_\nu}$, ko $b\to\infty$. To velja za vsako vozlišče, ker je $\hat{V}_T$ določen z $V(T, y_T, d_T) = C(T, y_T, d_T)$. Prihodnja vrednost zavarovanja v času $(T-1)$ je povprečje neodvisnih in enako porazdeljenih naslednikov in z zakonom velikih števil konvergira k pravi vrednosti. Ta konvergenca zajema vrednost opcije, ki je enaka višji od prihodnje vrednosti zavarovanja in izvršilne vrednosti opcije. Glavni korak v indukciji sledi iz zveznosti funkcije maksimum

$$|\max(a, c_1) - \max(a, c_2)| \leq |c_1 - c_2|, \tag{11}$$

in skupaj z (5) in (9) da

$$
\begin{aligned}
&|\hat{V}_\nu^{l_1l_2\dots l_\nu} - V_\nu(X_i^{l_1l_2\dots l_\nu})| \\
\leq\ & \frac{B_\nu^{l_1\dots l_\nu}}{b}\sum_{l=1}^{b}\Big|(B_{\nu+1}^{l_1\dots l_\nu l})^{-1}p_{x+\nu}^{l_1\dots l_\nu l}\hat{V}_{\nu+1}^{l_1\dots l_\nu l} + (B_{\nu+1}^{l_1\dots l_\nu l})^{-1}q_{x+\nu}^{l_1\dots l_\nu l}f(\nu+1, Y_{\nu+1}^{l_1\dots l_\nu l}D_\nu^{l_1\dots l_\nu}) \\
-\ & \big(\mathbb{E}^Q\big[B_{\nu+1}^{-1}p_{x+\nu}^{(\nu+1)}V(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_{\nu+1})\big|(Y_\nu, D_\nu) = (y_\nu, d_\nu)\big] \\
& +\mathbb{E}^Q\big[B_{\nu+1}^{-1}q_{x+\nu}^{(\nu+1)}f(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_\nu)\big|(Y_\nu, D_\nu) = (y_\nu, d_\nu)\big]\big)\Big|.
\end{aligned}
$$

To nam omogoča, da izpeljemo konvergenco iz koraka ν na korak $\nu + 1$.

Nas zanima $\hat{V}_0$, ocena optimalne vrednosti v trenutnem času in stanju.

Izrek 4.3 (Konsistentnost visoke cenilke)**.** *Naj bo $\mathbb{E}^Q[|C(\nu, Y_\nu, D_\nu)|^{p'}] < \infty$ za vsak ν in za nek $p' > 1$. Potem $\hat{V}_\nu^{l_1l_2\dots l_\nu}$ konvergira k $V_\nu(X_i^{l_1l_2\dots l_\nu})$ v p-normi za vsak $0 < p < p'$, ko $b \to \infty$. Še več, $\hat{V}_0$ konvergira v verjetnosti k $V(0, X_0)$ in je tako konsistentna cenilka optimalne vrednosti.*

Izrek 4.3 nam pove, da če je matematično upanje $\mathbb{E}^Q[C^2(\nu, Y_\nu, D_\nu)]$ končno za vse $\nu = 1, \dots, T$, potem $\hat{V}_0$ konvergira v verjetnosti k pravi vrednosti $V(0, X_0)$. Še več, $\hat{V}_0$ je asimptotsko nepristranska v smislu, da $\mathbb{E}^Q[\hat{V}_0] \to V(0, X_0)$. Te lastnosti veljajo, če parameter b narašča v neskončnost.

Preprost način za izračun intervala zaupanja nam določi vrednost b in K-kratna ponovitev slučajnega drevesa. Naj $\bar{V}_0(K, b)$ označuje matematično upanje K ponovitev in naj $s_V(K, b)$ označuje njihov standardni odklon. Potem z $z_{1-\delta/2}$, ki označuje $1 - \delta/2$ kvantil normalne porazdelitve,

$$
\bar{V}_0(K, b) \pm z_{1-\delta/2}\frac{s_V(K, b)}{\sqrt{K}}
$$

določa asimptotično veljaven $1 - \delta$ interval zaupanja za $\mathbb{E}^Q[\hat{V}_0]$. To je polovica intervala, ki ga potrebujemo za določitev intervala zaupanja (7). V nadaljevanju bomo določili še drugo polovico.

Visoko pristranskost visoke cenilke lahko pripišemo uporabi enakih informacij pri odločitvi, ali izvršimo opcijo ali ne. Če želimo odstraniti vir pristranskosti, moramo ločiti odločitev o izvršitvi opcije od vrednosti, ki jih prejmemo, če nadaljujemo. Torej se nova cenilka od prejšnje razlikuje v tem, da so vse, razen ene ponovitve, uporabljene za odločitev ali izvršimo opcijo ali ne. Če je ne izvršimo, uporabimo zadnjo ponovitev. V vseh končnih vozliščih je cenilka torej enaka izplačilu v tem vozlišču:

$$
\hat{v}_T^{l_1l_2\dots l_\nu} = C(T, X_T^{l_1l_2\dots l_\nu}).
$$

V vozliščih $l_1 l_2 \dots l_\nu$ ob časovnem koraku ν in za vsak $u = 1, \dots, b$ je pa enaka:

$$
\begin{aligned}
&\hat{v}_{\nu u}^{l_1 \dots l_\nu} \\
= &\begin{cases}
C(\nu, X_\nu^{l_1 \dots l_\nu}), & \text{če } \frac{B_\nu^{l_1 \dots l_\nu}}{b-1} \sum_{l=1, l \neq u}^{b} (B_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l})^{-1} p_{x+\nu}^{l_1 \dots l_\nu l} \hat{\nu}_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l} \\
 & + \frac{B_\nu^{l_1 \dots l_\nu}}{b} \sum_{l=1, l \neq u}^{b} (B_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l})^{-1} q_{x+\nu}^{l_1 \dots l_\nu l} \cdot \\
 & f(\nu+1, Y_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l} D_\nu^{l_1 \dots l_\nu}) \leq C(\nu, X_\nu^{l_1 \dots l_\nu}) \\
B_\nu^{l_1 \dots l_\nu} (B_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l})^{-1} p_{x+\nu}^{l_1 \dots l_\nu l} \hat{\nu}_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l} & \\
+ B_\nu^{l_1 \dots l_\nu} (B_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l})^{-1} q_{x+\nu}^{l_1 \dots l_\nu l} \cdot & \text{, sicer.} \\
f(\nu+1, Y_{\nu+1}^{l_1 \dots l_\nu l} D_\nu^{l_1 \dots l_\nu}) &
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Potem, s povprečjem vseh b možnosti izpustitve ene ponovitve, dobimo

$$
\hat{v}_\nu^{l_1 \dots l_\nu} := \begin{cases} \frac{1}{b} \sum_{u=1}^{b} \hat{v}_{\nu u}^{l_1 \dots l_\nu}, & \nu \in \{0, \dots, T-1\} \\ C(\nu, X_\nu^{l_1, \dots, l_\nu}), & \nu = T \end{cases}
$$

S K neodvisnimi ponovitvami slučajnega drevesa dobimo drugo cenilko za vrednost police, ki je sedaj nizko pristranska, s povprečjem vzorca $\bar{v}_0(K, b)$ in standardnim odklonom $s_v(K, b)$. Na enak način kot prej lahko izpeljemo $1 - \delta$ interval zaupanja za $\mathbb{E}^Q[\hat{v}_0]$:

$$
\bar{v}_0(K, b) \pm z_{1-\delta/2} \frac{s_v(K, b)}{\sqrt{K}},
$$

kjer je $z_{1-\delta/2}$ $1 - \delta/2$ kvantil standardne normalne porazdelitve. Z uporabo zgornje meje prvega intervala zaupanja in spodnje meje drugega intervala zaupanja, dobimo asimptotično veljaven $(1 - \delta)$-interval zaupanja za V_0:

$$
\left(\bar{v}_0(K, b) - z_{1-\frac{\delta}{2}} \frac{s_\nu(K, b)}{\sqrt{K}}, \bar{V}_0(K, b) + z_{1-\frac{\delta}{2}} \frac{s_V(K, b)}{\sqrt{K}} \right).
$$

Da ta interval ne vsebuje prave vrednosti $V(0, X_0)$, mora veljati

$$
\mathbb{E}^Q[\hat{v}_0] \leq \bar{v}_0(K, b) - z_{1-\delta/2} \frac{s_v(K, b)}{\sqrt{K}}
$$

ali

$$
\mathbb{E}^Q[\hat{V}_0] \geq \bar{V}_0(K, b) + z_{1-\delta/2} \frac{s_V(K, b)}{\sqrt{K}}.
$$

Vsak od teh dveh dogodkov se lahko zgodi z verjetnostjo $(1 - \delta/2)$ za velike K. Ker se tako $\mathbb{E}^Q[\hat{v}_0]$ kot $\mathbb{E}^Q[\hat{V}_0]$ približujeta $V(0, X_0)$, ko b narašča, lahko ta interval zaupanja, z večanjem K in b, naredimo tako majhen kot želimo.

Slaba stran ne-evropske zavarovalne pogodbe je v tem, da število potrebnih korakov simulacije narašča eksponentno s časom. Ker so zavarovanja ponavadi dolgoročne investicije, je računanje vrednosti z uporabo vgnezdenih simulacij precej obsežno in zamudno delo. Še več, za različne možnosti z nekaj (ali celo neskončno mnogo) dopustnimi dejavnostmi, kot so odkupi s spremenljivimi rentami, se močno poveča zapletenost.

4.2. **PDE pristop.**

PDE metoda ima določene prednosti v primerjavi z metodo Monte Carlo. Po eni strani vključuje izračune nekaterih posebnosti t.i. grke, ki so uporabni za zaščito. Vsak grk meri različno dimenzijo tveganja v opcijski poziciji in cilj vsakega trgovca je upravljati z grki tako, da so vsa tveganja sprejemljiva. Po drugi strani pa PDE metoda pogosto predstavlja bolj učinkovito metodo za vrednotenje ne-evropskih zavarovalnih polic. Ideja algoritma temelji na rešitvi ustreznega problema vodenja na diskretnem prostoru stanj. Za potrebe tega podpoglavja predpostavimo, da je proces stanja $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ Lévyjev proces.

Vrednost V_t, našega generičnega zavarovanja, je odvisna od t, Y_t in spremenljivk stanj D_t

$$\begin{aligned} V(\nu, Y_\nu, D_\nu) &= B_\nu \mathbb{E}^Q\big[B_{\nu+1}^{-1} p_{x+\nu}^{(\nu+1)} V(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_{\nu+1})\big|\mathcal{G}_t\big] \\ &\quad + B_\nu \mathbb{E}^Q\big[B_{\nu+1}^{-1} q_{x+\nu}^{(\nu+1)} f(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_\nu)\big|\mathcal{G}_t\big] \end{aligned}$$

Za $t \in [\nu-1, t_0]$ in čas ustavljanja T_x velja:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}^Q\big[B_{\nu+1}^{-1} p_{x+\nu}^{(\nu+1)} V(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_{\nu+1})\big|\mathcal{G}_t\big] + \mathbb{E}^Q\big[B_{\nu+1}^{-1} q_{x+\nu}^{(\nu+1)} f(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_\nu)\big|\mathcal{G}_t\big] \\ = \; &\mathbb{E}^Q\Big[\mathbb{E}^Q\big[B_{\nu+1}^{-1} p_{x+\nu}^{(\nu+1)} V(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_{\nu+1})\big|\mathcal{F}_{t_0}\big]\Big|\mathcal{G}_t\Big] \\ &+ \mathbb{E}^Q\Big[\mathbb{E}^Q\big[B_{\nu+1}^{-1} q_{x+\nu}^{(\nu+1)} f(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_\nu)\big|\mathcal{F}_{t_0}\big]\Big|\mathcal{G}_t\Big] \end{aligned}$$

Med dvema obletnicama zavarovanja $\nu-1$ in ν, $\nu \in \{1, \dots, T\}$, je razvoj V odvisen samo od t in Y_t, kadar so spremenljivke stanj konstantne. Torej je, z dano vrednostjo spremenljivk stanj $D_{\nu-1} = d_{\nu-1}$ in z dano funcijo vrednosti V_{t_0}, $t_0 \in [\nu-1, \nu)$, pod pogojem da je zavarovanec živ, funkcija vrednosti na intevalu $[\nu-1, t_0]$ enaka

$$\begin{aligned} &V(t, Y_t, d_{\nu-1}) \\ = \; &\mathbb{E}^Q\Big[1_{\{T_x > t_0\}} \exp\big\{-\int_t^{t_0} r_s ds\big\} V_{t_0}\big|\mathcal{G}_t, T_x > t\Big] \\ + \; &\mathbb{E}^Q\Big[1_{\{T_x \le t_0\}} \exp\big\{-\int_t^{t_0} r_s ds\big\} \mathbb{E}^Q\big[\exp\big\{-\int_{t_0}^{\nu} r_s ds\big\} f(\nu, Y_\nu, d_{\nu-1})\big|\mathcal{F}_{t_0}\big]\Big|\mathcal{G}_t, T_x > t\Big] \\ = \; &\underbrace{\mathbb{E}^Q\Big[\exp\big\{-\int_t^{t_0} r_s + \mu(x+s, Y_s) ds\big\} V_{t_0}\big|\mathcal{F}_t\Big]}_{=:F(t,Y_t)} \qquad (12) \\ + \; &\mathbb{E}^Q\Big[\big(1 - \exp\big\{-\int_t^{t_0} \mu(x+s, Y_s) ds\big\}\big) \exp\big\{-\int_t^{\nu} r_s ds\big\} f(\nu, Y_\nu, d_{\nu-1})\big|\mathcal{F}_t\Big]. \end{aligned}$$

$F(t, Y_t)$ lahko tu razumemo kot del vrednosti V_t, ki ustreza plačilu v primeru preživetja do časa t_0, medtem ko drugi del ustreza plačilu v primeru smrti na intervalu $[t, t_0]$. Posebno je $F(t_0, y) = V(t_0, y, d_{\nu-1})$.

