UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Jelena Marčuk

Modeliranje verjetnosti neplačila: obstoj generatorja prehodnih matrik in algoritmi za iskanje

Magistrsko delo

Mentor: prof. dr. Matjaž Omladič

Ljubljana, 2014

Podpisana Jelena Marčuk izjavljam:

– da sem magistrsko delo z naslovom *Modeliranje verjetnosti neplačila: obstoj generatorja prehodnih matrik in algoritmi za iskanje* izdelala samostojno pod mentorstvom prof. dr. Matjaža Omladiča in

– da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 28.3.2014 Podpis: ....

Kazalo

Program magistrskega dela

V magistrski nalogi naj bo opisan postopek modeliranja verjetnosti neplačila s pomočjo markovskih verig. Predstavite osnovne lastnosti markovskih verig tako v diskretnem kot v zveznem času in v okviru magistrske naloge preučite, kako s pomočjo prehodnih matrik markovske verige modeliramo prehode med bonitetnimi ocenami. Posebna pozornost naj bo namenjena izračunu verjetnosti neplačila za poljuben čas. Naloga naj zajema tudi primerjavo različnih algoritmov za izračun verjetnosti neplačila za poljuben čas na realnih podatkih.

Osnovna literatura:
S. Trueck in S. T. Rachev, *Rating Based Modeling of Credit Risk - Theory and Application of Migration Matrices*, Elsevier Academic Press, Burlington-San Diego 2009.

Mentor:

Ljubljana, 19.05.2013

prof. dr. Matjaž Omladič

Povzetek

Modeli v reducirani obliki so zaradi razvoja in uveljavitve sistema bonitetnih ocen postali industrijski standard za upravljanje s kreditnim tveganjem. Eden izmed ključnih faktorjev pri izračunu kreditnega tveganja je verjetnost neplačila, ki je funkcija opisne bonitetne ocene. Modeli za izračun verjetnosti neplačila, ki slonijo na teoriji markovskih verig, predpostavljajo, da je gibanje bonitetne ocene dolžnika opisano z markovskim procesom. V nalogi je podrobno razdelan postopek ocenjevanja generatorja markovskega procesa na podlagi diskretnih podatkov o prehodih med bonitetnimi ocenami za namene računanja verjetnosti neplačila za poljuben čas. Z logaritmiranjem prehodne matrike dobimo kandidata za generator, problem pa se pojavi, ker ta običajno vsebuje negativne izvendiagonalne elemente. To je z vsebinskega stališča nesprejemljivo, saj pomeni, da bomo za kratke časovne intervale dobili negativne verjetnosti. V nalogi so predstavljeni trije regularizacijski algoritmi za izračun veljavnega generatorja in sicer: diagonalna prilagoditev, utežena prilagoditev in t.i. kvazi optimizacija generatorja. Glede na rezultate primerjave generatorjev, dobljenih s temi tremi metodami na podlagi enoletne empirične prehodne matrike bonitetne agencije S&P, se metoda, ki sloni na optimizaciji, izkaže kot najboljša.

Abstract

Reduced form models for credit risk management have become an industrial standard because of development and worldwide implementation of credit rating systems. One of the key factors in calculating credit risk is the probability of default, which is the function of descriptive credit rating. Models for calculating probability of default, based on the Markov chain theory, assume that the change in credit rating is described with the use of Markov process. In the master thesis we thoroughly examine the procedure of estimating a generator of a Markov process for calculating default probabilities for arbitrary time intervals, based on discretely observed rating transition data. By applying logarithm to transition matrix we get a candidate for a generator, however this usually causes a problem because it provides us with negative off-diagonal elements. From a theoretical point of view this is unacceptable, because it means we get negative probabilities for short time intervals. In the thesis three regularization algorithms for calculating a generator matrix are presented: diagonal adjustment, weighted adjustment and quasi-optimization of the generator. According to the results of comparison between different regularization methods based on one year empirical transition matrix published by credit rating agency S&P, we conclude that the best method for generator approximation is the method which relies on optimization.

Math. Subj. Class. (2010): 60J27, 60J28, 91G40
Ključne besede: bonitetne ocene, generator, kreditno tveganje, markovska veriga, prehodne matrike, verjetnost neplačila
Keywords: credit ratings, generator, credit risk, Markov chain, transition matrices, default probability

1 Uvod

Upravljanje kreditnega tveganja je verjetno najbolj preučevana finančna tema v zadnjem desetletju. Mnogokrat se zgodi, da dolžnik svojega dolga ni zmožen izplačati, zato so banke že zgodaj začele iskati načine kako zavarovati svoje naložbe. Iz te potrebe se je oblikovala ideja o upravljanju kreditnega tveganja. Osnovni koncept te ideje je modeliranje pričakovane izgube za določeno naložbo, kar banki omogoča, da se zavaruje z ustrezno višino premije za tveganje izplačane s strani kreditojemalca.

