

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Nina Klopčič

**Redki makroekonomski zlomi**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. David Dolžan,  
Somentor: izr. prof. dr. Igor Masten

Ljubljana, 2012

## KAZALO

1. Uvod	4
2. Redki makroekonomski zlomi v ekonomski literaturi	5
2.1. Kaj so redki makroekonomski zlomi?	5
2.2. Vključevanje redkih makroekonomskih zlomov skozi čas	5
3. Merjenje redkih makroekonomskih zlomov	6
3.1. Izboljšave v podatkih	7
3.2. Peak-to-trough metoda	9
3.3. Zgodovinski pregled	11
4. Vrednotenje premoženja in premija za tveganje	13
4.1. Standarden model vrednotenja premoženja	13
4.2. Premija za tveganje	16
4.3. Problem kapitalske premije	16
4.4. Funkcije koristnosti	18
4.5. Barrov osnovni model	19
4.6. Parametrične ocene porazdelitvene funkcije velikosti zlomov	21
4.7. Pomanjkljivost osnovnega modela	25
5. Redki zlomi v modelih v zadnjem času	26
6. Sklepna misel	28
Dodatek A. Grafičen prikaz podatkov o BDP in potrošnji, države z novo zbranimi podatki	29
Dodatek B. Histograma velikosti zlomov za potrošnjo	30
Dodatek C. Histograma velikosti zlomov za BDP	31
Dodatek D. Ustreznost eno-potenčne in dvo-potenčne porazdelitve za velikost zloma $z$ , za potrošnjo	32
Literatura	33

## Redki makroekonomski zlomi

### POVZETEK

Za vrednotenje premoženja obstaja veliko modelov. Za razliko od standardnega modela, ki ne vključuje zlomov, se v zadnjem času ekonomisti veliko ukvarjajo s tem, kako bi v modele vključili redke makroekonomske zlome in z njimi povezane velikosti in verjetnosti zlomov.

Vključitev le-teh pa ima, glede na empirične dokaze, velik vpliv pri pojasnjevanju problemov, kot je na primer problem kapitalske premije in s tem povezano relativno nenaklonjenost tveganju. Gre za redke dogodke, kjer opazimo velik upad v bruto domačem proizvodu in vsaj 10% znižanje v potrošnji. Da pa sploh lahko določimo ustreznost modela glede na podatke, morajo biti le-ti pravilni in popolni.

## Rare macroeconomic disasters

### ABSTRACT

There are many models for asset pricing. Unlike the standard model, which does not include rare macroeconomic disasters, recently economists have been working on the task of incorporating them and their sizes and probabilities into asset pricing models.

According to the empirical evidence, incorporating these events has a significant impact in the explanation of some problems, such as the equity premium puzzle and with this related coefficient of relative risk aversion. These are events in which we witness a big drop in the gross domestic product and a reduction of at least 10% in consumption. To determine the suitability of the model according to the data, the data have to be correct and complete.

**Math. Subj. Class. (2010):** 91B25, 91B55

**Ključne besede:** Redek makroekonomski zlom, vrednotenje premoženja, problem kapitalske premije;

**Keywords:** Rare macroeconomic disaster, asset pricing, equity premium puzzle;

## 1. UVOD

Eden od stranskih učinkov makroekonomske, finančne in dolžniške krize od let 2008 do 2012 je, da so postali modeli vrednotenja premoženja in makroekonomske dinamike, ki vključujejo redke makroekonomske zlome, eno bolj zanimivih področij raziskovanja v ekonomiji.

Tako bom v svojem delu diplomskega seminarja opisala temo 'Redki makroekonomski zlomi', ki bo zajela naslednje teme:

- Kaj redki makroekonomski zlomi sploh so?
- Kako je potekalo zbiranje podatkov o makroekonomski dinamiki skozi čas?
- O vrednotenju premoženja na splošno in problemu kapitalske premije, ki je tudi glavno vodilo raziskovanja.
- Kakšni so bili začetki opazovanja teh zlomov v povezavi z ekonomskimi modeli?
- Kako lahko na modeliranje vpliva funkcija koristnosti in kaj doprinese parametrična porazdelitev velikosti zlomov?
- Povzetek nekaterih zadnjih raziskovanj, ki vključujejo zlome.

Osnova za delo je bil članek "Rare Macroeconomic Disasters", avtorjev Roberta Josepha Barra in Josefa F. Ursue.

## 2. REDKI MAKROEKONOMSKI ZLOMI V EKONOMSKI LITERATURI

Najprej si bomo pogledali, kako so bili zlomi vključeni v nekatera izbrana dela, relevantna za temo, ki jo preučujemo.

### 2.1. Kaj so redki makroekonomski zlomi?

Redki zlomi so gospodarski dogodki, ki so, kot že samo ime pove, redki in obsežni ter imajo negativen učinek na gospodarstvo. To so pomembni dogodki, saj omogočajo obrazložitev problema kapitalske premije, obrazložitev obnašanja obrestnih mer in ostalih gospodarskih pojavov. V teh zlomih je moč opaziti znaten upad bruto domačega proizvoda (odslej BDP<sup>1</sup>) in vsaj 10% znižanje v potrošnji. Včasih je bila ta meja pri 15%, vendar se rezultati analize ne spremenijo bistveno, če to mejo postavimo na 10%.

### 2.2. Vključevanje redkih makroekonomskih zlomov skozi čas.

Zlomi se vključujejo na področja kot so vrednotenje premoženja, problem nepokrite obrestne paritete in opcijsko vrednotenje. Thomas A. Rietz je kot prvi (1988) uporabil idejo redkih zlomov za obrazložitev problema kapitalske premije, ki sta ga predstavila Rajnish Mehra in Edward C. Prescott (1985). Uporabnost te ideje je argumentiral preko tega, da čeprav se zlomi pojavijo z majhno verjetnostjo, pripomorejo k razlagi problema kapitalske premije.

Od takrat so ekonomisti dodajali in nadgradili idejo, še vedno pa lahko najdemo kakšno kritiko.

Kasneje sta idejo redkih zlomov k vrednotenju premoženja vključila tudi Vasanttilak Naik in Lee Moon (1990), ki sta razvila verzijo Lucasovega modela vrednotenja premoženja iz leta 1978 v zveznem času, da bi lahko študirala cene opcij. Naključni skoki pri tem vplivajo na vrednost osnovnih naložb.

V 90-ih letih se je literatura osredotočala na razlage problema vrednotenja premoženja, ki niso bili vezani na zlome. Primer tega sta model heterogenih potrošnikov po Georgeu M. Constantinidesu in Darrellu Duffieju (1996) in ideja o tem, kako se razvijajo navade po Andrewu B. Abelu (1990) ter Johnu Y. Campbellu in Johnu H. Cochrainu (1999). Constantinides (2002) je kasneje ustvaril pregled napredkov v tej smeri.

V sredini 1. desetletja po 2000 pa se je literatura zopet vrnila k razlagam problema vrednotenja premoženja, ki so vključevale zlome. Francis A. Longstaff in Monika Piazzesi (2004) sta poudarila občutljivost denarnih tokov na velike gospodarske šoke

---

<sup>1</sup>BDP je najobsežnejše merilo celotne ekonomske aktivnosti v državi. Je tržna vrednost (količine pomnožene s cenami) vseh končnih proizvodov in storitev, ki jih je ustvarilo gospodarstvo v enem letu. Upošteva se le končne proizvode, ki niso namenjeni nadaljnji obdelavi - tako se izognemo dvojnemu štetju.

in predstavila umerjen model s precej višjimi kapitalskimi premijami kot v standardnih okvirjih. Ravi Bansal in Amir Yaron (2004) sta s pristopom, sedaj znanim kot model dolgoročnega tveganja, poudarila spremenljivost pričakovanih stopenj rasti in varianc stopenj rasti kot determinante premije za tveganje ter nihanje cen naložb.

Robert J. Barro (2006) pa se je vrnil k Rietzovemu pogledu iz leta 1988, vendar se je pri tem osredotočil na zlome kratkoročnega tipa. Model je bil zaradi preprostosti in uspešnosti izhodišče za razumevanje, kako bi možnost za redke zlome lahko rešila vrsto problemov pri tematiki vrednotenja premoženja.

### 3. MERJENJE REDKIH MAKROEKONOMSKIH ZLOMOV

Pri analizi redkih makroekonomskih zlomov je bil problem pomanjkanje primer-  
nih podatkov. Ker se ti zlomi pojavljajo redko, ocene vplivov dejanskih in pa tudi  
potencialnih zlomov zahtevajo združitev podatkov iz čim več gospodarstev in skozi  
čim daljše obdobje. Pri tem torej rabimo vzorec, ki predstavlja širok nabor gospo-  
darstev.

Cilj je bil zbrati čimveč podatkov čimvečih držav skozi čimdaljše obdobje. Še pose-  
bej je v tem pogledu nezadovoljiva težnja nekaterih raziskovalcev, da bi se nanašali  
le na podatke za ZDA, ki imajo kljub vključitvi Velike depresije povečini mirno  
makroekonomsko zgodovino. Odstopa le obdobje v začetku 30.-let, ko je nastopila  
Velika depresija.

Kot je že bilo omenjeno, je Rietz leta 1988 vpeljal redke zlome v problem vre-  
dnotenja premoženja, in pri tem trdil, da ta razširitev pomaga razložiti problem  
kapitalske premije.

Rietzova ideja je vzbudila dvome, saj je bilo premalo dokazov o malo verjetnih  
zlomih, katere opisuje v svoji teoriji. Kot sta trdila Mehra in Prescott (1988): "Po-  
treben je dodaten zgodovinski dokaz v podporo Rietzovi hipotezi, da bi jo vzeli resno  
... Da bi ugotovili, kako uporabna je teorija, bi bilo potrebno poiskati malo verjetne  
dogodke in nato poiskusiti izmeriti njihovo verjetnost skozi čas."

Barro je leta 2006 obnovil zanimanje za ta pogled s pregledovanjem dolgoročnih  
podatkov za številne države. S tem se vključi veliko število realizacij teh zlomov.  
Sprva se je oprl na Maddisonove podatke iz leta 2003 o realnem BDP na prebivalca.  
Ravno ti podatki pa so problematični: delno zaradi napak pri konstruiranju, delno  
pa zato, ker se modeli vrednotenja premoženja navadno nanašajo na potrošnjo in ne  
na BDP.

Barro in Ursua (2008) sta tako razširila nabor Maddisonovih podatkov in vključila  
ocene za potrošnjo na prebivalca - C (consumption). Ta je sprva temeljila na zasebni  
potrošnji. Prav tako sta izboljšala meritve BDP za mnogo držav. Letni podatki se  
nanašajo še na čas pred 1. svetovno vojno.

### 3.1. Izboljšave v podatkih.

Spremenljivke, ki so predmet zanimanja v makrofinančni literaturi, so stopnje rasti realne potrošnje na prebivalca (C), BDP in realne stopnje donosa finančnih sredstev, predvsem delnic in državnih obveznic.

Do nedavnega so bili najboljši makroekonomski podatki podatki o BDP na prebivalca, ki jih je zbral Angus Maddison (2003). Bili so ogromen prispevek, ki so ga veliko uporabljali v delih o makroekonomskih in finančnih zlomih.

Že omenjene "luknje" v Maddisonovih podatkih pa so ovirale analizo, saj so bili podatki večinoma manjkajoči ravno skozi hujše krize. Pomankljivosti Maddisonovih podatkov so izvirale iz njegove težnje po zapolnitvi manjkajočih podatkov med kriznimi obdobji - ponekod je uporabil kar podatke drugih držav. Dodaten problem sta predstavljala pomanjkanje podatkov o potrošnji in izpustitev nekaterih pomembnih držav.

Ti argumenti pa so spodbudili Barra in Ursuo (2008), da sta sestavila nov nabor podatkov, ki so bili opisani leta 2011. Zbirka teh podatkov je predstavljala izziv, cilj pa je bil kar se da izboljšati Maddisonove podatke za BDP in ustvariti novo celovito sliko za potrošnjo<sup>2</sup>, saj je v časovni vrsti podatkov za neko državo pomembno imeti vsaj ocene za ta manjkajoča obdobja. Prav tako je važno ne izpustiti držav z najhujšo makroekonomsko zgodovino.

Nedavna razširitev podatkov vključuje nekatere zahtevne primere, kot so Kitajska, Rusija in Turčija. Ta razširitev predstavlja glavno izboljšavo podatkov.