Izrek 4.4 (Itôva formula za večdimenzionalne Lévyjeve procese)**.** *Naj bo* $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ *večdimenzionalni Lêvyjev proces s karakterističnim trojčkom* (A, ν, γ). *Potem za* *vsako $C^{1,2}$ funkcijo $f:[0,T]\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ velja*

$$\begin{aligned} f(t,Y_t) &- f(0,0)=\int_0^t\sum_{i=1}^d\frac{\partial f}{\partial y_i}(s,Y_{s-})dY_s^i+\int_0^t\frac{\partial f}{\partial s}(s,Y_s)ds \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t\sum_{i,j=1}^d A_{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_j}(s,Y_s)ds \\ &+ \sum_{0\le s\le t}^{\Delta Y_s\neq 0}\Big[f(s,Y_{s-}+\Delta Y_s)-f(s,Y_{s-})-\sum_{i=1}^d\Delta Y_s^i\frac{\partial f}{\partial y_i}(s,Y_{s-})\Big]. \end{aligned}$$

Izrek 4.5 (Razdelitev funkcije Lêvyjevega procesa na martingal in lokalno tendenco). *Naj bo $(Y_t)_{t\ge 0}$ Lêvyjev proces s karakterističnim trojčkom (σ^2,ν,γ) in f : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dvakrat zvezno odvedljiva funkcija, tako da so funkcija in njena dva odvoda omejeni s konstanto C. Potem je $F_t=f(Y_t)=M_t+k_t$, kjer je M martingalski del, dan z*

$$M_t=f(Y_0)+\int_0^t f'(Y_s)\sigma dW_s+\int_{[0,t]\times\mathbb{R}^d}\tilde{J}_Y(ds\ dz)[f(Y_{s-}+z)-f(Y_{s-})].$$

Tu je $\tilde{J}_Y(dt\ dz)=J_Y(dt\ dz)-\lambda dtH(dz)$ kompenzacija mere skokov (J_Y je Poissonova slučajna mera z intenziteto $\lambda dtH(dz)$). Lokalna tendenca k je pa dana z

$$\begin{aligned} k_t &= \int_0^t\frac{\sigma^2}{2}f''(Y_s)ds+\int_0^t\gamma f'(Y_s)ds \\ &+\int_{[0,t]\times\mathbb{R}}ds\ \nu(dz)[f(Y_{s-}+z)-f(Y_{s-})-zf'(Y_{s-})1_{|z|\le 1}]. \end{aligned}$$

Z uporabo Itôve formule za Lévyjeve procese dobimo

$$dF(t,Y_t)=k(t,Y_{t-},F(t,Y_{t-}))dt+dM_t,$$

kjer je $k(t,Y_{t-},F(t,Y_{t-}))$ lokalna tendenca in M_t lokalni martingal. Oba dela sta močno odvisna od izbire modela in zato ne moreta biti podrobneje opredeljena. Ker je

$$\Big(exp\big\{-\int_0^t r_s+\mu(x+s,Y_s)ds\big\}F(t,Y_t)\Big)_{t\in[\nu-1,t_0]}$$

(zaprt) Q-martingal, mora biti lokalna tendenca enaka nič Q-skoraj gotovo. Za izpeljavo PDE uporabimo standardno metodo, ki je podobna Feynman-Kacovi formuli.

Feynman-Kacova formula nam da povezavo med slučajnim procesom in paraboličnimi parcialnimi diferencialnimi enačbami. Ponudi nam metodo za rešitev nekaterih PDE s simulacijo slučajnih poti slučajnega procesa. Naj bo za $x\in\mathbb{R}$ in $t\in[0,T]$ dana PDE

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)+\frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)-V(x,t)u(x,t)+f(x,t)=0,$$

z začetnim pogojem $u(x,T)=\psi(x)$, kjer je T parameter, μ, σ, ψ in V so znane funkcije in kjer je $u:\mathbb{R}\times[0,T]$ neznana. Potem nam formula pove, da lahko rešitev zapišemo kot pogojno matematično upanje glede na verjetnostno mero Q:

$$u(y,t) = \mathbb{E}^Q\Big[\int_t^T e^{-\int_t^T V(Y_\tau,\tau)d\tau} f(Y_r,r)dr + e^{-\int_t^T V(Y_\tau,\tau)d\tau}\psi(Y_T)\Big|Y_t = y\Big],$$

kjer je Y Itôv proces, izpeljan z enačbo $dY = \mu(Y,t)dt + \sigma(Y,t)dW^Q$ z Brownovim gibanjem pod mero Q, $W^Q(t)$, in začetnim pogojem $Y(0) = y$.

Torej s pomočjo Feynman-Kacove formule dobimo P(I)DE za funkcijo $F : (t,y) \mapsto F(t,y)$:

$$-r(t,y)F(t,y) - \mu(t,y)F(t,y) + k(t,y,F(t,y)) = 0 \tag{13}$$

z začetnim pogojem

$$F(t_0,y) = V(t_0,y,d_{\nu-1}).$$

Po drugi strani je ob obletnici zavarovanja ν funkcija vrednosti levo - zvezna, t.j. $V_{t_0} \to V_\nu$, ko $t_0 \to \nu-$ ob predpostavki nearbitraže.

Da bi videli to, predpostavimo obstoj realizacije vrednosti police, za katero je $V_{t_0} \not\to V_\nu$. Potem obstaja $\varepsilon > 0$ in časovno zaporedje $t_n < \nu$ tako, da $t_n \to \nu$ in bodisi $V_\nu \le V_{t_n} + \varepsilon$ za vse n, bodisi $V_{t_n} \le V_\nu + \varepsilon$ za vse n. V prvem primeru lahko pride do arbitraže tako, da kupimo polico v času t_n, ki je dovolj blizu ν, in jo prodamo ob $t = \nu$. V drugem primeru pa lahko pride do arbitraže, če prodamo polico ob primernem času t_n in jo potem kupimo ob $t = \nu$. Torej, ko $t_n \to \nu-$ ni arbitraže in V_{t_0} je asimptotsko blizu V_ν.

S principom dinamičnega programiranja in brez arbitraže je

$$V_\nu = \sup_{\varphi_\nu \in \Phi_\nu} V(\nu, h_{\varphi_\nu}(Y_\nu, d_{\nu-1})),$$

kjer je Φ_ν množica vseh opcij, ki so lahko izvršene v času $t = \nu$ in kjer $h_{\varphi_\nu} : \Theta_{\nu-} \to \Theta_\nu$ označuje tranzicijsko funkcijo, ki opisuje, kako se spreminjajo spremenljivke stanj v času $t = \nu$, če je izvršena opcija φ_ν. Zato velja

$$V(t_o,y,d_{\nu-1}) \to \sup_{\varphi_\nu \in \Phi_\nu} V(\nu, h_{\varphi_\nu}(y,d_{\nu-1})), \text{ ko } t_0 \to \nu. \tag{14}$$

Ker je vrednost funkcije ob dospetju T znana za vse $(y,d) \in \Theta_T$, lahko uporabimo zveze (12), (13) in (14) za konstrukcijo nazajšnjega algoritma za funkcijo vrednosti na celotnem intervalu $[0,T]$.

Za $t = T-u, u \in \{1,\dots,T\}$ je ocena P(I)DE (13) za vse možne d_{T-u} z začetnim pogojem (prim. (14)) enaka

$$F(T-u+1, y_{T-u+1}) = \sup_{\varphi_{T-u+1}\in\Phi_{T-u+1}} V(T-u+1, h_{\varphi_{T-u+1}}(y_{T-u+1}, d_{T-u})). \tag{15}$$

Potem je (prim. (12))

$$\begin{aligned} & V(T-u, y_{T-u}, d_{T-u}) \\ = \; & F(T-u, y_{T-u}) \\ & + \mathbb{E}^Q\Big[\exp\big\{-\int_{T-u}^{T-u+1} r_s ds\big\} q_{x+T-u}^{T-u+1} f(T-u+1, y_{T-u+1}, d_{T-u})\Big|\mathcal{F}_{T-u}\Big]. \end{aligned}$$

V posebnem primeru življenjskega zavrovanja z odkupno opcijo, ki je podobna tisti iz prejšnjega podpoglavja, Φ_ν sestavljata le dva elementa, {SUR, NO-SUR}, ki zaporedoma ustrezata odkupu in neodkupu zavarovalne police. V primeru odkupa rezultat prehoda v funkciji vrednosti sovpada z odkupno vrednostjo $C(\nu+1, h_{SUR}(y_{\nu+1}, d_\nu))$, medtem ko neodkup police sovpada s funkcijo vrednosti $V(\nu+1, h_{NO-SUR}(y_{\nu+1}, d_\nu))$. Potem lahko (15) poenostavimo v

$$\begin{aligned} & F(T-u+1, y_{T-u+1}) \\ = \;& \max\left\{V(T-u+1, h_{\text{NO-SUR}}(y_{T-u+1}, d_{T-u})), C(T-u+1, h_{\text{SUR}}(y_{T-u+1}, d_{T-u}))\right\}. \end{aligned}$$

Da lahko uporabimo algoritem, je prostor stanj Θ_ν, $\nu = 0, \ldots, T$, diskretiziran in, če so argumenti izven mreže, uporabimo interpolacijsko metodo za določitev desne strani enačbe (15). Ker je potrebno rešiti P(I)DE za vse spremenljivke stanj v mreži, je učinkovitost algoritma močno odvisna od ocene P(I)DE.

Če prepostavimo klasičen Black - Scholesov model in determinističen razvoj smrtnosti, je rešitev PDE poznana Black - Scholesova diferencialna enačba, ki opiše ceno opcije v času:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rA_t\frac{\partial V}{\partial A_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 A_t^2\frac{\partial^2 V}{\partial A_t^2} - rV = 0,$$

kjer je $V = V(t, A_t)$, A_t je tvegan finančni instrument, r je obrestna mera in σ je lokalna nestanovitnost. Black - Scholesovo PDE lahko spremenimo v enodimenzionalno toplotno enačbo

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}) = 0,$$

kjer je $u = u(x, y, z, t)$ funkcija treh prostorskih spremenljivk (x, y, z) in ene časovne spremenljivke t. Iz toplotne enačbe lahko izpeljemo integral, ko imamo podan začetni pogoj. Vse postane bolj zapleteno, če predpostavimo modificiran Black Scholesov model s stohastično obrestno mero saj PDE ni več analitično rešljiva in za rešitev je potrebno uporabiti numerične metode.

V primerjavi z metodo Monte Carlo težavnost PDE metode ne narašča eksponentno s časom, a veliko število PDE, ki jih je potrebno rešiti, lahko močno upočasnijo algoritem.

4.3. **Monte Carlo metoda najmanjših kvadratov (LSM).**

Monte Carlo metodo najmanjših kvadratov je bila prvotno predstavljena za cenitev ameriške opcije, a se v zadnjem času uporablja tudi za vrednotenje zavarovalnih polic. Predstavili bomo algoritem za življenjska zavarovanja s preprosto odkupno opcijo.

Algoritem je sestavljen iz dveh različnih aproksimacij. Znotraj prve aproksimacije je funkcija prihodnje vrednosti zamenjana s končno linearno kombinacijo nekaterih osnovnih funkcij. Predstavili bomo algoritem v povezavi z diskretnim optimalnim časom ustavljanja. V drugi aproksimaciji sta Monte Carlo simulacija in regresija najmanjših kvadratov uporabljeni za aproksimacijo linearne kombinacije funkcij iz prvega koraka.

Naj bo $(\Omega^F, \mathcal{F}^F, Q^F, \mathbb{F}^F = (\mathcal{F}_t^F))$ filtriran verjetnostni prostor, kjer je $t \in [0,T]$ in naj bo $C(\nu, y_\nu, d_\nu)$ plačilo v času $\nu \in \{1,\dots,T\}$ v primeru, da slučajni proces stanj in spremenljivka stanj zaporedoma zavzameta vrednosti y_ν in d_ν ter je opcija v tem času izvršena. Še več, naj $C(s,\nu,y_s,d_s)$, $\nu < s \leq T$, označuje denarni tok v času s glede na proces stanj y_s in spemenljivko stanj d_s pod pogojem, da opcija ni bila izvršena pred ali ob času ν. Poleg tega še predpostavimo, da so zavarovanci živi v času ν in da sledijo optimalni strategiji v vseh možnih datumih $s \in \{\nu+1,\dots,T\}$.

Prihodnja vrednost $g(\nu, Y_\nu, D_\nu)$ ob času ν je vsota vseh pričakovanih prihodnjih denarnih tokov diskontiranih na čas ν glede na informacijo, ki jo dobimo v času ν, t.j.

$$g(\nu, Y_\nu, D_\nu) = \mathbb{E}^Q\Big[\sum_{s=\nu+1}^{T} \exp\big\{-\int_\nu^s r_u du\big\} C(s,\nu,Y_s,D_s)\Big|\mathcal{F}_\nu\Big].$$

Za določitev optimalne strategije ob času $t=\nu$, t.j. rešitev optimalnega problema ustavljanja, je sedaj dovolj primerjati odkupno vrednost s prihodnjo vrednostjo in vzeti večjega od njiju. Določimo diskretni čas ustavljanja $\tau := \tau_1$:

$$\begin{cases} \tau_T = T \\ \tau_\nu = \nu \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\geq g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} + \tau_{\nu+1}\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)<g(\nu,Y_\nu,Y_\nu)\}} \quad 1\leq \nu \leq T-1 \end{cases}$$

in vrednost police lahko zapišemo kot

$$\begin{aligned} V(0,Y_0,D_0) &= \mathbb{E}^Q\Big[\exp\big(-\int_0^\tau r_u du\big)_\tau p_x^{(\tau)} C(\tau, Y_\tau, D_\tau)|\mathcal{F}_0\Big] \\ &+ \mathbb{E}^Q\Big[\sum_{\nu=0}^{\tau-1}\exp\Big(-\int_0^{\nu+1} r_u du\Big)_\nu p_x^{(\nu)} q_{x+\nu}^{(\nu+1)} f(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_\nu)\Big|\mathcal{F}_0\Big]. \end{aligned} \tag{16}$$

Predpostavimo, da zaporedje $(L_j(Y_\nu, D_\nu))_{j\geq 0}$ zadošča naslednjima pogojema:

- **A1:** Za $\nu = 1,\dots,T-1$ je celotno zaporedje $(L_j(Y_\nu, D_\nu))_{j\geq 0}$ v prostoru $L^2(\sigma(Y_\nu, D_\nu))$,
- **A2:** Za $\nu = 1,\dots,T-1$ in $k \geq 1$ je $\alpha_j(\nu) = 0$ za $j = 1,\dots,k$, če je $\sum_{j=0}^k \alpha_j(\nu) L_j(Y_\nu, D_\nu) = 0$ skoraj gotovo.