Vedno večja konkurenčnost in sama struktura finančnega trga sta narekovala razvoj bolj kompleksnih modelov za upravljanje s temi tveganji. Prvi modeli za vrednotenje tveganih finančnih instrumentov so bili t.i. strukturni modeli, ki kot odločilno spremenljivko jemljejo vrednost podjetja in vse tvegane finančne instrumente, izdane s strani podjetja, obravnavajo kot pogojne terjatve glede na to spremenljivko. Čeprav so intuitivno zelo smiselni, imajo strukturni modeli številne pomanjkljivosti. Ker se z večino sredstev podjetja ne trguje, je težko pravilno definirati proces vrednosti podjetja, kar posledično onemogoča implementacijo takih modelov. Poleg tega se je izkazalo, da časovna struktura razmika donosnosti, ki jo dobimo s pomočjo strukturnih modelov, ni primerljiva z dejanskimi razmiki. Pri strukturnih modelih je čas nezmožnosti plačila definiran, ko vrednost podjetja pade pod določeno fiksno mejo. To pomeni, da je ta čas na nek način predvidljiv. Ko je ročnost dolga kratka in vrednost podjetja velika v primerjavi z zneskom dolga ali z mejo nezmožnosti plačila obveznosti, bo verjetnost neplačila majhna in bodo zato izračunani razmiki donosnosti podcenjevali dejanske razmike [16].

Novejši modeli, znani kot modeli v reducirani obliki, se ne ukvarjajo z vrednostjo podjetja, temveč kot odločilno spremenljivko vzamejo bonitetno oceno podjetja oziroma dolga, če je ta ocenjen. Pri teh modelih je čas, ko podjetje ni več zmožno plačati svojih obveznosti, zunanja spremenljivka, ki ima lastnost nepričakovanega dogodka. Pionir takega pristopa je bil Fons, ki je leta 1994 [7] z uporabo zgodovinskih verjetnosti neplačila in bonitetnih ocen podjetij izračunal časovno strukturo kreditnega tveganja. Čeprav je njegov pristop dokaj enostaven v primerjavi z drugimi modeli kreditnega tveganja, so izračunani kreditni razmiki pokazali veliko podobnost realnim tržnim podatkom. Ugotovil je, da je časovna struktura kreditnega tveganja, ki je definirana kot obnašanje kreditnega razmika glede na ročnost, močno odvisna od bonitetne ocene izdajatelja.

Pomanjkljivost prvotnih modelov v reducirani obliki je, da pri napovedovanju uporabljajo le verjetnosti neplačila, ne pa tudi verjetnosti prehodov med posameznimi bonitetnimi ocenami. Na vrednost določene naložbe ne vpliva samo najhujši scenarij nezmožnosti plačila, ampak tudi vsaka sprememba kreditne sposobnosti izdajatelja, ki se odraža v spremembi bonitetne ocene. Zato so leta 1997 Jarrow et al. [11] izboljšali Fonsov model tako, da so za ocenjevanje vrednosti dolga vpeljali model markovskih verig v diskretnem času. Ta omogoča, da z uporabo zgodovinskih podatkov o bonitetnih ocenah izračunamo t.i. prehodne matrike, ki so sestavljene iz verjetnosti prehodov med različnimi bonitetnimi ocenami. Tovrstne matrike so eden izmed ključnih parametrov pri izračunu kreditnega tveganja in vrednotenju kreditnih izvedenih finančnih instrumentov.

Problem se pojavi pri ocenjevanju verjetnosti neplačila za poljuben čas, saj so tako podatki bonitetnih agencij kot interni podatki banke objavljeni na letnem nivoju. Za reševanje tega problema so bili razviti modeli, ki omogočajo napovedi verjetnosti tako, da najprej izračunajo generatorsko matriko oziroma generator markovskega procesa v zveznem času, z uporabo katerega izračuni za poljuben čas postanejo trivialni.

Kljub razvitim in dobro definiranim modelom so nas pretekle finančne krize prisilile, da ponovno kritično ocenimo znanje in pravilnost napovedi na področju upravljanja s kreditnim tveganjem. Znano je, da so prav bonitetne agencije izvor pretekle hipotekarne krize, saj v veliko primerih niso bile sposobne podati zanesljivih ocen [25]. Vendar se moramo zavedati, da so se kljub pomanjkljivostim trenutni ocenjevalni modeli razvili v splošno sprejet standard in bodo verjetno še naprej ostali pomembno orodje za napovedovanje kreditnega tveganja.

Bonitetne ocene kot ključni parameter za ocenjevanje kreditnega tveganja potrjuje tudi baselski sporazum, ki bankam ponuja tako izzive kot priložnosti, zahteva pa dobro matematično in ekonomsko znanje za implementacijo. Nalogo sem zasnovala kot pregled dosedanjega znanja na področju ocenjevanja prehodnih verjetnosti in generiranja prehodnih matrik. Najprej se bom osredotočila na sam koncept kreditnega tveganja in najnovejše smernice upravljanja z njim, nato pa si bomo na praktičnem primeru pogledali izračun prehodnih matrik s tremi različnimi metodami, ki jih bomo med sabo primerjali na podlagi različnih meril.

2 Bonitetne ocene

Bonitetne ocene imajo ključno vlogo pri računanju kreditnega tveganja, zato je prav, da njim in samemu procesu ocenjevanja namenimo nekaj besed.

2.1 Bonitetne agencije in njihova zgodovina

Bonitetna agencija je podjetje, ki poslovne subjekte in naložbe razvršča v bonitetne razrede, ki predstavljajo oceno dolžnikove sposobnosti za pravočasno poplačilo dolga. Bonitetne agencije imajo dolgo tradicijo v Združenih državah Amerike, kjer so začele delovati že v prvi polovici 19. stoletja [22]. Leta 1909 je John Moody objavil prve javne ocene, ki so bile osredotočene na obveznice takratnih železniških podjetij. Hitro so mu sledili tudi Poor, Standard in Fitch, ki so prav tako ustanovili založniške hiše usmerjene v prodajo ocen različnih obveznic, ki so jih vlagatelji uporabljali pri načrtovanju svojih investicij. Glavna skrb vsakega vlagatelja je potencialna izguba naložbe zaradi dolžnikovega neplačila obveznosti. S hitro rastjo novih trgov se vlagatelji niso mogli več zanašati samo na lastne ocene kreditne sposobnosti kreditojemalca in so se vse pogosteje po nasvet začeli obračati na zunanje vire informacij [24].