---

<sup>2</sup>V članku Barra in Ursue (2008) si lahko na straneh 54 - 59 ogledamo, koliko in kakšne popravke sta morala narediti. Na primer, za Belgijo v času 1. svetovne vojne, je Maddison vzel kar ocene od Francije. Barro in Ursua pa sta ocene naredila na podlagi uteženih premikov v štirih različnih panogah gospodarstva: proizvodnji ogljika, proizvodnji litega železa, proizvodnji jekla in kmetijstva.

Ti makroekonomske podatki so javno dostopni ([www.rbarro.com/data-sets](http://www.rbarro.com/data-sets)) in povzeti v tabeli 1.

	JV Azija	L Amerika	Z Evropa		Z stranske veje	Ostali
BDP	Kitajska	Argentina	Avstrija	Italija	Avstralija	Egipt
	1890	1875	1870	1861	1820	1894
C	1952	1875	1913*	1861	1901	1894
BDP	Japonska	Brazilija	Belgija	Nizozemska	Kanada	Indija
	1870	1850	1846	1807	1870	1872
C	1874	1901	1913	1814	1871	1919
BDP	Indonezija	Čile	Danska	Norveška	Nova Zelandija	Rusija
	1880	1860	1818	1830	1860	1860
C	1960	1900	1844	1830	1878	1885
BDP	Malazija	Kolumbija	Finska	Portugalska	US	J Afrika
	1900*	1905	1860	1865	1790	1911
C	1900*	1925	1860	1910	1834	1946
BDP	Filipini	Mehika	Francija	Španija		Šri Lanka
	1902*	1895	1820	1850		1870
C	1946	1900	1824	1850		1960
BDP	Singapur	Peru	Nemčija	Švedska		Turčija
	1900*	1896	1851	1800		1875
C	1900*	1896	1851	1800		1875
BDP	J Koreja	Urugvaj	Grčija	Švica		
	1911	1870	1833*	1851		
C	1911	1960	1938	1851		
BDP	Tajska	Venezuela	Islandija	UK		
	1901	1883	1870	1830		
C	1901	1923	1945	1830		

TABELA 1. Vključene države in začetni čas podatkov za BDP in potrošnje (C), vir: Barro in Ursua (2011).

Podatki sedaj zajemajo 42 držav, ki sodijo v 5 regionalnih skupin:

- jugovzodna Azija,
- Latinska Amerika,
- zahodna Evropa,
- zahodne "stranske veje" (angl. offshoots) in
- ostali.

Začetni čas podatkov se razlikuje po državah in se razteza vse od konca 18.stoletja do leta 1960. V tabeli zgoraj zvezdica (\*) označuje manjkajoče podatke: pri BDP gre za Grčijo leta 1944, Malazijo od leta 1943 do 1946, Singapur od leta 1940 do 1949 in Filipini od leta 1941 pa do 1945 ter pri potrošnji za Avstrijo od leta 1919 do 1923, Malazijo od leta 1940 do 1946 in Singapur od leta 1940 do 1947. Analiza se nanaša na 40 držav za BDP (21 OECD<sup>3</sup> in 19 nečlanic OECD) in na 28 držav za potrošnje (18 OECD, 10 nečlanic OECD).

<sup>3</sup>OECD - Organizacija za gospodarstvo in razvoj je mednarodna gospodarska organizacija razvitih držav, ki sprejemajo načela predstavnike demokracije in svobodnega trga.



Ustrezno število letnih podatkov za stopnje rasti od let 1870 – 2009 je 5242 za BDP in 3572 za potrošnjo.

Veliko modelov potrebuje tudi ustrezne podatke o donosnosti premoženja. Barro in Ursua sta, na primer, uporabila podatke o realnih donosih delnic, obveznic in menic.

Glavni vir teh podatkov je "Global Financial Data", avtorja Bryana Taylorja (2005). Obseg podatkov je bil razširjen z dodatnimi viri, kot na primer Morningstar (<http://www.morningstar.com/>) in ostalimi viri za Argentino, Brazilijo, Japonsko in Mehiko.

### 3.2. Peak-to-trough metoda.

Barro in Ursua (2008) sta, tako kot že sam Barro (2006) prej, uporabila način NBER-a (The National Bureau of Economic Research) za merjenje velikosti makroekonomskih krčenj - metodo "peak-to-trough". Verjetnost zloma  $p$  pa je bila izračunana kot razmerje med številom zlomov in leti brez zloma.

Glede na letne podatke so bila sorazmerna nižanja v potrošnji in BDP-ju izračunana po tej metodi skozi eno ali več let. Pri tem so bila upoštevana le krčenja, ki so presegala prag 10%. Prejšnje študije so imele to mejo sicer pri 15%. Vključitev krčenj med 10 in 15% sicer pomeni veliko več dogodkov, vendar se rezultati analize ne spremenijo bistveno.

#### Kaj je ta metoda?

To je metoda, preko katere se iz letnih podatkov izračuna sorazmeren upad v BDP ali potrošnji. Upad se računa od vrha (konec obdobja rasti) do dna (ko se lokalno doseže najnižjo točko).

Tabela 2<sup>4</sup> prikazuje številke, kot rezultat uporabljene "peak-to-trough" metode na štirih državah, z nedavno zbranimi podatki. Gre za

- Kitajsko (dolgoročni podatki so le za BDP),
- Egipt,
- Rusijo (vključuje Sovjetsko zvezo) in
- Turčijo (vključuje Turško kraljestvo).

Nekateri izmed teh dogodkov so med največjimi krčenji, ki smo jim bili kadarkoli priča:

- padec v ruski potrošnji za 71% v 1. svetovni vojni, za 62% v Ruski državljanski vojni in za 58% v 2. svetovni vojni,

---

<sup>4</sup>Seznam zlomov, glede na državo, čas in velikost, je možno videti v delu Barra in Ursue (2008, tabeli C1 in C2).

Država	BDP zlom	Zlom v potrošnji	Takratno dogajanje v državi	
Kitajska	1892-1895: -0.25		1. kitajsko-japonska vojna, 1894-1895	
	1929-1934: -0.11		Japonska invazija, 1931-1932	
	1936-1946: -0.50		2. kitajsko-japonska vojna, 2. svetovna vojna, 1937-1945	
	1858-1862: -0.25	1958-1962: -0.19	"Velik skok naprej"- kampanja komun.partije, 1958-1960	
	1966-1968: -0.14	1966-1968: -0.14	Kulturna revolucija, vojskujoča faza. 1966-1968	
Egipt	1899-1908: -0.12	1899-1908: -0.13		
	1912-1918: -0.13	1912-1918: -0.10	1. svetovna vojna, ločitev od Turškega imperija	
	1919-1921: -0.17	1919-1921: -0.23	Revolucija 1919, 1922 neodvisno kraljestvo	
	1922-1926: -0.11	1922-1926: -0.14		
	1938-1943: -0.18	1939-1941: -0.20	2. svetovna vojna	
		1951-1953: -0.17	Revolucija, 1952-1953	
Rusija	1878-1880: -0.13		Rusko-turška vojna, 1877-1878	
	1882-1886: -0.12			
	1887-1891: -0.18	1887-1891: -0.16		
	1904-1907: -0.19	1904-1906: -0.13	Rusko-japonska vojna, 1904-1905	
	1913-1921: -0.62	1913-1921: -0.71	1. svetovna vojna, revolucija/ civilna vojna, 1913-1921	
		1929-1932: -0.16	Velika depresija	
	1939-1942: -0.30	1937-1943: -0.58	2. svetovna vojna	
	1989-1998: -0.48	1990-1996: -0.16	Prehodno gospodarstvo	
	Turčija	1876-1880: -0.40	1876-1880: -0.38	Rusko-turška vojna, 1877-1878
		1885-1888: -0.20	1885-1888: -0.18	
1892-1895: -0.10				
1919-1920: -0.45		1913-1919: -0.49	1. svetovna vojna, razpad Turškega imperija	
1926-1927: -0.14				
1931- 1932: -0.12		1929-1932: -0.12	Velika depresija	
1939-1945: -0.40		1938-1946: -0.30	Nevtralnost v 2. svetovni vojni	
	1999-2001: -0.10	1997-2001: -0.12		

TABELA 2. Rezultati metode peak-to-trough na državah, z novo zbranimi podatki, vir: Barro in Ursua (2011).

- padec kitajskega BDP za 50% od leta 1936 do leta 1966 (vključuje 2. svetovno vojno),
- padec turške potrošnje za 49% in BDP-ja za 45% med 1. svetovno vojno,
- padec ruskega BDP-ja za 48% v prehodnem obdobju (med letoma 1989 in 1998).

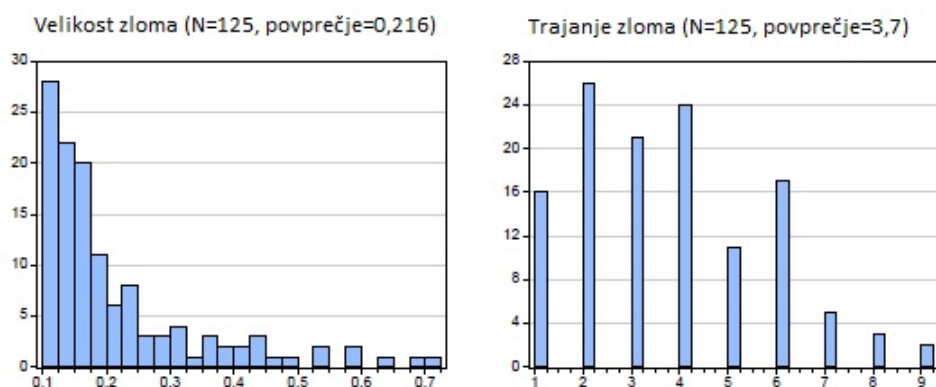
V dodatku A je grafičen prikaz podatkov teh štirih držav.

### 3.3. Zgodovinski pregled.

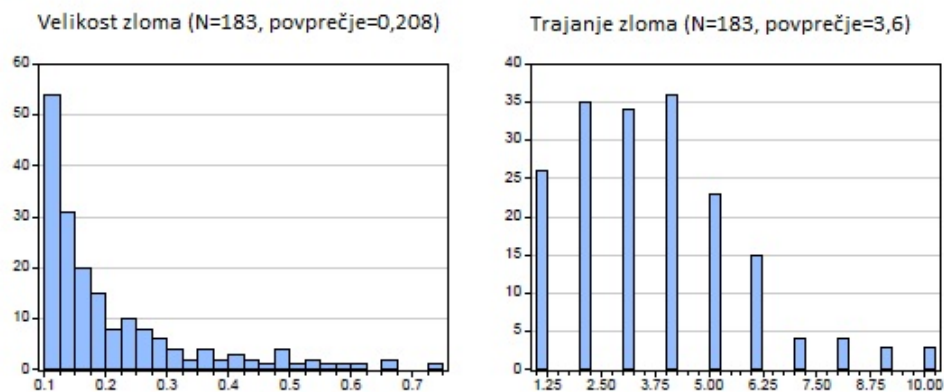
Z uporabo histogramov na sliki 1 lahko vidimo porazdelitev zlomov, ki se nanašajo na 28 držav za potrošnjo in na 40 držav za BDP. Metoda "peak-to-trough" se nanaša na 125 zlomov v potrošnji in 183 za BDP.

Povprečne velikosti zlomov, ki presegajo 10%, so bile podobne: 21.6% za potrošnjo in 20.8% za BDP. Prav tako so bila podobna trajanja: 3.7 let za potrošnjo in 3.6 let za BDP.

#### Potrošnja:

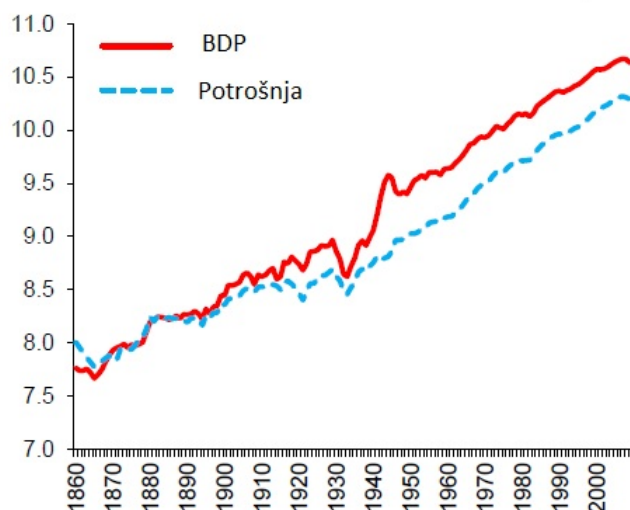


#### BDP:



SLIKA 1. Histogrami velikosti in trajanj zlomov, vir: Barro in Ursua (2011).

