UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Ana Petrovič

Panjerjeva rekurzija proti hitri Fourierjevi transformaciji za sestavljene porazdelitve

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Dejan Velušček

Ljubljana, 2012

Kazalo

Panjerjeva rekurzija proti hitri Fourierjevi transformaciji za sestavljene porazdelitve

Povzetek

V delu diplomskega seminarja sta predstavljeni dve metodi ocenjevanja sestavljenih porazdelitev, Panjerjeva rekurzija in hitra Fourierjeva transformacija. Na začetku definiramo osnovne pojme in predstavimo metodo zaokroževanja, ki je ena izmed najbolj pogostih metod aritmetizacije zveznih porazdelitev. Nadalje vpeljemo Panjerjevo rekurzijo, njene poenostavitve in pokažemo, da je pri ocenjevanju nekaterih sestavljenih porazdelitev strogo stabilna. Omenimo tudi posplošitve, ki veljajo pri dodatnih predpostavkah. V drugem delu spoznamo hitro Fourierjevo transformacijo in za nekatere porazdelitvene funkcije podamo eksplicitne formule. Najprej definiramo diskretno Fourierjevo transformacijo ter spoznamo napako ovijanja in postopek, s katerim jo najbolj učinkovito zmanjšamo. V zadnjem poglavju metodi uporabimo na konkretnih porazdelitvah in predstavimo problem izbire pasovne širine ter učinka ovijanja.

Panjer recursion versus FFT for compound distributions

Abstract

In this thesis two methods to evaluate compound distributions are introduced, the Panjer recursion and the fast Fourier transform. At the beginning, we define the basic concepts and introduce the rounding method, one of the most common methods of arithmetization of continuous distributions. Further on we introduce the Panjer recursion, its simplifications and show, that it is strictly stable regarding evaluation of some compound distributions. We also mention some generalizations that are valid under additional assumptions. In the second part we introduce the fast Fourier transform and we give its explicit formulas for some distribution functions. We start with the definition of the discrete Fourier transform and later learn about the aliasing error and the procedure that practically rules out its effects. In the last section we use the methods on some concrete distributions in order to demonstrate their rate of convergence and to present the problems of bandwidth choice and alias effect.

Math. Subj. Class. (2010): 60-08

Ključne besede: metoda zaokroževanja, ekstrapolacija, Panjerjeva rekurzija, stroga stabilnost, hitra Fourierjeva transformacija, diksretna Fourierjeva transformacija, napaka ovijanja, eksponentno nagibanja

Keywords: rounding method, extrapolation, Panjer recursion, strictly stable, fast Fourier transform, discrete Fourier transform, aliasing error, exponential tilting

1. Uvod

Osnova diplomskega seminarja je članek Embrechtsa in Freia [2], ki obravnava tehniki izračuna porazdelitve sestavljene vsote $S_N = Y_1 + ... + Y_N$, kjer Y_i predstavljajo velikost škodnih zahtevkov in N skupno število le-teh. Študije teh numeričnih metod so eden izmed stebrov klasične teorije tveganja in neživljenskega zavarovanja.

V preteklosti so se aktuarji zanašali na relativno surove tehnike aproksimiranja, ki so bile osnovane na rezultatu centralne limite ali pa na nekem ad hoc sklepanju, ki mu je pogosto manjkala stroga teoretična obrazložitev. Te metode so omejene na kvalitativne razsikave, njihovi rezultati pa so preveč nepredvidljivi. Kljub temu so aproksimacije te vrste še vedno dokaj razširjene.

V zadnjih desetletjih se je moč procesiranja okrepila, tako nas zanimajo bolj eksaktni postopki. Temelji teh algoritmov so bili postavljeni v 80. letih. Rekurzivne tehnike je vpeljal Panjer [9], tehnike, ki so uporabljale Fourierjev inverz pa sta razvila Heckman in Meyers [6]. Slednja sta prav tako obsežno uporabljala hitro Fourierjevo transformacijo.

V zadnjih dveh desetletjih je bilo objavljenih več pomembnih člankov na to temo. Panjer in Wang sta v svojem članku *On the stability of recursive fomulas* [11] iz leta 1993 testirala stabilnost Panjerjeve rekurzije, Willmot [15], Sundt [13] ter Hess in drugi [7] pa so podali njene posplošitve. Grübel in Hermesmeier [4], [5] sta raziskala povečanje napak diskretizacije in postavila izboljšan postopek na osnovi hitre Fourierjeve transformacije, ki uporabi eksponentno spremembo mere. Zadnji prispevek je precejšen, saj izniči t.i. napako ovijanja, ki je glavna slabost uporabe diskretne Fourierjeve transformacije.

2. Metode

Na začetku vpeljemo potrebno notacijo. Vse slučajne spremenljivke so definirane na nekem fiksnem neatomskem verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definicija 2.1. Naj bo N slučajna spremenljivka z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$ in porazdelitvijo $\mathcal{Q}$. Naj bo $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ zaporedje neodvisnih in enako porazdeljenih nenegativnih slučajnih spremenljivk, ki so neodvisne od N. $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ so prazdeljeni s skupno porazdelitveno funkcijo F, ki jo imenujemo *porazdelitev škodnih zahtevkov*, porazdelitvi $\mathcal{Q}$ pa pravimo *porazdelitev frekvenc*.
Definirajmo

$$S_N := \sum_{j=1}^{N} Y_j,$$

kjer je $\sum_{j=1}^{0} Y_j = 0$. Porazdelitev slučajne spremenljivke S_N imenujemo *sestavljena porazdelitev F pod $\mathcal{Q}$* in jo označimo s $\mathcal{Q} \vee F$. Formalno imamo

$$\mathcal{Q} \vee F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} F^{*j}(x) P(N = j), \tag{1}$$

kjer je $F^{*j}(x) = \int_0^\infty F^{*(j-1)}(x-y)dF(y)$ in $F^{*0} = I_{[0,\infty)}$. Z $dF(y)$ smo označili z Y_j inducirano mero na $\mathbb{R}$.

$F^{*j}(x)$ je natanko $P(Y_1+Y_2+...+Y_j \leq x)$. Ker za večino modelov v praksi potenc konvolucij F^{*j} ne moremo določiti analitično, smo odvisni od numeričnih metod.

Če želimo delati s Panjerjevo rekurzijo ali hitro Fourierjevo transformacijo morajo biti škodni zahtevki zbrani na mreži $h\mathbb{N}_0 = \{0, h, 2h, 3h, ...\}$, kjer je h neka strogo pozitivna konstanta. V aplikacijah porazdelitve zahtevkov običajno izhajajo iz zveznih porazdelitev, zato jih je potrebno najprej *aritmetizirati*: izberemo dovolj majhno pasovno širino $h > 0$ in F na $h\mathbb{N}_0$ zamenjamo s porazdelitvijo $F_h = \{f_{h,j}\}_{j\in\mathbb{N}_0}$.

Ena izmed pogostih metod aritmetizacije je *metoda zaokroževanja*, pri kateri zahtevke zaokrožimo na najbližji celoštevilski večkratnik števila h:

$$f_{h,j} := F(jh + \frac{h}{2}) - F(jh - \frac{h}{2}). \tag{2}$$

Jasno je, da F_h šibko konvergira k F ko $h \to 0$ in zato $\mathcal{Q} \vee F_h$ šibko konvergira k $\mathcal{Q} \vee F$ ko $h \to 0$. Šibka konvergenca pomeni, da za vsak $x \in \mathbb{R}$, pri katerem je F oziroma $\mathcal{Q} \vee F$ zvezna, velja $\lim_{h\to\infty} F_h(x) = F(x)$. Ker pa ne vemo kako se $\mathcal{Q} \vee F_h$ nanaša na $\mathcal{Q} \vee F$, ne moremo podati mej napak. V tem pogledu nam pomagajo naprejšne in nazajšne diference, podane z

$$f^+_{h,j} := F((j+1)h) - F(jh),$$

in

$$f^-_{h,j} := F(jh) - F((j-1)h).$$

$\mathcal{Q} \vee F^+_h$ nam poda zgornjo mejo za $\mathcal{Q} \vee F$ in $\mathcal{Q} \vee F^-_h$ analogno spodnjo mejo. Nadalje, $\mathcal{Q} \vee F^\pm_h$ šibko konvergira k $\mathcal{Q} \vee F$ ko $h \to 0$. Iz tega sledi, da lahko v teoriji na sestavljeni porazdelitvi uporabimo pravilo sendviča za katerokoli dano natančnost.

Naprejšne in nazajšne diference ter metoda zokroževanja ne ohranjajo momentov začetne porazdelitve. Iz tega vidika je Gerber [3] predlagal postopek, ki se lokalno ujema s prvimi k momenti, in ki ga imenujemo *metoda momentov.* V praksi nas zanima le primer $k = 1$, saj za $k \geq 2$ postopek ni dobro definiran in lahko vodi do negativne mere na določenih točkah mreže. Poleg tega, da metoda momentov zagotovi ujemanje le-teh, je pridobitev dokaj majhna, saj se izplača le za velike pasovne širine. Tako je navsezadnje metoda zaokorževanja primernejša.

2.1. **Ekstrapolacija.** Primernost metode zaokroževanja sta s svojim delom dodatno okrepila Grübel in Hermesmeier [5]. Dokazala sta namreč, da lahko v primeru, ko je porazdelitev zahtevkov absolutno zvezna in ima dovolj gladko gostoto, količino $f_{h,j}/h$, aproksimacijo za sestavljeno gostoto, kvadratično ekstrapoliramo. S t.i. *Richardsonovo ekstrapolacijo*, ki ji pravimo tudi *ekstrapolacija do limite* ali *pospešitev konvergence*, znatno zmanjšamo vrednost napake, ki nastane ob diskretizaciji.

Glavna ideja ekstrapolacije je, da v primeru, ko nekega realnega števila y_0 ne moremo aproksimirati direktno, obstaja pa neka aproksimacija y_h, veljavna za vse $h > 0$, in hkrati poznamo hitrost konvergence y_h k y_0 ko $h \to 0$, lahko različne približke, ki jih dobimo z različnimi vrednotmi h, združimo v boljši približek.

Naj bo na primer

$$y_h = y_0 + ch^\alpha + o(h^\beta) \tag{3}$$

ko gre h proti 0, kjer sta α in β neki konstanti, za kateri velja $0 < \alpha \leq \beta$. Če združimo približka za h in $h/2$, za y_0 dobimo približek $\tilde{y}$, ki hitreje konvergira proti iskani količini:

$$\tilde{y}_h := \frac{1}{2^\alpha - 1}(2^\alpha y_{h/2} - y_h) = y_0 + o(h^\beta). \tag{4}$$

Tako smo konvergenco pospešili. Pomemben vidik te ideje je, da moramo v prehodu iz (3) v (4) poznati le vrednost α, ne pa tudi c, ki ga ponavadi težko določimo, lahko pa tudi vsebuje y_0. Očitno je, da konvergenco pospešimo le v primeru, ko je $c \neq 0$.

V našem primeru obravnavamo približek $(\mathcal{Q} \vee F)_h$ sestavljene porazdelitve $\mathcal{Q} \vee F$, ki ga dobimo z mrežnimi metodami, če F zamenjamo z neko porazdelitvijo F_h, ki je zgoščena na celoštevilskih večkratnikih h.

Iskanje porazdelitve skupne velikosti zahtevkov lahko vidimo kot poseben primer zelo splošnega okvirja, v katerem je stohastični model obravnavan kot funkcional, ki poveže izhodno količino F_{out}, ki nas zanima, z neko znano vhodno količino F_{in}. Model lahko z matematično notacijo predstavimo kot nelinearen operator Ψ, za katerega velja $F_{out} = \Psi(F_{in})$. Pri uporabi Panjerjeve rekurzije in transformacijskih metod izračunamo $\Psi(F_h)$, in to vzamemo za približek, kjer je F_h diskretizirana različica F_{in}.

Osnova ekstrapolacije je izraz tipa (3), ki ima sedaj naslednjo obliko

$$I(h) := \int \phi d\Psi(F_h) = \int \phi d\Psi(F) + c(\Psi; F, \phi)h^\alpha + o(h^\beta), \tag{5}$$

ko gre $h \downarrow 0$, kjer sta $\beta \geq \alpha > 0$ neki konstanti, $c(\Psi; F, \phi) \neq 0$, ϕ pa je neka dana gladka funkcija, ki slika iz $\mathbb{R}$ v $\mathbb{R}$. F diskretiziramo z združevanjem mer intervalov dolžine h. Če te mere centriramo, pridemo do naslednjega načrta diskretizacije:

$$F_h := \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(I_h k)\delta_h k \quad \text{z} \quad I_h k := ((k-\frac{1}{2})h, (k+\frac{1}{2})h], k \in \mathbb{Z},$$

kjer je δ_x točkovna mera x. Sedaj predpostavimo, da ima F gostoto f in da sta f in ϕ dovolj gladki, da velja aproksimacija

$$\int_{I_h k} (\phi(x)) - \phi(kh))f(x)dx = \frac{1}{12}\phi^{'}(kh)f(kh)h^3 + \frac{1}{24}\phi^{''}(kh)f(kh)h^3 + o(h^3),$$

osnovana na Taylorjevi razširitvi funkcije $x \to (\phi(x) - \phi(kh))f(x)$ v točki kh. Ključno je, da linearen člen v razširitvi zaradi simetrije diskretizacijskih intervalov izgine. S seštevanjem po k dobimo Riemannovo vsoto dveh integralov. Če poleg tega privzamemo še primerno obnašanje funkcij v $\pm\infty$, z integracijo po delih dobimo

$$\begin{aligned} \int \phi dF - \int \phi dF_h &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{I_h k} (\phi(x) - \phi(hk))f(x)dx \\ &= \frac{h^2}{12}\int \phi^{'}(x)f^{'}(x)dx + \frac{h^2}{24}\int \phi^{''}(x)f(x)dx + o(h^2) \\ &= -\frac{h^2}{24}\int \phi^{''}(x)F(dx) + o(h^2). \end{aligned} \tag{6}$$