Povpraševanje po zanesljivih ocenah dolžnikov je bilo veliko, kar je ustvarilo pogoje za hiter razvoj in uveljavitev bonitetnih agencij. Prvi glavni preobrat v razvoju bonitetnih agencij se je zgodil leta 1930, ko so regulatorne institucije začele spodbujati banke, naj vlagajo svoj denar samo v varne naložbe. Leta 1936 so bankam z odločbo prepovedali vlaganje v naložbe, ki so bile s strani uveljavljenih bonitetnih agencij ocenjene kot špekulativne. To je bonitetnim agencijam odprlo vrata do vplivne pozicije, saj finančne institucije od takrat niso več svobodno odločale kateri vir informacij je zanesljiv in verodostojen, ampak so bile prisiljene upoštevati ocene takrat vodilnih bonitetnih agencij Moody's, Poor's, Standard in Fitch [24].

Leta 1970 se je zgodila sprememba v poslovnem modelu bonitetnih agencij. Prejšnji model, kjer je vlagatelj plačal za ocene naložb, ki so ga zanimale, je zamenjal model, kjer so za ocene plačali izdajatelji obveznosti [24]. To je bilo mogoče zaradi vedno večjega vpliva bonitetnih ocen, ki so bile sedaj že tako splošno sprejete, da je bilo brez njih težko nastopati na trgu. Bonitetne agencije so ta trend pravočasno prepoznale in so bonitetne ocene namesto investitorjem začele zaračunavati izdajateljem.

Slednjim je zaradi vedno večje konkurenčnosti na trgu bilo v interesu, da je njihova obveznost čimbolje ocenjena. Na tej točki lahko zasledimo močno kritiko poslovnega modela bonitetnih agencij, saj so mnogi nasprotniki mnenja, da ta vodi do neizogibnega konflikta interesov, kjer bonitetna ocena ne izkazuje dejanskega stanja neke izpostavljenosti [25].

Drugi velik preobrat je sledil leta 1975, ko je ameriška Komisija za vrednostne papirje in borzo (*Securities and Exchange Commission*, SEC) odločila preoblikovati minimalno kapitalsko zahtevo za banke in zavarovalnice tako, da je ocena bonitetne agencije postala ključni pokazatelj tveganja. Ker so se bali, da ne bi bile naložbam namerno podeljene napačne ocene, so ustanovili novo kategorijo nacionalno priznanih bonitetnih agencij (*nationally recognized statistical rating organization*, NRSRO). V to kategorijo so uvrstili štiri prej omenjene bonitetne agencije in z odredbo določili, da se za izračun minimalne kapitalske zahteve lahko uporabljajo samo njihove ocene. Tako so še bolj utrdili močno pozicijo omenjenih bonitetnih agencij [24]. V naslednjih desetletjih so podobne odločbe sprejeli tudi drugi finančni regulatorji po svetu, med njimi tudi banka za mednarodne poravnave (*Bank for International Settlements*, BIS), ki je z baselskim sporazumom določila, da je prav bonitetna ocena eden izmed glavnih kriterijev za izračun kapitalske zahteve bank.

Ironija takih regulatornih ukrepov je očitna že iz opozorila uradne metodologije agencije Standard & Poor's [3], ki nas nagovarja, da so vse ocene izdane s strani bonitetne agencije le njihovo mnenje in ne služijo kot pomoč pri odločitvah o investicijah.

2.2 Proces ocenjevanja

Danes poznamo tri najvplivnejše bonitetne agencije, to so Moody's Investor Service (v nadaljevanju Moody's), Standard & Poor's (v nadaljevanju S&P) in Fitch Ratings (v nadaljevanju Fitch). V nadaljevanju si bomo pogledali metodologijo ocenjevalnega procesa bonitetne agencije S&P, ki je podrobno opisana v [3]. Analitični proces je razdeljen v dve kategoriji, analizo poslovnega tveganja in analizo finančnega tveganja. Ker se različna podjetja ocenjuje tudi na podlagi poslovnega tveganja, imata lahko dve podjetji z istim finančnim stanjem različno oceno.

2.2.1 Analiza poslovnega tveganja

Analizo poslovnega tveganja sestavljajo naslednji dejavniki, ki so v največji meri subjektivno ocenjeni s strani ocenjevalcev bonitetne agencije.

- **Deželno tveganje** - okolje oziroma država, v kateri se dolžnik nahaja, lahko predstavlja velik faktor tveganja. Tukaj je pomembna tako ocena države kot ocena dolžnikove sposobnosti, da se zavaruje pred vplivi raznih regulatornih direktiv, ki bi lahko negativno vplivale na njegov posel ali kreditno sposobnost.

- **Industrijski dejavniki** - tveganje, ki prihaja iz dinamike panoge, v kateri je neko podjetje prisotno. Na to oceno vpliva veliko faktorjev, kot so na primer možnosti za rast, vzorci poslovnih ciklov, tehnološka razvitost, razmerje med ponudbo in povpraševanjem. Če ima recimo podjetje le en dobro tržen izdelek, se s tem močno izpostavlja tveganju.