Makroekonomisti, še posebej tisti, ki so uporabljali podatke samo za ZDA, so bili prepričani, da so zlomi v potrošnji manjši kot tisti v BDP. To je, na primer, razvidno v obdobju Velike depresije (od leta 1930) in v obdobju po 2. svetovni vojni.



SLIKA 2. Grafičen prikaz podatkov o BDP in potrošnji za ZDA, vir: Barro in Ursua (2011).

V tabeli 3 je navedeno skupaj 112 krčenj - 31 od teh je bilo v obdobju vojn, 81 pa v mirnem času. Vidimo lahko, da je bil upad v potrošnji pri 81-ih nevojnih primerih rahlo višji kot v BDP in sicer za 1.7%. V 31-ih vojnih primerih pa je bila ta razlika še večja - kar 4.6%.

Barro in Ursua (2008) prav tako pokažeta, da ni jasne povezave, ali dosežeta BDP in potrošnja dno istega leta, kar lahko vidimo v tabeli 3.

Krčenja	Povpr. padec v potrošnji	Povpr. padec v BDP	Dno v potrošnji se pojavi:		
			- v istem letu kot BDP dno	- pred BDP dnom	- po BDP dnu
Vsa(112)	0.194	0.168	66	20	26
Vojno obd.(31)	0.318	0.272	15	9	7
Miren čas(81)	0.146	0.129	51	11	19

TABELA 3. Povprečni padci in leta dna, vir: Barro in Ursua (2008).

S tabelo 4 si ponazorimo še, koliko zlomov je bilo v času velikih zgodovinskih dogodkov. V 2. svetovni vojni je bilo tako 21 zlomov v potrošnji (povprečna velikost 0.33) in 25 v BDP (povprečna velikost 0.37). Tudi 1. svetovna vojna in Velika depresija izstopata. Obdobje od 1920 do 1922 pa najverjetneje odraža Veliko pandemijo gripe. Obdobje po 2. svetovni vojni je bilo razmeroma mirno, kar velja še posebej za članice OECD.

	Potrošnja (28 držav)		BDP (40 držav)	
Obdobje	Št. zlomov	Povpr. padec	Št. zlomov	Povpr. padec
Pred 1914	31	0.16	51	0.17
1. svetovna vojna	20	0.24	31	0.21
Začetek 20. let 19. st.	10	0.24	8	0.22
Velika depresija	14	0.20	23	0.20
2. svetovna vojna	21	0.33	25	0.37
Povojno obdobje	24	0.18	35	0.17
-Članice OECD	6	0.12	6	0.13
-Nečlanice OECD	18	0.19	29	0.17
Ostalo	5	0.19	10	0.15
Skupaj	125	0.22	183	0.21

TABELA 4. Število zlomov med glavnimi zgodovinskimi dogodki, vir: Barro in Ursua (2011).

#### 4. VREDNOTENJE PREMOŽENJA IN PREMIJA ZA TVEGANJE

Vsi ti podatki pa pomagajo pri obrazložitvi problemov vrednotenja premoženja. Najprej si bomo pogledali standarden model vrednotenja premoženja, ki ne vključuje zlomov, premijo za tveganje in kaj je eden od problemov vrednotenja premoženja: problem kapitalske premije. Ta je bil tudi glavni povod za obširno raziskovanje okoli tematike redkih zlomov. Videli bomo, da je velikost premije, ki jo investitorji zahtevajo, odvisna od koeficienta relativne nenaklonjenosti tveganju<sup>5</sup> ( $\gamma$ ), torej njihovih preferenc. Standardni model nam ne da verjetne ocene za  $\gamma$ , pri modelu, ki pa vključuje zlome, je ta ocena smiselnejša.

Teorija vrednotenja izvira iz preprostega koncepta, ki bo predstavljen v naslednjih podpoglavjih, in sicer: trenutna cena naložbe je enaka pričakovanim diskontiranim izplačilom.

##### 4.1. Standarden model vrednotenja premoženja.

Naj obstaja investitor, katerega funkcija koristnosti je:

$$U(c_t, c_{t+1}) = u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})], \quad (1)$$

kjer je  $\beta \leq 1$  diskontni faktor<sup>6</sup>.

Naj  $x_{t+1}$  označuje izplačila in naj bo stohastična spremenljivka ter definirana kot

$$x_{t+1} = p_{t+1} + d_{t+1}, \quad (2)$$

torej vrednost investicije ob času  $t + 1$ . Od tu tudi izhaja negotovost, zato lahko za čas  $t + 1$  izračunamo le pričakovanja, glede na informacije do časa  $t$ . Investitor

<sup>5</sup>Relativna nenaklonjenost tveganju je stopnja vlagateljeve nenaklonjenosti tveganju.

<sup>6</sup>Diskontni faktor je faktor, s katerim pomnožimo prihodnje denarne tokove, da dobimo sedanjo vrednost.

lahko proda ali kupi toliko izplačila  $x_{t+1}$  kot želi, po ceni  $p_t$ .

Naj bodo:

- $e_t, e_{t+1}$  trenutno in prihodnje premoženje (angl. endowment), to je nedelovni dohodek,
- $\xi$  pa naj bo količina, katero se odloči kupiti.

Potem je njegov optimizacijski problem enak

$$\max_{\xi} u(c_t) + \beta E_t[u(c_{t+1})] \quad (3)$$

pri pogojih

$$\begin{aligned} c_t &= e_t - p_t \xi, \\ c_{t+1} &= e_{t+1} + x_{t+1} \xi. \end{aligned}$$

Če vstavimo pogoje v problem in odvajamo glede na  $\xi$ , dobimo pogoj 1. reda za optimizacijo:

$$p_t u'(c_t) = E_t[\beta u'(c_{t+1}) x_{t+1}] \quad (4)$$

ali katero od ekvivalentnih osnovnih enačb vrednotenja premoženja:

- $$p_t = E_t[m_{t+1} x_{t+1}], \quad (5)$$

kjer je

$$m_{t+1} = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)} \quad (6)$$

stohastični diskontni faktor,

- $$1 = E_t[m_{t+1} R_{t+1}], \quad (7)$$

kjer je

$$R_{t+1} = \frac{x_{t+1}}{p_t} \quad (8)$$

bruto donos,

- $$1 = E(mR). \quad (9)$$

Če predpostavimo funkcijo koristnosti CRRA,  $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$ , pri čemer je  $\gamma$  relativna nenaklonjenost tveganju, je

$$m_{t+1} = \beta \left( \frac{c_t}{c_{t+1}} \right)^\gamma. \quad (10)$$

### Netvegana naložba

Donos netvegane naložbe  $R_t^f$  od časa  $t$  do  $t + 1$ , ki je zagotovo znan ob času  $t$ , je enak

$$R^f = \frac{1}{E[m]}, \quad (11)$$

saj je  $1 = E(mR)$ , pri čemer je  $R$  znan, torej je  $1 = E(m)R$ , ali bolj natančno

$$R_t^f = \frac{1}{E(m_{t+1})}. \quad (12)$$

Če zopet uporabimo  $u'(c) = c^{-\gamma}$  in ni negotovosti, potem dobimo

$$R^f = \frac{1}{\beta} \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^\gamma, \quad (13)$$

od koder lahko takoj preberemo tri učinke:

- realna obrestna mera je visoka, ko so ljudje nestrpni, to je, ko je  $\beta$  nizek,
- realna obrestna mera je visoka, ko je rast potrošnje visoka. V časih visoke obrestne mere je boljše več investirati in manj trošiti. Zato visoka obrestna mera niža stopnjo potrošnje danes in dviga rast potrošnje z danes na jutri,
- realne obrestne mere so bolj občutljive na rast potrošnje, ko je  $\gamma$  velik.

Da bi razumeli, kako se obnašajo obrestne mere, ko obstaja negotovost, predpostavimo najprej, da je  $\ln \frac{c_{t+1}}{c_t}$  normalno porazdeljen. Simbol  $\Delta$  označuje prvo diferenco, torej je  $\ln \frac{c_{t+1}}{c_t} = \ln c_{t+1} - \ln c_t = \Delta \ln c_{t+1}$ . Da lahko izpeljemo formulo za netvegano obrestno mero, začnemo z

$$R_t^f = \frac{1}{E_t \left[ \beta \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right]} \quad (14)$$

in upoštevamo dejstvo, da za normalno porazdeljen  $z$  dobimo

$$E(e^z) = e^{E(z) + (1/2)\sigma^2(z)}, \quad (15)$$

saj je

$$\begin{aligned} E(e^z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^z}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z^2-2z\mu+\mu^2)}{2\sigma^2} + \frac{2\sigma^2 z}{2\sigma^2}} dz = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z^2-2z\mu+\mu^2-2\sigma^2 z)}{2\sigma^2}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z^2-2z(\mu+\sigma^2)+\mu^2)}{2\sigma^2}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z^2-2z(\mu+\sigma^2)+\mu^2+2\mu\sigma^2+\sigma^4-2\mu\sigma^2-\sigma^4)}{2\sigma^2}} dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-(\mu+\sigma^2))^2 - (\mu+\frac{1}{2}\sigma^2)2\sigma^2}{2\sigma^2}} dz \\ &= e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-(\mu+\sigma^2)}{\sigma}\right)^2} dz = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \cdot 1 \end{aligned} \quad (16)$$

Zanima nas

$$E_t \left[ \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right] = E_t \left[ e^{-\gamma \ln \frac{c_{t+1}}{c_t}} \right] \quad (17)$$

Ker je  $\ln \frac{c_{t+1}}{c_t} = \ln c_{t+1} - \ln c_t$  normalno porazdeljen, uporabimo zgornji integral in dobimo

$$E_t \left[ \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right] = e^{-\gamma E_t(\Delta \ln c_{t+1}) + \frac{\gamma^2}{2} \sigma^2(\Delta \ln c_{t+1})} \quad (18)$$

Torej je

$$R_t^f = \frac{1}{E_t \left[ \beta \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right]} = \beta^{-1} e^{\gamma E_t(\Delta \ln c_{t+1}) - \frac{\gamma^2}{2} \sigma^2(\Delta \ln c_{t+1})}, \quad (19)$$

iz česar sledi

$$r_t^f \approx \delta + \gamma E_t(\Delta \ln c_{t+1}) - \frac{\gamma^2}{2} \sigma_t^2(\Delta \ln c_{t+1}), \quad (20)$$

kjer smo uporabili standardne aproksimacije  $r^f \approx \ln R^f$  (neto donos) in  $\delta \approx -\ln \beta$ .

Od tu lahko vidimo enake rezultate, kot prej: realne obrestne mere so visoke, ko je  $\delta$  visok, ko je visoka rast potrošnje in da višja  $\gamma$  povzroči večjo občutljivost obrestnih mer na rast potrošnje.

#### 4.2. Premija za tveganje.

Premija je razlika med pričakovanim donosom tvegane naložbe in donosom netvegane naložbe.

V formuli

$$1 = E(mR^i) \quad (21)$$

uporabimo formulo za kovarianco  $\text{cov}(m, R^i) = E(mR^i) - E(m)E(R^i)$  in pridemo do

$$1 = E(m)E(R^i) + \text{cov}(m, R^i). \quad (22)$$

V to vstavimo  $R^f = \frac{1}{E(m)}$  in dobimo formulo za premijo

$$1 = \frac{E(R^i)}{R^f} + \text{cov}(m, R^i) \quad (23)$$

$$E(R^i) - R^f = -R^f \text{cov}(m, R^i) = -\frac{\text{cov}[u'(c_{t+1}), R^i]}{E[u'(c_{t+1})]}, \quad (24)$$

kjer smo uporabili dejstvo, da je  $m = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$  in  $R^f = \frac{1}{E(m)} = \frac{1}{E\left(\beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}\right)} = \frac{u'(c_t)}{\beta E(u'(c_{t+1}))}$ .

#### 4.3. Problem kapitalne premije.

Problem kapitalne premije po ekonomistih Rajnishu Mehru in Edwardu C. Prescottu (1985) temelji na ugotovitvi, da morajo imeti posamezniki, glede na veliko večje donose delnic v primerjavi z državnimi obveznicami, visoko nenaklonjenost tveganju  $\gamma$ . Ta razlika med donosoma pomeni premijo.