Torej lahko zapišemo $g(\nu, y_\nu, d_\nu)$ kot

$$g(\nu, y_\nu, d_\nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(\nu) L_j(Y_\nu, D_\nu), \tag{17}$$

za nek $\alpha_j(\nu) \in \mathbb{R}, j \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Prvo aproksimacijo sestavljajo aproksimacije pogojnega matematičnega upanja glede na (Y_ν, D_ν) z ortogonalno projekcijo na prostor, ki je generiran s končnim številom (Y_ν, D_ν). Torej zamenjamo neskončno vsoto v (17) s končno vsoto prvih J osnovnih funkcij. To aproksimacijo poimenujemo $g^{(J)}$:

$$g^{(J)}(\nu, y_\nu, d_\nu) = \sum_{j=0}^{J} \alpha_j(\nu) L_j(Y_\nu, D_\nu)$$

Sedaj definirajmo nov čas ustavljanja $\tau_\nu^{(J)}$ tako, da zamenjamo g z $g^{(J)}$:

$$\begin{cases} \tau_T^{(J)} = T \\ \tau_\nu^{(J)} = \nu \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu) \geq g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} + \tau_{\nu+1}^{(J)} \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu) < g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}, \quad 1 \leq \nu \leq T-1. \end{cases}$$

Torej je prva aproksimacija $V^{(J)}$ za vrednost police enaka

$$\begin{aligned} V^{(J)}(0, Y_0, D_0) &= \mathbb{E}^Q\Big[\exp\big(-\int_0^{\tau^{(J)}} r_u du\big)_{\tau^{(J)}} p_x^{(\tau^{(J)})} C(\tau^{(J)}, Y_{\tau^{(J)}}, D_{\tau^{(J)}})\Big|\mathcal{F}_0\Big] \\ &+ \mathbb{E}^Q\Big[\sum_{\nu=0}^{\tau^{(J)}-1} \exp\big(-\int_0^{\nu+1} r_u du\big)_\nu p_x^{(\nu)} q_{x+\nu}^{(\nu+1)} f(\nu+1, Y_{\nu+1}, D_\nu)\Big|\mathcal{F}_0\Big]. \end{aligned}$$

V splošnem ne poznamo koeficientov $(\alpha_j(\nu))_{j=0}^{J-1}$, zato jih moramo oceniti. Uporabimo $K \in \mathbb{N}$ ponovitev poti (Y_ν, D_ν), $0 \leq \nu \leq T$, in jih označimo z $(Y_\nu^{(k)}, D_\nu^{(k)})$, $1 \leq k \leq K$. Koeficiente potem določimo z regresijo najmanjših kvadratov. Predpostavimo, da je optimalna strategija za $s \geq \nu + 1$ poznana in zato za vsako ponovitev poznamo denarni tok $C(s, \nu, Y_s^{(k)}, D_S^{(k)})$, $s \in \{\nu+1, \dots, T\}$. Pod temi predpostavkami je cenilka najmanjših kvadratov za koeficiente enaka

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}^{(K)}(\nu) = \arg\min_{\alpha(\nu)\in\mathbb{R}^j} \Big\{ \sum_{k=1}^{K} \Big[& \sum_{s=\nu+1}^{T} \exp\big\{-\int_\nu^s r_u^{(k)} du\big\} C(s, \nu, Y_s^{(k)}, D_s^{(k)}) \\ & - \sum_{j=0}^{J-1} \alpha_j(\nu) L_j(Y_\nu^{(k)}, D_\nu^{(k)})\Big]^2\Big\}. \end{aligned}$$

Z zamenjavo $(\alpha_j(\nu))_{j=0}^{J-1}$ z $(\hat{\alpha}_j(\nu)^{(K)})_{j=0}^{J-1}$ dobimo drugo aproksimacijo $g^{(J,K)}$

$$g^{(J,K)}(\nu, y_\nu, d_\nu) = \sum_{j=0}^{J} \hat{\alpha}_j^{(K)}(\nu) L_j(Y_\nu^{(J)}, D_\nu^{(K)}).$$

in spet definiramo čas ustavljanja $\tau^{(J,K)}$ tako, da zamenjamo g z $g^{(J,K)}$:

$$\begin{cases} \tau_T^{(J,K)} &= T \\ \tau_\nu^{(J,K)} &= \nu \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu^{(k)},D_\nu^{(k)}) \geq g^{(J,K)}(\nu,Y_\nu^{(k)},D_\nu^{(k)})\}} \qquad 1 \leq \nu \leq T-1 \\ & \quad + \tau_{\nu+1}^{(J,K)} \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu^{(k)},D_\nu^{(k)}) < g^{(J,K)}(\nu,Y_\nu^{(k)},D_\nu^{(k)})\}}. \end{cases}$$

Drugo aproksimacijo za vrednost pogodbe prav tako dobimo z zamenjavo g z $g^{(J,K)}$. Torej je druga aproksimacija enaka:

$$\begin{aligned} & V^{(J,K)}(0, Y_0^{(k)}, D_0^{(k)}) \\ = \; & \mathbb{E}^Q\Big[\exp\big(-\int_0^{\tau^{(J,K)}} r_u du\big)_{\tau^{(J,K)}} p_x^{(\tau^{(J,K)})} C(\tau^{(J,K)}, Y_{\tau^{(J,K)}}^{(k)}, D_{\tau^{(J,K)}}^{(k)})\Big|\mathcal{F}_0\Big] \\ & + \mathbb{E}^Q\Big[\sum_{\nu=0}^{\tau^{(J,K)}-1} \exp\big(-\int_0^{\nu+1} r_u du\big)_\nu p_x^{(\nu)} q_{x+\nu}^{(\nu+1)} f(\nu+1, Y_{\nu+1}^{(k)}, D_\nu^{(k)})\Big|\mathcal{F}_0\Big]. \end{aligned}$$

Algoritem za vrednostenje zavarovanj lahko sedaj konstruiramo s pomočno teh aproksimacij.

Najprej simuliramo K poti procesa stanj do časa T in izračunamo spremenljivke stanj pod predpostavko, da odkupne opcije ni mogoče izvršiti ob vsakem času. Ker poznamo vrednost zavarovalne police in denarnega toka za vsa možna stanja ob dospetju, lahko za $1 \leq k \leq K$ definiramo naslednji denarni tok:

$$C(T, T-1, Y_T^{(k)}, D_T^{(k)}) = p_{x+T-1}^{(T)} C(T, Y_T^{(k)}, D_T^{(k)}) + q_{x+T-1}^{(T)} f(T, Y_T^{(k)}, D_{T-1}^{(k)}).$$

Za $\nu = T-u$, $u \in \{1, \ldots, T-1\}$ izračunamo $g^{(J,K)}$ kot je opisano zgoraj ter s primerjavo odkupne in prihodnje vrednosti v vsakem koraku določimo optimalno strategijo. Potem določimo nove denarne tokove. Ne uporabimo ocenjene prihodnje vrednosti, ampak uporabimo dejanske denarne tokove za naslednjo regresijo, sicer je cenilka pristranska. Za $s \in \{T-u+1, \ldots, T\}$ imamo

$$\begin{aligned} &C(s, T-u-1, Y_s^{(k)}, D_s^{(k)}) \\ = &\begin{cases} 0 & \text{, če je opcija izvršena ob } T-u \\ p_{x+T-u-1}^{(T-u)} C(s, T-u, Y_s^{(k)}, D_s^{(k)}) & \text{, sicer,} \end{cases} \end{aligned}$$

in za $s = T-u$ imamo

$$\begin{aligned} &C(T-u, T-u-1, Y_{T-u}^{(k)}, D_{T-u}^{(k)}) \\ = &\begin{cases} p_{x+T-u-1}^{(T-u)} C(T-u, Y_{T-u}^{(k)}, D_{T-u}^{(k)}) & \text{, če je opcija izvršena} \\ +q_{x+T-u-1}^{(T-u)} f(T+u, Y_{T-u}^{(k)}, D_{T-u-1}^{(k)}) & \text{ob } T-u \\ q_{x+T-u-1}^{(T-u)} f(T+u, Y_{T-u}^{(k)}, D_{T-u-1}^{(k)}) & \text{, sicer.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ob času $\nu = 0$ diskontiramo denarni tok v vsakem koraku in čez vseh K poti, tj.

$$V^{(J,K)}(0, Y_0, D_0) := \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} V_0^{(J,K,k)}(0, Y_0, D_0)$$

z

$$V^{(J,K,k)}(0, Y_0, D_0) := \sum_{s=1}^{T} \exp\left\{ - \int_0^s r_u^{(k)} du \right\} C(s, 0, Y_s^{(k)}, D_s^{(k)}).$$

Preden dokažemo konvergenco, uvedimo nekaj oznak.
Za $J \geq 0$ označimo z $L^J(x)$ vektor $(L_1(x), \ldots, L_J(x))$, kjer je $x = (y, d)$, $X_\nu = (Y_\nu, D_\nu)$ in za $\nu = 1, \ldots, T-1$ določimo $\alpha^J(\nu)$ tako, da je

$$P_\nu^J(C(\tau_{\nu+1}^{(J)}, X_{\nu+1})) = \alpha^J(\nu) \cdot L^J(X_\nu).$$

Opazimo, da pod **A2** lahko J dimenzionalni parameter $\alpha^J(\nu)$ eksplicitno izrazimo:

$$\alpha^J(\nu) = (A_\nu^J)^{-1} \mathbb{E}^Q(C(\tau_{\nu+1}^{(J)}, X_{\nu+1}) L^J(X_\nu)),$$

za $\nu = 1, \ldots, T-1$, kjer je A_ν^J $J \times J$ matrika s koeficienti

$$(A_\nu^J)_{1 \leq m, l \leq J} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(L_m(X_\nu) L_l(X_\nu)).$$

Na podoben način dobimo, da je cenilka $\hat{\alpha}^{(K)}(\nu)$ enaka

$$\hat{\alpha}^{(K)}(\nu) = (A_\nu^{(J,K)})^{-1}\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} C(\tau_{\nu+1}^{(J,K)}, X_{\nu+1}^{(k)})L^J(X_\nu^{(k)}),$$

za $\nu = 1, \ldots, T-1$, kjer je $A_\nu^{(J,K)}$ $J \times J$ matrika s koeficienti

$$(A_\nu^{(J,K)})_{1\le m,l\le J} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} L_m(X_\nu^{(k)})L_l(X_\nu^{(k)}).$$

Skoraj gotovo je

$$\lim_{K\to\infty} A_\nu^{(J,K)} = A_\nu^J.$$

Zato, je pod **A2**, matrika $A_\nu^{(J,K)}$ obrnljiva za dovolj velik K. Prav tako definiramo $\alpha^J = (\alpha_1^J, \ldots, \alpha_{T-1}^J)$ in $\alpha^{(J,K)} = (\alpha_1^{(J,K)}, \ldots, \alpha_{T-1}^{(J,K)})$.

Za parameter $a^J = (a_1^J, \ldots, a_T^J)$, deterministični vektor $c = (c_1, \ldots, c_T)$ in $x = (d, y) = (x_1, \ldots, x_T)$ definirajmo vektorsko polje $F = (F_1, \ldots, F_T)$ kot

$$\begin{aligned} F_T(a^J, c, x) &= c_T \\ F_\nu(a^J, c, x) &= c_\nu 1_{\{c_\nu \ge a_\nu^J L^J(x_\nu)\}} + F_{\nu+1}(a^J, c, x)1_{\{c_\nu < a_\nu^J L^J(x_\nu)\}}, \\ \text{za } j &= 1, \ldots, T-1. \end{aligned}$$

Velja

$$F_\nu(a^J, c, x) = c_\nu 1_{B_\nu^c} + \sum_{i=\nu+1}^{T-1} c_i 1_{B_\nu \ldots B_{i-1} B_i^c} + c_T 1_{B_\nu \ldots B_{T-1}},$$

kjer je

$$B_\nu = \{c_\nu < a_\nu^J L(x_\nu)\}.$$

Poudariti moramo, da $F_\nu(a^J, C, X)$ ni odvisen od $(a_1^J, \ldots, a_{\nu-1}^J)$ in da imamo

$$\begin{aligned} F_\nu(\alpha^J(\nu), C, X) &= C_{\tau_\nu^{(J)}} \\ F_\nu(\hat{\alpha}^{(K)}(\nu), C^{(k)}, X^{(k)}) &= C^{(k)}_{\tau_\nu^{(J,K)}}. \end{aligned}$$

Za $\nu = 2, \ldots, T$ z G_ν označimo vektor funkcij vrednosti

$$G_\nu(a^J, c, x) = F_\nu(a^J, c, x)L^J(x_\nu - 1),$$

in definiramo funkciji

$$\begin{aligned} \phi_\nu(a^J) &= \mathbb{E}^Q(F_\nu(a^J, C, X)) \\ \psi_\nu(a^J) &= \mathbb{E}^Q(G_\nu(a^J, C, X)). \end{aligned}$$

Opazimo, da imamo, glede na te oznake,

$$\alpha_\nu^J = (A_\nu^J)^{-1}\psi_{\nu-1}(\alpha^J(\nu)),$$

in podobno, za $\nu = 1 \ldots, T-1$,

$$\hat{\alpha}^{(K)}(\nu) = (A_\nu^{(J,K)})^{-1}\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} G_{\nu+1}(\hat{\alpha}^{(K)}, C^{(k)}, X^{(k)}).$$

Sedaj dokažimo konvergenco $V^{(J)} \to V$, ki je direktna posledica naslednjega rezultata.