- **Konkurenčni položaj** - opisuje tveganje, ki nastane zaradi konkurenčnega položaja podjetja na nekem trgu. V tej kategoriji se ocenjuje tudi velikost podjetij in njihovo diverzifikacijo, saj so večja in bolj raznolika podjetja manj izpostavljena tveganju kot manjša in bolj specializirana.

- **Vrednotenje vodstva** - v tej kategoriji se ocenjuje sposobnost vodstva, da izpelje zadani poslovni načrt, njihovo kredibilnost, zanesljivost in nagnjenost k tveganemu poslovanju. Ocene v tej kategoriji so najbolj subjektivne in se pridobijo na podlagi razgovora z vodstvom podjetja.

- **Dobičkonosnost** - potencialni dobiček je kritična determinanta kreditnega zavarovanja. Družba, ki ustvarja višje poslovne marže in kapitalsko donosnost, ima večjo sposobnost ustvarjanja kapitala in s tem boljšo kreditno sposobnost.

2.2.2 Analiza finančnega tveganja

Analiza finančnega tveganja poda objektivno oceno finančnega stanja nekega podjetja. Izvedena je s kvantitativnimi metodami, predvsem z uporabo različnih finančnih razmerij.

- **Finančna politika** – v tej kategoriji se ocenjuje odnos vodstva podjetja do upravljanja s tveganji, tehnično znanje in doslednost pri izpolnjevanju zastavljenih ciljev.

- **Računovodske karakteristike in informacijsko tveganje** – finančni izkazi podjetja služijo kot poglavitni vir informacij o finančnem stanju. Potrebno je določiti, ali finančni izkazi odražajo dejansko relativno gibanje podjetja na trgu. Če to ne velja, je potrebno ugotoviti, kako precenjene ali podcenjene so nekatere vrednosti in jih popraviti tako, da bolje odražajo gibanje podjetja.

- **Analiza denarnih tokov** – razkrije sposobnost, ki jo ima nek izdajatelj za sprotno plačevanje nastalih dolgov. Običajno je analiza osredotočena na višino sredstev iz poslovanja ob upoštevanju nihanj obratnega kapitala.
- **Struktura kapitala** – analiza strukture kapitala predstavlja pomemben del finančne ocene izdajatelja in pomaga oceniti njegovo fleksibilnost in zadolženost. Vrsta in stabilnost izdajateljevih sredstev sta pomembni determinanti njegove izpostavljenosti tveganju.
- **Likvidnost** – pri oceni likvidnosti se obravnavajo vplivi nepredvidenih stroškov in izdajateljeva sposobnost, da se z njimi spopade.

2.3 Ocenjevalna lestvica

Bonitetne agencije objavljajo dve vrsti ocen. Z enimi ocenjujejo izdane vrednostne papirje, z drugimi pa izdajatelje v splošnem. Ocena izdanega vrednostnega papirja je odvisna od trenutne ocene kreditne sposobnosti izdajatelja, da poplača svoj dolg za dani vrednostni papir, medtem ko je ocena izdajatelja odvisna od njegove celokupne kreditne sposobnosti in napoveduje verjetnost neplačila za vse vrednostne papirje tega izdajatelja.

Vsaka bonitetna agencija uporablja lastno metodologijo vrednotenja kreditne sposobnosti in lastno ocenjevalno lestvico. Lestvice razvrščajo poslovne subjekte v različno število bonitetnih razredov. S&P in Fitch uporabljata skalo AAA, AA, A, BBB, BB, B, CCC, CC, C, kjer AAA predstavlja najboljšo kreditno kvaliteto, AA drugo najboljšo in tako naprej do C, ki predstavlja najslabšo kreditno kvaliteto. Z oceno D je označeno stanje, ko podjetje ni vež zmožno plačati nekaterih ali vseh obveznosti. Ocene AAA, AA, A, in BBB predstavljajo investicijski razred, vse ostale nižje ocene so neinvesticijske oziroma spekulativne. Moody's za označevanje primerljive bonitetne lestvice uporablja Aaa, Aa, A, Baa, Ba, B, Caa, Ca in C v padajočem vrstnem redu kreditne kvalitete.

Vsaka od bonitetnih agencij ima tudi natančnejšo oziroma podrobneje razdelano ocenjevalno lestvico, ki omogoča učinkovitejšo razvrščanje. S&P in Fitch na primer oceno A razdelita na ocene A+, A in A-, kjer je A+ boljša ocena od A in ji pripada nižja verjetnost neplačila, A- pa slabša z višjo verjetnostjo neplačila [1].

V nadaljevanju si bomo podrobneje ogledali ocenjevalno lestvico in pomen ocen bonitetne agencije S&P.