Najprej definirajno Sharpov kvocient (angl. Sharpe ratio) kot

$$\frac{E(R) - R^f}{\sigma(R)}. \quad (25)$$



## Pomen Sharpovega kvocienta

$$1 = E(mR), \quad (26)$$

$$1 = E(m)E(R) + \text{cov}(R, m), \quad (27)$$

$$1 = E(m)E(R) + \rho_{m,R}\sigma(R)\sigma(m), \quad (28)$$

kjer je uporabljena definicija kovariance.

Vemo, da je  $1 = E(m)R^f$ , to odštejemo na obeh straneh in preuredimo, ter dobimo

$$E(R) - R^f = -\rho_{m,R}\sigma(R)\frac{\sigma(m)}{E(m)}. \quad (29)$$

Korelacijski koeficient  $\rho$  ne more biti večji od 1, zato je

$$\left| \frac{E(R) - R^f}{\sigma(R)} \right| \leq \frac{\sigma(m)}{E(m)} \quad (30)$$

Naj bo  $SR^*$  maksimalen Sharpov kvocient, to je, ko je  $\rho_{m,R} = -1$ , je

$$\frac{E(R) - R^f}{\sigma(R)} = \frac{\sigma(m)}{E(m)} = \sigma(m)R^f. \quad (31)$$

Ta je odvisen od  $m$ , kjer je  $m = \beta \frac{u'(c_{t+1})}{u'(c_t)}$ , torej je preko  $m$  odvisen od volatilnosti potrošnje in oblike funkcije koristnosti - koliko imamo radi nestalno potrošnjo.

Če zopet uporabimo funkcijo koristnosti CRRA, je  $u'(c) = c^{-\gamma}$ , potem je

$$\frac{E(R) - R^f}{\sigma(R)} = \frac{\sigma \left[ \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right]}{E \left[ \left( \frac{c_{t+1}}{c_t} \right)^{-\gamma} \right]}. \quad (32)$$

Dodatno, če je rast potrošnje porazdeljena logaritemsko normalno, potem je

$$\frac{E(R) - R^f}{\sigma(R)} \approx \gamma \sigma(\Delta \ln c). \quad (33)$$

V zadnjih 50-ih letih so bili realni donosi delnic v ZDA v povprečju okoli 9% s  $\sigma = 16\%$ , medtem ko so bili realni donosi zakladnih menic okoli 1%.

Če to vstavimo v Sharpov kvocient, dobimo

$$\frac{0.09 - 0.01}{0.16} = 0.5. \quad (34)$$

Ker je rast potrošnje dokaj enakomerna z  $\sigma \approx 1\%$ , mora biti koeficient relativne nenaklonjenosti tveganju  $\gamma \approx 50$ , da zadosti zgoraj izračunani vrednosti 0.5. To pa

je veliko več od pričakovanega. Veliko ekonomistov je namreč mnenja, da  $\gamma$  verjetno leži med 1 in 3.

Ta problem imenujemo problem kapitalske premije (angl. Equity premium puzzle).

#### 4.4. Funkcije koristnosti.

V ekonomiji je koristnostna funkcija prikaz preferenc nad dobrinami in storitvami.

V standardnem modelu smo za izpeljavo uporabili funkcijo koristnosti CRRA. Kasneje v razdelku pa je uporabljena druga funkcija koristnosti, zato bodo prikazani trije primeri funkcij, ki so pomembni za obravnavo.

##### 4.4.1. Funkcija koristnosti CRRA.

Funkcija koristnosti je izražena kot

$$u(c) = \frac{1}{1-\gamma} c^{1-\gamma}, \quad (35)$$

kjer je  $\gamma > 0$  relativna nenaklonjenost tveganju.

Mejna koristnost (sprememba koristnosti zaradi potrošnje dodatne enote) se izrazi kot

$$u'(c) = c^{-\gamma}. \quad (36)$$

To funkcijo koristnosti smo že uporabili v razdelku 4.1. in 4.3.

##### 4.4.2. Izo-elastične preference.

Glede na preference, ko potrošnik maksimizira koristnostno funkcijo z izo-elastičnimi preferencami, se koristnost zapiše kot

$$U_t = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{1+\rho} [(C_{t+i})^{1-\gamma} - 1]/(1-\gamma), \quad (37)$$

kjer je  $\rho \geq 0$  stopnja časovne preference<sup>7</sup>.

Ta funkcija prikazuje, da ključni parameter  $\gamma$  predstavlja koeficient relativne nenaklonjenosti tveganju in obratno vrednost medčasovne elastičnosti substitucije (IES)<sup>8</sup>.

Ta ovira povzroča napovedi, kot so na primer vrednosti delnic, ki pa niso v skladu z dejanskimi vrednostmi.

<sup>7</sup>Časovna preferenca ali diskontiranje; večja kot je diskontna stopnja, raje imamo sedanjo potrošnjo.

<sup>8</sup>Medčasovna elastičnost substitucije (IES) je mera, kako se stopnja rasti potrošnje odziva na obrestne mere. Če obrestna mera zraste, lahko prihodnja potrošnja zraste zaradi povišanih donosov varčevanja.

Glede na te preference so cene določene iz 1. reda pogojev za potrošnjo skozi čas

$$C_t^{-\gamma} = \left(\frac{1}{1+\rho}\right) E_t(R_t C_{t+1}^{-\gamma}), \quad (38)$$

kjer je  $R_t$  bruto donos na naložbo od  $t$  do  $t+1$ .

#### 4.4.3. *EZW preference.*

Po ekonomistih Epsteinu, Zinu (1989) in Weilu (1990). Po njihovi teoriji se funkcija koristnosti izrazi kot rekurzivna funkcija

$$U_t = [(1-\beta)(C_t)^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \beta E_t[U_{t+1}^{1-\gamma}]^{\frac{1}{\theta}}]^{\frac{\theta}{1-\gamma}} \quad (39)$$

oziroma malo spremenjena funkcija po Weilu, kot jo je navedel Barro

$$U_t = \frac{\left( C_t^{1-\theta} + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \left[ (1-\gamma) E_t U_{t+1} \right]^{\frac{1-\theta}{1-\gamma}} \right)^{\frac{1-\gamma}{1-\theta}}}{(1-\gamma)}, \quad (40)$$

kjer je:

- $\frac{1}{\theta}$  IES
- $\gamma > 0$  koeficient relativne nenaklonjenosti tveganju.

Na splošno v primeru EZW preferenc ne pridemo do enostavnih formul za vrednotenje premoženja, vendar ob predpostavki, da so šoki neodvisni in enako porazdeljeni (n.e.p.), se analiza poenostavi.

#### 4.5. Barrov osnovni model.

Osnovni model je verzija Lucasovega modela (1978), ekonomije sadnega drevja z eksogeno in stohastično proizvodnjo. Proizvod dreves, sadje, v času  $t$  je enak realnemu BDP -  $Y_t$ . Število prebivalcev je konstantno, prav tako je število dreves določeno - ni investicij ali depreciacije. Državna potrošnja je ničelna. Ker je ekonomija zaprta, je ves proizvod porabljen, zato je potrošnja  $C_t$  enaka  $Y_t$ . Pomembna predpostavka je, da so zlomi in ostale motnje n.e.p. šoki na produktivnost. Tako potrošnjo ( $C$ ) in BDP lahko opišemo z naključnim sprehodom

$$\ln(C_{t+1}) = \ln(C_t) + g + u_{t+1} + v_{t+1}, \quad (41)$$

kjer je:

- $g \geq 0$  eksogena rast produktivnosti,
- $u_{t+1} \dots$  odraža normalno makroekonomsko nihanje in je predvideno da je  $\sim N(0, \sigma^2)$ ,
- $v_{t+1} \dots$  zavzeti redki zlomi. V teh  $Y$  in  $C$  močno upadeta,
- verjetnost zloma  $p > 0$  je konstantna v enem obdobju.

Verjetnost za več kot en zlom na obdobje je pri tem dovolj majhna, da jo lahko zanemarimo. Dolžina obdobja gre pri tem proti 0 - gre torej za zvezen čas. V času zloma se proizvodnja krči za delež  $b$ , kjer  $0 < b < 1$ . Porazdelitev za  $v_{t+1}$  je dana

- z verjetnostjo  $(1 - p)$ :  $v_{t+1} = 0$ ,
- z verjetnostjo  $p$ :  $v_{t+1} = \ln(1 - b)$ .

Velikost zloma  $b$  prav tako sledi neki verjetnostni porazdelitvi, kot na primer potenčni porazdelitvi.

Pričakovana stopnja rasti realnega BDP ni odvisna le od parametra stopnje rasti, temveč tudi od parametra negotovosti. Ko gre dolžina obdobja proti 0, je pričakovana stopnja rasti BDP (in tudi potrošnje) podana z

$$g^* = g + \frac{1}{2}\sigma^2 - pE(b), \quad (42)$$

kjer je  $E(b)$  pričakovana vrednost za  $b$  in je enaka 0.29 v vzorcu 60-tih opazovanih zlomov. Drugi člen je zanemarljiv - 0.0002 v vzorcu. Izraz  $pE(b)$  pa je pomemben - je enak 0.0049 ko je  $p = 0.017$  in  $E(b) = 0.29$ .

Kot omenjeno, EZW preference omogočajo ločevanje med  $\gamma$  in  $\theta$ . Epstein in Zin (1989) ter Restoy in Weil (1998) so pokazali, da je pogoj prvega reda za potrošnjo reprezentativnega agenta skozi čas enak

$$\beta^{\frac{(1-\gamma)}{(1-\theta)}} \cdot E_t \left[ \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\theta \frac{(1-\gamma)}{(1-\theta)}} \cdot R_{w,t+1}^{\frac{(\theta-\gamma)}{(1-\theta)}} \cdot R_{t+1} \right] = 1, \quad (43)$$

kjer je

- $0 < \beta < 1$  enoobdobni diskontni faktor,
- $R_{w,t+1}$  bruto donos na skupno premoženje,
- $R_{t+1}$  pa bruto donos na naložbo.

Naj bo  $P_t$  cena v odvisnosti od časa in naj označuje vrednost lastniške terjatve, proste finančnega vzvoda<sup>9</sup>, na drevo. Ta naložba je edina v okviru agregatne neto ponudbe v modelu.

Bruto donos na premoženje je torej enak

$$R_{w,t+1} = \left( \frac{C_{t+1} + P_{t+1}}{P_t} \right) = \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right) \cdot \left( \frac{1 + V_{t+1}}{V_t} \right), \quad (44)$$

kjer je  $V_t \equiv \frac{P_t}{C_t}$  razmerje med ceno in dividendo.

Če to vstavimo v zgornjo enačbo, dobimo

$$\beta^{\frac{(1-\gamma)}{(1-\theta)}} \cdot E_t \left[ \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \cdot \left( \frac{1 + V_{t+1}}{V_t} \right)^{\frac{(\theta-\gamma)}{(1-\theta)}} \cdot R_{t+1} \right] = 1. \quad (45)$$

<sup>9</sup>Vzvod - razmerje med dolgom in lastniškim kapitalom; brez vzvoda - ni financiranja z zadolževanjem.

Če so šoki na  $\frac{C_{t+1}}{C_t}$  neodvisni in enako porazdeljeni, potem velja  $V_{t+1} = V_t = V$  in pogoj zavzame zopet navadno obliko

$$\beta^* \cdot E_t \left[ \left( \frac{C_{t+1}}{C_t} \right)^{-\gamma} \cdot R_{t+1} \right] = 1, \quad (46)$$

kjer je  $\beta^*$  konstanta, ki je odvisna od vseh ostalih osnovnih parametrov.

Barro je uporabil zgornjo formulo skupaj s procesom za potrošnjo, da je sestavil formulo za kapitalsko premijo brez vzvoda v zveznem času.

Kapitalska premija se tako izrazi kot

$$r^e - r^f = \gamma\sigma^2 + p \cdot E\{b \cdot [(1-b)^{-\gamma} - 1]\}, \quad (47)$$

kjer je vse merjeno na enoto časa, recimo eno leto, in kjer

- je  $r^e$  pričakovana stopnja donosa,  $r^f$  pa netvegana obrestna mera,
- je  $\gamma\sigma^2$  zelo majhen ter enak premiji, ko ni zloma,
- drugi člen vključi zlome.

#### 4.6. Parametrične ocene porazdelitvene funkcije velikosti zlomov.

Barro in Jin (2009) sta pokazala, da je frekvenčno porazdelitev velikosti zlomov za potrošnjo in BDP mogoče opisati z uporabo potenčne porazdelitve. To ustreza tudi Gabaixovi (2009) diskusiji o številnih uporabah potenčnih porazdelitev v financah in drugih področjih.