Izrek 4.6. *Naj velja* **A1**, *potem za* $\nu = 1, \ldots, T$ *velja*

$$\lim_{J\to\infty} \mathbb{E}^Q\big(C(\tau_\nu^{(J)}, Y_{\tau_\nu}^{(J)}, D_{\tau_\nu}^{(J)})\big|\mathcal{F}_\nu\big) = \mathbb{E}^Q\big(C(\tau_\nu, Y_{\tau_\nu}, D_{\tau_\nu})\big|\mathcal{F}_\nu\big).$$

Dokaz. Zgornji izrek dokažemo z indukcijo po ν. Rezultat je pravilen za $\nu = T$. Pokažimo, da če velja za $\nu+1$, velja tudi za ν, $\nu \le T-1$. Ker je

$$\begin{aligned} & C(\tau_\nu^{(J)}, Y_{\tau_\nu}^{(J)}, D_{\tau_\nu}^{(J)}) = \\ & C(\nu, Y_\nu, D_\nu)\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} + C(\tau_{\nu+1}^{(J)}, Y_{\tau_{\nu+1}}^{(J)}, D_{\tau_{\nu+1}}^{(J)})\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)< g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} \end{aligned} \tag{18}$$

za $\nu \le T-1$ in

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)<g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} \\ = \;& \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} + \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)< g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} - \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}, \end{aligned} \tag{19}$$

imamo

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}^Q\big(C(\tau_\nu^{(J)}, Y_{\tau_\nu}^{(J)}, D_{\tau_\nu}^{(J)}) - C(\tau_\nu, Y_{\tau_\nu}, D_{\tau_\nu})\big|\mathcal{F}_\nu\big) \\ \overset{(18)}{=} \;& \mathbb{E}^Q\big(C(\nu, Y_\nu, D_\nu)\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} \\ & +C(\tau_{\nu+1}^{(J)}, Y_{\tau_{\nu+1}}^{(J)}, D_{\tau_{\nu+1}}^{(J)})\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)< g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}\big|\mathcal{F}_\nu\big) \\ - \;& \Big(\mathbb{E}^Q\big(C(\nu, Y_\nu, D_\nu)\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} \\ & +C(\tau_{\nu+1}, Y_{\tau_{\nu+1}}, D_{\tau_{\nu+1}})\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)< g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}\big|\mathcal{F}_\nu\big)\Big) \\ = \;& \mathbb{E}^Q\big(C(\nu, Y_\nu, D_\nu)(\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} - \mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}})\big|\mathcal{F}_\nu\big) \\ & +\mathbb{E}^Q\big(C(\tau_{\nu+1}^{(J)}, Y_{\tau_{\nu+1}}^{(J)}, D_{\tau_{\nu+1}}^{(J)})\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)< g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}\big|\mathcal{F}_\nu\big) \\ & -\mathbb{E}^Q\big(C(\tau_{\nu+1}, Y_{\tau_{\nu+1}}, D_{\tau_{\nu+1}})\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)< g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}\big|\mathcal{F}_\nu\big) \\ \overset{(19)}{=} \;& \mathbb{E}^Q\big((C(\nu, Y_\nu, D_\nu) - C(\tau_{\nu+1}, Y_{\tau_{\nu+1}}, D_{\tau_{\nu+1}}))(\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} \\ & -\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}})\big|\mathcal{F}_\nu\big) \\ + \;& \big(\mathbb{E}^Q\big(C(\tau_{\nu+1}^{(J)}, Y_{\tau_{\nu+1}}^{(J)}, D_{\tau_{\nu+1}}^{(J)}) - C(\tau_{\nu+1}, Y_{\tau_{\nu+1}}, D_{\tau_{\nu+1}})\big)\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)< g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}\big|\mathcal{F}_\nu\big) \\ = \;& \Big(C(\nu, Y_\nu, D_\nu) - \mathbb{E}^Q\big(C(\tau_{\nu+1}, Y_{\tau_{\nu+1}}, D_{\tau_{\nu+1}})\big|\mathcal{F}_\nu\big)\Big)\big(\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} \\ & -\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\ge g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}\big) \\ + \;& \Big(\mathbb{E}^Q\big(C(\tau_{\nu+1}^{(J)}, Y_{\tau_{\nu+1}}^{(J)}, D_{\tau_{\nu+1}}^{(J)}) - C(\tau_{\nu+1}, Y_{\tau_{\nu+1}}, D_{\tau_{\nu+1}})\big)\big|\mathcal{F}_\nu\Big)\mathbf{1}_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)< g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}. \end{aligned}$$

Drugi del desne strani enačbe konvergira k 0 zaradi indukcijske predpostavke. Dokazati moramo še, da prvi del, ki ga označimo z $U_\nu^{(J)}$ konvergira k 0 v L^2. Oglejmo si

$$
\begin{aligned}
& \left|U_\nu^{(J)}\right| \\
= \quad & \left|\Big(C(\nu,Y_\nu,D_\nu)-\mathbb{E}^Q\big(C(\tau_{\nu+1},Y_{\tau_{\nu+1}},D_{\tau_{\nu+1}})\big|\mathcal{F}_\nu\big)\Big)\right|\cdot\Big|\big(1_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\geq g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} \\
& -1_{\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\geq g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}\big)\Big| \\
= \quad & \left|\Big(C(\nu,Y_\nu,D_\nu)-\mathbb{E}^Q\big(C(\tau_{\nu+1},Y_{\tau_{\nu+1}},D_{\tau_{\nu+1}})\big|\mathcal{F}_\nu\big)\Big)\right|\cdot\Big|\big(1_{\{g>C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\geq g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}} \\
& -1_{g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)>\{C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\geq g(\nu,Y_\nu,D_\nu)\}}\big)\Big| \\
\leq \quad & \left|\Big(C(\nu,Y_\nu,D_\nu)-\mathbb{E}^Q\big(C(\tau_{\nu+1},Y_{\tau_{\nu+1}},D_{\tau_{\nu+1}})\big|\mathcal{F}_\nu\big)\Big)\right| \\
& \cdot 1_{\{|C(\nu,Y_\nu,D_\nu)-g(\nu,Y_\nu,D_\nu)|\leq|g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)-g(\nu,Y_\nu,D_\nu)|\}} \\
\leq \quad & \left|g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)-\mathbb{E}^Q\big(C(\tau_{\nu+1},Y_{\tau_{\nu+1}},D_{\tau_{\nu+1}})|\mathcal{F}_\nu\big)\right| \\
\leq \quad & \left|g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)-P_j^J(\mathbb{E}^Q(C(\tau_{\nu+1},Y_{\tau_{\nu+1}},D_{\tau_{\nu+1}})))\right| \\
& +\left|P_j^J(\mathbb{E}^Q(C(\tau_{\nu+1},Y_{\tau_{\nu+1}},D_{\tau_{\nu+1}})))-\mathbb{E}^Q\big(C(\tau_{\nu+1},Y_{\tau_{\nu+1}},D_{\tau_{\nu+1}})|\mathcal{F}_\nu\big)\right|.
\end{aligned}
$$

Ampak

$$
g^{(J)}(\nu,Y_\nu,D_\nu)=P_\nu^J(C(\tau_{\nu+1}^{(J)},Y_{\tau_{\nu+1}^{(J)}},D_{\tau_{\nu+1}^{(J)}}))=P_\nu^J\big(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(C(\tau_{\nu+1}^{(J)},Y_{\tau_{\nu+1}^{(J)}},D_{\tau_{\nu+1}^{(J)}})\big|\mathcal{F}_\nu\big)\big),
$$

ker je P_j^J ortogonalna projekcija na podprostor prostora $\mathcal{F}_\nu$-merljivih slučajnih spremeljivk. Posledično je

$$
\begin{aligned}
||U_\nu^{(J)}||_2 \quad \leq \quad & ||\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(C(\tau_{\nu+1}^{(J)},Y_{\tau_{\nu+1}^{(J)}},D_{\tau_{\nu+1}^{(J)}})\big|\mathcal{F}_\nu\big)-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(C(\tau_{\nu+1},Y_{\tau_{\nu+1}},D_{\tau_{\nu+1}})\big|\mathcal{F}_\nu\big)||_2 \\
+ \quad & ||P_\nu^J\big(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(C(\tau_{\nu+1},Y_{\tau_{\nu+1}},D_{\tau_{\nu+1}})\big|\mathcal{F}_\nu\big)\big)-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(C(\tau_{\nu+1},Y_{\tau_{\nu+1}},D_{\tau_{\nu+1}})\big|\mathcal{F}_\nu\big)||_2.
\end{aligned}
$$

Prvi del desne strani neenačbe gre zaradi inducijske predpostavke proti 0, drugi del pa zaradi **A1**. □

Sedaj fiksiramo vrednost J in gledamo samo lastnosti $V^{(J,K)}$, ko gre K, ki predstavlja število Monte Carlo simulacij, proti neskončno. Zaradi enostavnosti ne pišemo več indeksa (J).

Izrek 4.7. *Predpostavimo, da je za $\nu=1,\ldots,T-1$ verjetnost $P\big(g(\nu,Y_\nu,D_\nu)=C(\nu,Y_\nu,D_\nu)\big)=0$. Potem $V^{(J,K)}$ konvergira s.g. proti $V^{(J)}$, ko gre K v neskončno. Prav tako imamo skoraj gotovo konvergenco $\frac{1}{K}\sum_{k=1}^K C(\tau_\nu^{(J,K)},Y_{\tau_\nu^{(J,K)}},D_{\tau_\nu^{(J,K)}})$ proti $\mathbb{E}^Q\big(C(\tau_\nu^{(J)},Y_{\tau_\nu^{(J)}},D_{\tau_\nu^{(J)}})\big)$, ko gre $K\to\infty$ za $\nu=1,\ldots,T$.*

Če zapišemo to z novimi oznakami, ki smo jih prej vpeljali, moramo dokazati

$$
\lim_K \frac{1}{K}\sum_{k=1}^K F_\nu(\hat{\alpha}^{(K)}(\nu),C^{(k)},X^{(k)})=\phi_\nu(\alpha(\nu)),\ 1\leq\nu\leq T.
$$

Dokaz temelji na naslednjih dveh lemah.

Lema 4.8. *Za $\nu=1,\ldots,T-1$ imamo*

$$
|F_\nu(a,C,X)-F_\nu(b,C,X)|\leq\Big(\sum_{i=\nu}^T|C_i|\Big)\Big(\sum_{i=\nu}^{T-1}\mathbf{1}_{|C_i-b_iL(X_i)|\leq|a_i-b_i||L(X_i)|}\Big)
$$

Dokaz. Naj bo $B_\nu = \{C_\nu < a_\nu \cdot L(X_\nu)\}$ in $\tilde{B}_\nu = \{C_\nu < b_\nu \cdot L(X_\nu)\}$. Potem je

$$\begin{aligned} F_\nu(a, C, X) - F_\nu(b, C, X) &= C_\nu \mathbf{1}_{B_\nu^c} + \sum_{i=\nu+1}^{T-1} C_\nu \mathbf{1}_{B_\nu \dots B_{i-1} B_i^c} + C_T \mathbf{1}_{B_\nu \dots B_{T-1}} \\ &\quad - \big(C_\nu \mathbf{1}_{\tilde{B}_\nu^c} + \sum_{i=\nu+1}^{T-1} C_\nu \mathbf{1}_{\tilde{B}_\nu \dots \tilde{B}_{i-1} \tilde{B}_i^c} + C_T \mathbf{1}_{\tilde{B}_\nu \dots \tilde{B}_{T-1}} \big) \\ &= C_\nu (\mathbf{1}_{B_\nu^c} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_\nu^c}) + \sum_{i=\nu+1}^{T-1} C_\nu (\mathbf{1}_{B_\nu \dots B_{i-1} B_i^c} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_\nu \dots \tilde{B}_{i-1} \tilde{B}_i^c}) \\ &\quad + C_T (\mathbf{1}_{B_\nu \dots B_{T-1}} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_\nu \dots \tilde{B}_{T-1}}). \end{aligned}$$

Velja

$$\begin{aligned} |\mathbf{1}_{B_\nu^c} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_\nu^c}| &= |\mathbf{1}_{\{C_\nu \geq a_\nu L(X_\nu)\}} - \mathbf{1}_{\{C_\nu \geq b_\nu L(X_\nu)\}}| \\ &= |\mathbf{1}_{\{b_\nu L(X_\nu) > C_\nu \geq a_\nu L(X_\nu)\}} - \mathbf{1}_{\{a_\nu L(X_\nu) > C_\nu \geq b_\nu L(X_\nu)\}}| \\ &\leq \mathbf{1}_{\{|C_\nu - b_\nu L(X_\nu)| \leq |a_\nu L(X_\nu) - b_\nu L(X_\nu)|\}} \\ &\leq \mathbf{1}_{\{|C_\nu - b_\nu L(X_\nu)| \leq |a_\nu - b_\nu| |L(X_\nu)|\}} \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} |\mathbf{1}_{B_\nu} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_\nu}| &= |1 - \mathbf{1}_{\{C_\nu \geq a_\nu L(X_\nu)\}} - (1 - \mathbf{1}_{\{C_\nu \geq b_\nu L(X_\nu)\}})| \\ &= |\mathbf{1}_{\{C_\nu \geq a_\nu L(X_\nu)\}} + \mathbf{1}_{\{C_\nu \geq b_\nu L(X_\nu)\}}| \\ &= |\mathbf{1}_{\{a_\nu L(X_\nu) \leq C_\nu < b_\nu L(X_\nu)\}} + \mathbf{1}_{\{b_\nu L(X_\nu) \leq C_\nu < a_\nu L(X_\nu)\}}| \\ &\leq \mathbf{1}_{\{|C_\nu - b_\nu L(X_\nu)| \leq |a_\nu - b_\nu| |L(X_\nu)|\}}. \end{aligned}$$

Še več, velja

$$\begin{aligned} |\mathbf{1}_{B_\nu \dots B_{i-1} B_i^c} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_\nu \dots \tilde{B}_{i-1} \tilde{B}_i^c}| &\leq \sum_{m=\nu}^{i-1} |\mathbf{1}_{B_m} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_m}| + |\mathbf{1}_{B_i^c} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_i^c}| \\ &= \sum_{m=\nu}^{i} |\mathbf{1}_{B_m} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_m}|, \end{aligned}$$

kar da rezultat leme (4.8)

$$\begin{aligned} |F_\nu(a, C, X) - F_\nu(b, C, X)| &\leq \sum_{i=\nu}^{T} |C_i| \sum_{i=\nu}^{T-1} |\mathbf{1}_{B_i} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_i}| \\ &= \sum_{i=\nu}^{T} |C_i| \sum_{i=\nu}^{T-1} \mathbf{1}_{\{|C_\nu - b_\nu L(X_\nu)| \leq |a_\nu - b_\nu| |L(X_\nu)|\}}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.9. *Prepostavimo, da za* $\nu = 1, \dots, T-1$ *velja* $\mathbb{P}(\alpha(\nu) \cdot L(X_\nu) = C_\nu) = 0$, *potem* $\hat{\alpha}^{(K)}(\nu)$ *skoraj gotovo konvergira k* $\alpha(\nu)$.