- AAA: Tako ocenjena obveznost ima najvišjo oceno. Dolžnikova sposobnost poplačila dolga je zelo močna.
- AA: Ta ocena se za odtenek razlikuje od najboljše. Sposobnost dolžnika, da izpolni svoje finančne obveznosti, je še vedno zelo močna.
- A: Obveznost je nekoliko bolj občutljiva na negativne učinke sprememb gospodarskih razmer kot ocene višjih kategorij. Sposobnost dolžnika, da izpolnjuje svoje finančne obveznosti, je še vedno močna.
- BBB: Tako ocenjena obveznost kaže ustrezne parametre zaščite, vendar lahko neugodne gospodarske razmere hitreje pripeljejo do poslabšanja dolžnikove kreditne sposobnosti.
- BB: Tako ocenjena obveznost je izpostavljena večjemu številu nepredvidljivih negativnih vplivov, vendar je verjetnost neplačila manjša kot pri drugih spekulativnih naložbah.
- B: Obveznost je še bolj izpostavljena kot pri prejšnji oceni in lahko predvidevamo, da bodo negativni vplivi gospodarskih razmer prizadeli naložbo. Kljub temu je dolžnik še vedno sposoben izpolniti svoje obveznosti.
- CCC: Pri obveznosti, ocenjeni s to oceno, obstaja velika verjetnost neplačila v naslednjem letu. Sposobnost dolžnika, da poravna svoje obveznosti, je odvisna predvsem od ugodnih gospodarskih okoliščin.
- CC: Za tako ocenjeno obveznost trenutno obstaja velika verjetnost neplačila.
- C: Vloga za stečaj je že bila vložena oziroma je podjetje v kakšnem drugem podobnem postopku. Dolžnik še vedno plačuje svoje obveznosti.
- D: Neplačilo obveznosti.

2.4 Kalibriranje verjetnosti neplačila na podlagi bonitetnih ocen

Kalibriranje je proces, pri katerem posamezni bonitetni oceni pripišemo verjetnost neplačila. Verjetnost neplačila je torej določena s funkcijo, ki ima za argument opisno bonitetno oceno. Preden se lotimo razlage bolj kompleksnih modelov za ocenjevanje verjetnosti neplačila, ki se uporabljajo v praksi, bomo na primeru predstavili osnovno idejo kalibriranja.

Iz letnega poročila bonitetne agencije S&P za leto 2012 [5] je prevzeta tabela 1, v kateri so predstavljene zgodovinske verjetnosti neplačila na podrobno razdelani lestvici za obdobje od leta 1981 do 2012. Verjetnosti so v odstotkih na letni ravni, kjer vrednost 0 pomeni, da v določeni kategoriji pri nobenem podjetju ni prišlo do nezmožnosti plačila obveznosti. V analizo so bile vključene vse gospodarske družbe, ki jih bonitetna agencija S&P ocenjuje, to so podjetja s celega sveta in vseh industrijskih panog.

Kar na prvi pogled opazimo je, da pri podjetjih z najvišjimi ocenami (denimo AAA in AA+, pa tudi AA razen leta 2008, v času svetovne finančne krize) nismo opazili nobenih nezmožnosti plačila obveznosti. Kljub temu je nesmiselno za napovedi verjetnosti neplačila vzeti ničelne zgodovinske vrednosti. Tudi najbolje ocenjena podjetja in njihovi finančni produkti so izpostavljeni določenemu tveganju neplačila in jim je zato nujno potrebno dodeliti majhno pozitivno vrednost.

Za ilustracijo si bomo pogledali enostavno metodo za določanje verjetnosti neplačila predstavljeno v [1]. Metoda nam omogoča, da vsakem bonitetnem razredu pripišemo neko pozitivno verjetnost neplačila, vendar se zaradi premajhne natančnosti v praksi ne uporablja. Z $f_i(R)$ označimo zgodovinske verjetnosti neplačila, kjer R predstavlja bonitetno oceno in i leta od 1981 do 2012. Na primer, $f_{1998}(BBB) = 0.27\%$. S pomočjo spodnjih dveh formul za vsako bonitetno oceno izračunamo povprečno vrednost in standardni odklon po letih

$$m(R) = \frac{1}{32} \sum_{i=1981}^{2012} f_i(R),$$

$$sd(R) = \sqrt{\frac{1}{31} \sum_{i=1981}^{2012} \Big(f_i(R) - m(R)\Big)^2}.$$

Ocena	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991
AAA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AA+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AA-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0.33%	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A-	0	0	0	0	0	0.78%	0	0	0	0	0
BBB+	0	0	0	0	0	0	0	0	0.90%	0.76%	0.83%
BBB	0	0.68%	0	1.40%	0	0.78%	0	0	0.78%	0	0.74%
BBB-	0	0	1.33%	0	0	0	0	0	0	1.10%	0
BB+	0	0	2.17%	0	1.64%	1.82%	0	0	0	2.78%	3.70%
BB	0	2.86%	0	1.64%	1.49%	1.18%	0	0	0	3.09%	1.14%
BB-	0	7.04%	1.59%	1.49%	1.33%	1.12%	0.83%	2.34%	2.00%	4.50%	1.05%
B+	0	2.22%	1.22%	2.13%	2.59%	4.65%	1.31%	1.98%	0.43%	4.87%	8.72%
B	3.28%	2.33%	9.80%	3.51%	13.11%	12.16%	5.95%	4.50%	7.80%	12.26%	16.25%
B-	0	7.41%	4.76%	7.69%	8.00%	16.67%	6.82%	9.80%	4.88%	22.58%	32.43%
CCC/C	0	21.43%	6.67%	25.00%	15.38%	23.08%	12.28%	20.37%	33.33%	31.25%	33.87%