V nadaljni analizi najprej obravnavamo le eno konvolucijsko potenco F^{*n}. Sedaj je naš stohastični model nelinearni operator

$$\Phi : \mathbb{F}' \to \mathbb{F}', \quad \Phi(F)(\phi) := \int \phi dF^{*n} \quad \text{za vse} \quad \phi \in \mathbb{F}.$$

Odvod Φ v F je linearen približek Φ, ki je lokalno pravilen pri F. Za krivuljo $(F_c)_{c\geq 0}$ oblike $F_c = F + \epsilon\rho$, kjer je ρ končna predznačena mera z lastnostjo $\rho(\mathbb{R}) = 0$, imamo $\Phi'_F(\rho) = nF^{*(n-1)} * \rho$, ki je linearen v ρ. Naš osnovni model je $\Psi(F) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}$, iz česar sledi

$$\Psi'_F(\rho) = \widetilde{\mathcal{Q} \vee F} * \rho, \quad \text{pri čemer je} \quad \widetilde{\mathcal{Q} \vee F} := \sum_{n=1}^{\infty} np_n F^{*(n-1)}.$$

Da dobimo izraz oblike (5), izrazimo (6) kot lastnost odvedljivosti. Naj bo $D : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ navaden odvod realnih funkcij. Če definiramo $T : [0,\infty) \to \mathbb{F}'$ z $T(h) := F_{\sqrt{h}}$ za $h > 0$, $T(0) := F$, lahko (6) zapišemo kot

$$T^{'}_{0+}(1) = \frac{1}{24} F \circ D^2, \tag{7}$$

kjer je linearna preslikava $T'_{0+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{F}$ desni odvod T v 0, definiran kot

$$T'_{0+}(\alpha)(\phi) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(T(h\alpha) - T(0))(\phi).$$

Ker je $T'_{0+}(\alpha) = \alpha T'_{0+}(1)$, je ta odvod v celoti določen z (7). Verižno pravilo, ki ga potrebujemo, lahko zapišemo kot

$$(\Psi \circ T)'_{0+}(1)(\phi) = \Psi'_{T(0)} \circ T'_{0+}(1)(\phi),$$

in, če nadomestimo h z h^2, dobimo

$$\frac{1}{h^2}\Big(\int \phi d\Psi(F_h) - \int \phi d\Psi(F)\Big) \to \frac{1}{24}\int \phi'' d(\widetilde{\mathcal{Q}\vee F} * F),$$

ko gre $h \downarrow 0$. To je izraz (5), z $\alpha = \beta = 2$ in

$$c(\Psi; F, \phi) = \frac{1}{24}\int \phi'' d(\sum_{n=1}^{\infty} np_n F^{*n}).$$

V resnici nas zanima $\mathcal{Q}\vee F = \Psi(F)$, zato moramo primerjati meri $\widetilde{\mathcal{Q}\vee F}$ in $(\mathcal{Q}\vee F)_h = \Psi(F_h)$. Če ima $\mathcal{Q}\vee F$ gladko gostoto $f_{\mathcal{Q}\vee F}$, lahko upamo, da

$$f_{\mathcal{Q}\vee F}(kh) = \frac{1}{h}(\mathcal{Q}\vee F)_h(\{kh\}) + g(kh)h^\alpha + O(h^\beta) \tag{8}$$

velja enakomerno za $k \in \mathbb{Z}$ ko $h \downarrow 0$, kjer je g neka funkcija, odvisna od Ψ in F. Ponovno bi lahko združili približke tipa (8) za različne h v nov približek z večjo asimptotično pravilnostjo, če je $\beta > \alpha$.

Sedaj ta program izvedemo. Naj bo $C(4,\gamma)$ prostor vseh zveznih funkcij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ z zveznimi odvodi $f^{(i)}$ do reda $i = 4$, ki zadoščajo

$$f^{(i)}(x) = O(|x|^{-\gamma}) \quad \text{ko} \quad x \to \pm\infty \quad \text{za i = 0,...,4.}$$

Pri tem privzamemo, da je $f^{(0)} = f$. Naj bo $\mathcal{Q}\vee F := \sum_{n=0}^{\infty} q_n F^{*n}$ in $(\mathcal{Q}\vee F)_h := \sum_{n=1}^{\infty} q_n F_h^{*n}$ za vse $h > 0$. Tako se serije konvolucij sedaj začnejo pri $n = 1$. Ker je $F^{*0} = F_h^{*0} = \delta_0$, to ne vpliva na $\mathcal{Q}\vee F - (\mathcal{Q}\vee F)_h$. Poleg tega, ker poznamo F in zaporedje $(q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, eksplicitno poznamo tudi atom mere $\mathcal{Q}\vee F = \sum_{n=0}^{\infty} q_n F^{*n}$ v 0: če ima F gostoto, potem je $F(\{0\})^n = 0$ za vse $n \in \mathbb{N}$ in posledično $\mathcal{Q}\vee F(\{0\}) = q_0$.

Izrek 2.2 (Theorem v [5])**.** *Predpostavimo, da ima F gostoto $f_F \in C(4,\gamma)$ za nek $\gamma > 1$ in da $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadošča*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (1+\epsilon)^n p_n < \infty \quad \textit{za nek} \quad \epsilon > 0. \tag{9}$$

Naj bo f_F zvezna gostota F in naj bo $f_{F,h} : h\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ definirana kot $f_{F,h}(kh) := (\mathcal{Q}\vee F)_h(\{kh\})/h$. Potem obstaja taka zvezna funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da je

$$\limsup_{h\downarrow 0} \frac{1}{h^2} \sup_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|h)^\gamma \Big| \frac{1}{h^2}(f_{F,h}(kh) - f_F(kh)) - g(kh) \Big| < \infty. \tag{10}$$

Izkaže se, da je

$$g = \frac{1}{24}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} np_n f_F^n\Big)' = \frac{1}{24}\Big(p_1 f_F' + \sum_{n=2}^{\infty} np_n f_F^{*(n-1)} * f_F''\Big).$$

Za vsak $x > 0$ iz (10) sledi

$$\frac{n}{x}(\mathcal{Q}\vee F)_{x/n}(\{x\}) = f_F(x) + \frac{x^2}{n^2} g(x) + O(n^{-4})$$

ko gre $n \to \infty, n \in \mathbb{N}$. To je rezultat oblike (8), ki ga lahko uporabimo za ekstrapolacijo. Izrek nam pove, da lahko aproksimacijo naredimo enakomerno po x.

2.2. **Panjerjeva rekurzija.** Za sedaj privzamemo, da je F aritmetična, oziroma da smo jo ustrezno aritmetizirali. Vpeljemo notacijo

$$q_k = P(N = k), f_k = P(Y_i = k), g_k = P(S_N = k).$$

Opazimo, da je diskretna oblika definicije (1) podana z

$$g_n = \sum_{j=0}^{\infty} q_j f_n^{*j}, \tag{11}$$

kjer je

$$f_n^{*j} := \begin{cases} 1 & \text{če } j = 0 \text{ in } n = 0, \\ 0 & \text{če } j = 0 \text{ in } n \in \mathbb{N}, \\ \sum_{i=0}^{n} f_{n-i}^{*(j-1)} & \text{če } j \geq 0. \end{cases} \tag{12}$$

To je grdo in numerično zahtevno.

Z naslednjo trditvijo vpeljemo pojem Panjerjeve rekurzije.

Trditev 2.3. *Če porazdelitev frekvenc $\mathcal{Q} = \{q_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ zadošča enačbi*

$$q_k = \Big(a + \frac{b}{k}\Big) q_{k-1}, k \geq 1, \tag{13}$$

za neka $a, b \in \mathbb{R}$, potem sestavljena porazdelitev $g_n = P(S_N = n)$ zadošča rekurzivni zvezi

$$g_n = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{j=1}^{n} \Big(a + \frac{bj}{n}\Big) f_j g_{n-j}, \quad n \geq 1 \tag{14}$$

z začetnim pogojem

$$g_0 = \mathcal{P}_N(f_0), \tag{15}$$

kjer $\mathcal{P}_N(t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j t^j$ označuje rodovno funkcijo N.

Dokaz. S pomočjo (11) in (12), ter lastnosti $f_n^{*i} = \frac{n}{i} \sum_{j=1}^{n} j \cdot f_j \cdot f_{n-j}^{*(i-1)}, i = 1, 2, 3...,$ ki je navedena v [10], lahko pokažemo

$$
\begin{aligned}
g_n = \sum_{i=0}^{\infty} q_i f_n^{*i} &= q_0 f_n^{*0} + \sum_{i=1}^{\infty} q_i f_n^{*i} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} (a + \frac{b}{i}) q_{i-1} f_n^{*i} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} a q_{i-1} \sum_{j=0}^{n} f_{n-j}^{*(i-1)} f_j + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b}{n} q_{i-1} \sum_{j=1}^{n} j f_{n-j}^{*(i-1)} f_j \\
&= a f_0 \sum_{i=1}^{\infty} q_{i-1} f_n^{*(i-1)} + \sum_{i=1}^{\infty} a q_{i-1} \sum_{j=1}^{n} f_{n-j}^{*(i-1)} f_j + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b}{n} q_{i-1} \sum_{j=1}^{n} j f_{n-j}^{*(i-1)} f_j \\
&= a f_0 g_n + \sum_{j=1}^{n} (a + \frac{bj}{n}) f_j \sum_{i=1}^{\infty} q_{i-1} f_{n-j}^{*(i-1)} \\
&= a f_0 g_n + \sum_{j=1}^{n} (a + \frac{bj}{n}) f_j g_{n-j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_n(1 - a f_0) &= \sum_{j=1}^{n} (a + \frac{bj}{n}) f_j g_{n-j} \\
g_n &= \frac{1}{1 - a f_0} \sum_{j=1}^{n} (a + \frac{bj}{n}) f_j g_{n-j}
\end{aligned}
$$

□

Opomba 2.4. Rekurzijsko enačbo (14) imenujemo *Panjerjeva rekurzija.* Opazimo da se začetna vrednost (15) poenostavi v $g_0 = q_0$ za $f_0 = 0$.

Sundt in Jewell [14] sta z naslednjim izrekom pokazala, da (13) velja le za binomsko, negativno binomsko in Poissonovo porazdelitev, ter trivialno za degenerirano porazdelitev $q_0 = 1$.

Izrek 2.5 (Theorem 1 v [14]). *Predpostavimo da* (13) *velja. Potem imamo enega od naslednjih primerov:*

$$
q_n = \begin{cases} 0 & \text{če } n = 0, \\ 1 & \text{če } n > 0. \end{cases} \tag{16}
$$

$$
q_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0 \tag{17}
$$

$$
q_n = \binom{\alpha + n + 1}{n} q^n (1 - q)^{\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad 0 < q < 1 \tag{18}
$$

$$q_n = \binom{N}{n} q^n (1-q)^{N-n}, \quad 0 < q < 1, \quad N = 1, 2, ... \tag{19}$$

Dokaz. Najprej predpostavimo da velja $a + b \geq 0$. Tako se izognemo negativnim verjetnostim. Če velja $a + b = 0$, dobimo degenerativni primer (16).

Za preostanek dokaza torej privzamemo $a+b > 0$. Če je $a = 0$ dobimo Poissonovo gostoto (17) z $\lambda = b$.

Za $a > 0$ in $\alpha = (a + b)/a$ iz (13) sledi

$$q_n = q_0 \binom{\alpha + n - 1}{n} a^n.$$

Da bo $\sum_{n=1}^{\infty} q_n < 1$ mora veljati $a < 1$ in tako dobimo negativno binomsko ali Pascalovo gostoto (18), s $p = a$.

Nazadnje privzamemo $a < 0$. Da se izognemo negativni verjetnosti, mora obstajati pozitivno celo število N, tako da $a + b/(N + 1) = 0$, torej $N = -(a + b)/a$. S $p = -a/(1 - a)$ dobimo binomsko gostoto (19). $\square$

Panjerjevo rekurzijo je v praksi zelo lahko izvesti in je numerično manj zahtevna kot surova konvolucija. Ta za pridobitev $g_0, ..., g_n$ asimptotično porabi $O(n^3)$ operacij, Panjerjeva rekurzija pa le $O(n^2)$.

2.2.1. *Poenostavitve Panjerjeve rekurzije.* Hipp [8] je v enem svojih del pokazal, da lahko v primeru, ko je porazdelitev zahtevkov fazna, rekurzivno zvezo (14) poenostavimo. Poenostavljena rekurzivna zveza znatno pospeši izračun in zmanjša število operacij na $O(n)$.

Pri zvezi (14) nastane problem pri vsoti, ki jo moramo izračunati za vsak n, in v kateri se število izrazov veča, če ima porazdelitev F neomejen nosilec.

Za poenostavljeno rekurzivno zvezo bomo uporabili operator konvolucije. Za dano omejeno zaporedje $U(k), k \geq 0$, z rodovno funkcijo

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k U(k), \quad |z| < 1,$$

definiramo

$$V(k) = \sum_{j=0}^{k} f_k U(k - j), \quad k \geq 0.$$

Če je $f(z)$ rodovna funkcija f_n, potem je rodovna funkcija V

$$v(z) = f(z)u(z).$$

Predpostavimo, da je $f(z)$ racionalna in da je $f(0) = 0$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a(z)}{b(z)}, \\ a(z) &= a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_L z^L, \\ b(z) &= 1 + b_1 z + b_2 z^2 + ... b_L z^L. \end{aligned}$$

Potem je

$$v(z)b(z) = a(z)u(z),$$

kar nam da rekurzijo

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \\ V(k) &= \sum_{j=1}^{\min(k,L)} a_j U(k-j) - \sum_{j=1}^{\min(k,L)} b_j V(k-j), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Za premaknjeno geometrijsko porazdelitev $f_k = (1-p)p^{k-1}, k \geq 1, k = 1, 2, ...$ z $f(z) = (1-p)/(1-pz)$ dobimo rekurzijo

$$\begin{aligned} V(0) &= 0, \\ V(k) &= (1-p)U(k-1) + pV(k-1), \quad k \geq 1. \end{aligned}$$

To rekurzijo potem uporabimo na zaporedju $U(k) = g_k$, da dobimo pomožno funkcijo $V(k)$:

$$V(k+1) = (1-p)g_k + pV(k), \quad k \geq 0,$$

in na zaporedju $U(k) = kg_k$, da dobimo pomožno funkcijo $W(k)$:

$$W(k+1) = (1-p)kg_k + pW(k), \quad k \geq 0.$$

Rekurzivno zvezo za porazdelitev skupne velikosti zahtevkov dobimo sedaj iz klasične enačbe (14):

$$g_k = (a+b)V(k) - \frac{b}{k+1}W(k), \quad k \geq 0.$$

V tej rekurzivni zvezi je število izrazov za vsako točkovno verjetnost enako 6.