Frekvenčna porazdelitev je razvrstitev enot v skupine glede na vrednosti ene spremenljivke opazovanega pojava. To izboljša preglednost podatkov, če spremenljivka zavzame veliko različnih vrednosti.

Torej, če je  $b$  sorazmerna velikost zloma, se potenčna porazdelitev nanaša na preoblikovano spremenljivko zloma  $z$ , kjer

$$z = \frac{1}{1-b}, \quad (48)$$

ki je razmerje med normalno in potrošnjo ali BDP v času zloma. To porazdelitev opazujemo za  $b$  nad določenim pragom, ki je enak  $b_0 = 0.095$ , kar se pretvori v prag za  $z$ ,  $z_0 = 1.105$ . Ko gre  $b$  proti 1, se  $z$  približuje neskončno.

#### Eno-potenčna porazdelitev

Gostota eno-potenčne porazdelitve je enaka

$$f(z) = A \cdot z^{-\alpha}, \quad (49)$$

za  $z \geq z_0$ ,  $A > 0$  in  $\alpha > 0$ . Iz pogoja, da je integral gostote na intervalu  $(z_0, \infty)$  enak 1, dobimo

$$A = (\alpha - 1) \cdot z_0^{(\alpha-1)}. \quad (50)$$

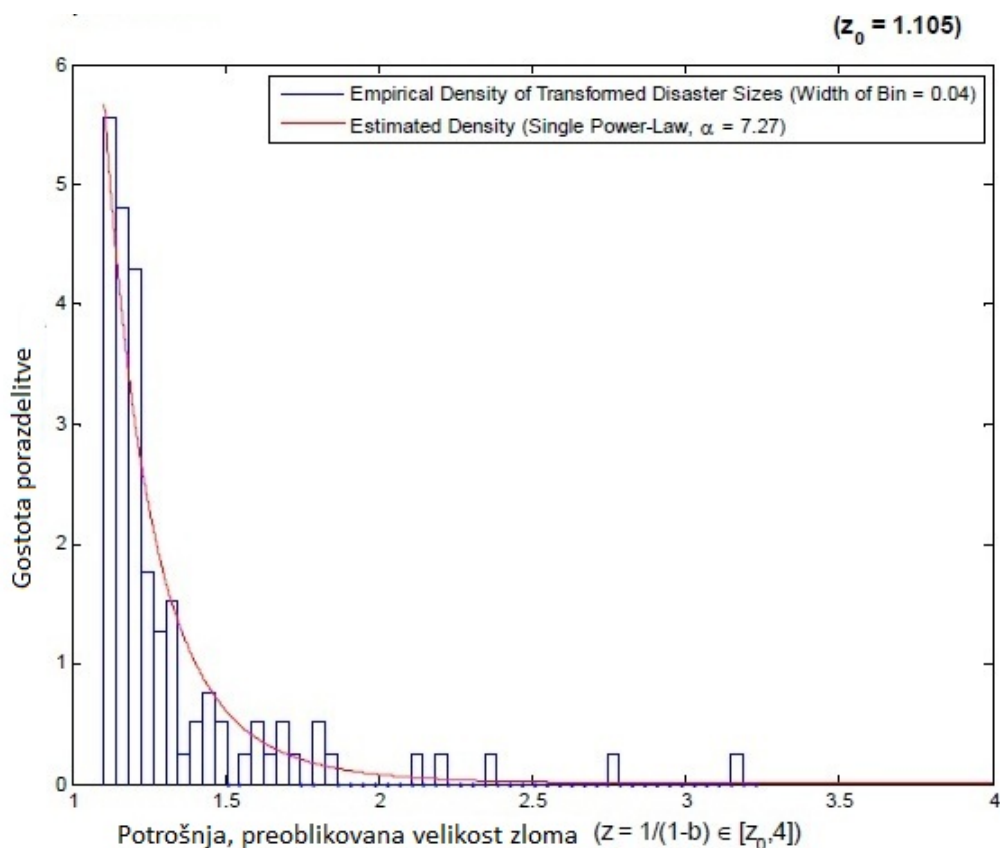
Ključni parameter, ki opisuje potenčno gostoto, je eksponent  $\alpha$ . Taka porazdelitev z gostoto  $f(z) = A \cdot z^{-\alpha}$  je bila široko uporabljena v fiziki, ekonomiji, računalništvu,

ekologiji in biologiji. Zaradi uporabe te porazdelitve na številnih področjih, je dobila tudi veliko različnih imen kot so: porazdelitev s težkim repom, Pareto porazdelitev, Zipfianova porazdelitev, fiskalna porazdelitev.

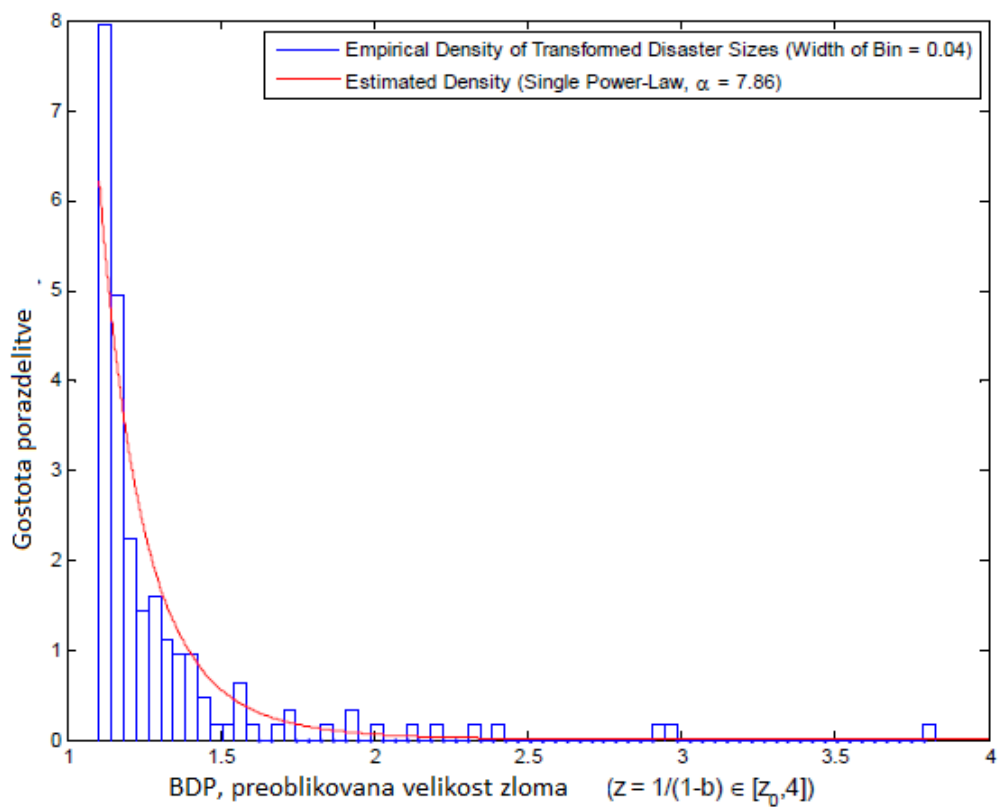
V nekaterih uporabah, kot je porazdelitev dohodka, se je ta porazdelitev slabo prilegala opazovanim podatkom, se je pa dobro prilegala zgornjemu repu.

Barro in Ursua (2008) sta preko empirične porazdelitve (histogrami) za  $b$  prišla do zaključka, da mora biti  $\gamma = 3.5$  za ujemanje s ciljno kapitalsko premijo (brez vzvoda) 5%. Rezultati preko eno-potenčne porazdelitve pa so privedli do nekoliko večje  $\gamma$ . Ta rezultat pa je bil v nasprotju s pričakovanji Barra in Jina (2009), saj sta pričakovala, da bo prehod na parametrizirano porazdelitev omogočal večje velikosti zlomov, kot jih sploh lahko opazimo v vzorcu in tako znižal  $\gamma$ .

Sliki 3 in 4 primerjata opazovane vrednosti za potrošnjo in BDP z gostoto eno-potenčne porazdelitve.



SLIKA 3. Histogram empirične porazdelitve in gostota eno-potenčne porazdelitve za potrošnjo, vir: Barro in Jin (2009).



SLIKA 4. Histogram empirične porazdelitve in gostota eno-potenčne porazdelitve za BDP, vir: Barro in Jin (2009).

## Dvo-potenčna porazdelitev

Gostota dvo-potenčne porazdelitve je oblike:

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{za } z < z_0, \\ Bz^{-\beta} & \text{za } z_0 \leq z < \delta, \\ Az^{-\alpha} & \text{za } \delta \leq z. \end{cases} \quad (51)$$

kjer  $\beta, \alpha > 1$ ,  $A, B > 0$ ,  $z_0 = 1.105$  in  $\delta \geq z_0$ .

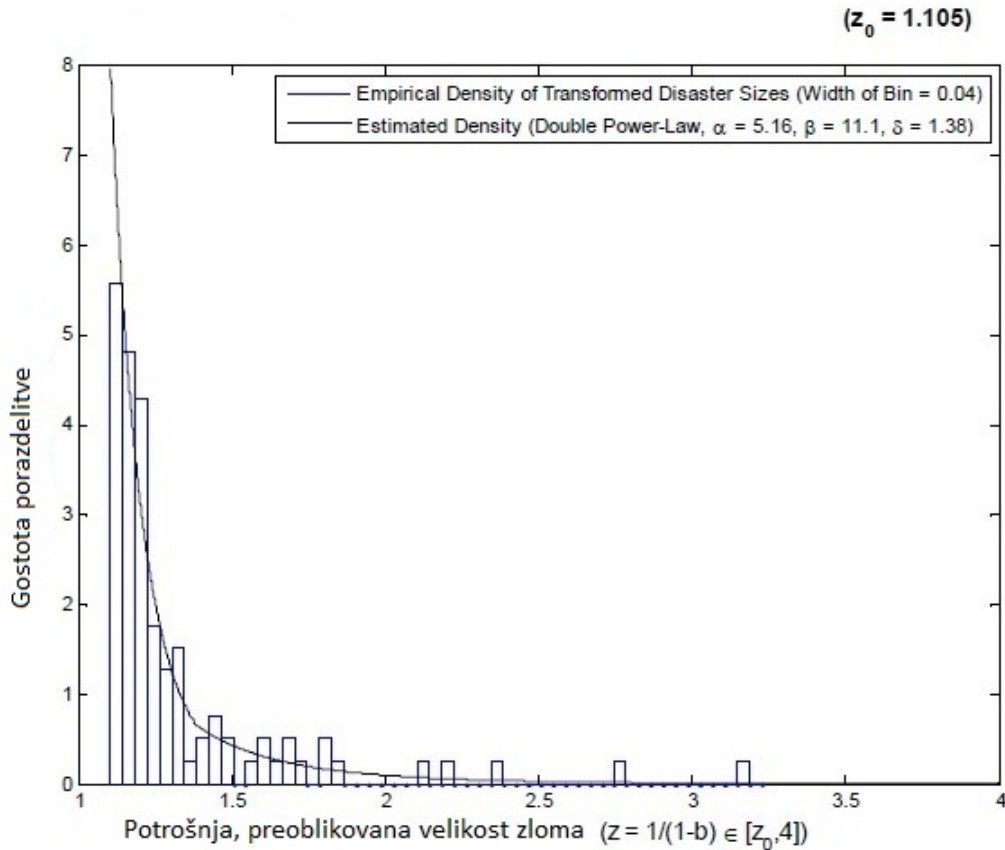
Iz pogoja, da je integral gostote na intervalu  $(z_0, \infty)$  enak 1 in zveznosti gostote, sledi