Ocena	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
AAA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AA+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AA-	0	0	0	0	0	0	0	0.36%	0	0	0
A+	0	0	0.46%	0	0	0	0	0	0	0.57%	0
A	0	0	0	0	0	0	0	0.24%	0.24%	0.24%	0
A-	0	0	0	0	0	0	0	0.27%	0.56%	0	0
BBB+	0	0	0	0	0	0.36%	0	0	0	0.24%	1.11%
BBB	0	0	0	0	0	0.35%	0.27%	0.28%	0.26%	0.48%	0.66%
BBB-	0	0	0	0.63%	0	0	1.04%	0.31%	0.88%	0.27%	1.33%
BB+	0	0	0	0	0.88%	0	0.68%	0.55%	0	0.52%	1.58%
BB	0	1.94%	0.86%	1.55%	0.65%	0	1.06%	1.34%	0.82%	1.21%	1.77%
BB-	0	0	0	1.11%	0.55%	0.41%	0.72%	0.90%	2.31%	6.02%	4.65%
B+	0.72%	1.30%	1.83%	2.76%	2.34%	0.72%	2.58%	4.21%	5.78%	5.98%	3.69%
B	14.93%	5.88%	6.58%	8.00%	3.74%	5.26%	7.56%	10.50%	10.70%	15.68%	9.63%
B-	20.83%	4.17%	3.23%	7.69%	3.92%	14.58%	9.46%	15.45%	11.50%	23.31%	19.69%
CCC/C	30.19%	13.33%	16.67%	28.00%	4.17%	12.00%	42.86%	33.33%	34.12%	45.87%	44.38%

Ocena	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
AAA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AA+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AA	0	0	0	0	0	0.44%	0	0	0	0
AA-	0	0	0	0	0	0.40%	0	0	0	0
A+	0	0	0	0	0	0.32%	0.30%	0	0	0
A	0	0.24%	0	0	0	0.21%	0.39%	0	0	0
A-	0	0	0	0	0	0.59%	0	0	0	0
BBB+	0	0	0	0	0	0.19%	0.40%	0	0	0
BBB	0.19%	0	0.17%	0	0	0.60%	0.18%	0	0	0
BBB-	0.54%	0	0	0	0	0.72%	1.11%	0	0.20%	0
BB+	0.50%	0	0.37%	0.37%	0	1.20%	0	0.81%	0	0
BB	0.96%	0.66%	0	0	0.31%	0.65%	1.03%	0.36%	0	0
BB-	0.28%	0.51%	0.50%	0.49%	0.23%	0.66%	0.94%	0.54%	0	0.74%
B+	1.71%	0.46%	0.78%	0.55%	0.19%	3.05%	5.66%	0	0.40%	0.57%
B	5.21%	2.68%	2.61%	0.80%	0	3.41%	10.49%	0.71%	1.22%	1.39%
B-	9.45%	2.84%	2.96%	1.57%	0.89%	7.56%	17.75%	2.05%	4.01%	3.34%
CCC/C	32.93%	15.56%	9.09%	12.38%	14.95%	26.47%	48.94%	22.52%	15.83%	26.62%

Tabela 1: S&P zgodovinske verjetnosti neplačila za gospodarske družbe, 1981-2012

Povprečna vrednost verjetnosti neplačila tekom izbranega časovnega intervala $m(R)$ je naša najboljša ocena za prihodnjo verjetnost neplačila podjetja z dano bonitetno oceno. Pri tem standardni odklon predstavlja mero volatilnosti in nam pove red velikosti napake, ki smo jo naredili s to enostavno aproksimacijo. Povprečne vrednosti in standardne odklone za konkreten primer najdemo tudi v [5], tukaj pa so prikazane v tabeli 2.

Kot smo že omenili, so celo najboljše ocenjeni izdajatelji izpostavljeni tveganju, da v prihodnosti ne bodo zmožni poravnati svojih obveznosti. Ker tega v celotnem opazovanem obdobju ni bilo zaslediti za bonitetna razreda AAA in AA+, je potrebno podatke prilagoditi tako, da bosta tudi ta dva razreda imela neko pozitivno verjetnost neplačila. V literaturi je bilo v različnih empiričnih študijah pokazano, da verjetnost neplačila raste eksponentno s padcem kreditne sposobnosti [1]. Če torej na logaritemski skali narišemo povprečne vrednosti $m(R)$, kjer so na x-osi bonitetne ocene, ki predstavljajo kreditno sposobnost izdajatelja, označene s številkami od 1 do 17 ($1 = \text{AAA}$, $2 = \text{AA+}, \ldots, 17 = \text{CCC/C}$), opazimo, da verjetnosti naraščajo linearno s padcem kreditne sposobnosti. To nam omogoči, da podatke aproksimiramo z regresijsko premico (slika 1).

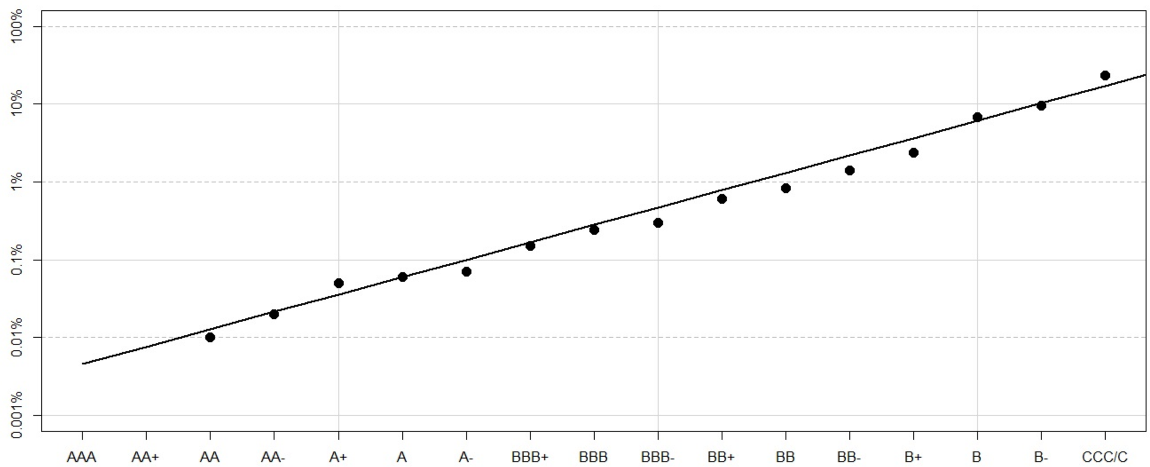
Na logaritmiranih verjetnostih izvedemo linearno regresijo. Dobljena parametra modela sta $\alpha = -6.05313$ in $\beta = 0.51424$, kjer je α presečišče premice z y-osjo in β koeficient pred linearnim členom. To pomeni, da je naš model enak