Dokaz. Dokažemo z indukcijo po ν. Za $\nu = T-1$ je rezultat direktna posledica zakona velikih števil. Sedaj predpostavimo, da lema drži za $i = \nu, \dots, T-1$. Dokazati želmo, da drži tudi za $\nu - 1$. Imamo

$$\alpha^{(K)}(\nu - 1) = (A_{\nu-1}^{(K)})^{-1} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} G_\nu(\alpha^{(K)}, C^{(k)}, X^{(k)}).$$

Iz zakona velikih števil vemo, da $A_{\nu-1}^{(K)}$ s.g. konvergira k $A_{\nu-1}$. Dokazat moramo še, da $\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} G_\nu(\alpha^{(K)}, C^{(k)}, X^{(k)})$ konvergira k $\psi_\nu(\alpha)$. Iz zakona velikih števil imamo konvergenco $\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} G_\nu(\alpha, C^{(k)}, X^{(k)})$ k $\psi_\nu(\alpha)$, torej je dovolj dokazati, da je

$$\lim_{K\to+\infty} \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \left(G_\nu(\alpha^{(K)}, C^{(k)}, X^{(k)}) - G_\nu(\alpha, C^{(k)}, X^{(k)})\right) = 0.$$

Označim $G_K = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} \left(G_\nu(\alpha^{(K)}, C^{(k)}, X^{(k)}) - G_\nu(\alpha, C^{(k)}, X^{(k)})\right)$ in poglejmo $|G_K|$:

$$\begin{aligned}
|G_K| &\leq \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} |L(X_{\nu-1}^{(k)})||F_\nu(\alpha^{(K)}, C^{(k)}, X^{(k)}) - F_\nu(\alpha, C^{(k)}, X^{(k)})| \\
&\leq \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} |L(X_{\nu-1}^{(k)})| \sum_{i=\nu}^{T} |C_\nu^{(k)}| \sum_{i=\nu}^{T-1} \mathbf{1}_{\{|C_i^{(k)} - \alpha(i)\cdot L(X_i^{(k)})| \leq |\alpha^{(K)}(i) - \alpha(i)||L(X_i^{(k)})|\}}.
\end{aligned}$$

Ker za $i = \nu, \ldots, T-1$ $\alpha^{(K)}(i)$ s.g. konvergira k $\alpha(i)$, imamo za vsak $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
& \limsup |G_K| \\
\leq\ & \limsup \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} |L(X_{\nu-1}^{(k)})| \sum_{i=\nu}^{T} |C_i^{(k)}| \sum_{i=\nu}^{T-1} \mathbf{1}_{\{|C_i^{(k)} - \alpha(i)\cdot L(X_i^{(k)})| \leq \varepsilon |L(X_i^{(k)})|\}} \\
=\ & \mathbb{E}^Q |L(X_{\nu-1})| \sum_{i=\nu}^{T} |C_i| \sum_{i=\nu}^{T-1} \mathbf{1}_{\{|C_i - \alpha(i)\cdot L(X_i)| \leq \varepsilon |L(X_i)|\}},
\end{aligned}$$

kjer zadnji enačaj sledi iz zakona velikih števil. Naj gre $\varepsilon \to 0$, potem dobimo konvergenco proti 0, odkar je za $\nu = 1, \ldots, T-1$ $\mathbb{P}(\alpha(\nu)\cdot L(X_\nu) = C_\nu) = 0$. □

Dokaz izreka (4.7) je enak dokazu leme (4.9).

Ta dva rezultata konvergence kažeta, da pod šibkimi pogoji algoritem da dobro aproksimacijo dejanske vrednosti police, ko izberemo J in K dovolj velika.

LSM algoritem lahko preprosto implementiramo za zavarovanja, ki vsebujejo odkupno opcijo, ker lahko preprosto določimo prihodnje denarne tokove. Saj velja, da če je odkupna opcija izvršena ob času $\nu_0 \in \{1, \ldots, T-1\}$, je denarni tok $C(\nu_0, \nu_0 - 1, Y_{\nu_0}, D_{\nu_0})$ enak odkupni vrednosti in vsi prihodnji denarni tokovi so enaki 0.

Če imamo bolj kompleksna zavarovanja, katerih trajanje lahko da ni omejeno, je izplejava prihodnjih denarnih tokov bolj zapletena. Na primer, če izvršimo opcijo prekinitve (ang. withdrawal option), ki vključuje zagotovljeno minimalno vrednost prekinitve, se spremenijo spremenljivke stanja v tem času. Iz prvotnega vzorca poti pa ne poznamo prihodnjih denarnih tokov za nove spremenljivke stanj. Torej moramo določiti prihodnje denarne tokove do dospelosti T. To je lahko zelo utrudljivo, če gre za dolgoročno zavarovalno pogodbo in je opcija izvršena relativno zgodaj. Posledično se znatno poveča zahtevnost algoritma.

Za potencialno rešitev tega problema lahko uporabimo diskontirano oceno pogojnega matematičnega upanja regresije namesto diskontiranih prihodnjih denarnih tokov.

A to vodi v pristranskost cenilke. Tudi če sprejmemo pristranskost, se lahko pojavi problem glede kakovosti regresijske funkcije. V LSM algoritmu koeficiente regresijske funkcije določimo s pomočjo vzorca poti, ki je generiran pod predpostavko, da opcija ni izvršena ob vsakem času, t.j. aproksimacija prihodnje vrednosti bo dobra za vrednosti, ki so blizu uporabljenih regresorjev. Ker prekinitev pogodbe zmanjšuje vrednost na računu, $g^{(J,K)}$ ni dobra ocena vrednosti pogodbe z visoko prekinitvijo (ang. high withdrawals) in zato nove spremenljivke stanja ne bodo blizu regresorjem. Ideja za rešitev problema bi lahko bila uporaba različnih tehnik vzorčenja, simulacija razvoja za eno obdobje, izračun vrednosti pogodbe na koncu tega obdobja in uporaba diskontirane vrednosti pogodbe kot regresant. Kakorkoli, določitev teh začetnih vrednosti ni enostavno.

Za temi problemi ima LSM pristop korenite prednosti v primerjavi z ostalimi pristopi. Po eni strani število simulacijskih korakov narašča linearno s časom, po drugi strani pa se izognemo reševanju velikega števila P(I)DE. Glede na P(I)DE je LSM pristop tudi neodvisen od osnovnega modela sredstev. Edino kar je potrebno popraviti, če želimo vključiti nov model sredstev, je Monte Carlo simulacija.

5. Numerična analiza

V tem poglavju bomo najprej predstavili zavarovalniški model in dve razlčni porazdelitveni shemi bonusa. Primerjali bomo rezultate, dobljene s tremi različnimi numeričnimi pristopi za police življenjskih zavarovanj z odkupno opcijo v dveh modelih sredstev.

5.1. **Zavarovalniški model.**

Za modeliranje finančnega stanja zavarovalnice uporabimo preprosto bilanco (glej tabelo 1). To ni bilanca podjetja, ampak je bolj pregled sredstev in obevznosti glede na dano zavarovalno polico.

Tabela 1. Bilanca zavarovalnice.

Sredstva	Obveznosti
A_t	L_t
	R_t

Na strani sredstev imamo A_t, ki označuje tržno vrednost portfelja sredstev zavarovalnice v času t. Na strani obveznosti pa imamo L_t, ki predstavlja stanje na računu zavarovanca oziroma vrednost police in $R_t = A_t - L_t$, ki označuje rezerve v času t. Ker ne upoštevamo nobenih stroškov, je vrednost police ob času $t = 0$ enaka vplačani enkratni premiji P, torej je $L_0 = P$. Zaradi poenostavitve ne upoštevamo umrljivosti oziroma preživetja. Zavarovalna vsota se izplača ob dospetju T, ne glede na to, ali je zavarovanec živ ali mrtev. Seveda lahko zavarovalec v času trajanja zavarovanja odkupi polico. Če je zavarovanje prekinjeno ob času $\nu_0 \in \{1, \ldots, T\}$, zavarovanec prejme trenutno vrednost police L_{ν_0}. Predpostavimo še, da so dividende d_ν izplačane delničarjem ob obletnici zavarovanja.

Uporabili bomo dve različni porazdelitveni shemi bonusa, ki opišeta razvoj obveznosti, in sicer MUST-primer in IS-primer. MUST-primer vsebuje vse, kar so nemške zavarovalnice dolžne prenesti na zavarovance z upoštevanjem regulativ in zakonskih zahtev. IS-primer pa modelira tipčno obnašanje nemških zavarovalnic v preteklosti.

5.1.1. *MUST-primer.*

V Nemčiji so zavarovalnice dolžne zagotoviti mnimalno letno obrestno mero g, ki je trenutno fiksirana na 2,25%, torej mora veljati

$$L_\nu \geq L_{\nu-1}(1+g),\ \nu = 1, 2, \ldots, T.$$

Ta obrestna mera mora biti zagotovljena skozi celotno dobo trajanja zavarovanja, ne glede na to, ali se je minimalna obrestna mera spremenila zaradi novih regulativ. To pomeni, da za vse police, ki so bile prodane, ko je veljala višja minimalna zagotovljena obrestna mera, mora skozi celotno dobo zavarovanja veljati višja obrestna mera, torej tista, ki je veljala v času sklenitve zavarovanja.

Še več, z upoštevanjem regulativ o minimalnem premijskem povračilu v nemških življenjskih zavarovalnicah mora biti minimalna stopnja udeležbe δ pri dobičku na knjigovodsko vrednost prenešena na zavarovance. Dobiček na knjigovodsko vrednost, zaradi računovodskih pravil, ponavadi ne sovpada z dobičkom na tržno vrednost. Dobiček na tržno vrednost je enak $A_\nu^- - A_{\nu-1}^+$, kjer A_ν^- označuje tržno vrednost sredstev tik pred izplačilom dividend d_ν in $A_\nu^+ = \max\{A_\nu^- - d_\nu, L_\nu\}$ označuje tržno vrednost sredstev tik po izplačilu dividend d_ν ob času ν. Zato predpostavimo, da je dobiček na knjigovodsko vrednost enaka deležu y dobička na tržno vrednost in dobimo:

$$L_\nu = (1+g)L_{\nu-1} + [\delta y(A_\nu^- + A_{\nu-1}^+) - gL_{\nu-1}]^+, 1 \leq \nu \leq T. \tag{20}$$

Pod predpostavko, da je preostali del dobička na knjigovodsko vrednost izplačan z dividendami, velja

$$\begin{aligned} d_\nu &= (1-\nu)y(A_\nu^- + A_{\nu-1}^+)\mathbf{1}_{\{\delta y(A_\nu^- + A_{\nu-1}^+) > gL_{\nu-1}\}} \\ &\quad + [y(A_\nu^- + A_{\nu-1}^+) - gL_{\nu-1}]\mathbf{1}_{\{\delta y(A_\nu^- + A_{\nu-1}^+) \leq gL_{\nu-1}\} \leq y(A_\nu^- + A_{\nu-1}^+)} \end{aligned} \tag{21}$$

5.1.2. *IS-primer.*

V IS-primeru modeliramo obnašanje nemških zavarovalnic. Seveda izplačilo ne sme biti nižje kot v MUST-primeru, torej mora veljati

$$L_\nu \geq (1+g)L_{\nu-1} + [\delta y(A_\nu^- + A_{\nu-1}^+) - gL_{\nu-1}]^+, 1 \leq \nu \leq T. \tag{22}$$

V preteklosti so nemške zavarovalnice poskušale dodeliti svojim zavarovancem stabilne, a še vedno konkurenčne donose. V letih z visokim dobičkom so zbrali rezerve in jih v letih z nižjim dobičkom dodelili zavarovancem. Samo v primeru, če so rezerve padle pod ali narasle nad določeno mejo, so zavarovalnice znižale ali povišale izplačan bonus.

Delež rezerv x_ν je definiran kot razmerje med rezervami in vrednostjo police, t.j.

$$x_\nu = \frac{R_\nu}{L_\nu} = \frac{A_\nu^+ - L_\nu}{L_\nu}.$$

Naj bo $z \in [0,1]$ ciljna obrestna mera zavarovalnic in naj bo $\alpha \in [0,1]$ delež preostalega dobička po pripisu zagotovljene obrestne mere na police zavarovancev, ki je razdeljen med delničarje. Ciljna obrestna mera z vodi delež rezerv med vnaprej določeni omejitvi a in b z

$$\begin{aligned} L_\nu &= (1+z)L_{\nu-1}, \\ d_\nu &= \alpha(z-g)L_{\nu-1}, \\ A_\nu^+ &= A_\nu^- - d_\nu, \\ R_\nu &= A_\nu^+ - L_\nu. \end{aligned}$$

Pogoj, da je delež rezev $a \leq x \leq b$, je izpolnjen natanko tedaj, ko

$$\big((1+a)(1+z) + \alpha(z-g)\big)L_{\nu-1} \leq A_\nu^- \leq \big((1+b)(1+z) + \alpha(z-g)\big)L_{\nu-1}.$$

V tem primeru je prav ciljna obrestna mera z pripisana na polico zavarovanca.