$$B = A\delta^{\beta-\alpha}, \quad (52)$$

oziroma

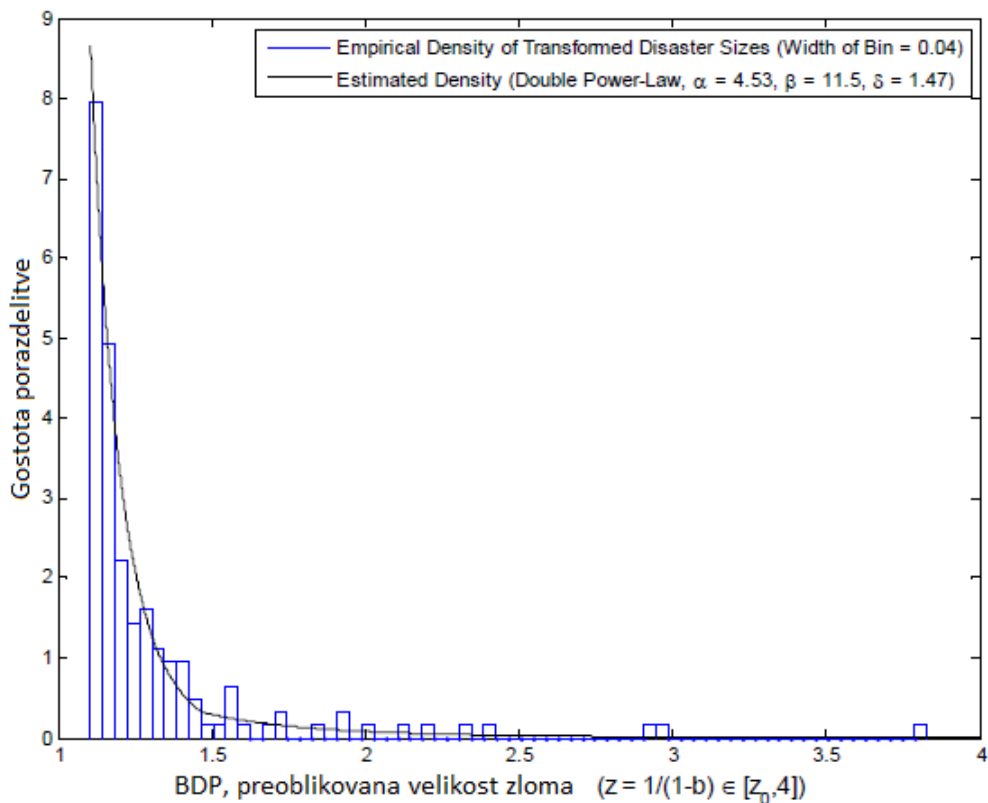
$$\frac{1}{A} = \frac{\delta^{\beta-\alpha}}{\beta-1}(z_0^{1-\beta} - \delta^{1-\beta}) + \frac{\delta^{1-\alpha}}{\alpha-1}. \quad (53)$$

Sliki 5 in 6 pa primerjata opazovane vrednosti za potrošnjo in BDP z gostoto dvo-potenčne porazdelitve.



SLIKA 5. Histogram empirične porazdelitve in gostota dvo-potenčne porazdelitve za potrošnjo, vir: Barro in Jin (2009).





SLIKA 6. Histogram empirične porazdelitve in gostota dvo-potenčne porazdelitve za BDP, vir: Barro in Jin (2009).

Očitno je, da je prilagodljivost tukaj večja glede na opazovane vrednosti (vidno tudi na grafih v dodatku D). Prav tako se taka porazdelitev veliko bolje ujema v zgornjem repu kot pa eno-potenčna.

Z ozirom na kapitalско premijo je ključna razlika v teh dveh pristopih bistveno manjša vrednost  $\alpha$ . Vrednosti za  $\alpha$  so tukaj blizu 5, prej pa so bile preko 7. Preko tega pristopa sta prišla do nižjega koeficienta relativne nenaklonjenosti tveganju  $\gamma$  za ujemanje s ciljno kapitalsko premijo brez vzvoda 5%. Za potrošnjo je  $\gamma = 3.0$ , za BDP pa  $\gamma = 2.8$ .

Histograma velikosti zlomov v potrošnji za  $b$  in  $z = \frac{1}{1-b}$  sta v dodatku B, histograma velikosti zlomov v BDP za  $b$  in  $z$  pa v dodatku C. Grafa, ki primerjata ustreznost logaritmirane eno-potenčne in dvo-potenčne porazdelitve za  $z$  z logaritmiranimi podatki za potrošnjo, sta v dodatku D.

#### 4.7. Pomanjkljivost osnovnega modela.

Osnovni model je še vedno pomanjkljiv. Ne ujema se namreč z opazovanim nihanjem cen delnic.

Standardni odklon donosov (brez vzvoda) v modelu je enak temu za stopnje rasti potrošnje in BDP, realno pa se to zelo razlikuje - 6.4% za rast potrošnje in 6.0% za rast BDP ter kar 31.7% za donose delnic (Barro in Ursua, 2011, celoten vzorec).

Delovanje vzvoda pri tem lahko obrazloži le del te neskladnosti.

Osnovni problem modela pa je ta, da predpostavlja stalno razmerje cen delnic in dividend ( $V$ ), medtem, ko je to v podatkih volatilno.

## 5. REDKI ZLOMI V MODELIH V ZADNJEM ČASU

### Spreminjajoča se verjetnost zloma $p$

Gabaix (2010) je dopuščal časovno različne verjetnosti zloma  $p$ . To lahko obrazloži nihanje razmerja cen in dividend. Poleg visokih kapitalskih premij, nizkih netveganih stopenj in nihanj donosov, je Gabaix pokazal, da okvir modela razloži tudi druge probleme vrednotenja premoženja.

Resen empirični izziv pa je določanje verjetnosti zloma. Tudi, ko je  $p$  konstantna po državah in skozi čas, je empirična ocena  $p$ -ja težka, saj so zlomi redki in lahko tudi odsotni v majhnih vzorcih (primer: obdobje po 2. svetovni vojni). Problem pa se še dodatno zaplete, če se ta  $p$  lahko spreminja po državah ali skozi čas v državah.

Možen pristop ocene  $p$ -ja je preko cen opcij na indekse. Bollerslev in Todorov (2011) sta na primer uporabila cene opcij na indekse S&P 500 od let 1996 do 2008 (njun postopek nam da tako imenovane "verjetnosti, nevtralne na tveganje").

Ključna ugotovitev je bila ta, da je mediana ocenjene premije tveganja zaradi redkih zlomov enaka 5.6 na leto, kar je velik del povprečne premije okoli 7. Torej večina kapitalske premije izhaja iz tveganja za zlom.

Berkman, Jacobsen in Lee (2011) pa so  $p$  ocenili glede na število in resnost mednarodnih političnih kriz. Te politične spremenljivke neposredno vplivajo na verjetnost zlomov, recimo vojne. Pokazali so, da so politične krize povezane s finančnimi spremenljivkami: donosi, nihanjem cen delnic, dividend, ...

### Redki zlomi v mednarodni ekonomiji

Ena od smeri raziskovanj pa razteza model redkih zlomov s časovno različno verjetnostjo na mednarodno makroekonomijo in finance. Eden od ciljev te raziskave je problem nepokrite obrestne paritete, ki se nanaša na spremembe obrestnih mer znotraj države in na menjalne tečaje med državami.

Glavne ideje sta dobro razložila Fahri in Gabaix (2011). V njunem modelu agentje v vsaki državi posebej vrednotijo potrošnjo trgovanih in netrgovanih dobrin. Diskont (angl. pricing kernel) je tako odvisen le od trgovanih, saj je tu prisotno tveganje. Uresničitev globalnega zloma pomeni malo količino trgovanih in zato visoko mejno koristnost in visoko vrednost diskonta.

Države se ob tem razlikujejo glede na občutljivost na globalne šoke. V modelu je stopnja varnosti opisana z državno "prožnostjo", ki je odvisna od svetovnih in lokalnih šokov. Če se pojavi zlom, realni tečaj držav z nizko prožnostjo močno pade

v primerjavi s tistimi z visoko prožnostjo.

Ko je država tvegana (prožnost nizka), je realna obrestna mera visoka in menjalni tečaj deprecira. Če svetovna verjetnost nesreče  $p_t$  zraste, tvegane države doživijo dvig obrestnih mer in deprecijacijo<sup>10</sup> tečaja v nasprotju z varnimi državami.

Tako "carry-trade" strategija spojanja v državah z nizko obrestno mero in posojanja v državah z visoko obrestno mero "ne premaga trga". Prisoten visok povprečni donos v vzorcu, ki vključuje tipično število zlomov, pa je v tem primeru nadomestilo za tveganje.

## Model z okrevanji

Osnovni model ima več nerealnih predpostavk.

Makroekonomska krčenja se pojavijo v trenutku, namesto da bi se raztezala preko več let. Prav tako imajo v modelu zlomi trajen učinek, ampak kot je poudaril Gouriou (2008), resničnim zlomom ponavadi sledijo močna okrevanja.

Model tudi zanemarja korelacije v času zlomov po državah. Nakamura, Steinsson, Barro in Ursua (2011) so tako "razvili" model, ki deli potrošnjo na tri komponente:

- potencialno potrošnjo,
- vrzel zloma,
- prehodni šok,

torej

$$c_{i,t} = x_{i,t} + z_{i,t} + \epsilon_{i,t}, \quad (65)$$

kjer so

- $c_{i,t}$  log potrošnja v državi  $i$  ob času  $t$ ,
- $x_{i,t}$  potencialna potrošnja. Ta določi stopnjo, na katero naj bi se potrošnja vrnila po koncu zloma,
- $z_{i,t}$  vrzel zloma v državi  $i$  ob času  $t$ . To je znesek, za katerega se potrošnja razlikuje od potencialne zaradi trenutnih oziroma preteklih zlomov,
- $\epsilon_{i,t}$  n.e.p. po normalni porazdelitvi, je šok na log potrošnjo, z varianco  $\sigma_{\epsilon,i,t}^2$  specifično za državo  $i$ , ki se potencialno lahko spreminja s časom.

Vstop v stanje zloma se zgodi s prehodno verjetnostjo, z drugo verjetnostjo pa se ekonomija pomakne v normalno stanje. Tako pride do zlomov različnih velikosti in trajanj.

V modelu so bili uporabljeni letni podatki za 24 držav s popolnimi podatki od 1890 do 2006, kar prinese v skupnem 2685 opazovanj.

Ocene kažejo, da tipičen zlom doseže dno po 6-ih letih s skupnim padcem v potrošnji za 30%. Vendar pa je le približno polovica padca trajnega - torej obdobja

<sup>10</sup>Depreciacija - izguba vrednosti valute te države v nasprotju z drugimi.

okrevanja nadoknadijo približno polovico izgubljene stopnje potrošnje. Ravno zaradi tega pa kapitalna premija ne dosega vrednosti iz osnovnega modela.

Pri tem je pomembna uporaba EZW preferenc, saj se rast potrošnje bistveno oddalji od n.e.p. procesa, še posebej v času zloma - vendar tudi v času okrevanj. Na primer, v zgodnjih fazah zlomov, kot v času vojne, cene delnic tipično že zelo padejo, medtem ko je potrošnja padla le malo. Vendar pa obstaja močno prepričanje, da bo kasnejša potrošnja še zelo padla, preden pride do okrevanj.

Na splošno ta model ustvarja visoko premijo zaradi tveganja zloma, ampak je ta še vedno nižja kot v osnovnem modelu, kjer so zlomi trajni in takojšnji. Za ujemanje s povprečno kapitalno premijo brez vzvoda v višini 5% model zavzame  $\gamma = 6.4\%$  (večja kot prej).

Ker je ta  $\gamma$  velika, je potrebno dodati še nekaj značilnosti, ki dvignejo premijo, da bi  $\gamma$  spustili do verjetne meje. Ena od obetavnih razširitev je, da se omogoči šoke na povprečje in varianco dolgoročnih stopenj rasti - torej združitev dolgoročnega modela tveganja (model Bansala in Yaron, 2004) in dinamike zlomov opisane tu.

## 6. SKLEPNA MISEL

Vključitev redkih zlomov torej pomaga obrazložiti vrsto problemov vrednotenja premoženja, vključno s kapitalno premijo, ki je predstavljala osnovni problem raziskovanj v tej smeri.

Kot smo lahko videli, je veliko ekonomistov pokazalo zanimanje za vključitev redkih zlomov pri svojih študijah. Da pa se lahko karkoli sploh analizira, najprej potrebujemo zanesljive podatke o makroekonomskih spremenljivkah skozi čas.