V primeru odrezane premaknjene geometrijske porazdelitve $f_k = (1-p)p^{k-1}, 1 \leq k \leq n-1, f_n = p^{n-1}$, imamo naslednjo preprosto rekurzijo z računsko zahtevnostjo 10:

$$\begin{aligned} g_0 &= q_0, \quad V(0) = W(0) = 0, \\ V(k+1) &= (1-p)g_k + p^n g_{k-n} + p^n g_{k-n-1} + pV(k), \quad k \geq 0, \\ W(k+1) &= (1-p)kg_k + p^n(k-n)g_{k-n} + p^n(k-n-1)g_{k-n-1} + pW(k), \quad k \geq 0, \\ g_{k+1} &= (a+b)V(k+1) - \frac{b}{k+1}W(k+1), \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

Privzamemo, da je $g_j = 0$ za $j < 0$.

Take poenostavljene rekurzivne zveze veljajo za velik razred porazdelitev na številih $\{0, 1, 2, ...\}$, ki ga imenujemo *razred posplošenih diskretnih faznih porazdelitev*. Te porazdelitve so definirane s časovno homogeno Markovsko verigo $M(t), t = 0, 1, 2, ...$ na množici $\{0, 1, 2, ..., l\}, l \geq 1$, z absorbirajočim stanjem 0 in lastnostjo, da stanje 0 verigo slej ko prej absorbira:

$$P(M(t) \to 0) = 1.$$

Časovno homogene Markovske verige so definirane preko začetnega verjetnostnega vektorja $\pi = (\pi_0, ..., \pi_l)$ s $\pi_i = P(M(0) = i), i = 1, ..., l$, in s prehodnimi verjetnostmi

$$p_{ij} = P(M(t+1) = j | M(t) = i), \quad i, j = 0, ..., l.$$

Privzamemo, da je $p_{00} = 1$ in $p_{0i} = 0, i = 1, ..., l$, in da za vsak i obstaja tako število n, da velja

$$p_{i0}^{(n)} = P(M(t+n) = 0 | M(t) = i) > 0.$$

Posplošena diskretna fazna porazdelitev H je porazdelitev časa do absorbcije:

$$H(n,\infty) = P(M(n) \neq 0) = \sum_{i=0}^{l} \pi_i \sum_{j=1}^{l} p_{ij}^{(n)}.$$

V zveznem primeru ima f_k gostoto $f(x)$, porazdelitev skupne vsote zahtevkov g_k pa možen atom v 0 in gostoto $g(x)$ na $(0,\infty)$, ki zadosti rekurziji

$$g(0) = q_1 f(0),$$
$$g(x) = q_1 f(x) + \int_0^x \Big(a + b + b\frac{(x-y)}{x}\Big) f(x) g(x-y)dy, \quad x > 0.$$

Računski problem v tej rekurzivni zvezi je integral, ki predstavlja nelokalni operator, in v primeru, ko ima porazdelitev zahtevkov neomejen nosilec, vključuje numerično integracijo čez interval z naraščajočo dolžino.

Tudi to zvezo lahko za določene gostote $f(x)$ poenostavimo. Za dano integrabilno in gladko funkcijo $u(x)$ poglejmo konvolucijo

$$v(x) = \int_0^\infty f(x-y)u(y)dy, \quad x \geq 0.$$

Gladkost $u(x)$ in $f(x)$ nakazuje, da ima $v(x)$ odvode vseh redov, kot sta na primer

$$v'(x) = f(0)u(x) + \int_0^x f'(x-y)u(y)dy, \quad x \geq 0, \tag{20}$$

$$v''(x) = f(0)u'(x) + f'(0)g(x) + \int_0^x f''(x-y)u(y)dy, \quad x \geq 0, \tag{21}$$

in tako naprej. Če te enačbe pomnožimo z b_j in jih seštejemo, dobimo

$$v(x) + \sum_{j=1}^{l} b_j v^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^{l-1} c_j u^{(j)}(x), \quad x \geq 0, \tag{22}$$

kjer so konstante c_j odvisne od odvodov $f(x)$ v 0. Če definiramo $u(x) = g(x)$, dobimo rekurzijo za pomožno funkcijo $v(x)$, za $u(x) = xg(x)$ pa dobimo podobno rekurzijo za pomožno funkcijo $w(x)$. Skupaj imamo:

$$g(0) = q_k f(0), \quad v(0) = w(0) = 0, \tag{23}$$

$$v(x) + \sum_{j=1}^{l} b_j v^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^{l-1} c_j g^{(j)}(x), \quad x \geq 0, \tag{24}$$

$$w(x) + \sum_{j=1}^{l} b_j w^{(j)}(x) = \sum_{j=0}^{l-1} c_j (xg)^{(j)}(x), \quad x \geq 0, \tag{25}$$

$$g(x) = q_k f(x) + (a+b)v(x) - \frac{b}{x}w(x). \tag{26}$$

Odvodi $g^{(j)}$ so izpeljani iz odvajanja (26), kar je utemeljeno z dejstvom, da ima z $f(x)$ tudi $g(x)$ odvode vseh redov. Iz (20) sledi, da iz zveznosti $g(x)$ sledi zveznost $v'(x)$ in $w'(x)$. Iz (26) sledi, da odvod $g'(x)$ obstaja in je zvezen. Iz (21) pa dobimo da tudi odvod $g''(x)$ obstaja in je zvezen, in tako naprej.

Kot primer tokrat obravnavamo eksponentno gostoto $f(x) = \theta \exp(-\theta x), x > 0$. Rekruzivne enačbe te rekurzije so:

$$\begin{aligned} g(0) &= q_1 f(0), \quad v(0) = w(0) = 0, \\ v'(x) &= \theta(g(x) - v(x)), \quad x \geq 0, \\ w'(x) &= \theta(xg(x) - w(x)), \quad x \geq 0, \\ g(x) &= q_1 f(x) + (a+b)v(x) - \frac{b}{x} w(x), \quad x > 0. \end{aligned}$$

S tem smo skrčili osnovno rekurzivno zvezo na sistem interaktivnih diferenčnih enačb, ki jih lahko rešimo s klasičnimi metodami.

V primeru mešanice dveh eksponentnih porazdelitev $f(x) = p\theta_1 \exp(-\theta_1 x) + (1-p)\theta_2 \exp(-\theta_2 x), x > 0$, imamo za $f(x)$ naslednjo diferencialno enačbo:

$$f''(x) + (\theta_1 + \theta_2) f'(x) + \theta_1 \theta_2 f(x) = 0.$$

Z uporabo (20) in (21) dobimo za (22) zvezo

$$v''(x) + (\theta_1 + \theta_2) v'(x) + \theta_1 \theta_2 v(x) = f(0) g'(x) + f'(0) u(x) + (\theta_1 + \theta_2) f(0) u(x).$$

Z $c_0 = f'(0) + (\theta_1 + \theta_2) f(0)$ in $c_1 = f(0)$ pa imamo

$$v''(x) + (\theta_1 + \theta_2) v'(x) + \theta_1 \theta_2 v(x) = c_0 u(x) + c_1 u'(x).$$

Pripadajoči enačbi za pomožni funkciji $v(x)$ in $w(x)$ sta

$$\begin{aligned} v''(x) + (\theta_1 + \theta_2) v'(x) + \theta_1 \theta_2 v(x) &= c_0 g(x) + c_1 g'(x), \quad x \geq 0, \\ w''(x) + (\theta_1 + \theta_2) w'(x) + \theta_1 \theta_2 w(x) &= c_0 x g(x) + c_1 (x g'(x) + g(x)), \quad x \geq 0; \\ f'(x) = q_1 f'(0) + (a+b) v'(x) - &\frac{b}{x^2}(x w'(x) - w(x)), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Za rešitev tega sistema interaktivnih diferencialnih enačb potrebujemo mejne vrednosti za $f(0), v(0)$ in $w(0)$, ki jih dobimo iz (24), prav tako pa tudi

$$\begin{aligned} v'(0) &= g(0), \quad w'(0) = 0, \\ g'(0) &= q_1 f'(0) + q_2 (f^{*2})'(0) \\ &= q_1 f'(0) + q_2 g^2(0). \end{aligned}$$

Podobno kot v diskretnem primeru take poenostavljene rekurzivne zveze veljajo za velik razred gostot, ki so definirane na množici $(0, \infty)$ in ga imenujemo *razred faznih gostot*. Pripadajoče porazdelitve so definirane preko časovno homogenega Markovskega procesa $M(t), t \geq 0$, na množici $\{0, 1, 2, ..., l\}, l \geq 1$, z absorbirajočim stanjem 0 in lastnostjo, da to stanje verigo slej ko prej absorbira.

Taki Markovski procesi so definirani preko začetnega verjetnostnega vektorja $\pi = \{\pi_1, ..., \pi_l\}$, kjer je $\pi_i = P(M(0) = i), i = 1, ..., l$, in intenzitet prehodov med stanji b_{ij}, ki zadostijo enačbam

$$\begin{aligned} P(M(t+h) = j | M(t) = i) &= h b_{ij} + o(h), \quad i, j = 0, ..., l, i \neq j, \\ P(M(t+h) = i | M(t) = i) &= 1 + h b_{ii} + o(h), \quad i = 0, ..., l, \end{aligned}$$

in za katere velja

$$\begin{aligned} b_{ij} &> 0, \quad i \neq j \\ b_{ii} &< 0 \\ b_{ii} &= -\sum_{i \neq j} b_{ij}. \end{aligned}$$

Za ta Markovski proces je netrivialni del generatorja

$$B = (b_{ij})_{i,j=1,...,l}$$

obrnljiv, to pa je potrebno za absorbcijo v 0.

Ponovno je fazna porazdelitev s parametroma π in B porazdelitev časa do absorbcije:

$$H(t, \infty) = P(M(t) \neq 0) = \pi^T \exp(tB)\mathbf{1}.$$

V tem zapisu je $\mathbf{1}$ vektor dolžine l, katerega elementi so vsi enaki 1. $\exp(C)$ označuje eksponentno matriko matrike C, definirano z

$$\exp(C) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} C^n.$$

Naslednja lema zbere nekatere klasične rezultate faznih porazdelitev.

Lema 2.6 (Lemma 2 v [8]). *Naj bo $f(x)$ gostota fazne porazdelitve s parametri $\pi = (\pi_1, ..., \pi_l)$ in $b_{ij}, i, j = 0, ..., l$. Naj bo $B = (b_{ij})_{i,j=1,...,l}$ obrnljiva matrika netrivialnih prehodnih verjetnosti. Potem je ta gostota podana z*

$$f(x) = \pi^T \exp(xB)^b,$$

kjer je $b = (b_{10}, ..., b_{l0})$, momentno rodovna funkcija

$$\hat{f}(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \pi^T (I - tB^{-1})^{-1} \mathbf{1}$$

je racionalna s stopnjo $\leq l$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(t) &= \frac{a(t)}{b(t)}, \\ a(t) &= 1 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_l t^l, \\ b(t) &= 1 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_l t^l, \end{aligned}$$

in $f(x)$ zadošča linearni diferencialni enačbi

$$f(x) + b_1 f'(x) + b_2 f''(x) + ... + b_l f^{(l)}(x) = 0.$$

Dokaz. Prehodna matrika v času t za stanja $1, ..., l$ je enaka $\exp(tB)$. Zaradi tega je $H(t, \infty) = \pi^T \exp(tB)\mathbf{1}$, z $b = -B\mathbf{1}$ pa dobimo

$$g(x) = -\pi^T B \exp(tB)\mathbf{1} = \pi^T \exp(tB) b.$$

Pri izračunu momentno rodovne funkcije se spomnimo, da imamo za $t > 0$

$$\int_0^{\infty} = x^n e^{-tx} dx = \frac{1}{n!} t^{-(n+1)},$$

in zato

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-tx} g(x)dx &= -\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^\infty e^{-tx}x^n dx \frac{1}{n!}\pi^T b^{n+1}\mathbf{1}\\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\pi^T t^{-n-1}B^{n+1}\mathbf{1}\\ &= -\pi^T\frac{1}{t}B\Big(I-\frac{1}{t}B\Big)^{-1}\mathbf{1}\\ &= \pi^T(I-tB^{-1})^{-1}\mathbf{1}.\end{aligned}$$

Po Cramérjevem pravilu so rešitve $(I - tB^{-1})^{-1}$ racionalne funkcije t, kot je tudi $\hat{g}(t)$, ki je linearna kombinacija teh rešitev. Gostota $g(x)$ je linearna kombinacija funkcij oblike $\exp(-rx)\cos(sx)$ in $\exp(-rx)\cos(sx)$ z poljubnim s in pozitivnim r. Tako odvodi $g^{(j)}(x)$ poljubnega reda j zadostijo

$$\int_0^\infty e^{-tx} g^{(j)}(x)dx \to 0, \quad t \to \infty.$$

Pravilo

$$\int_0^\infty g'(x)e^{-tx}dx = -g(0) + t\hat{g}(t)$$

in pripadajoče enačbe odvodov višjih redov nakazujejo obstoj polinoma $r(t)$, za katerega velja

$$a(t) = \hat{g}(t)b(t) = \hat{g}(t) + \sum_{j=1}^{l}\int_0^\infty b_j g^{(j)}(x)e^{-tx}dx + r(t).$$

Ko gre $t \to \infty$ dobimo $r(t) = a(t)$ in tako

$$g(x) + \sum_{j=1}^{l} b_j g^{(j)}(x) = 0.$$

To je zahtevana linearna diferencialna enačba višjega reda s konstantnimi koeficienti.