Če zaradi ciljne obrestne mere z rezerve padejo pod a in, če zaradi zagotovljene minimalne obrestne mere g rezerve narastejo nad a, bo izbrana tista obrestna mera, ki vodi delež rezerv (po pripisu obresti in izplačilu dividend) v a, tj: $x_\nu = a$. Torej dobimo

$$\begin{aligned} L_\nu &= (1+g)L_{\nu-1} + \frac{1}{1+a+\alpha}\big[A_\nu^- - (1+g)(1+a)L_{\nu-1}\big], \\ d_\nu &= \frac{\alpha}{1+a+\alpha}\big[A_\nu^- - (1+g)(1+a)L_{\nu-1}\big]. \end{aligned}$$

Če minimalna obrestna mera g vodi delež rezerv pod a, je upoštevana obrestna mera g in se dividende ne izplačajo, torej je

$$\begin{aligned} L_\nu &= (1+g)L_{\nu-1}, \\ d_\nu &= 0. \end{aligned}$$

Če zaradi ciljne obrestne mere z rezerve narastejo nad zgornjo mejo b, bo zavarovalnica pripisala tisto obrestno mero na police zavarovancev, ki vodi delež rezerv (po pripisu obresti in izplačilu dividend) v b, t.j. $x_\nu = b$ in dobimo

$$\begin{aligned} L_\nu &= (1+g)L_{\nu-1} + \frac{1}{1+b+\alpha}\big[A_\nu^- - (1+g)(1+b)L_{\nu-1}\big], \\ d_\nu &= \frac{\alpha}{1+b+\alpha}\big[A_\nu^- - (1+g)(1+b)L_{\nu-1}\big]. \end{aligned}$$

Še vedno je pa potrebno preveriti, če je izpolnjen pogoj (22). Torej je L_ν definiran tako kot v (20) in

$$d_\nu = \alpha[\delta y(A_\nu^- + A_{\nu-1}^+) - gL_{\nu-1}]^+.$$

Z upoštevanjem vseh primerov in pogojev lahko zapišemo

$$
\begin{aligned}
L_\nu &= (1+g)L_{\nu-1} + \max\Big\{\big[\delta y(A_\nu - +A^+_{\nu-1}) - gL_{\nu-1}\big]^+, \\
&\quad (z-g)L_{\nu-1}\mathbf{1}_{\{((1+a)(1+z)+\alpha(z-g))L_{\nu-1}\le A^-_\nu \le ((1+b)(1+z)+\alpha(z-g))L_{\nu-1}\}} \\
&\quad + \frac{1}{1+a+\alpha}\big[A^-_\nu - (1+g)(1+a)L_{\nu-1}\big] \\
&\quad \mathbf{1}_{\{(1+a)(1+g)L_{\nu-1}<A^-_\nu<((1+a)(1+z)+\alpha(z-g))L_{\nu-1}\}} \\
&\quad + \frac{1}{1+b+\alpha}\big[A^-_\nu - (1+g)(1+b)L_{\nu-1}\big]\mathbf{1}_{\{(1+b)(1+z)+\alpha(z-g))L_{\nu-1}<A^-_\nu\}}\Big\}
\end{aligned}
$$

in

$$
\begin{aligned}
d_\nu &= \max\Big\{\alpha\big[\delta y(A^-_\nu - A^+_{\nu-1}) - gL_{\nu-1}\big]^+, \\
&\quad \alpha(z-g)L_{\nu-1}\mathbf{1}_{\{((1+a)(1+z)+\alpha(z-g))L_{\nu-1}\le A^-_\nu \le ((1+b)(1+z)+\alpha(z-g))L_{\nu-1}\}} \\
&\quad + \frac{\alpha}{1+a+\alpha}\big[A^-_\nu - (1+g)(1+a)L_{\nu-1}\big] \\
&\quad \mathbf{1}_{\{(1+a)(1+g)L_{\nu-1}<A^-_\nu<((1+a)(1+z)+\alpha(z-g))L_{\nu-1}\}} \\
&\quad + \frac{\alpha}{1+b+\alpha}\big[A^-_\nu - (1+g)(1+b)L_{\nu-1}\big]\mathbf{1}_{\{(1+b)(1+z)+\alpha(z-g))L_{\nu-1}<A^-_\nu\}}\Big\}.
\end{aligned}
$$

5.2. **Black - Scholesov model sredstev.**

Upoštevali bomo model sredstev geometričnega Brownovega gibanja z deterministično obrestno mero r (konstantno kratkoročno obrestno mero r).

Tu imamo klasičen Black - Scholesov (BS) model, tako da se proces sredstev pod do tveganja nevtralno mero Q razvija po stohastični diferencialni enačbi (SDE):

$$
\begin{aligned}
dA_t &= rA_t dt + \sigma_A A_t dW^Q_t \\
A_0 &= P(1+x_0),
\end{aligned}
$$

kjer je r konstantna kratkoročna obrestan mera, W je standardno Brownovo gibanje pod Q in kjer $\sigma_A > 0$ označuje nestanovitnost procesa sredstev A_t. Ker so dividende izplačane ob obletnici police, dobimo

$$
A^-_t = A^+_{t-1}\exp\Big(r - \frac{\sigma_A^2}{2} + \sigma_A(W_t - W_{t-1})\Big).
$$

V skladu z do tveganja nevtralno formulo vrednotenja, je vrednost za police življenjskega zavarovanja, z upoštevanjem odkupne opcije, dana z:

$$
V_0^{\text{NON-EUR}} = \sup_{\tau\in\mathcal{Y}_0}\mathbb{E}^Q\Big[\exp\big\{-\int_0^\tau r_u du\big\}L_\tau|\mathcal{F}_0\Big],
$$

kjer je $\mathcal{Y}_0$ množica vseh časov ustavljanja v $\{1,\dots,T\}$.

5.3. **Izbira parametrov.**

Zagotovljena minimalna obrestna mera naj bo $g = 3,5\%$, minimalna udeležena mera naj bo $\delta = 90\%$ in minimalen proporcionalen dobiček na tržno vrednosti, ki mora biti enak bilančnemu dobičku na knjigovodsko vrednosti, naj bo $y = 50\%$. Interval rezerve naj bo definiran na $[a, b] = [5\%, 30\%]$, delež dobička, ki se prenese na delničarje, naj bo fiksiran na $\alpha = 5\%$ in naj bo ciljna obrestna mera $z = 5\%$. Predpostavimo, da je nestanovitnost sredstev portfelja enaka $\sigma_A = 7,5\%$. Upoštevamo le zavarovanja z zapadlostjo $T = 10$ let. Enkratna vplačana premija naj bo $P = 10000$, začetna kvota rezerv zavarovalnice naj bo $x_0 = 10\%$, konstanta obrestna mera r pa naj bo postavljena na 4%.

5.3.1. *Metoda končnih diferenc.*
Black - Scholesovo parcialno diferencialno enačbo lahko rešimo s principom končnih diferenc. V naših nastavitvah je $(A_t)_{t\in[0,T]}$ proces stanj za Black - Scholesov model in spremenljivke stanj lahko predstavimo kot $(D_\nu) = (A_\nu^+, A_\nu, L_\nu)$. Torej je vrednost police odvisna od treh spremenljivk, ν, A_t ter L_t in zato moramo diskretizirati funkcijo vrednosti v treh dimenzijah. Z $\Delta\nu$ označimo velikost koraka med dvema vrednostima V v časovni dimenziji. Podobno z ΔA in ΔL označimo velikost koraka med dvema točkama na mreži v A in L dimenziji. Z $\bar{A}$ in $\bar{L}$ označimo najvišji možni vrednosti za A in L. Torej je $(\nu, A, L) \in \big([0,T] \times [0,\bar{A}] \times [0,\bar{L}]\big)$. Z $I = \frac{\bar{A}}{\Delta A}$ in $J = \frac{\bar{L}}{\Delta L}$ označimo število korakov v A in L dimenziji ter z $S = \frac{T}{\Delta\nu}$ označimo število korakov na leto v časovni dimenziji.

Ker mora biti diferencialna enačba (16) rešena med poljubnima dvema zaporednima letoma, $t-1$ in t, lahko vrednost police V zapišemo kot točko mreže

$$V_{t,s}^{j,i} =: V((t+1) - s\Delta\nu, i\Delta A, j\Delta L),$$

kjer je $t \in \{0, \ldots, T-1\}$, $s \in [0, S]$, $i \in [0, I]$ in $j \in [0, J]$. Enačbo (16) lahko potem zapišemo v končni diferenčni obliki kot

$$\frac{V_{t,s}^{i,j} - V_{t,s+1}^{i,j}}{\Delta\nu} + \frac{1}{2}\sigma_A^2 (i\Delta A)^2 \Big(\frac{V_{t,s+1}^{i+1,j} - 2V_{t,s+1}^{i,j} + V_{t,s+1}^{i-1,j}}{\Delta A^2}\Big)$$
$$+ r(i\Delta A)\Big(\frac{V_{t,s+1}^{i+1,j} - V_{t,s+1}^{i-1,j}}{2\Delta A}\Big) - rV_{t,s+1}^{i,j} = 0.$$

To lahko poenostavimo v zapis

$$E^i V_{t,s+1}^{i-1,j} + H^i V_{t,s+1}^{i,j} + G^i V_{t,s+1}^{i+1,j} = V_{t,s}^{i,j} \tag{23}$$

kjer so

$$\begin{aligned} E^i &= \frac{r(i\Delta Q)}{2}\frac{\Delta\nu}{\Delta A} - \frac{\sigma_A^2 (i\Delta A)^2}{2}\frac{\Delta\nu}{(\Delta A)^2}, \\ H^i &= 1 + r\Delta\nu + \sigma_A^2 (i\Delta A)^2 \frac{\Delta\nu}{(\Delta A)^2}, \\ G^i &= -\frac{r(i\Delta A)}{2}\frac{\Delta\nu}{\Delta A} - \frac{\sigma_A^2 (i\Delta A)^2}{2}\frac{\Delta\nu}{(\Delta A)^2}. \end{aligned}$$

Če želimo rešiti to končno diferenčno shemo, morata biti izpolnjena dva mejna pogoja. Prvi mejni pogoj $A = 0$ (t.j. $i = 0$) enačbo (16) poenostavi v

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} - rV = 0.$$

Ustrezna končna diferenčna relacija je

$$V_{t,s+1}^{0,j} = (1 - r\Delta\nu)V_{t,s}^{0,j}. \tag{24}$$

Pri drugem mejnem pogoju $A = \bar{A}$ (t.j. $i = I$) upoštevamo dejstvo, da je vrednost police aproksimacijsko linearna, t.j.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial A^2} = 0, \text{ za } A \to \infty. \tag{25}$$

Spet lahko to zapišemo kot

$$V_{t,s+1}^{I,j} = 2V_{t,s+1}^{I-1,j} - V_{t,s+1}^{I-2,j}. \tag{26}$$

S kombinacijo (23), (24) in (26) lahko problem predstavimo v matričnem zapisu,

$$\begin{bmatrix} H^1 & G^1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ E^2 & H^2 & G^2 & 0 & & \vdots \\ 0 & E^3 & H^3 & G^3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & 0 & E^{I-2} & H^{I-2} & G^{I-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & (E^{I-1} - G^{I-1}) & (H^{I-1} + 2G^{I-1}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_{t,s+1}^{1,j} \\ V_{t,s+1}^{2,j} \\ \\ \vdots \\ \\ V_{t,s+1}^{I-1,j} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} V_{t,s}^{1,j} - E^1(1 + r\Delta\nu)V_{t,s}^{0,j} \\ V_{t,s}^{2,j} \\ \\ \vdots \\ \\ V_{t,s}^{I-1,j} \end{pmatrix}.$$

Ko rešimo ta sistem enačb in dobimo $V_{t,s+1}^{1,j}, \dots, V_{t,s+1}^{I-1,j}$, še izračunamo $V_{t,s+1}^{0,j}$ po formuli (24) in $V_{t,s+1}^{I,j}$ po (26).

5.3.2. *Izbira regresijske funkcije.*
Ključna točka pri Monte Carlo metodi najmanjših kvadratov za ne-evropska zavarovanja je izbira regresijske funkcije kot funkcije procesa stanj in spremenljivk stanj. Tako kot pri metodi končnih diferenc, je tudi tu $(A_t)_{t\in[0,T]}$ proces stanj za Black - Scholesov model in spremenljivke stanj lahko predstavimo kot $(D_\nu)_{\nu\in\{1,\dots,T-1\}} = (A_\nu^+, A_\nu, L_\nu)_{\nu\in\{1,\dots,T-1\}}$. Z uporabo sheme od zgoraj navzdol vidimo, da je regresijska funkcija s petimi različnimi pogoji zadostna. Prihodnjo vrednost ocenimo s pomočjo sledeče regresijske funkcije:

$$g^{(5)}(Y_\nu, D_\nu) = g^{(5)}(A_\nu^+, A_\nu, L_\nu) = \alpha_0(\nu) + \alpha_1(\nu)A_\nu^+ + \alpha_2(\nu)L_\nu + \alpha_3(\nu)x_\nu + \alpha_4(\nu)x_\nu^2,$$

kjer je $x_\nu = \frac{A_\nu^+ - L_\nu}{L_\nu}$ delež rezerv in kjer so $\alpha_0(\nu), \dots, \alpha_4(\nu) \in \mathbb{R}$. V vseh časih $\nu \in \{1, \dots, T-1\}$ uporabljamo isto regresijsko funkcijo, a so koeficienti za različne čase seveda lahko različni.

Za primer evropskega zavarovanja ni potrebno določiti regresijske funkcije, Monte Carlo metoda najmanjših kvadratov sovpada s preprostim Monte Carlo pristopom.

5.4. **Numerični izračuni.**

Vrednotenje evropskih zavarovalnih polic, t.j polic brez odkupne opcije, je enostavno. Monte Carlo simulacija zagotovi hitro in učinkovito metodo vrednotenja. Zato se bomo osredotočili na vrednotenje ne-evropskih zavarovanj.

Najprej analizirajmo vrednotenje zavarovalne police z vgnezdenimi simulacijami. V MUST-primeru smo simulirali 5000 ponovitev drevesa z 1 do 4 povezavmi iz vsakega vozlišča. Tabela 2 prikazuje rezultate dveh cenilk, $\bar{V}_0(K, b)$ in $\bar{\nu}_0(K, b)$, kjer je $K = 5000$ in $b \in [1, 4]$[2].

TABELA 2. Vgnezdene simulacije za ne-evropska zavarovanja.

Poti iz vozlišča	$\bar{V}_0(K, b)$	$\bar{\nu}_0(K, b)$
1	10605,82	10197,93
2	10492,54	10259,21
3	10477,02	10280,17
4	10470,17	10308,61

Razlika med cenilkama je kar velika tudi za 4 povezave iz vsakega vozlišča. To v splošnem pomeni, da je interval zaupanja relativno velik. Kljub temu, da je Monte Carlo simulacija edina metoda, kjer lahko dobimo interval zaupanja, je računska zahtevnost zelo velika. Pri izračunu cenilk za $b = 3$ je program potreboval okoli 15 minut, za $b = 4$ je pa za rezultat porabil več kot 3 ure. Da dobimo rezultat na zanesljivem območju, je torej računska zahtevnost ogromna.

Pri vrednotenju zavarovalne police s PDE metodo rešimo diferencialne enačbe s pristopom končnih diferenc. Dobimo rezultate, ki so prikazani v tabeli 3. Odkupna opcija je enaka razliki med vrednostjo ne-evropske in evropske zavarovalne police. Za izračun vrednosti evropske police uporabimo preprosto Monte Carlo simulacijo. Vidimo, da je v IS-primeru odkupna vrednost zavarovalne police višja kot v MUST-primeru, in sicer zaradi ciljne obrestne mere z.

TABELA 3. Vrednost police, izračunane s PDE metodo.

	MUST	IS
ne-evropsko zav.	10357,74	10867,36
evropsko zav.	10357,74	10867,36
odkupna vr.	0	0

[2] Vsi numerični izračuni so narejeni v programu R.