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha + \beta x} \\ &= e^{-6.05313 + 0.51424\, x} \\ &= 2.35 \cdot 10^{-3}\, e^{0.51424\, x}. \end{aligned}$$

Zgornjo regresijsko enačbo uporabimo za oceno verjetnosti neplačila za vsak x od 1 do 17. Vsakemu bonitetnemu razredu torej določimo pozitivno verjetnost neplačila, ki je prikazana v zadnjem stolpcu tabele 2.

Ocena	Povprečje	Standardni odklon	Verjetnost neplačila
AAA	–	–	0.0039%
AA+	–	–	0.0066%
AA	0.01%	0.08%	0.0110%
AA-	0.02%	0.09%	0.0184%
A+	0.05%	0.14%	0.0307%
A	0.06%	0.12%	0.0514%
A-	0.07%	0.20%	0.0860%
BBB+	0.15%	0.31%	0.1438%
BBB	0.24%	0.35%	0.2405%
BBB-	0.30%	0.46%	0.4022%
BB+	0.61%	0.93%	0.6727%
BB	0.83%	0.84%	1.1250%
BB-	1.40%	1.75%	1.8814%
B+	2.36%	2.12%	3.1463%
B	6.81%	4.70%	5.2618%
B-	9.60%	7.85%	8.7996%
CCC/C	23.53%	12.48%	14.7162%

Tabela 2: Kalibriranje verjetnosti neplačila s pomočjo linearne regresije na logaritmiranih zgodovinskih podatkih S&P bonitetne agencije za obdobje 1981-2012



Slika 1: Linerarna regresija povprečnih verjetnosti neplačila na logaritemski skali

3 Izračun kapitalske zahteve po Basel II

Uporaba modelov, pri katerih se kot vhodni podatek uporabljajo bonitetne ocene, je v zadnjem času zelo priljubljena. Ti modeli, za razliko od starejših strukturnih, uporabljajo bonitetne ocene podjetij namesto njihovih vrednosti, ko poizkušajo oceniti tveganje določene obveznice ali posojila. Priljubljenost tovrstnih modelov je zelo narasla z revizijo kapitalskega sporazuma (Basel II), ki bankam omogoča, da ocenijo kapitalsko zahtevo na podlagi uporabe notranjih bonitet. Pristop na podlagi uporabe notranjih bonitet od bank zahteva razvoj kompleksnih modelov ocenjevanja kreditnega tveganja portfelja, ki morajo biti sposobni ustrezno napovedati tako verjetnosti neplačila kot verjetnosti prehoda med eno in drugo bonitetno oceno.

3.1 Novi kapitalski sporazum

Že več kot dvajset let je minilo odkar je Baselski komite za bančni nadzor (*Basel Committee on Banking Supervision*, v nadaljevanju BCBS) leta 1988 predstavil svoj prvi kapitalski sporazum poimenovan Basel I. Glavna skrb takratnih guvernerjev centralnih bank je bila manjšanje kapitala, namenjenega kritju izgub v številnih največjih bankah kot posledica vedno večje kompetitivne erozije. Od takrat so bančništvo, finančni trgi in teorija upravljanja s kreditnim tveganjem doživeli močno transformacijo, zato je BCBS leta 1999 sprejel novo kapitalsko ureditev, imenovano Basel II. Ta ureditev se je tekom let v povezavi z industrijo posodabljala in je bila uradno objavljena leta 2004 [22].

Glavne novosti, ki jih je prinesel Basel II, lahko povzamemo v naslednjih točkah:

- pri zagotavljanju solventnosti bank sta odločilnega pomena nadzorniški pregled in tržna disciplina, saj dopolnjujeta osnovni kvantitativni pristop računanja minimalne kapitalske zahteve;
- bankam z dobrimi internimi modeli ocenjevanja tveganja je dovoljena njihova uporaba za določanje uteži posameznih kategorij tveganja;
- banke lahko uporabljajo ocene priznanih bonitetnih agencij (*External Credit Assessment Institutions*, v nadaljevanju ECAI) za razvrščanje naložb v pet kategorij, če je izdajatelj država oziroma v štiri, če je izdajatelj gospodarska družba ali finančna institucija.

Glavna razlika med ureditvama je v tem, da je starejša omogočala bankam samo en način računanja minimalne kapitalske zahteve, medtem ko novejša omogoča uporabo internih modelov. Ocena minimalne kapitalske zahteve naj bi tako bolje odražala tveganja, ki jim je banka izpostavljena, kar ji posredno omogoča učinkovitejše poslovanje.