□

Znano je, da lahko, ko je porazdelitev frekvenc diskretna posplošena fazna, porazdelitev škodnih zahtevkov pa fazna, porazdelitev skupne velikosti zahtevkov izračunamo eksplicitno z matrično algebro. V primeru, ko imamo Poissonovo porazdelitev ali negativno binomsko porazdelitev s parametrom oblike, ki ni celo število, pa porazdelitev frekvenc ni diskretna posplošena fazna. To sledi iz dejstva, da ima vsaka posplošena diskretna fazna porazdelitev racionalno rodovno funkcijo, kar je zapisano v naslednji lemi.

Lema 2.7 (Lemma 1 v [8]). *Naj bo H posplošena diskretna fazna porazdelitev s parametri $\pi = (\pi_0, \pi_1, ..., \pi_l)$ in $p_{ij}, i, j = 1, ..., l$. Potem je rodovna funkcija $h(z)$ porazdelitve H*

$$\begin{aligned}h(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j\\ &= \pi^T(I-zB)^{-1}\mathbf{1} - \pi^T zb(I-zB)^{-1}\mathbf{1}\end{aligned}$$

racionalna, kjer je $B = (p_{ij})_{i,j=1,...,l}$ matrika netrivialnih prehodnih verjetnosti in I $l \times l$ identična matrika.

Dokaz. Spomnimo se, da je za vsako celo število $n \geq 0$

$$H(n, \infty) = \pi^T B^n \mathbf{1},$$

kjer je π^T transponiran vektor π, $\mathbf{1}$ pa vektor dolžine l, katerega vsi elementi so enaki 1. Rodovna funkcija

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \pi^T (zB)^n \mathbf{1} - \sum_{n=0}^{\infty} \pi^T (zB)^{n+1} \mathbf{1} \\ &= \pi^T (I - zB)^{-1} \mathbf{1} - \pi^T zB (I - zB)^{-1} \mathbf{1} \end{aligned}$$

je vsota dveh izrazov. Prvi je linearna kombinacija elementov matrike $(I - zB)^{-1}$, ki so po Cramérjevem pravilu racionalne funkcije z, zato je prvi izraz racionalen. Drugega obravnavamo podobno. □

Poenostavljene rekurzivne zveze so možne pod predpostavko, da je rodovna funkcija (ali v zveznem primeru Laplaceova transformiranka) racionalna. Vse porazdelitve zahtevkov s končnim aditivnim nosilcem imajo racionalno rodovno funkcijo in so pospološene diskretne zvezne, vendar pa, kar se tiče časa računanja, poenostavitev brez nadaljne strukture v točkovnih verjetnostnih nima nobene prednosti.

Na primer, ko so zahtevki porazdeljeni s točkovnimi verjetnostmi

$$f_k = (1-p)p^{k-1}, \quad k = 1, ..., n-1, \quad g_n = p^{n-1},$$

kjer je $n > 1$ število točk v nosilcu in f rezana premaknjena geometrijska porazdelitev, potrebuje klasična Panjerjeva rekurzija čas računanja, ki je proporcionalen n. Na drugi strani pa poenostavljena rekurzivna zveza potrebuje čas, ki je neodvisen od n. To je posedica dejstva, da je rodovna funkcija f enaka

$$f(z) = \frac{z(1-p) + (pz)^n (2-z)}{1 - pz},$$

kar se kaže v računski zahtevnosti 10.

Obstaja več posplošenih diskretnih faznih porazdelitev, za katere ima rezana porazdelitev ponovno preprosto rodovno funkcijo. Taka je na primer dvakratna konvolucija geometrijske porazdelitve, kjer imamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (1-p)^2 k p^{k-1} z^k &= \frac{(1-p)^2}{(1-pz)^2} (1 - p^{n-1} z^n (n - pz(n-1)) \\ &= f_1(z), \end{aligned}$$

in zato

$$f(z) = f_1(z) + p^{n-1}(n - p(n-1)) z^n.$$

Računska zahtevnost v tem primeru znaša 14.

V praksi ponavadi škodni zahtevki nimajo fazne porazdelitve, zato jih moramo ustrezno aproksimirati. Ta pristop je v primerih, ko obravnavamo majhne zahtevke, uporaben, saj so fazne porazdelitve v prostorih aritmetičnih porazdelitev glede na metriko Kolmogorova enakomerno goste. Niso pa primerne kot aproksimacije porazdelitev s težkimi repi. Vsaka porazdelitev z racionalno rodovno funkcijo ima namreč lahke repe, v smislu, da njena Laplace-Stieltjesova transformacija obstaja v okolici 0.

2.2.2. *Robustnost Panjerjeve rekurzije.* Rekurzivna formula (14) je zelo uporabna pri računalniškem programiranju in znatno zmanjša čas računanja, ki ga uporabi surova metoda računanja po formuli

$$g_n = \sum_{j=0}^{\infty} q_j f_n^{*j}.$$

Pri nobenem algoritmu pa se ne moremo izogniti napakam zaokroževanja, saj računalnik lahko predstavi le končno število r števk.

Panjer in Wang [11] sta v svojem članku pokazala strogo stabilnost Panjerjeve rekurzije v primeru negativne binomske in Poissonove porazdelitve.

Oglejmo si najprej linearno homogeno rekurzivno enačbo v naprejšni smeri

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} A_j(x) g(x-j), \quad x > k, \quad A_m(x) \neq 0, \tag{27}$$

kjer je m *red* rekurzivne enačbe. Točka k je *začetna točka* rekurzije, $g(k-m+1), ..., g(k)$ pa so *začetne vrednosti.* Za katerikoli začetni pogoj

$$\{g(j) = \alpha_j; j = k-m+1, ..., k\}; (\alpha_{k-m+1}, ..., \alpha_k) = \vec{\alpha},$$

ima linearna rekurzivna enačba (27) le eno rešitev, $g_{\vec{\alpha},k}(x)$. Katerokoli rešitev (27) lahko predstavimo z njenimi začetnimi vrednostmi. Prav tako je rešitev $g_{\vec{\alpha},k}(x)$ linearno odvisna od začetnega vektorja $\vec{\alpha}$:

$$g_{c_1\vec{\alpha}+c_2\vec{\beta},k}(x) = c_1 g_{\vec{\alpha},k}(x) + c_2 g_{\vec{\beta},k}(x).$$

Homogena linearna rekurzivna enačba (27) ima linearno neodvisno množico rešitev $\{g^{(h)}(x), 1 \leq h \leq m\}$, ki jo imenujeno *osnovna množica*, in vsako rešitev (27) lahko zapišemo kot kombinacijo teh funkcij.

Definicija 2.8 (Definition 1 v [11])**.** Rešitvi $g(x)$ enačbe (27) pravimo *dominantna rešitev*, če za vsako rešitev $h(x)$ enačbe (27) obstaja konstanta $C > 0$, taka, da velja

$$|g(x)| \geq C|h(x)|, \quad x > K \quad \text{za nek} \quad K \geq k.$$

Rešitev $h(x)$ enačbe (27) imenujemo *dominirana rešitev*, če obstaja rešitev $g(x)$ enačbe (27), za katero velja

$$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{g(x)}{h(x)}\right| = \infty.$$

V tem primeru rečemo, da $g(x)$ *dominira* $h(x)$.

Definicija 2.9 (Definition 2 v [11])**.** *Iskana rešitev* rekurzivne zveze (27) je posebna rešitev, ki jo moramo izračunati, in ki jo lahko predstavimo z začetnimi vrednostmi

$$\{g(j) = \alpha_j; j = k-m+1, ..., k\}; (\alpha_{k-m+1}, ..., \alpha_k) = \vec{\alpha}.$$

To iskano rešitev označimo z $g_{\vec{\alpha},k}(x)$.

Izrek 2.10 (Theorem 1 v [11])**.** *Linearna rekurzija* (27) *je stabilna pri ocenjevanju svojih dominantnih rešitev, in nestabilna pri ocenjevanju svojih dominiranih rešitev.*

Dokaz. Panjer in Wang [11]. $\square$

Definicija 2.11 (Definition 14 v [11])**.** Nehomogena *kongruentna* rekurzija neskončnega reda je definirana kot

$$g(x) = \sum_{j=1}^{x} B_j(x) g(x-j) + H(x), \quad x > k, \tag{28}$$

pri čemer sta $B_j(x)$ in $H(x) \geq 0$.

Izrek 2.12 (Theorem 7 v [11])**.** *Nehomogena kongruentna rekurzija neskončnega reda* (28) *je pri ocenjevanju $g_{\vec{\alpha},k}(x)$ strogo stabilna, če je $\vec{\alpha}$ nenegativen.*

Dokaz. Panjer in Wang [11]. □

Rekurzivna zveza (14) je poseben primer nehomogene kongruentne rekurzije neskončnega reda (28) s $H(x) = 0$ in začetno točko $k = 0$.

Začetna vrednost $g(0)$ je pozitivna in iskana sestavljena porazdelitev nenegativna. Če je frekvenca zahtevkov iz družine Poissonovih, negativnih binomskih ali geometrijskih porazdelitve, velja

$$B_j(x) = a + b\frac{j}{x} > 0, \quad j = 1, ..., x. \tag{29}$$

Iz izreka (2.12) sledi, da je rekurzivna enačba (14) pri ocenjevanju sestavljene Poissonove, sestavljene negativne binomske in sestavljene geometrijske porazdelitve strogo stabilna. To pomeni, da pri uporabi rekurzivne zveze (14) za ocenjevanje le-teh porazdelitev akumulirana relativna meja napake raste linearno z naklonom, manjšim od 1. Če se ocenjevanje začne v točki $x = 0$ in uporabimo r števk, lahko število veljavnih števk $\#(r, n)$ za g_n ocenimo s preprosto neenakostjo

$$\#(r,n) \geq \begin{cases} r + \lfloor \log_{10} 2 - \log_{10}(x+1) \rfloor & \text{če zaokrožujemo,} \\ r + \lfloor -\log_{10}(x+1) \rfloor & \text{če režemo.} \end{cases}$$

V primeru, da računalnik zaokrožuje z verjetnostjo 99% je

$$\#(r,n) \geq r + \left\lfloor \log_{10} \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \log_{10}(x+1) \right\rfloor.$$

To pomeni, da na primer, če imata frekvenca in velikost zahtevkov matematično upanje 1000, in bi želeli na intervalu $[0, 10^7]$ dobiti natančnost z relativnimi napakami manjšimi od 10^{-7}, bi le-to lahko dosegli z uporabo 14 števk. Z verjetnostjo vsaj 99% pa lahko to natančnost dosežemo že z 11 števkami.

Lastnost stroge stabilnosti ima praktičen pomen v aplikacijah diskretizacijskih metod. Če število točk v diskretizaciji porazdelitve zahtevkov povečamo za faktor 100, isto raven natančnosti ohranimo z 2 dodatnima števkama.

2.2.3. *Družina sestavljenih binomskih porazdelitev.* Pogoj (29) ne velja za družino sestavljenih binomskih porazdelitev. Za te velja, da imajo končen nosilec le v primeru, ko ga ima tudi porazdelitev zahtevkov. Ker iskana rešitev v naprejšni smeri sčasoma postane 0, ne more biti dominantna rešitev. Iz izreka (2.12) je rekurzivna zveza (14) pri ocenjevanju sestavljene binomske porazdelitve nestabilna. Na to nestabilnost naletimo v desnem repu sestavljene porazdelitve v naprejšni smeri.

Naj bo frekvenca zahtevkov porazdeljena binomsko:

$$q_n = \left(\frac{M!}{n!(M-n)!} \right) \theta^n (1-\theta)^{M-n}, \quad 0 \leq n \leq M.$$

Potem je v rekurzivni zvezi (14)

$$a = -\frac{\theta}{1-\theta}, \quad b = (M+1)\frac{\theta}{1-\theta}.$$

Kot primer vzemimo sestavljeno binomsko porazdelitev s parametroma $\theta = 0.95$ in $N = 100$ in porazdelitvijo zahtevkov, ki je predstavljena v spodnji tabeli.

TABELA 1. Porazdelitev zahtevkov Y_i

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(y)$	0.150	0.200	0.250	0.125	0.075	0.050	0.050	0.025	0.025	

Za ocenjevanje te sestavljene porazdelitve pri izračunu uporabimo 200 števk. Empirični faktorji inflacije so izračunani znotraj rekurzije. Rezultati, ki jih dobimo, so za nekatere točke predstavljeni v naslednji tabeli:

TABELA 2. Empirični faktorji inflacije in ocenjena natančnost v izračunani vrednosti, ko pri izračunu uporabimo 200 števk

x	$\hat{\gamma}(x)$	$\hat{\nu}(x)$	x	$\hat{\gamma}(x)$	$\hat{\nu}(x)$	x	$\hat{\gamma}(x)$	$\hat{\nu}(x)$
50	1	199	350	9.5099	61	650	50.818	-345
100	1	198	400	12.905	8	700	68.394	-434
150	1.9574	191	450	17.447	-51	750	99.559	-529
200	2.8849	171	500	22.699	-116	800	157.89	-634
250	4.6382	143	550	29.683	-186	850	328.04	-752
300	6.4586	106	600	38.372	-263	900	-	-

Tu je najprej smiselno definirati oznake in pojme, ki se pojavijo v zgornji tabeli. Oglejmo si nehomogeno rekurzivno zvezo oblike $g(x) = \sum_{j=1}^{x} A_j(x)g(x-j) + H(x), x > k \geq 0$. V vsakem koraku rekurzivnega ocenjevanja imamo $x+1$ izrazov: $H(x)$ in $A_j(x)g(x-j)$ za $j = 1, ..., x$. Nekateri od teh izrazov so pozitivni, nekateri negativni. Da bi bolj jasno označili predznak vsakega izraza, to rekurzivno zvezo prepišemo v naslednjo obliko:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{x} s_j(x)B_j(x)g(x-j) + H^+(x) - H^-(x), \tag{30}$$

kjer je

$$B_j(x)g(x-j) = |A_j(x)g(x-j)| \geq 0,$$

$$s_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{če je } A_j(x)g(x-j) > 0, \\ 0 & \text{če je } A_j(x)g(x-j) = 0, \\ -1 & \text{če je } A_j(x)g(x-j) < 0, \end{cases}$$

in

$$H^+(x) = \frac{|H(x)| + H(x)}{2}, \quad H^-(x) = \frac{|H(x) - H(x)}{2}.$$

Definicija 2.13 (Definition 18 v [11])**.** V povezavi z izračunano rešitvijo $g(x)$ definiramo pozitivni del $g_+(x)$ in negativni del $g_-(x)$ v vsaki točki x, za katera velja

$$\begin{aligned} g_+(x) &= \sum_{s_j=1} B_j(x)g(x-j) + H^+(x) \geq 0 \\ g_-(x) &= \sum_{s_j=-1} B_j(x)g(x-j) + H^-(x) \geq 0 \\ g(x) &= g_+(x) - g_-(x) \end{aligned}$$

Definicija 2.14 (Definition 19 v [11])**.** *Empirični faktor inflacije* v x je definiran kot

$$\hat{\gamma}(x) = \frac{g_+(x) + g_-(x)}{|g_+(x) - g_-(x)|}, \quad \text{če je} \quad g_+(x) \neq g_-(x)$$

in

$$\hat{\gamma}(x) = \infty, \quad \text{če je} \quad g_+(x) = g_-(x).$$

Definicija 2.15 (Defintion 20 v [11])**.** Če je k začetna točka rekurzivne zveze (30), potem definiramo *empirično mejo akumulirane relativne napake* rekurzivno kot

$$\hat{u}(x) = \hat{u}(x-1)\hat{\gamma} + \bar{\eta}, \quad x > k,$$

z začetno vrednostjo $\hat{u}(k) = \bar{\eta}$.