V tabeli 4 je vrednost police izračunana z Monte Carlo metodo najmanjših kvadratov za evropsko in ne-evropsko zavarovalno polico. Pri vrednotenju evropske zavarovalne police LSM pristop sovpada s preprosto Monte Carlo simulacijo. Odkupna vrednost je prav tako, kot pri PDE metodi, tudi tu enaka razliki med vrednostjo ne-evropske in evropske zavarovalne police. Za izračun vrednosti ne-evropske zavarovalne police je program potreboval okoli 2 minuti, kar je malo manj, kot je program potreboval za izračun po PDE metodi.

Tabela 4. Vrednost police, izračunana z LSM metodo.

	MUST	IS
ne-evropsko zav.	10359,05	10869,80
evropsko zav.	10359,05	10869,80
odkupna vr.	0	0

Kljub temu, da za vrednotenje evropske zavarovalne police tako pri PDE metodi, kot pri LSM metodi uporabimo enak algoritem, dobimo dve različni vrednosti. Razlika se pojavi zaradi napake pri metodi Monte Carlo.

Odkupna vrednost je v obeh modelih enaka nič, zaradi izbire zagotovljene minimalne obrestne mere g, ki znaša 3,5%. Če bi izbrali nižjo vrednost g, bi bila odkupna vrednost pozitivna. Odkupno vrednost, v odvisnosti od g, bomo analizirali v naslednjem podpoglavju.

Lahko zaključimo, da uporaba vgnezdenih simulacij za izračun vrednosti police ni najboljša zaradi računske zahtevnosti algoritma. Bolj natančno vrednost kot želimo, večja je računska zahtevnost. S pomočjo tabel 3 in 4 vidimo, da se vrednosti police, izračunane s PDE ali z LSM metodo, razlikujeta za manj kot 2 promila. To pomeni, da sta obe metodi dobri za določitev do tveganja nevtralne vrednosti ne-evropskih zavarovalnih polic. LSM metoda je malo bolj uporabna zaradi hitrejšega izračuna.

5.4.1. *Vpliv odkupne opcije.*
LSM metoda nam omogoča analizo odkupne opcije. Uporabimo enake parametre, kot smo jih določili v poglavju 5.3, le parametru nestanovitnosti sredstev portfelja σ spremenimo vrednost. Schoutens je za indeks *S&P 500* našel implicitno nestanovitnost 18,12%. Ker portfelj zavarovalnic vsebuje le omejen del tveganih sredstev, vzamemo za parameter $\sigma = 0.03624$. Ta vrednost je aproksimacijsko ustrezna portfelju, katerega 20% delež je tveganega kapitala (*S&P 500*), preostalih 80% je pa netveganega kapitala (kratkoročne obveznice).

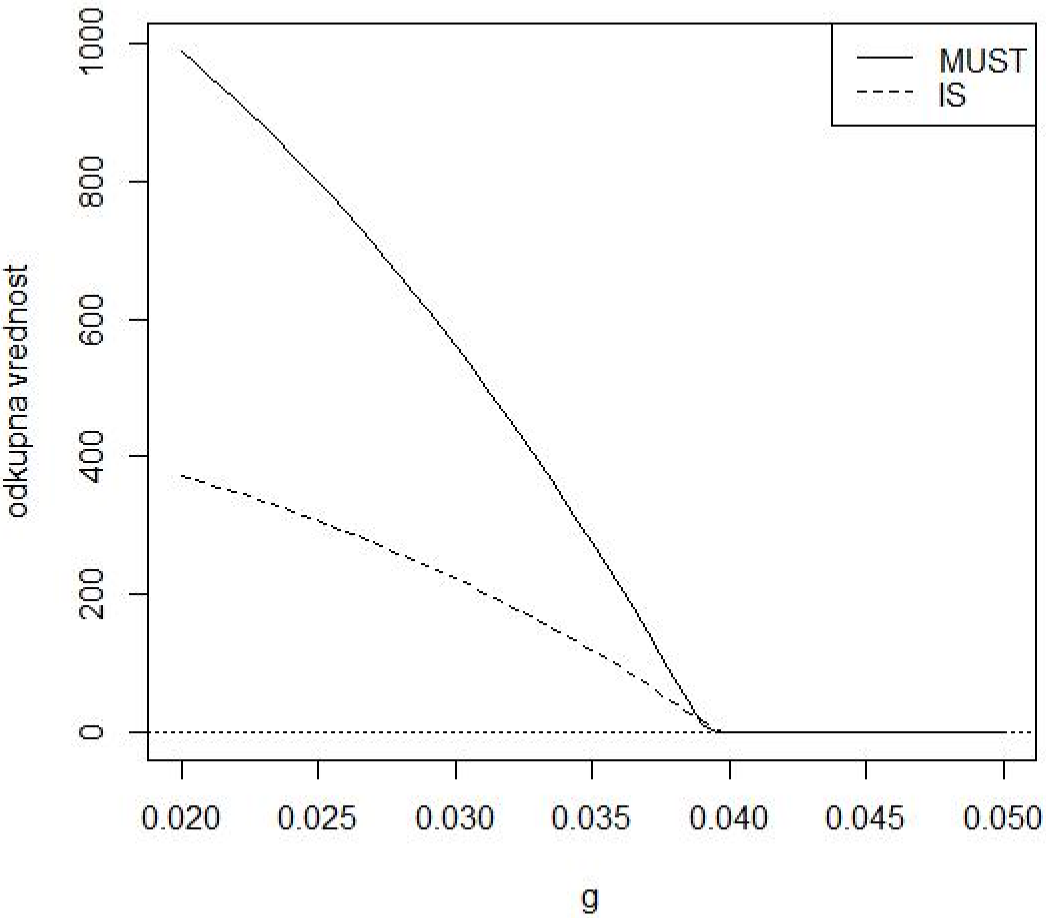
Tabela 5 predstavlja vrednost odkupne opcije v Black - Scholesovem modelu za tri različne vrednosti zagotovljene mere g.

V MUST-primeru je za nizke g odkupna vrednost sorazmerno visoka. Vrednost ne-evropske zavarovalne police se pa ne razlikuje veliko od vplačane premije. To pomeni, da je odkupna vrednost za majhne g višja zaradi izvršitve odkupne opcije kmalu

Tabela 5. Vrednost odkupne opcije za različne g.

	MUST			IS		
g	2,25%	3,5%	4%	2,25%	3,5%	4%
ne-evropsko zav.	9889,63	9969,77	10069,33	10512,24	10553,01	10588,19
evropsko zav.	8990,26	9694,84	10069,33	10190,26	10434,75	10588,19
odkupna vr.	899,37	274,93	0	321,98	118,26	0

po sklenitvi zavarovanja. V IS-primeru je odkupna vrednost pričakovano nižja, ker je ciljna obrestna mera z višja od zagotovljene mere g in posledično je veliko manj odkupov. Za višje vrednosti zagotovljene mere g odkupna vrednost pada. To je verjetno posledica tega, da je zavarovanje z višjo zagotovljeno mero bolj podobno tveganim sredstvom, z dodatno opcijsko značilnostjo. Padanje odkupne vrednosti v obeh primerih vidimo tudi na sliki 1, ki prikazuje vpliv zagotovljene minimalne obrestne mere g na odkupno vrednost.



Slika 1. Vpliv zagotovljene obrestne mere g na odkupno vrednost.

5.5. **Eksponentni Lévyjev model sredstev.**

Čeprav je Black - Scholesov model v praksi zelo priljubljen, številne empirične študije kažejo, da ni primeren za opisovanje velikega števila lastnosti podatkov finančnega trga. Eksponentni Lévyjev model predstavlja eno od alternativ in postaja vse bolj priljubljen. Da lahko ocenimo vpliv modela tveganja na našem primeru zavarovanja, predstavimo še drugi model sredstev z normalnim inverznim Gaussovim (NIG) procesom, s katerim izpeljemo proces sredstev $(A_t)_{t\in[0,T]}$. Ta model bolje predstavi statistične lastnosti empiričnih log donosov.

Definicija 5.1. Normalna inverzna Gaussova (NIG) porazdelitev s parametri $\alpha > 0$, $-\alpha < \beta < \alpha$ in $\delta > 0$, $NIG(\alpha, \beta, \delta)$, ima porazdelitveno funkcijo dano z

$$\Phi_{NIG}(m; \alpha, \beta, \delta) = \exp\left(-\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})\right).$$

Funkcija gostote porazdelitve $NIG(\alpha, \beta, \delta, m)$ je dana z

$$\phi_{NIG}(x, \alpha, \beta, \delta, m) = \frac{\alpha\delta}{\pi} \exp\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - m)\right) \frac{K_1(\alpha\sqrt{\sigma^2 + (x - m)^2})}{\sqrt{\sigma^2 + (x - m)^2}},$$

kjer K_1 označuje spremenjeno Besselovo funkcijo tretje vrste z indeksom 1 in kjer je NIG proces definiran kot Lévyjev proces $(X_t)_{t\in[0,T]}$ v ničli z

$$X_t \sim NIG(\alpha, \beta, \delta \cdot t, m \cdot t),$$
$$X_0 = 0.$$

Definicija 5.2. Spremenjene Besselove funkcije prve vrste $I_{\pm v}$ in tretje vrste $K_v(z)$ so rešitve diferencialne enačbe

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} - (z^2 + v^2)w = 0.$$

Funkcijo $I_v(z)$ lahko zapišemo z vrsto

$$I_v(z) = (z/2)^v \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k!\Gamma(v + k + 1)}$$

in $K_v(z)$ z

$$K_v(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_v(z) - I_{-v}(z)}{\sin(v\pi)},$$

kjer je desna stran enačbe zamenjana z limitno vrednostjo, če je v celo število ali nič.

Besselovo funkcijo K_v lahko zapišemo tudi v integralski obliki

$$K_v(z) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u^{v-1} \exp\left(-\frac{1}{2}z(u - u^{-1})\right) du,\ x > 0.$$

Kot v klasičnem BS modelu tudi tu predpostavimo konstantno kratkoročno obrestno mero r in definiramo naš eksponentni Lévyjev (NIG) model z

$$A_t = A_0 e^{X_t},$$

kjer je $X_t \sim NIG(\alpha, \beta, \delta \cdot t, m \cdot t)$ pod tvegano nevtralno mero Q. Finančni trgi, izpeljani z Lévyjevim procesom, na splošno niso polni in zato ekvivalentna martingalska mera ni edinstvena. Obstaja več različnih metod za izbiro prave mere vrednotenja, na primer Esscherjeva transformacija ali mean-correcting metoda. Mi bomo uporabili mean correcting metodo. Tu so parametri α, β in δ umerjeni za opazovano opcijsko ceno in parameter m je izbran tako, da je proces diskontirane cene martingal pod Q. Tu je

$$m = r + \delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta+1)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}).$$

Pod do tveganja nevtralno mero Q za ta model sredstev torej velja

$$\begin{aligned} A_t^- &= A_{t-1}^+ e^{X_t - X_{t-1}} \\ X_t &\sim NIG(\alpha, \beta, \delta \cdot t, m \cdot t). \end{aligned}$$

Parametre izberemo na podlagi postopka umerjanja za indeks $S\&P$ 500 (kot v prejšnjem podpoglavju), ki temelji na cenah nakupne opcije. Torej je $\alpha = 6,1882$, $\beta = -3,8941$ in $\delta = 0,1622$, volatilnost je pa prilagojena glede na naše predpostavke za portfelj sredstev ($\sigma_A = 0,03624$).

5.6. **Primerjava BS in NIG modela.**

Pričakovali bi, da bo zaradi spremembe procesa sredstev iz geometrijskega Brownovega gibanja na eksponentni Lévyjev model, vrednost police narasla. Vendar tabela 6 kaže, da to ne velja vedno. To vsaj ne velja v MUST-primeru, saj je vrednost

Tabela 6. Vrednost evropske police v BS in NIG modelu

	BS			NIG		
g	2,25%	3,5%	4%	2,25%	3,5%	4%
MUST	8990,26	9694,84	10069,33	8785,46	9600,03	10054,68
IS	10190,26	10434,75	10588,19	10243,27	10493,26	10621,62

police, dobljena v BS modelu višja od vrednosti, ki jo dobimo v NIG modelu. V IS-primeru je pa ravno obratno zaradi ciljne obrestne mere z. Ali je višja vrednost v BS modelu ali v NIG modelu, je odvisno od vrednosti minimalne zagotovljene obrestne mere g, kar za MUST-primer vidimo na sliki 2. To razliko lahko pripišemo različnim oblikam porazdelitvene funkcije v BS in NIG modelu. Poglejmo si to na primeru enoletne zavarovalne police.