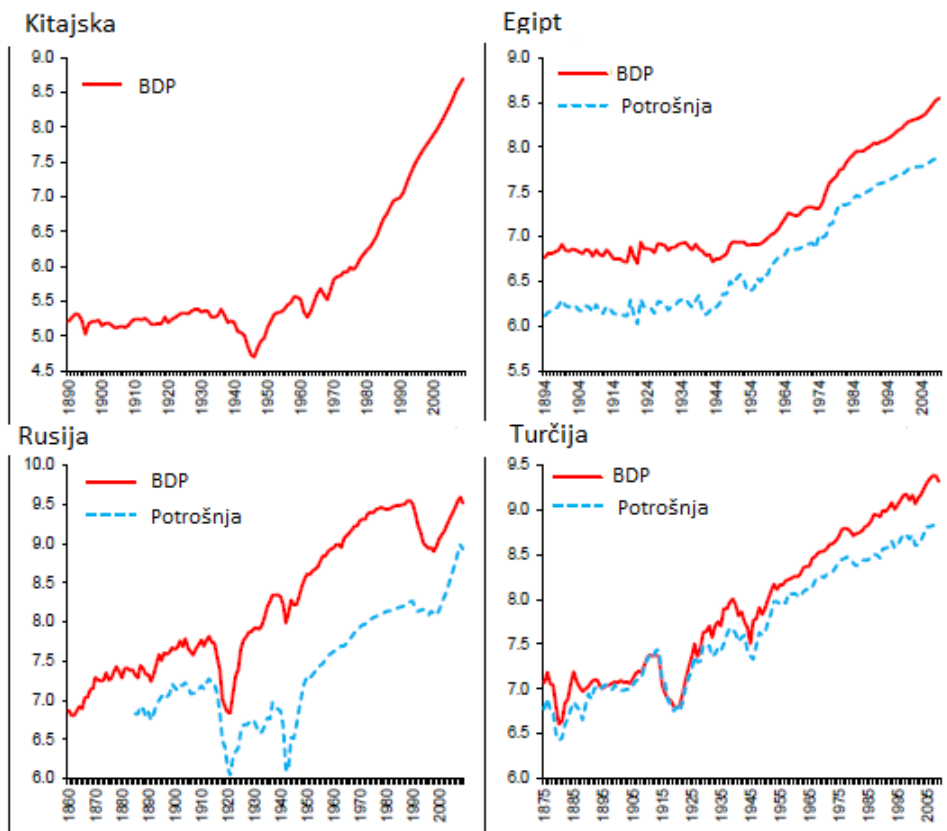
Kljub velikemu zanimanju za redke zlome lahko še vedno najdemo kakšno mnenje, ki pravi, da redki zlomi ne morejo obrazložiti problema kapitalne premije, kot je na primer delo Christiana Julliarda in Anishe Ghosh (2008, marec 2012).

Za v prihodnje pa Barro in Ursua (2011) navajata nekaj morebiti uspešnih modelov, ki bi vključevali redke zlome:

- vključitev redkih zlomov negotovega časa in velikosti v model dolgoročne gospodarske rasti,
- združitev modela z okrevanji, opisanega zgoraj in modela po Bansalu in Yaronu (2004).

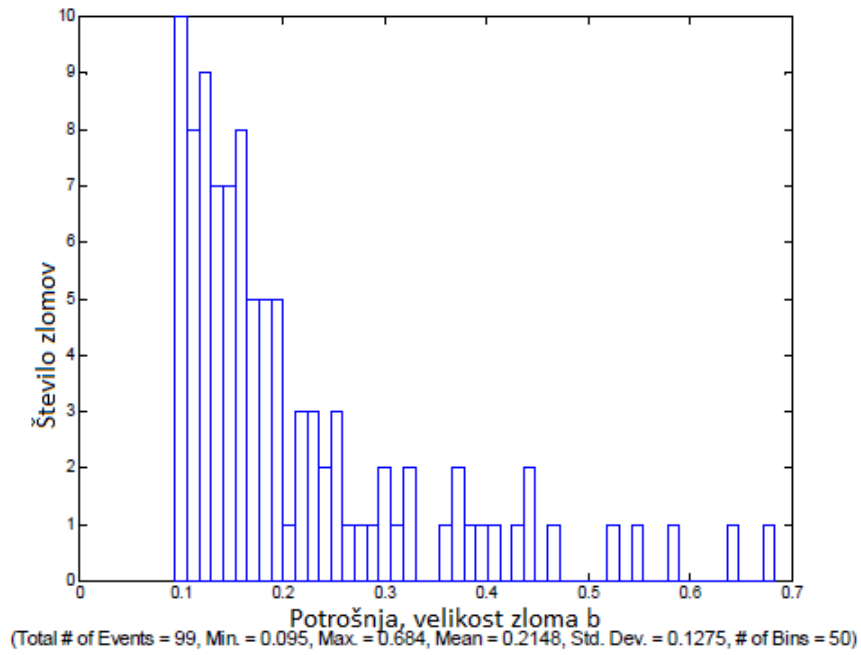
Se pa tudi s tem raziskovanje gotovo ne bo zaključilo, vse dokler ne pridemo do "magične formule", če sploh.

DODATEK A. GRAFIČEN PRIKAZ PODATKOV O BDP IN POTROŠNJI, DRŽAVE Z  
NOVO ZBRANIMI PODATKI

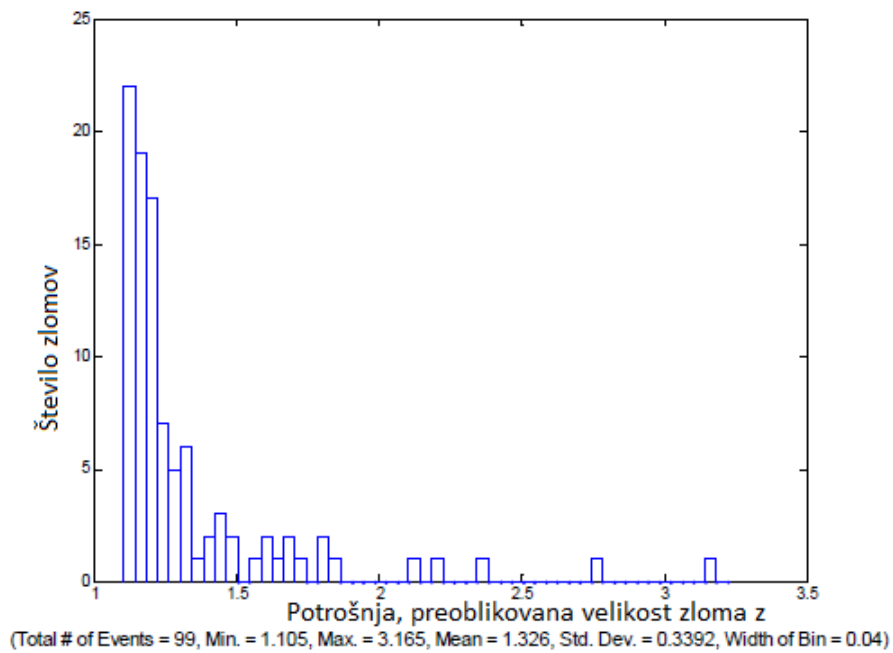


SLIKA 7. Grafičen prikaz podatkov o BDP in potrošnji, vir: Barro in Ursua (2011).

DODATEK B. HISTOGRAMA VELIKOSTI ZLOMOV ZA POTROŠNJO

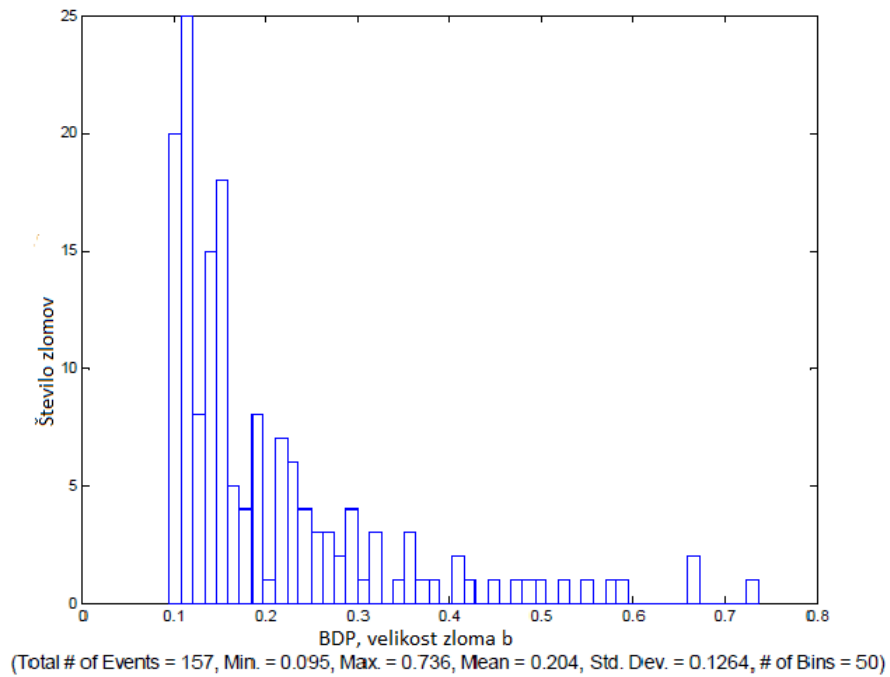


SLIKA 8. Histogram za spremenljivko  $b$  za potrošnjo, vir: Barro in Jin (2009).

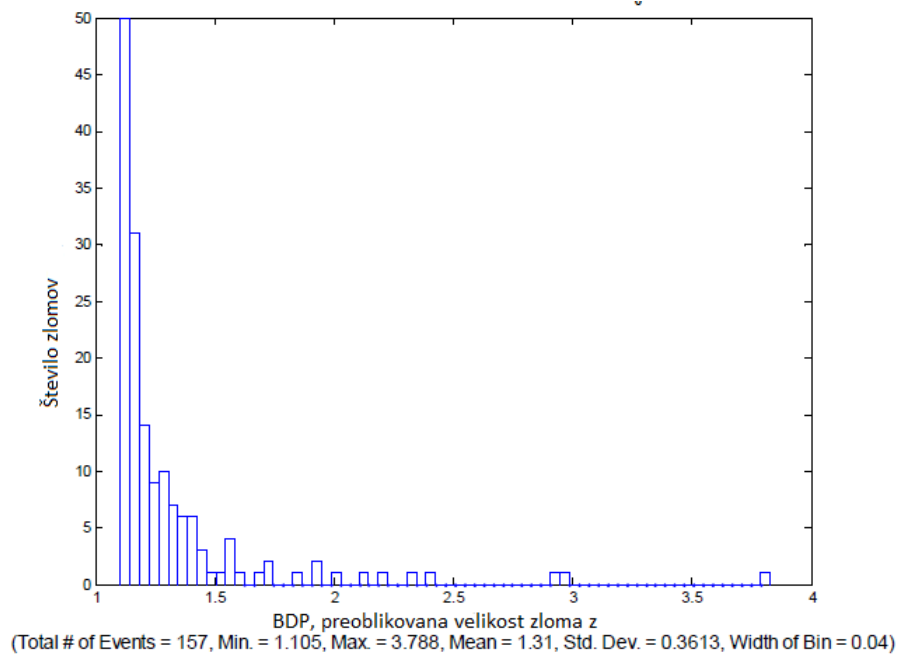


SLIKA 9. Histogram za spremenljivko  $z$  za potrošnjo, vir: Barro in Jin (2009).

DODATEK C. HISTOGRAMA VELIKOSTI ZLOMOV ZA BDP

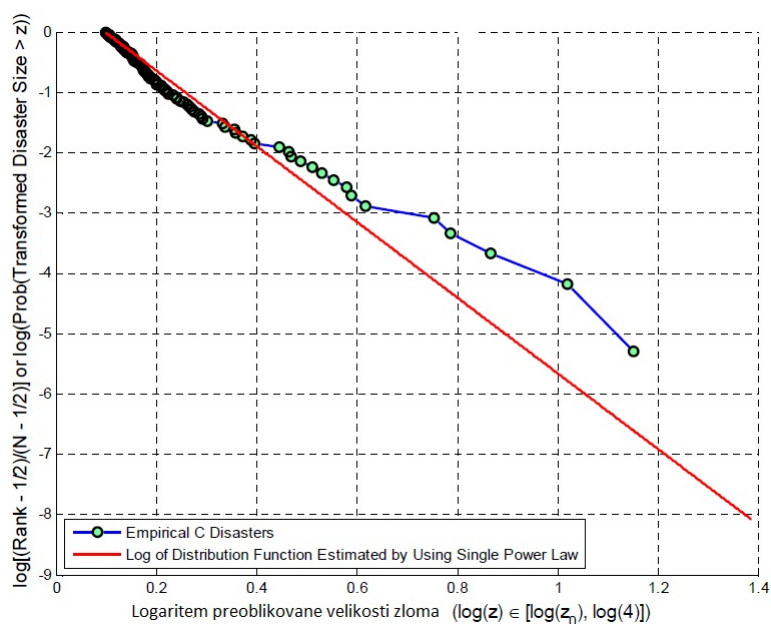


SLIKA 10. Histogram za spremenljivko  $b$  za BDP, vir: Barro in Jin (2009).