Tu je $\bar{\eta} = \begin{cases} 0.5 \times 10^{-r} & \text{če zaokrožujemo,} \\ 10^{-r} & \text{če režemo,} \end{cases}$ in r število števk, ki jih uporabimo.

Definicija 2.16 (Definition 21 v [11])**.** Pravimo, da je natančnost v izračunani vrednosti $g(x)$ enaka $\nu(x)$, če je relativna napaka manjša od $10^{-\nu(x)}$.

Opomba 2.17. V prejšnem poglavju smo to natančnost $\nu(x)$ označili z $\#(r, n)$.

To natančnost $\nu(x)$ empirično ocenimo z neenakostjo

$$\nu(x) \geq \nu(x) = [-\log_{10} \hat{u}(x)] = \Big[-\frac{\ln \hat{u}(x)}{\ln 10}\Big],$$

kjer je $\ln x$ naravni logaritem in $[x]$ največje celo število, ki je manjše od x.

V tabeli 2 vidimo, da je za $x \leq 100$ faktor inflacije napake enak 1, za $x > 100$ pa hitro raste. Ta pospešena rast nakazuje, da ko se premikamo v desno polovico sestavljene binomske porazdelitve, rekurzivno ocenjevanje postaja vedno bolj nestabilno. Celo 200 števk ne zaščiti željene rešitve pred napakami zaokroževanja. V izračunanih vrednostih $g(x)$ dobimo naslednja absurdna rezultata:

$$g(898) := -0.19502 \times 10^{-93}, \quad \text{in} \quad g(1000) := -0.59052 \times 10^{-70}.$$

Izračunani $g(x)$ postane negativen pri $x = 898$, kar nam pove, da empirični oceni empiričnega faktorja inflacije $\hat{\gamma}(x)$ in natančnosti $\hat{\nu}(x)$ po točki $x = 898$ nista več zanesljivi.

Obstaja metoda, ki vključuje dve rekurziji, rekurzijo v naprejšni smeri in obratno rekurzijo v nazajšni smeri, ki se začne pri končni točki mM.

Rekurzivno zvezo v naprejšni smeri smo definirali z izrazom (27), sedaj pa definirajmo še rekurzivno zvezo v nazajšni smeri.

Definicija 2.18 (Definition 15 v [11])**.** Rekurzivno enačbo oblike

$$g(y) = \sum_{j=1}^{m} A_j(y)g(y+j) + H(y), \quad y < k, \tag{31}$$

z

$$g(j) = \alpha_j, \quad j = k, ..., k+m-1, \quad \overleftarrow{\alpha} = (\alpha_k, ..., \alpha_{k+m-1})$$

imenujemo nehomogena rekurzija v *nazajšni smeri* z *začetno točko* k in *začetnim vektorjem* $\overleftarrow{\alpha}$. Rešitev označimo z $g_{\overleftarrow{\alpha},k}(y)$.

Če imajo škodni zahtevki končen nosilec $\{x_1, x_2, ..., x_r\}$, lahko rekurzivno zvezo (14) zapišemo v rekurzivno zvezo

$$g_n = \sum_{j=1}^{m} \Big(a + b\frac{j}{n}\Big) f_j g_{n-j} \tag{32}$$

končnega reda $m = x_r$. Le-to lahko obrnemo v nazajšno rekurzivno zvezo:

$$g_y = \frac{1}{P(y)} \Big\{ g_{y+m} - \sum_{j=1}^{m-1} \Big(a + b\frac{m-j}{y+m}\Big) f_{m-j} g_{y+j} \Big\}, \tag{33}$$

kjer je

$$P(y) = \Big(a + b\frac{m}{y+m}\Big) f(m).$$

Za sestavljeno binomsko porazdelitev poznamo mejni pogoj pri končni točki mM, in ga lahko uporabimo kot začetni pogoj nazajšne rekurzije:

$$g(mM) = \theta^M f(m)^M, \quad g(mM+j) = 0, \quad \text{za} \quad j = 1, 2, ...$$

Izrek 2.19 (Theorem 13 v [11])**.** *Pri ocenjevanju sestavljene binomske porazdelitve imamo naslednje rezultate:*

(1) *Naprejšna rekurzija* (14) *je lokalno strogo stabilna na intervalu* $[0, M+1]$.
(2) *Naprejšna rekurzija* (32) *je lokalno strogo stabilna na intervalu* $[0, M+1]$ *in postane strogo nestabilna na intervalu* $[mM - M - 1, mM]$.
(3) *Nazajšna rekurzija* (33) *je lokalno strogo stabilna na intervalu* $[mM - M - 1, mM]$ *in postane strogo nestabilna na intervalu* $[0, M+1]$.
(4) *V posebnem primeru, ko je* $m = 2$*, da kombinacija rekurzivnih zvez obeh smeri lokalno strogo stabilno oceno čez interval zanimanja* $[0, mM]$.

Dokaz. Panjer in Wang [11]. □

2.2.4. *Podkoračitev obsega.* Naslednji računski problem, ki se lahko pojavi pri Panjerjevi rekurziji je podkoračitev obsega med določanjem začetne vrednosti (15). Ta se ponavadi pojavi pri frekvencah z velikim matematičnim upanjem. Naivno bi težavo rešili tako, da bi g_0 raztegnili z neko konstanto c, izpeljali rekurzijo in nato cg_0 skrčili. Vendar pa linearno skaliranje take vrste predstavlja nove ovire, saj bo cg_n prej ali slej povzročil presežek. Panjer in Willmot [12] predlagata dva alternativna postopka s katerima preprečimo podkoračitev obsega in se izognemo težavam presežka, povezanim z linearnim skaliranjem. To sta eksponentno skaliranje in razcep portfelja. Obe metodi sta enako primerni za primer sestavljene Poissonove porazdelitve kot tudi za primer negativne binomske porazdelitve. Na kratko bomo predstavili kako razstaviti portfelj v primeru sestavljene Poissonove porazdelitve.

Znano je, da je

$$(Pois(\lambda/m) \vee F)^{*m} = Pois(\lambda) \vee F,$$

in za dovolj velik m lahko $Pois(\lambda/m) \vee F$ ocenimo brez podkoračitve obsega. V tem primeru m-to konvolucijo izvedemo na nek surov način ali z nekim hitrim konvolucijskim algoritmom, osnovanim na hitri Fourierjevi transformaciji. Sestavljeno mešano Poissonovo porazdelitev kot tudi sestavljeno negativno binomsko lahko razstavimo na podoben način.

2.2.5. *Posplošitve.* Obstaja več posplošitev Panjerjeve rekurzije, ki dovoljujejo bolj splošne porazdelitve frekvenc. Tako na primer, če spremenimo pogoj (13) v

$$q_k = \Big(a + \frac{b}{k}\Big) q_{k-1}, \quad k \geq l + 1, \tag{34}$$

z začetnimi vrednostmi $q_0 = q_1 = ... = q_{l-1} = 0$, dobimo, če je $f_0 = 0$, Panjerjevo rekurzijo reda l

$$g_n = q_l f_n^{*l} + \sum_{j=1}^{n} \Big(a + \frac{bj}{n}\Big) g_{n-j} f_j, \quad \forall n \geq l.$$

Razred podan s (34) vključuje med drugim tudi l-rezanj negativne binomske in Poissonove porazdelitve, ki so zanimive v kontekstu pozavarovanja.

2.3. **Algoritem na osnovi hitre Fourierjeve transformacije.** Karakteristično funkcijo sestavljene vsote S_N lahko izrazimo s karakteristično funkcijo škodnega zahtevka Y_1:

$$\Phi_{S_N}(t) := E[e^{itS_N}] = \mathcal{P}_N(\Phi_{Y_1}(t)), \tag{35}$$

kjer $\mathcal{P}_N$ označuje rodovno funkcijo N. Porazdelitev S_N lahko dobimo, če na desni strani te enačbe uporabimo inverzno Laplaceovo transformacijo.

Heckman in Meyers [6] sta v svojem članku podala formule za primere, ko je porazdelitvena funkcija Y_1 odsekoma linearna ali odsekoma konstantna.

2.3.1. *Odsekoma linearna in odsekoma zvezna porazdelitev škodnih zahtevkov.* Opisana metoda invertira karakteristično funkcijo porazdelitve skupne vsote škodnih zahtevkov. Tako kot rekurzivna metoda, je tudi ta metoda eksaktna. To pomeni da lahko z dovolj velikim številom točk porazdelitve škodnih zahtevkov dosežemo katerokoli željeno stopnjo natančnosti.

Za algoritem potrebujemo porazdelitev frekvenc in porazdelitev škodnih zahtevkov. Porazdelitev frekvenc je lahko binomska, Poissonova ali negativna binomska, za kumulativno porazdelitev škodnih zahtevkov pa privzamemo da je odsekoma linearna. Prav tako dovolimo, da se največja možna velikost zahtevka pojavi z verjetnostjo različno od 0. Ker lahko večino porazdelitev škodnih zahtevkov, ki so uporabni v zavarovalništvu, aproksimiramo z odsekoma linearno kumulativno porazdelitvijo do katerekoli željene stopnje natančnosti, imamo za te izračune popolnoma splošno metodo. Porazdelitev skupne vsote škodnih zahtevkov lahko izrazimo empirično z Monte Carlo simulacijo.

Skupno velikost zahtevkov lahko generiramo z naslednjim algoritmom:

(1) Slučajno izberemo število zahtevkov n iz privzete porazdelitve frekvenc.
(2) n-krat slučajno iz privzete porazdelitve škodnih zahtevkov izberemo velikost zahtevka y.
(3) Skupna vsota škodnih zahtevkov s je vsota vseh škodnih zahtevkov y iz prejšnega koraka.

V tem algoritmu implicitno predpostavimo, da je porazdelitev zahtevkov F znana. V praksi mora biti ta porazdelitev ocenjena na podlagi preteklih podatkov, ali pa jo preprosto privzamemo. Negotovost parametra porazdelitve zahtevkov lahko močno vpliva na napovedi kolektivnega modela tveganja, in ga ne bi smeli ignorirati. Problem rešimo tako, da privzamemo obliko porazdelitve.

Bolj natančno, negotovost parametra porazdelitve zahtevkov določimo s slučajno spremenljivko β, za katero velja $\mathrm{E}(1/\beta) = 1$ in $\mathrm{Var}(1/\beta) = b$. Skupno vsoto zahtevkov potem modeliramo z naslednjim algoritmom:

(1) Iz porazdelitve frekvenc slučajno izberemo število škodnih zahtevkov n.
(2) Iz privzete porazdelitve slučajno izberemo parameter skaliranja β.
(3) Iz privzete porazdelitve škodnih zahtevkov n-krat slučajno izberemo velikost zahtevka y.
(4) Skupna vsota škodnih zahtevkov s je vsota vseh škodnih zahtevkov y, deljenih s parametrom skaliranja β.

Naj bo $\mathcal{Q} \vee \mathcal{F}(x)$ kumulativna porazdelitvena funkcija skupne vsote škodnih zahtevkov, ki smo jo generirali z zgornjim algoritmom. Naj bo $U(\beta)$ kumulativna porazdelitvena funkcija parametra skaliranja β. Zveza med $\mathcal{Q} \vee \mathcal{F}(x)$ in $\mathcal{Q} \vee F(x)$ je podana z enačbo

$$\mathcal{Q} \vee \mathcal{F}(x) = \int_0^x \mathcal{Q} \vee F(\beta x) dU(\beta).$$

Monte Carlo simulacija je dolg in zahteven proces, zato izpeljemo bolj učinkovit način računanja.

Porazdeltiev zahtevkov smo označili z F. Definiramo

$$F^{*0} = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$
$$F^{*n} = (F^{*(n-1)} * F)(x)$$

Porazdelitev skupne vsote n zahtevkov lahko označimo z $F^{*n}(x)$. Tako lahko prvi algoritem prepišemo v

(1) Slučajno izberemo število škodnih zahtevkov n.
(2) Iz porazdelitve F^{*n} izberemo skupno vsoto škodnih zahtevkov s.