Za enoletno evropsko zavarovalno polico imamo v MUST-primeru

$$\begin{aligned} L_1 &= (1+g)P + \left[\delta y(A_1^- - A_0^+) - gP\right]^+ \\ &= (1+g)P + \left[\delta y(A_0^+ e^{X_1} - A_0^+) - gP\right]^+ \\ &= (1+g)P + \left[P(\delta y(1+x_0)(e^{X_1} - 1) - g)\right]^+, \end{aligned}$$

kjer ima X_1 normalno porazdelitev v BS modelu in normalno inverzno Gaussovo v NIG modelu. Torej je vrednost funkcije V_0 v BS modelu enaka

$$V_0^{BS} = \mathbb{E}^Q[L_1 e^{-r}] = e^{-r}\left[(1+g)P + \int_c^\infty P[\delta y(1+x_0)(e^u - 1) - g]\phi^{BS}(u)du\right],$$

v NIG modelu pa

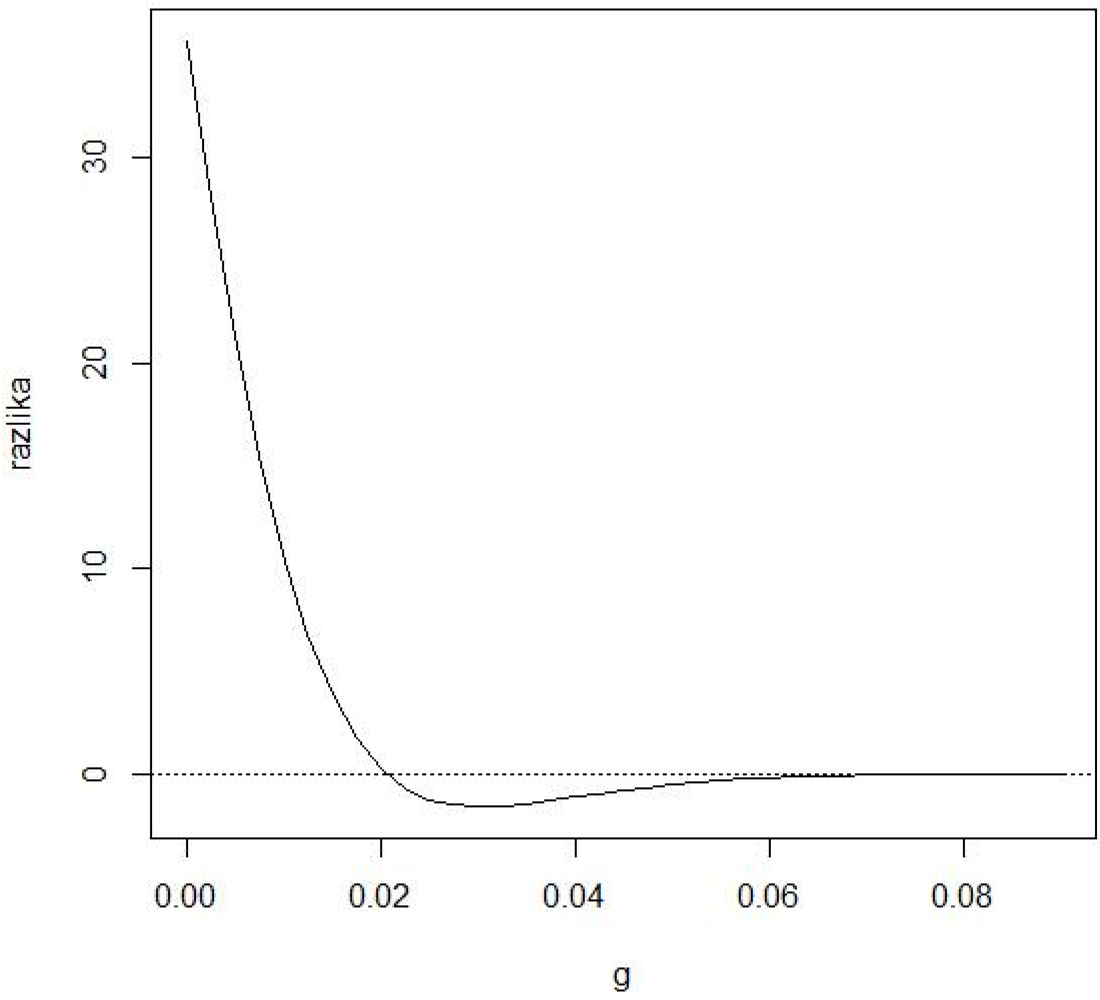
$$V_0^{NIG} = \mathbb{E}^Q[L_1 e^{-r}] = e^{-r}\big[(1+g)P + \int_c^\infty P[\delta y(1+x_0)(e^u-1)-g]\phi^{NIG}(u)du\big].$$

Tu je $c = \log\left(\frac{g}{(1+x_0)\delta y}+1\right)$ in ϕ^{BS} ter ϕ^{NIG} sta pripadajoči funkciji gostote.

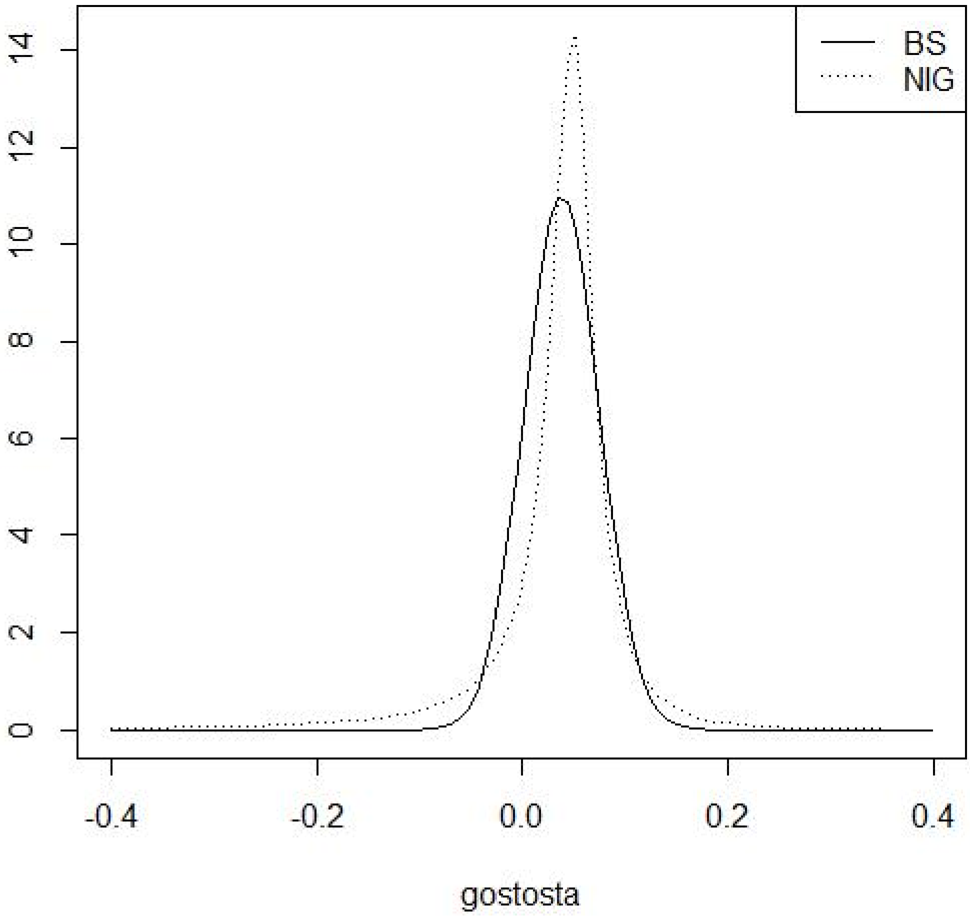
Slika 2 prikazuje razliko v vrednosti police za dva modela sredstev, t.j.

$$\Delta V_0 = V_0^{NIG} - V_0^{BS}.$$

Vidimo, da je za g manjši od približno 2%, vrednost police višja v NIG modelu, medtem ko je za g med 2% in 6% vrednot police višja v BS modelu. Za nerealno visoko minimalno obrestno mero $g = 7\%$ je razlika med modeloma zanemarljiva. To lahko analiziramo s primerjavo porazdelitvenih funkcij, kar prikazuje slika 3. Za nizke g je vrednost police višja v NIG modelu zaradi povečane sploščenosti (ang. kurtosis) pripadajoče gostote. Vpliv sploščenosti z rastjo g izgine in je vrednost police višja v BS modelu zaradi asimetričnosti normalne inverzne Gaussove gostote.



Slika 2. Vpliv g na razliko vrednosti police v MUST-primeru.



Slika 3. Funkciji gostote za oba modela.

Za naš izbor police in parametrov smo ugotovili, da je vpliv modela na vrednost police močno odvisen od izbire določenih parametrov. Ravno izbor parametrov določi, v kateriem modelu bo višja vrednost police. Vpliv modelov bi bil verjetno bolj izrazit za drugačno opcijo ali drugo izbiro zavarovalne police.

6. Zaključek

Predstavili smo generičen model za vrednotenje življenjskih zavarovanj. Najprej smo predstavili Monte Carlo simulacijo, ki dobro deluje za evropska zavarovanja, t.j. zavarovanja brez predčasnih sprememb. Za dolgoročna ne-evropska življenjska zavarovanja, t.j. zavarovanja z odkupno opcijo pa Monte Carlo smulacija ni več tako učinkovita, saj je število potrebnih simulacij za točen rezultat veliko, in posledično algoritem potrebuje veliko časa za izračun. Potem smo predstavili metodo, ki temelji na rešitvi parcialnih diferencialnih enačb (PDE metoda). Ta metoda je bolj primerna za vrednotenje ne-evropskih zavarovanj, vendar lahko veliko število PDE, ki jih je potrebno rešiti, upočasni algoritem. Nazadnje smo predstavili še Monte Carlo metodo najmanjših kvadratov, ki je najbolj primerna za vrednotenje ne-evropskih življenjskih zavarovanj. Ta metoda združuje prednosti prvih dveh metod, tako da tudi algoritem ne potrebuje veliko časa.

Vse algoritme smo uporabili za vrednotenje izbrane police življenjskega zavarovanja. Upoštevali smo Black - Scholesov model sredstev z deterministično obrestno mero r. Numerične izračune smo naredili za MUST-primer in IS-primer. Pokazali so, da se izračunane vrednosti ne razlikujejo veliko, vendar so pa velike razlike v času, ki ga algoritmi porabijo za izračun vrednosti. Analizirali smo tudi odkupno vrednost, ki je višja v MUST-primeru.

Nazadnje smo predstavili še en model sredstev, in sicer eksponentni Lévyjev model, ki je v praksi vse bolj priljubljen. Primerjali smo izračunane vrednosti police evropskega zavarovanja obeh modelov. Ugotovili smo, da se vrednosti ne razlikujejo veliko, in da je od izbire parametrov odvisno v katerem modelu dobimo višjo vrednost police.

Ker smo želeli predstaviti prednosti in slabosti modelov, smo predpostavili, da zavarovanje ni odvisno od preživetja. Zavarovalna vsota se izplača ob dospetju, ne glede na to, ali je zavarovanec živ ali ne. Med trajanjem zavarovanja pa se zavarovanje lahko odkupi. Naši numerični izračuni omogočajo vpogled v učinkovitost različnih metod za vrednotenje življenjskih zavarovnaj in kažejo, da je vpliv predčasnih sprememb potrebno vključiti v analize, saj lahko spremenijo vrednost zavarovanja.

Literatura

[1] Andreatta, G. in Corradin, S., *Valuing the surrender options embedded ina portfolio of Italian life guaranteed participating policies: a least squares Monte Carlo approach*, Working Paper (2003), University of California, Barkeley.

[2] *AZN, Solventnost II*, [ogled 17. 10. 2013], dostopno na `http://www.a-zn.si/Default.aspx?id=154`

[3] Barndorff-Nielsen, O.E, *Processes of normal inverse Gaussian type*, Finance and Stochastics **2** (1998), 41-68.

[4] Bauer, D., Bergmann, D. in Kiesel R., *On the risk-neutral valuation of life insurance contracts with numerical methods in view*, ASTIN Bulletin **40(1)** (2010) , 65-95.

[5] Bauer, D., Bergmann, D. in Reuß, A., *Solvency II and nested simulations - a least-squares Monte Carlo approach*, Working Paper (2010), Georgia State University and Ulm University.

[6] Bauer, D., Kiesel, R., Kling, A. in Ruß, J., *Risk-neutral valuation of participating life insurance contracts*, Insurance: Mathematics and Economics **39** (2006), 171-183.

[7] Bauer, D., Kling, A. in Ruß, J., *A universal pricing framework for garanteed minimum benefits in variable annuities*, ASTIN Bulletin **38** (2008), 621-651.

[8] Bernik, J. *Slučajni procesi 1*, Zapiski iz predavanj, 2010.

[9] Bernik, J. *Slučajni procesi 2*, Zapiski iz predavanj, 2011/2012.

[10] Bernik, J. *Izbrana poglavja finančne matematike*, Zapiski iz predavanj, 2011/2012.

[11] Clement, E., Lamberton, D. in Protter, P., *An analysis of a least squares regression method for American option pricing*, Finance and Statistics **6** (2002), 449-471.

[12] Cont, R. in Tankov, P *Financial modeling with jump processes*, Chapman & Hall/CRC 2004.

[13] *Dinamično programiranje*, [ogled 3. 10. 2013], dostopno na `http://sl.wikipedia.org/wiki/Dinami%C4%8Dno_programiranje`

[14] *Dinamično programiranje - algoritmi*, [ogled 3. 10. 2013], dostopno na `http://www.google.si/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=4&ved=0CEEQFjAD&url=http%3A%2F%2Fmatematika-racunalnistvo.fnm.uni-mb.si%2FLists%2Fnovice%2FAttachments%2F426%2Fsklop04.pdf&ei=EVebUsvFEobEtAaJnIDwBw&usg=AFQjCNH8FnD5VV0YG6ACGkI1N5p6sMupsQ&bvm=bv.57155469,d.Yms`

[15] Glasserman, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, New Yourk 2005.

[16] Jensen, B., Løchte Jørgensen, P. in Grosen, A., *A Finite Difference Approach to the Valuation of Path Dependent Life Insurance Liabilities*, The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory **26** (2001), 57-84.

[17] Kassberger, S., Kiesel, R. in Liebmann, T., *Fair valuation of insurance contracts under Lévy process specifications*, Insurance: Mathematics and Economics **42** (2008), 419-433.

[18] Kling, A., Richter, A in Ruß, J., *The interaction of guarantees, surplus distribution, and asset allocation in with profit life insurance policies*, Insurance: Mathematics and Economics **40** (2007), 164-178.

[19] Košir, T. *Finančna matematika*, Zapiski iz predavanj, 2010.

[20] Lando, D., *On Cox processes and credit risky securities*, Reviwe of Derivatives Research **2** (1998), 99-120.

[21] Longstaff, F. in Schwartz, E., *Valuing american options by simulation: A simple least-squares approach*, The Review of Financial Studies **14** (2001), 113-147.

[22] Omladič, M. *Statistika 1*, Zapiski iz predavanj, 2010/2011.

[23] Schoutens, W., *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, Wiley, 2003.

[24] Schwab, C. *Computational PDE methods for option pricing*, Ljubljana 2011 School on stochastic finance, Lecture 1.

[25] Schwab, C. *Computational PDE methods for option pricing*, Ljubljana 2011 School on stochastic finance, Lecture 3.

[26] Štiblar, F. in Šramel, F., *Kaj pomeni priprava režima Solventnos II za zavarovalništvo Slovenije?*, Zavarovalniški horizonti **1** (2006), 3-18.

[27] Prelog, I., *Standard MSRP 4 - klasifikacija zavarovalnih pogodb*, Zavarovalniški horizonti **1** (2006), 31-46.

[28] Tanskanen, A. in Lukkarinen, J., *Fair valuation of path-dependent participating life insurance contracts*, Insurance: Mathematics and Economics **31** (2003), 71-85.

[29] Zaglauer, K. in Bauer, D., *Risk-neutral valuation of participating life insurance contracts in a stochastic interest rate environment*, Insurance: Mathematics and Economics **43** (2008), 29-40.