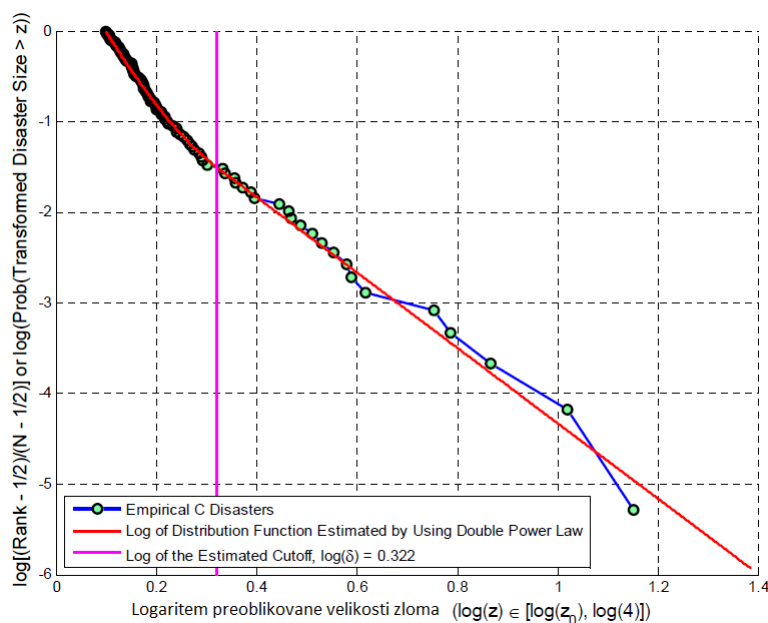


SLIKA 11. Histogram za spremenljivko  $z$  za BDP, vir: Barro in Jin (2009).

DODATEK D. USTREZNOST ENO-POTENČNE IN DVO-POTENČNE PORAZDELITVE  
ZA VELIKOST ZLOMA  $z$ , ZA POTROŠNJO



SLIKA 12. Primerjava logaritmirane eno-potenčne porazdelitve za spremenljivko  $z$ ,  $z$  logaritmiranimi podatki za potrošnjo, vir: Barro in Jin (2009).



SLIKA 13. Primerjava logaritmirane dvo-potenčne porazdelitve za spremenljivko  $z$ ,  $z$  logaritmiranimi podatki za potrošnjo, vir: Barro in Jin (2009).



## LITERATURA

- [1] R.J. Barro in J.F. Ursua, *Rare Macroeconomic Disasters*, verzija Avgust 2011, [ogled 13.10.2011], dostopno na [http://ws1.ad.economics.harvard.edu/faculty/barro/files/rare\\_080411.pdf](http://ws1.ad.economics.harvard.edu/faculty/barro/files/rare_080411.pdf).
- [2] A.B. Abel, *Asset Prices under Habit Formation and Catching up with the Joneses*, American Economic Review Papers and Proceedings **80(2)** (1990) 38–42.
- [3] R. Bansal in A. Yaron, *Risks for the Long Run: A Potential Resolution of Asset Pricing Puzzles*, verzija 2004, dostopno na [http://faculty.fuqua.duke.edu/~rb7/bio/bansal\\_yaron.pdf](http://faculty.fuqua.duke.edu/~rb7/bio/bansal_yaron.pdf).
- [4] R.J. Barro, *Rare Disasters and Asset Markets in the Twentieth Century*, Quarterly Journal of Economics **121(3)** (2006) 823–866.
- [5] R.J. Barro in J.F. Ursua, *Macroeconomic Crises since 1870*, verzija 2008, [14.10.2011], dostopno na [http://faculty.chicagobooth.edu/george.constantinides/documents/Proofs\\_Barro%20\(2\).pdf](http://faculty.chicagobooth.edu/george.constantinides/documents/Proofs_Barro%20(2).pdf).
- [6] J.Y. Campbell in J.H. Cochrane, *By Force of Habit: A Consumption-Based Explanation of Aggregate Stock Market Behavior*, Journal of Political Economy **107(2)** (1999) 205–251
- [7] G.M. Constantinides, *Rational Asset Pricing*, Journal of Finance **57** (2002) 1567–1592.
- [8] G.M. Constantinides in D. Duffie, *Asset Pricing with Heterogeneous Consumers*, Journal of Political Economy **104(2)** (1996) 219–240.
- [9] F.A. Longstaff in M. Piazzesi, *Corporate Earnings and the Equity Premium*, Journal of Financial Economics **74** (2004) 401–421.
- [10] A. Maddison, *The World Economy: Historical Statistics*, verzija 2003, dostopno na <http://www.ggdnc.net/maddison..>
- [11] R. Mehra in E.C. Prescott, *The Equity Premium: A Puzzle*, Journal of Monetary Economics **15(2)** (1985) 145–161.
- [12] R. Mehra in E.C. Prescott, *The Equity Risk Premium: A Solution?*, Journal of Monetary Economics **22** (1988) 133–136.
- [13] V. Naik in M. Lee, *General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns*, Review of Financial Studies **3(4)** (1990) 493–521.
- [14] T.A. Rietz, *The Equity Risk Premium: A Solution*, Journal of Monetary Economics **22** (1988) 117–131.
- [15] R.E.Jr. Lucas, *Asset Prices in an Exchange Economy*, Econometrica **46(6)** (1978) 1429–1445.
- [16] B. Taylor, *GFD Guide to Total Returns on Stocks, Bonds and Bills*, dostopno na [http://www.google.si/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&sqi=2&ved=0CD8QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.globalfinancialdata.com%2FNews%2FArticles%2FThe\\_GFD\\_Guide\\_to\\_total\\_returns.doc&ei=i2kmUIjkFNSHhQe06oDADQ&usq=AFQjCNEUC2rnp\\_eTGcMFqWKK0Spf-okupQ](http://www.google.si/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&sqi=2&ved=0CD8QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.globalfinancialdata.com%2FNews%2FArticles%2FThe_GFD_Guide_to_total_returns.doc&ei=i2kmUIjkFNSHhQe06oDADQ&usq=AFQjCNEUC2rnp_eTGcMFqWKK0Spf-okupQ), <http://www.globalfinancialdata.com>.
- [17] J.H. Cochrane, *Asset pricing*, Princeton University Press, New Jersey, 2005.
- [18] T. Bollerslev in V. Todorov, *Tails, Fears and Risk Premia*, Neobjavljeno, Duke University (2011).
- [19] L.G. Epstein in S.E. Zin, *Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework*, Econometrica **57(4)** (1989) 937–969.
- [20] E. Fahri in X. Gabaix *Rare Disasters and Exchange Rates*, Neobjavljeno, New York University (2011).
- [21] X. Gabaix, *Power Laws in Economics and Finance*, Annual Review of Economics **1** (2009) 255–293.
- [22] X. Gabaix, *Variable Rare Disasters: An Exactly Solved Framework for Ten Puzzles in Macro-Finance*, Neobjavljeno, New York University (2010).
- [23] E. Nakamura, J. Steinsson, R.J. Barro in J.F. Ursua, *Crises and Recoveries in an Empirical Model of Consumption Disasters*, 2011, dostopno na <http://www.columbia.edu/~en2198/papers/cdisasters.pdf>.
- [24] P. Weil *Nonexpected Utility in Macroeconomics*, Quarterly Journal of Economics **105(1)** (1990) 29–42.
- [25] R.J. Barro, *Rare Disasters, Asset Prices, and Welfare Costs*, American Economic Review **99(1)** (2009) 243–264.

- [26] R.J. Barro in J.F. Ursua, *Stock-Market Crashes and Depressions*, National Bureau of Economic Research, working paper no. 14760 (2009).
- [27] R.J. Barro in T. Jin, *On the Size Distribution of Macroeconomic Disasters*, leto 2009, dostopno na <http://www.economics.harvard.edu/faculty/barro/files/disaster%20size%20paper.pdf>.
- [28] C. Julliard in A. Ghosh, *Can Rare Events Explain the Equity Premium Puzzle?*, 2008 in ponovno 2012, [1. 8. 2012], verzija 2008 dostopna na [http://eprints.lse.ac.uk/4808/1/can\\_rare\\_events.pdf](http://eprints.lse.ac.uk/4808/1/can_rare_events.pdf).
- [29] F. Restoy in P. Weil, *Approximate Equilibrium Asset Prices*, National Bureau of Economic Research, working paper no. 6611, (1998).
- [30] J.F. Ursua, *Macroeconomic Archaeology: Unearthing Risk, Disasters, and Trends*, Neobjavljeno, Harvard University, (2011).
- [31] S. Polanec in I. Masten, *Macroeconomics 3*, prosojnice za Makroekonomijo 3, podiplomski študij (2010).
- [32] H. Berkman, B. Jacobsen in J.B. Lee, *Time Varying Rare Disaster Risk and Stock Returns*, *Journal of Financial Economics* **101** (2011) strani 313–332.
- [33] F. Gourio, *Disasters and Recoveries*, *American Economic Review Papers and Proceedings* **98** (2008) strani 68–73.
- [34] N. Gandelman in R. Hernandez-Murillo, *What do happiness and health satisfaction data tell us about relative risk aversion?*, verzija oktober 2011, ponovno 2012, [ogled 27.8.2012], dostopno na <http://research.stlouisfed.org/wp/2011/2011-039.pdf>.
- [35] *Asset prices*, [ogled 7. 5. 2012], dostopno na <http://econ.la.psu.edu/~bickes/basiclect.pdf>.
- [36] *Rare disasters*, [ogled 28. 10. 2011], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Rare\\_disasters](http://en.wikipedia.org/wiki/Rare_disasters)).
- [37] *Currency appreciation and depreciation*, [ogled 1. 8. 2012], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Currency\\_appreciation\\_and\\_depreciation](http://en.wikipedia.org/wiki/Currency_appreciation_and_depreciation).
- [38] *Frekvenčne porazdelitve*, [ogled 1. 8. 2012], dostopno na [http://www.muchvs.si/files/Gradiva/statistika%20tea/FREKVENCNE\\_PORAZDELITVE\\_2010.pdf](http://www.muchvs.si/files/Gradiva/statistika%20tea/FREKVENCNE_PORAZDELITVE_2010.pdf).
- [39] *Bruto domači proizvod*, [ogled 28. 10. 2011], dostopno na [http://sl.wikipedia.org/wiki/Bruto\\_doma%C4%8Di\\_proizvod](http://sl.wikipedia.org/wiki/Bruto_doma%C4%8Di_proizvod).
- [40] *Organizacija za gospodarsko sodelovanje in razvoj*, [ogled 1. 8. 2012], dostopno na [http://sl.wikipedia.org/wiki/Organizacija\\_za\\_gospodarsko\\_sodelovanje\\_in\\_razvoj](http://sl.wikipedia.org/wiki/Organizacija_za_gospodarsko_sodelovanje_in_razvoj).
- [41] *Discounting*, [ogled 1. 8. 2012], dostopno na <http://en.wikipedia.org/wiki/Discounting>.
- [42] *Elasticity of intertemporal substitution*, [ogled 1. 8. 2012], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Elasticity\\_of\\_intertemporal\\_substitution](http://en.wikipedia.org/wiki/Elasticity_of_intertemporal_substitution).
- [43] *Risk aversion*, [ogled 1. 8. 2012], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Risk\\_aversion](http://en.wikipedia.org/wiki/Risk_aversion).
- [44] *Time preference*, [ogled 1. 8. 2012], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Time\\_preference](http://en.wikipedia.org/wiki/Time_preference).
- [45] *Leverage*, [ogled 1. 8. 2012], dostopno na <http://www.investopedia.com/terms/l/leverage.asp#axzz23Vk8Y89H>.
- [46] *Preferences and Utility*, [ogled 2. 8. 2012], dostopno na [http://www.stanford.edu/~sandern/100A/Prefs\\_and\\_Utility\\_Examples.pdf](http://www.stanford.edu/~sandern/100A/Prefs_and_Utility_Examples.pdf).
- [47] *Utility*, [ogled 1. 8. 2012], dostopno na <http://en.wikipedia.org/wiki/Utility>.
- [48] *Equity premium puzzle*, [ogled 5. 8. 2012], dostopno na [http://en.wikipedia.org/wiki/Equity\\_premium\\_puzzle](http://en.wikipedia.org/wiki/Equity_premium_puzzle).