Ta proces bomo izrazili še analitično. S $\mathcal{Q} \vee F(x)$ smo označili porazdelitveno funkcijo porazdelitve skupne vsote škodnih zahtevkov, s q_n pa verjetnost, da imamo natanko n zahtevkov. Vemo, da je

$$\mathcal{Q} \vee F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n F^{*n}(x) \tag{36}$$

Sedaj definiramo karakteristično funkcijo kumulativne porazdelitvene funkcije K:

$$\Phi_K(t) = \mathrm{E}(e^{itx}) = \int_0^\infty e^{itx} dF(x).$$

Če sta K in L dve kumulativni porazdelitveni funkciji, je

$$\Phi_{(K*L)}(t) = \mathrm{E}(e^{ity}) = \int_0^\infty e^{itz} d(K * L)$$

Naj bo $z = x + y$, x in y sta neodvisna. Potem je

$$\Phi_{(K*L)}(t) = \mathrm{E}_z(e^{itz}) = \mathrm{E}_{x+y}(e^{it(x+y)}) = \mathrm{E}_x(e^{itx})\, \mathrm{E}_y(e^{ity}) = \Phi_H(t)\Phi_K(t).$$

Tako smo pokazali, da velja

$$\Phi_{(K*L)}(t) = \Phi_H(t)\Phi_K(t).$$

Posledica te enačbe je, da je

$$\Phi_{F^{*n}}(t) = (\Phi_F(t))^n. \tag{37}$$

Če združimo enačbi (36) in (37) dobimo izraz za karakteristično funkcijo porazdelitve skupne vsote zahtevkov:

$$\Phi_{Q\vee F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)(\Phi_F(t))^n \tag{38}$$

Privzeli smo, da je porazdelitev zahtevkov odsekoma linearna. Sedaj določimo matematično obliko te porazdelitve. Naj bo n nenegativno celo število, in naj velja $0 \leq a_1 < ... < a_n < a_{n+1}$. p_k označuje verjetnost, da je posamezni zahtevek med a_k in a_{k+1}. Za $a_k < z < a_{k+1}$ je verjetnostna gostota z podana z $d_k = p_k/(a_{k+1} - a_k)$. Verjetnost, da je vrednost škodnega zahtevka enaka a_{n+1}, je $1 - \sum_{k=1}^{n} p_k$.

Izračunamo karakteristično funkcijo $F(z)$:

$$\begin{aligned}
\Phi_F(t) &= \int_0^{\infty} e^{itz} dF(z) \\
\Phi_F(t) &= \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{a_{k-1}} d \cdot k e^{itz} dz + \Big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\Big) e^{ita_{n-1}},
\end{aligned}$$

in nadaljujemo z uporabo Eulerjeve formule $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$:

$$\begin{aligned}
\Phi_F(t) = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n} d_k(\sin(ta_{k+1}) - \sin(ta_k)) + \Big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\Big) \cos(ta_{n+1}) \\
+ i\frac{1}{t} d_k(\cos(ta_k) - \cos(ta_{k+1})) + i\Big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\Big) \sin(ta_{n+1}).
\end{aligned}$$

Nato privzamemo, da $\tilde{h}(t)$ in $\tilde{k}(t)$ označujeta realni in imaginarni del $\Phi_F(t)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}(t) &= \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n} d_k(\sin(ta_{k+1}) - \sin(ta_k)) + \Big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\Big) \cos(ta_{n+1}) \\
\tilde{k}(t) &= \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{n} d_k(\cos(ta_k) - \cos(ta_{k+1})) + \Big(1 - \sum_{k=1}^{n} p_k\Big) \sin(ta_{n+1})
\end{aligned}$$

Vrnemo se na problem računanja karakteristične funkcije porazdelitve skupne vsote zahtevkov; karakteristično funkcijo bomo izračunali za binomsko, Poissonovo in negativno binomsko porazdelitev posebej.

Primer 2.20. Binomska porazdelitev: $P(n) = \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n}$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{Q}\vee F}(t) &= \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} p^n (1-p)^{m-n} (\Phi_F(t))^n \\
&= \sum_{n=0}^{m} (p\Phi_F(t))^n (1-p)^{m-n} \\
&= (p\Phi_F(t) + 1 - p)^m \\
&= (1 + p(\Phi_F(t) - 1))^m
\end{aligned}$$

če vpeljemo novi oznaki $\lambda = mp$ in $c = -1/m$, dobimo

$$\Phi_{\mathcal{Q}\vee F}(t) = (1 - c\lambda(\Phi_F(t) - 1))^{-1/c}. \tag{39}$$

Primer 2.21. Poissonova porazdelitev: $P(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{Q}\vee F}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} (\Phi_F(t))^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}(\lambda\Phi_F(t))^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\Phi_F(t))^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda\Phi_F(t)}
\end{aligned}$$

$$\Phi_{\mathcal{Q}\vee F}(t) = e^{\lambda(\Phi_F(t)-1)} \tag{40}$$

Primer 2.22. Negativna binomska porazdelitev:
$P(n) = \binom{n+1/c-1}{n}(1-c\lambda)^{-1/c}\left(\frac{c\lambda}{1+c\lambda}\right)^n$

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathcal{Q}\vee F}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1/c-1}{n} (1-c\lambda)^{-1/c} \left(\frac{c\lambda}{1+c\lambda}\right)^n (\Phi_F(t))^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1/c-1}{n} (1-c\lambda)^{-1/c} \left(\frac{c\lambda\Phi_F(t)}{1+c\lambda}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1/c-1}{n} (1-c\lambda)^{-1/c} \left(\frac{cx}{1+cx}\right)^n,
\end{aligned}$$

kjer je $\quad x = \dfrac{\Phi_F(t)}{1 - c\lambda(\Phi_F(t) - 1)};$

$$= (1+c\lambda)^{-1/c}(1+cx)^{1/c}$$

$$\Phi_{\mathcal{Q}\vee F}(t) = (1 - c\lambda(\Phi_F(t) - 1))^{-1/c} \tag{41}$$

2.3.2. *Diskretna Fourierjeva transformacija.*

Definicija 2.23. Naj bo $f = (f_0, f_1, ..., f_{M-1}) \in \mathbb{R}^M$ za neko točko rezanja M. *Diskretna Fourierjeva transformacija*

$$\hat{f} = (\hat{f}_0, ..., \hat{f}_{M-1})$$

je definirana z

$$\widehat{f_j} = \sum_{k=0}^{M-1} f_k e^{i2\pi jk/M} \quad j = 0, 1, ..., M-1. \tag{42}$$

V primeru, ko imamo $\hat{f}$ podan, lahko začetno zaporedje dobimo z

$$f_j = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \widehat{f_k} e^{-i2\pi jk/M}. \tag{43}$$

Če je M potenca 2, lahko (42) in (43) učinkovito izračunamo z enim izmed številnih algoritmov na podlagi hitre Fourierjeve transformacije.

Na podlagi (35) vzamemo kot aproksimacijo za $g = (g_0, ..., g_{M-1})$ inverz diskretne Fourierjeve transformacije

$$\widehat{g^M} := \mathcal{P}_N(\hat{f}). \tag{44}$$

Če je $\sum_{j=0}^{M-1} f_j = 1$, torej če ni napake zaradi rezanja, formula (44) ocenjuje sestavljeno porazdelitev točno na ciklični grupi $\mathbb{Z}/M\mathbb{Z}$. Sestavljena mera, ki leži pri M in naprej, bo "ovita"in se bo napačno pojavila na razponu $0, ..., M-1$. Za zahtevke z znatno repno mero lahko napaka rezanja in ovijanja postaneta precejšen problem. Če nas zanimajo sestavljene verjetnosti na $\{0, 1, ..., n\}$ moramo vzeti M veliko večji od n, če želimo dobiti smiselne vrednosti.

Grübel in Hermesmeier [4] sta napako ovijanja kvantificirala.

2.3.3. *Napaka ovijanja.* Tokrat ignoriramo napako diskretizacije in privzamemo, da je porazdelitev zahtevkov mrežna, torej skoncentrirana na neki mreži $h\mathbb{N}_0, h > 0$. Lahko privzamemo, da je $h = 1$, in tako obravnavamo nenegativna cela števila. Tako rekurzija kot transformacijske metode potrebujejo še dodaten korak rezanja; neskončno množico $\mathbb{N}_0$ zamenjamo z množico $\{0, 1, ..., M-1\}$, kjer je $M \in \mathbb{N}$. Če lahko uporabimo Panjerjevo rekurzijo in če ignoriramo napake plavajoče vejice, iz $f_n, n = 0, ..., M-1$ dobimo točne vrednosti $g_n, n = 0, ..., M-1$.

Transformacijske metode vpeljejo dodatno napako, napako ovijanja. Ta nastane ob zamenjavi običajnega seštevanja celih števil s seštevanjem po modulu točke rezanja M. Vendar pa, če uporabimo algoritem hitre Fourierjeve transformacije, število operacij raste kot $M \log M$, medtem, ko rekurzija porabi M^2 operacij. Zato so za primerjavo metod pomembni red in magnituda napake ovijanja, ter tehnike zmanjšanja le-te.

Porazdelitve F, ki so zbrane na $\mathbb{N}_0$, lahko opišemo z zaporedjem $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ njihovih atomov $a_n := f_n$. Taka zaporedja so elementi prostora

$$l_1 := \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0} : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \right\}$$

absolutno konvergentnih kompleksnih zaporedij, ki postane Banachov prostor, če mu damo normo

$$\|\cdot\|_1 : l_1 \to \mathbb{R}, \quad \|a\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|.$$

Nasprotno, vsak $a \in l_1$ definira kompleksno končno mero na $\mathbb{N}_0$. Podobno lahko interpretiramo elemente $a^M = (a_0^M, ..., a_{M-1}^M)$ standardnega $M-$dimenzionalnega unitarnega vektorskega prostora $\mathbb{C}^M$ kot kompleksne mere ciklične grupe $\mathbb{G}_M$ reda M. Če uporabimo običajne aritmetične operacije po modulu M, lahko to grupo identificiramo z $\{0, 1, ..., M-1\}$. S črkami $a, b, c, ...$ bomo označili elemente prostora l_1, z $a^M, b^M, c^M, ...$ elemente $\mathbb{C}^M$ in z a_n ali $(a^M)_n$ $n-$to komponento zaporedja a ali vektorja a^M. V obeh primerih se indeks začne z $n = 0$. Na $\mathbb{C}^M$ bomo uporabili normo $\|a^M\|_1 := \sum_{n=0}^{M-1} |a_n|$.

$\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{G}_M$ imata aditivno strukturo, ki vodi do pojma konvolucije za mere na teh množicah. Konvolucijski produkt $c = a * b$ zaporedij $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in l_1$ je definiran z

$$c_n := \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \quad \text{za vse} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Za elemente a^M in b^M iz $\mathbb{C}^M$ uporabimo isti simbol $*$ in postavimo

$$(a^M * b^M)_n := \sum_{m=0}^{M-1} a_m^M b_{n-m}^M, \quad \text{za vsak} \quad n = 0, 1, ..., M-1,$$

kjer indeks b^M dobimo z odštevanjem v $\mathbb{G}_M$, torej po modulu M. Neenakost norm $\|a * b\|_1 \leq \|a\|_1 \|b\|_1$ drži za vse $a, b \in l_1$, in podobno $\|a^M * b^M\| \leq \|a^M\|_1 \|b^M\|_1$ za vsak $a^M, b^M \in \mathbb{C}^M$. V primeru, da so vsi elementi a in b nenegativni, velja tudi $\|a * b\|_1 = \|a\|_1 \|b\|_1$. $k-$to konvolucijsko potenco $a \in l_1$ označimo z a^{*k} in uporabimo zapis $a^{*0} = \delta_0$, kjer je $\delta_{00} = 1$ in $\delta_{0n} = 0$ za $n > 0$. Zaporedje δ_0 je enota za konvolucijo. V $\mathbb{C}^M$ imamo analogne definicije.

V tem formalnem okvirju je razmerje med porazdelitvijo škodnih zahtevkov in porazdelitvijo skupne vsote zahtevkov podano z nelinearnim funkcionalom Ψ

$$\Psi : \{a \in l_1 : \|a\|_1 \leq 1\} \to l_1, \quad \Psi(a) := \sum_{k=0}^{\infty} q_k a^{*k}.$$

Od sedaj naprej obravnavamo zaporedje $(q_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ kot fiksno, za katero vemo, da je $q_k = P(N = k)$. Kot smo že omenili v prejšnem razdelku, lahko elemente $b = \Psi(a)$ za nekatera posebna zaporedja q dobimo rekurzivno. Če je na primer $q_k = e^{-\alpha}\alpha^k/k!$ za vsak $k \in \mathbb{N}_0$, potem je

$$b_0 = e^{-\alpha(1-\alpha_0)}, \quad b_n = \frac{\alpha}{n} \sum_{m=1}^{n} m a_m b_{n-m}, \quad \text{za vsak} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ta formula predstavlja osnovo za izračun sestavljene Poissonove porazdelitve s Panjerjevo rekurzijo.

Ker konvolucije obstajajo tudi na $\mathbb{C}^M$, obstaja za mere na $\mathbb{G}_M$ analogen funkcional Ψ:

$$\Psi_M : \{a^M \in \mathbb{C}^M : \|a^M\|_1 \leq 1\} \to \mathbb{C}^M, \quad \Psi_M(a^M) := \sum_{k=0}^{\infty} q_k (a^M)^{*k}.$$

To je porazdelitvena funkcija skupne vsote zahtevkov, če zahtevke vsakič, ko vsota prestopi prag M, prilagodimo z odštevanjem ustreznega večkratnika M.

Zaporedja in vektorske prostore povežemo s tremi omejenimi linearnimi operatorji, ki v istem vrstnem redu predstavljajo rezanje, podaljšanje z ničlami in ovijanje:

$$T_M : l_1 \to \mathbb{C}^M, \quad (T_M(a))_n := a_n \quad \text{za} \quad n = 0, ..., M-1,$$
$$U_M : \mathbb{C}^M \to l_1, \quad (U_M(a^M))_n := \left\{ \begin{array}{ll} a_n^M & \text{za } n = 0, ..., M-1, \\ 0 & \text{sicer}, \end{array} \right\}$$
$$V_M : l_1 \to \mathbb{C}^M, \quad (V_M(a))_n := \sum_{j=0}^{\infty} a_{n+jM} \quad \text{za} \quad n = 0, ..., M-1.$$

Z Id označimo identični operator na $\mathbb{C}^M$, velja

$$T_M \circ U_M = V_M \circ U_M = \mathrm{Id}, \tag{45}$$

in iz pravil seštevanja po modulu M je

$$V_M(a * b) = V_M(a) * V_M(b) \quad \text{za vsak} \quad a, b \in l_1. \tag{46}$$

V tej enačbi se $*$ nanaša na različne prostore na levi in desni strani. Skupaj z zveznostjo V_M iz tega dobimo

$$\Psi_M \circ V_M = V_M \circ \Psi.$$

Potrebujemo še Fourierjevo transformacijo. Za vse $a \in l_1$ je Fourierjeva transformacija $\hat{a}$ podana z

$$\hat{a} : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}, \quad \hat{a}(\theta) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta} \quad \text{za vsak} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Naj bo $w_M := \exp(2\pi i/M)$ $M-$ti kanonični koren enote. Fourierjeva transformacija $\widehat{(a^M)}$ nekega $a^M \in \mathbb{C}^M$ je podana z

$$\widehat{(a^M)_n} := \sum_{m=0}^{M-1} a_m^M wM^{m \cdot n} \quad \text{za} \quad n = 0, ..., M-1. \tag{47}$$

To je diskretna Fourierjeva transformacija, ki smo jo definirali v definiciji (2.23).

Če definiramo $M \times M$ matriko $W = (w_{kl})_{k,l=1}^M$ z $w_{kl} := w_M^{(k-1)(l-1)}$, potem je v matričnem zapisu $\widehat{(a^M)} = Wa^M$. Z $\overline{W}$ označimo konjugirano matriko W, iz česar sledi $W^{-1} = M^{-1}\overline{W}$ in posledično

$$a_n^M = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \widehat{(a^M)}_m w_M^{-m \cdot n} \quad \text{za} \quad n = 0, ..., M-1. \tag{48}$$

To pomeni, da obstaja preprosta obratna formula za Fourierjevo transformacijo na $\mathbb{G}_M$.

Fourierjeva transformacija na $\mathbb{G}_M$ je numerično stabilna operacija. Razen konstantnega faktorja sta W in W^{-1} unitarni matriki, zato se ni potrebno bati povečanja napake aproksimacije zaradi zaokroževanja.

Znano je, da konvolucija postane množenje po točkah na strani transformacije:

$$\widehat{(a * b)} = \hat{a} \cdot \hat{b}, \quad \widehat{(a^M * b^M)} = \widehat{(a^M)} \cdot \widehat{(b^M)}, \quad \text{za vse} \quad a, b \in l_1, a^M, b^M \in \mathbb{C}^M. \tag{49}$$

S $q(z)$ označimo rodovno funkcijo zaporedja q

$$q : \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\} \to \mathbb{C}, \quad q(z) := \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k.$$

Potem naslednji enakosti

$$\widehat{\Psi(a)} = q \circ \hat{a}, \quad \widehat{\Psi_M(a^M)} = q \circ \widehat{(a^M)}, \tag{50}$$

sledita iz (49), in veljata za a in a^M zaporedoma.

Z vsem navedenim, pridemo do naslednjega algoritma za izračun aproksimacije b^M sestavljene porazdelitve $b := \Psi(a)$ za dano porazdelitev zahtevkov a:

(1) Vhodno zaporedje a odrežemo pri nekem pragu M: $a \to a^M := T_M(a)$.
(2) Na rezultatu koraka (1) uporabimo enačbo (47): $a^M \to \widehat{(a^M)}$.
(3) Na rezultatu koraka (2) uporabimo q: $\widehat{(a^M)} \to q \circ \widehat{(a^M)} = (\widehat{\Psi_M(a^M)})$.
(4) Na rezultatu koraka (3) uporabimo enačbo (48): $(\widehat{\Psi_M(a^M)}) \to b^M := \Psi_M \circ T_M(a)$.

V tretjem koraku algoritma smo uporabili (50). V veliko primerih je q podana eksplicitno. Poleg napak, ki so posledica zapisa realnih števil v plavajoči vejici, algoritem sestavljeno porazdelitev na $\mathbb{G}_M$ oceni natančno.

Če je blizu M velika mera se stvari lahko zelo zapletejo, saj se bo le-ta ovila okoli M in se ponovno pojavila blizu 0. To lahko resno izkrivi rezultat, še posebej v primeru porazdelitev s težkimi repi.

Naslednji izrek poda meje za napako ovijanja $b^M - T_M(b), b := \Psi(a)$.

Izrek 2.24 (Theorem 2 v [4]). *Naj bosta b in b^M kot zgoraj. Potem velja*

$$b_n \le b_n^M \le b_n + \sum_{j=1}^{\infty} b_{n+jM} \quad \textit{za} \quad n = 0, ..., M-1.$$

Poleg tega,

$$\|b^M - T_M(b)\|_1 \le \sum_{n=M}^{\infty} b_n.$$

Dokaz. Grübel in Hermesmeier [4]. □

Zgornja meja $\sum_{n=M}^{\infty} b_n$ ima v modelu tveganja preprosto interpretacijo, in sicer je verjetnost, da skupna vsota zahtevkov presega prag M. Pravzaprav lahko naredimo kvalitativni zaključek, da z naraščajočim M napaka ovijanja postane zanemarljiva. Za praktične namene pa potrebujemo bolj kvantitaven izraz.

Prvi izraz izreka (2.24) lahko prepišemo v

$$T_M(b) \le b^M \le V_M(b), \tag{51}$$

kjer je izraz na sredini rezultat algoritma, izraz na levi pa vrednost, ki jo iščemo. Da bi ugotovili, ali je splošna zgornja meja $V_M(b)$ preveč konzervativna, pogledamo, kako se b^M obnaša asimptotično ko $M \to \infty$, in sicer z uporabo lastnosti odvajanja funkcionala Ψ. Privzamemo, da zaporedje $(q_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$, ki definira Ψ, zadošča pogoju

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 q_k < \infty, \tag{52}$$

in definiramo funkcional Φ

$$\Phi : \{a \in l_1 : \|a\|_1 \leq 1\} \to l_1, \quad \Phi(a) := \sum_{k=1}^{\infty} kq_k a^{*(k-1)}.$$

Lema 2.25 (Lemma 3 v [4]). *Če je $a(M), M \in \mathbb{N}$ in so a elementi $\{a \in l_1 : \|a\|_1 \leq 1\}$ z $\|a(M) - a\|_1 \to 0$ ko $M \to \infty$, potem*

$$\|\Psi(a(M)) - \Psi(a) - \Phi(a) * (a(M) - a)\|_1 = O\Big(\|a(M) - a\|_1^2\Big).$$

Dokaz. Grübel in Hermesmeier [4]. □

Razširitev razlike med rezultatom algoritma in zgornjo mejo iz izreka (2.24) lahko zdaj dobimo v obliki izraza $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$, to je v obliki repov porazdelitve zahtevkov.

Izrek 2.26 (Theorem 4 v [4]). *Privzamemo da (52) velja. Naj bo $a(M) := U_M \circ T_M(a)$. Potem, ko $M \to \infty$,*

$$\|V_M(b) - b^M - V_M(\Phi(a)) * v_M(a - a(M))\|_1 = O\Big(\Big(\sum_{n=M}^{\infty} a_n\Big)^2\Big).$$

Dokaz. Z uporabo (45) in (46) dobimo

$$\begin{aligned} V_M(b) - b^M &= V_M \circ \Psi(a) - \Psi_M \circ T_M(a) \\ &= v_M \circ \Psi(a) - \Psi_M \circ V_M \circ U_M \circ T_M(a) \\ &= V_M(\Psi(a) - \Psi(a(M))). \end{aligned}$$

Lema (2.25) nam pokaže, da velja

$$\|\Psi(a(M)) - \Psi(a) - \Phi(a) * (a(M) - a)\|_1 = O\Big(\|a(M) - a\|_1^2\Big).$$

Z uporabo V_M ne povečamo norme, in $\|a(M) - a\|_1 = \sum_{n=M}^{\infty} a_n$. □

Iz (51) sledi

$$\|b^M - T_M(b)\|_1 + \|V_M(b) - b^M\|_1 = \|V_M(b) - T_M(b)\|_1.$$

Prvi izraz je napaka ovijanja $\sum_{n=0}^{M-1} |b_n^M - b_n|$, izraz na desni strani pa rep $\sum_{n=M}^{\infty} b_n$ sestavljene porazdelitve. Za srednji izraz iz izreka (2.24) dobimo

$$\|V_M(b) - b^M\|_1 = \|V_M(\Phi(a)) * V_M(a - a(M))\|_1 + O\Big(\Big(\sum_{n=M}^{\infty} a_n\Big)^2\Big).$$

Ker so vsi elementi $\Phi(a)$ in $a - a(M)$ nenegativni, dobimo

$$\begin{aligned} \|V_M(\Phi(a)) * V_M(a - a(M))\|_1 &= \|\Phi(a) * (a - a(M))\|_1 \\ &= \|\Phi(a)\|_1 \|a - a(M)\|_1 \\ &= \Big(\sum_{k=1}^{\infty} kq_k\Big) \|a - a(M)\|_1 \\ &= H'(1) \sum_{n=M}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

Tako imamo, če ima porazdelitev zahtevkov končno varianco, med napako ovijanja, repom zahtevkov in repom sestavljene porazdelitve naslednje razmerje

$$\sum_{n=0}^{M-1} |b_n^M - b_n| = \sum_{n=M}^{\infty} b_n - H'(1) \sum_{n=M}^{\infty} a_n + O\Big(\Big(\sum_{n=M}^{\infty} a_n\Big)^2\Big),$$

oziroma s klasičnimi oznakami

$$\sum_{n=0}^{M-1} \Big|g_n^M - g_n\Big| = \sum_{n=M}^{\infty} g_n - \mathcal{P}_N'(1) \sum_{n=M}^{\infty} f_n + O\Big(\Big(\sum_{n=M}^{\infty} f_n\Big)^2\Big). \tag{53}$$

Iz (53) sklepamo da je napaka ovijanja majhna, če je M velik in se rep F (kot tudi rep $Q \vee F$) hitro manjša.

Napako ovijanja lahko zmanjšamo z ustrezno spremembo mere, s *postopkom eksponentnega nagibanja*. Matematična osnova tega postopka je ugotovitev, da eksponentna sprememba mere komutira s funkcionalom sestavljene porazdelitve.

Za $\theta \in \mathbb{R}$ naj bo operator E_θ, ki vhodno zaporedje nagne, definiran kot

$$\mathrm{E}_\theta\, f = \Big(e^{-\theta j} f_j\Big)_{j=0,1,\ldots,M-1}.$$

θ imenujemo *parameter nagibanja*. Rep $\mathrm{E}_\theta\, f$ se manjša eksponentno in tako potencialno veliko hitreje kot f. Operator E_θ komutira s konvolucijo in tako imamo

$$Q \vee F = \mathrm{E}_{-\theta}(Q \vee \mathrm{E}_\theta\, F). \tag{54}$$

Skladno z (44) in (54) dobimo naslednji algoritem:

(1) Izberemo točko krajšanja $M \in \mathbb{N}$ in parameter nagibanja $\theta > 0$.
(2) Postavimo $f = (f_0, f_1, ..., f_{M-1})$.
(3) Nagnemo zaporedje: $f \mapsto \mathrm{E}_\theta\, f = (e^{-\theta j} f_j)_{j=0,1,...M-1}$.
(4) Izračunamo diskretno Fourierjevo transformacijo nagnjenega zaporedja: $\mathrm{E}_\theta\, f \mapsto \widehat{\mathrm{E}_\theta\, f}$.
(5) Vzamemo inverzno diskretno Fourierjevo transfomracijo $\mathcal{P}_N(\widehat{\mathrm{E}_\theta\, f})$ in poravnamo nazaj z uporabo $\mathrm{E}_{-\theta}$.

Eksponentno nagibanje v prvem koraku da repe, ki se hitro manjšajo, torej bo napaka ovijanja, ki se pojavi v naslednjih korakih, po izreku (2.24) majhna, če je M velik. Vsaj za majhne indekse n bo neizbežno povečanje napak zaradi množenja s potencialno velikimi faktorji v zadnjem koraku zanemarljivo v primerjavi s skupnim izboljšanjem.

Nagibanje ima veliko praktično vrednost in lahko strašansko zmanjša napako ovijanja. V aplikacijah bi morali izbrati največji možen parameter nagibanja, ne da bi povzročili prekoračitev ali podkoračitev obsega. Če uporabimo navadno (64 bitno) dvojno natančnost, se v večini primerov zdi vrednost $M\theta \approx 20$ sprejemljiva. Paziti moramo tudi na "velike"frekvence. V tem primeru lahko ocenjevanje rodovne funkcije $\mathcal{P}_N$ prav tako vodi do podkoračitve obsega. Ta problem lahko rešimo s tehnikami razcepa portfelja.

V primerjavi s Panjerjevo rekurzijo ima hitra Fourierjeva transformacija dve glavni prednosti: deluje s poljubnimi porazdelitvami frekvenc in je veliko bolj učinkovita. Za pridobitev $g_0, ..., g_n$, hitra Fourierjeva transformacija v osnovi porabi $O(n \log n)$ operacij, medtem ko jih rekurzija porabi $O(n^2)$. Bühlmann [1] je podal podrobno analizo Poissonovega primera in zaključil, da je za $n \geq 256$ hitra Fourierjeva transformacija praktično vedno boljša od Panjerjeve rekurzije. Ta številka je v luči današnjih moči procesiranja nekoliko zastarela, obe metodi pa pri 256 mrežnih točkah porabita za oceno le trenutek. V realni postavitvi z možnostjo zahtevkov s težkimi repi, v primeru, da želimo določiti 99% kvantil sestavljene Pareto porazdelitve, potrebujemo več deset tisoč vozlov. Panjerjeva rekurzija bo daleč prekašana.

3. Primeri

Primeri bodo izvedeni numerično s programskim jezikom *R*, z uporabo paketa *actuar*. Ta paket vsebuje funkcijo *discretize*(), ki izvaja artimetizacijske vzorce, ki so omenjeni zgoraj, in vključuje nekatere uporabne porazdelitve.

3.1. **Uvodni primer.** Začnemo s preprostim primerom, ki združi vse ključne koncepte. Radi bi ocenili porazdelitev $Pois(\lambda)\vee Pareto(\alpha,\beta)$ na intervalu $[0,(M-1)h]$, kjer ima porazdelitev $Pareto(\alpha,\beta)$ gostoto

$$f(x)=\frac{\alpha}{\beta}\Big(1+\frac{x}{\beta}\Big)^{-(\alpha+1)},\quad x\geq 0,\alpha>0,\beta>0.$$

(1) Z metodo zaokroževanja aritmetiziramo $Pareto(\alpha,\beta)$ z razponom h:

```
f <- discretize(ppareto(x, alpha, beta), form=0, to=(M-1)h,
        by=h, method="rounding")
```

Oblike odvajanja lahko dobimo z *"lower"* in *"upper"*, lokalno metodo momentov pa z *"unbiased"*.

(2) S hitro Fourierjevo transformacijo brez nagibanja izračunamo $g_0,...,g_{M-1}$:

```
fhat <- fft(f, inverse=FALSE)
P <- exp(lambda * (fhat-1))
g <- 1 / M * fft(P, inverse=TRUE)
```

Rodovna funkcija $N\sim Pois(\lambda)$ podana z

$$\mathcal{P}_N(t)=\exp(\lambda(t-1)),$$

z $1/M$ pa množimo zato, ker nam fft($\cdot$, inverse = TRUE) vrne nestandardiziran inverze diskretne Fourierjeve transformacije.

(3) Nagibanje z $\theta>0$ nam da postopek:

```
f <- exp(-theta * (0 : (M-1))) * f
fhat <- fft(f, inverse=FALSE)
P <- exp(lambda * (fhat-1))
g <- exp(theta * (0 : (M-1))) * (1 / M * fft(P, inverse=TRUE))
```

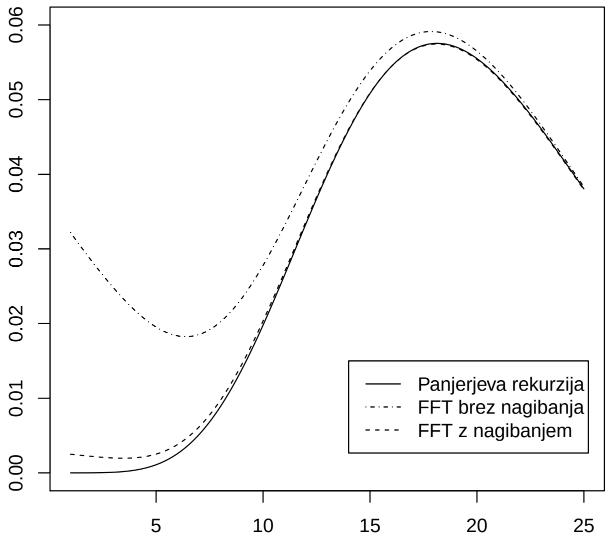
(4) Ker $Pois(\lambda)$ ustreza $a=0$ in $b=\lambda$ v (14), Panjerjevo rekurzijo izvedemo na naslednji način:

```
g <- vector(length=M)
g[1] <- exp(-lambda)
for(n in 1 : (M-1)) {
      g[n+1] <- sum(lambda*(1:n)/n*f[(1:n)+1]*g[n-(1:n)+1])
      }
```

R dovoli le strogo pozitivne indekse, zato jih moramo zamakniti.

Vektor g vsebuje verjetnosti na množici $\{0,h,2h,...,(M-1)h\}$. Zaradi majhnih napak zaokroževanja bodo numerične vrednosti g najverjetneje kompleksna števila z neničelnimi imaginarnimi deli, seveda pa delamo le z realnimi deli. Z deljenjem elementov g s h dobimo aproksimacijo za sestavljeno gostoto na $(0,(M-1)h]$.

Na spodnji sliki so te gostote prikazane za porazdelitev $Pois(20)\vee$ $Pareto(4,3)$ s parametri modela $h=0.1, M=2^8$ in $\theta=0.01$. Za namene ponazoritve smo parameter nagibanja θ izbrali dokaj majhen. Po pravilu palca $\theta \approx 20/M$ bi vzeli veliko večjo vrednost, na primer $\theta = 0.1$. Vendar pa v tem primeru na grafu ne bi mogli videti razlike med gostoto nagnjene hitre Fourierjeve transformacije in gostoto Panjerjeve rekurzije. Pravzaprav bi bila absolutna razlika na intervalu opazovanja manjša od ≈ 0.0006.



Slika 1. Aproksimirane gostote za $Pois(20) \vee Pareto(4,3)$.

3.2. **Izbira pasovne širine.** V praksi moramo za aritmetizacijo porazdelitve zahtevkov izbrati primerno majhno pasovno širino h. Ker pa za napako diskretizacije ni dosegljiva nobena analitično rešljiva formula, je izbira pravzaprav stvar izkušenj. Kot preprosto začasno metodo lahko uporabimo meje, ki smo jih dobili z naprejšnimi in nazajšnimi diferencami in h manjšamo dokler ni razlika teh mej manjša kot nek rob napake, ki je v danem kontekstu sprejemljiv. Vendar pa je ta pristop nekako nezadovoljujoč. Naprejšne in nazajšne diference so ponavadi zelo pesimistične: aproksimacije, ki jih dobimo z metodo zaokroževanja so ponavadi bližje točni vrednosti kot pa eni izmed mej. Primer je podan v spodnji tabeli.

Tabela 3. Ocena 99.9% kvantila porazdelitve $Pois(50) \vee Exp(1)$ z uporabo različnih aritmetizacijskih vzorcev

Vzorec	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.1$	$h = 0.01$	Točna vrednost
Naprejšne	58	70.0	81.9	84.78	
Zaokorževanje	84	84.5	85.1	85.11	85.11
Nazajšne	124	103.0	88.4	85.43	

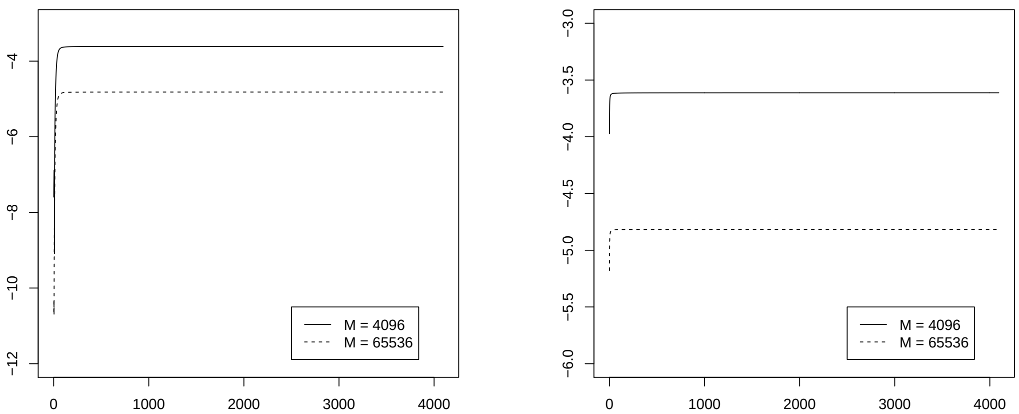
V tem pogledu je bolj primerno zaporedno manjšati h in izračunati pripadajočo sestavljeno porazdelitev z metodo zaokroževanja, dokler ni relativno izboljšanje manjše kot nek prag.

3.3. **Učinek ovijanja.** V primerih, ko sta tako Panjerjeva rekurzija kot hitra Fourierjeva transformacija enako uporabni, in ko se moramo spopasti z velikim številom mrežnih točk, bi ponavadi izbrali hitro Fourierjevo transformacijo, saj je le-ta numerično cenejša. Vendar pa moramo biti pozorni na napako ovijanja. Je pa res, da je ta skrb neosnovana in ima v praktičnih okoliščinah s primernim nagibanjem zanemarljiv učinek.

Poglejmo na primer naslednja dva modela z zelo težkimi repi:

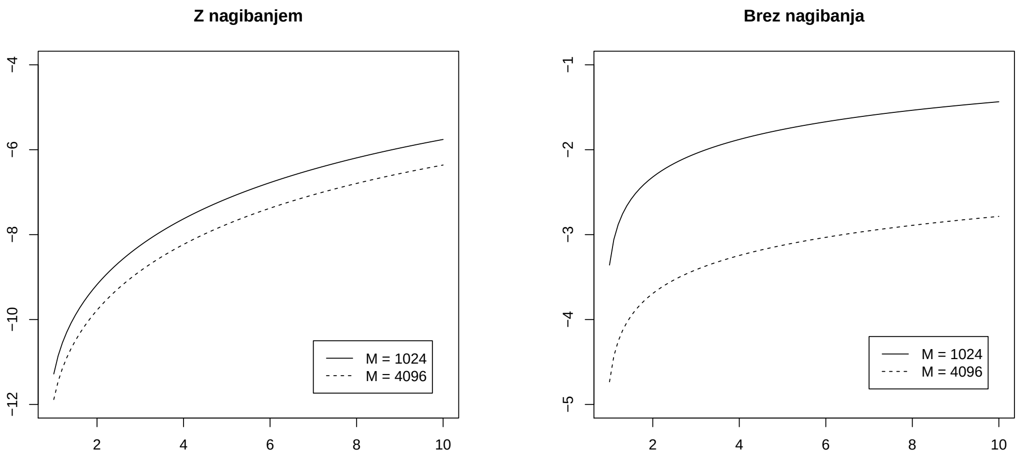
(1) $Pois(50)\vee\ Pareto(1.5, 0.5)$
(2) $Pois(5)\vee\ Pareto(1, 0.1)$.

Prvi model ima neskončno varianco, drugi neskončno matematično upanje. Sestavljeno porazdelitev bomo izračunali tako s Panjerjevo rekurzijo kot tudi s hitro Fourierjevo transformacijo in narisali absolutne razlike med porazdelitvenima funkcijama. Ta razlika se pravzaprav pojavi zaradi ovijanja, saj Panjerjeva rekurzija oceni porazdelitev točno do diskretizacijske napake, prav tako pa so možne napake zaokroževanja zanemarljive. Za dovolj velike točke rezanja je napaka ovijanja zelo majhna, kar je prikazano na sliki (3.3).



SLIKA 2. Logaritemska absolutna napaka ovijanja aproksimirane kumulativne porazdelitvene funkcije $Pois(50) \vee Pareto(1.5, 0.5)$ (desno) in $Pois(5) \vee Pareto(1, 0.1)$ (levo) z različnimi točkami rezanja. Uporabljen je razpon $h = 1$.

Nagibanje je še posebej uporabno če nas zanima le telo porazdelitve, na primer 90% kvantil. Slika (3.3) prikazuje logaritemske absolutne napake ovijanja približne kumulativne porazdelitvene funkcije porazdelitve $Pois(20)\vee\ Pareto(1, 0.1)$, enkrat z nagibanjem in enkrat brez. V tem primeru je aproksimacija brez nagibanja neuporabna.



SLIKA 3. Logaritemska absolutna napaka ovijanja aproksimirane kumulativne porazdelitvene funkcije $Pois(20) \vee Pareto(1, 0.1)$ z različnimi točkami rezanja, enkrat z nagibanjem, enkrat brez nagibanja. Uporabljen je razpon $h = 0.01$ in parameter nagibanja $\theta = 0.1$.

4. Zaključek

Panjerjeva rekurzija je domnevo najbolj uporabljena metoda, ki natančno oceni sestavljene porazdelitve. V praksi je zelo lahko izvedljiva in manj zahtevna kot surova konvolucija. Ob določenih predpostavkah jo lahko poenostavimo, in tako še dodatno zmanjšamo število operacij. Čeprav je Panjerjeva rekurzija pri ocenjevanju sestavljene Poissonove, sestavljene negativne binomske in sestavljene geometrijske porazdelitve stabilna, pa lahko pri računanju pride do podkoračitve obsega.

Alternativna metoda Panjerjeve rekurzije je hitra Fourierjeva transformacija, ki jo lahko uporabimo tudi na poljubnih frekvencah. V primeru velikega števila mrežnih točk je hitrejša, povzroči pa napako rezanja in ovijanja. Slednjo lahko praktično izničimo z uporabo eksponentnega nagibanja.

Literatura

[1] Hans Bühlmann, *Numerical evaluation of the compound Poisson distribution: recursion or fast Fourier transform*, Scand Actuar J **2** (1984), 116–126.

[2] Paul Embrechts in Marco Frei, *Panjer recursion versus FFT for compound distributions*, Math Meth Oper Res **69** (2009), 497–508.

[3] Hans U. Gerber, *On the numerical evaluation of the distribution of aggregate claims and its stop-loss premiums*, Insurance Math. Econom. **1** (1982), no. 1, 13–18. MR 652829 (85f:62131)

[4] Rudolf Grübel in Renate Hermesmeier, *Computation of compound distributions. I. Aliasing errors and exponential tilting*, Astin Bull. **29** (1999), no. 2, 197–214.

[5] ———, *Computation of compound distributions. II. Discretization errors and Richardson extrapolation*, Astin Bull. **30** (2000), no. 2, 309–331. MR 1946567 (2004d:62047)

[6] Philip E. Heckman in Glenn G Meyers, *The calculation of aggregate loss distributions from claim severity and claim count distributions*, Proc Casualty Actuar Soc **LXX** (1983), 22–61.

[7] Klaus Th. Hess, Anett Liewald, in Klaus D. Schmidt, *An extension of Panjer's recursion*, Astin Bull. **32** (2002), no. 2, 283–297.

[8] Christian Hipp, *Speedy panjer for phasetype claims*, Preprint, Universitat Karlsruhe.

[9] Harry H. Panjer, *Recursive evaluation of a family of compound distributions*, Astin Bull. **12** (1981), no. 1, 22–26.

[10] ———, *Recursive evaluation of a family of compound distributions*, Astin Bull. **12** (1981), 22–26.

[11] Harry H. Panjer in Shaun Wang, *On the stability of recursive formulas*, Astin Bull. **23** (1993), no. 2, 227–258.

[12] Harry H. Panjer in Gordon Willmot, *Computational aspects of recursive evaluation of compound distributions*, Insurance Math. Econom. **5** (1986), 113–116.

[13] Bjørn Sundt, *On multivariate Panjer recursions*, Astin Bull. **29** (1999), no. 1, 29–45.

[14] Bjørn Sundt in William S. Jewell, *Further results on recursive evaluation of compound distributions*, Astin Bull. **12** (1981), no. 1, 27–39.

[15] Gordon Willmot, *Sundt and Jewell's family of discrete distributions*, Astin Bull. **18** (1988), no. 1, 17–19.