3.2 Trije stebri

Novo ureditev sestavljajo trije stebri, ki se medsebojno krepijo in skupaj pripomorejo k varnosti in stabilnosti finančnega sistema.

- **Minimalna kapitalska zahteva** - Prvi steber določa minimalno kapitalsko zahtevo, ki mora znašati 8% tveganjem prilagojenih zneskov izpostavljenosti (Risk Weighted Assets, v nadaljevanju RWA). Za ocenjevanje minimalne kapitalske zahteve se uporabljata dva pristopa, standardiziran in pristop na podlagi notranjih bonitet (*Internal Ratings-Based Approach*, v nadaljevanju IRB). Oba si bomo podrobneje ogledali v naslednjih poglavjih.

- **Regulatorni nadzor** - Drugi steber uvaja nadzor nad dosledno implementacijo. Nadzorniki se prepričajo, ali banka kakovostno izvaja notranje procese ocenjevanja kapitalske zahteve na osnovi predvidenih tveganj. Ta nadzor je zelo pomemben, saj se z novo kapitalsko ureditvijo bankam dodeljuje vedno večja vloga pri razvoju internih modelov, ki odgovarjajo specifikam trga, na katerem poslujejo.

- **Tržna disciplina** - Tretji steber uvaja obvezna razkritja bank, ki so ključnega pomena za boljšo tržno disciplino. Večja transparentnost omogoča udeležencem na finančnih trgih boljše razumevanje profila tveganja banke in ustreznosti njene kapitalske pozicije. Transparentnost mora biti dosežena na več nivojih, še najbolj pri načinu določevanja minimalne kapitalske zahteve in metodah ocenjevanja tveganja.

3.3 Standardiziran pristop za ocenjevane kapitalske zahteve

Kot smo že omenili, se kapitalska zahteva za kreditno tveganje izračuna najmanj v višini 8% RWA. Po standardiziranem pristopu mora banka za namen izračuna RWA vsako svojo izpostavljenost razvrstiti v eno od določenih kategorij izpostavljenosti, na primer do enot centralne ravni držav in do centralnih bank, do enot regionalne ali lokalne ravni držav, do oseb javnega sektorja, do podjetij, itn. Banka nato izračuna RWA za vsako posamezno izpostavljenost in sicer kot zmnožek njene vrednosti in uteži tveganja.

Vrednost izpostavljenosti iz posamezne postavke sredstev je enaka njeni knjigovodski vrednosti, vrednost izpostavljenosti iz posamezne zunajbilančne postavke pa je enaka odstotku njene vrednosti, določene glede na tveganje postavke, zmanjšane za oblikovane rezervacije. Utež tveganja posamezne izpostavljenosti se določi glede na kategorijo izpostavljenosti, v katero je ta uvrščena, in glede na stopnjo kreditne kvalitete. V izračunu stopnje kreditne kvalitete nastopajo bonitetne ocene dolžnika oziroma njegovih finančnih instrumentov, ki so pridobljene s strani ECAI [21]. 100% obtežitev tako pomeni, da bo kapitalska zahteva 8% celotne vrednosti naložbe. Po novi direktivi se lahko določi pet različnih uteži in sicer: 0%, 20%, 50%, 100% in 150%. Utež 0% se lahko dodeli le džavnim finančnim instrumentom.

3.4 Pristop na podlagi notranjih bonitet

V tem delu si bomo podrobneje ogledali glavne ideje in vhodne parametre IRB pristopa, kot jih navaja Basel II. IRB se za razliko od standardiziranega pristopa zanaša na notranje ocene in bankam dovoljuje implementacijo lastnih modelov za ocenjevanje dolžnikov in povezanih izpostavljenosti tveganju. Bankam se tako dovoljuje, da same ocenjujejo kreditno sposobnost dolžnika in s tem povezano kreditno tveganje. Direktiva uvaja posebne analitične pristope za različne kategorije izpostavljenosti. Ker so tveganja, ki jim je izpostavljena določena banka, specifična, se ta pristop v praksi izkaže kot bolj primeren, saj je bolj občutljiv na karakteristike danih izpostavljenosti.

Ključni elementi IRB pristopa so sledeči [20]:

- klasifikacija izpostavljenosti po razredih;
- ocenjevanje različnih komponent tveganja za vsak razred izpostavljenosti z uporabo osnovnega ali naprednega pristopa;
- funkcija za izračun uteži za določen nabor komponent tveganja;
- doseganje minimalnih standardov za uporabo IRB pristopa;

- stalni nadzor doseganja minimalnih standardov.

Vsakega od elementov si bomo podrobneje ogledali.

3.4.1 Klasifikacija izpostavljenosti

Med naložbami banke so lahko velike razlike tako v ključnih faktorjih tveganja kot v zgodovinskih podatkih o izgubah, povezanih z določenimi dolžniki. Te razlike se odražajo v različnih porazdelitvah izgube za različne portfelje ter v različnem odnosu med dejavniki tveganja in kapitalsko zahtevo.

Po IRB pristopu mora banka vsako izpostavljenost razvrstiti v eno izmed sedmih širših kategorij, ki se razlikujejo po karakteristikah kreditnega tveganja. Te kategorije so: države in centralne banke, institucije, podjetja, bančništvo na drobno, lastniški instrumenti, pozicije v listinjenju in druga sredstva iz naslova nekreditnih obveznosti [20].

3.4.2 Komponente tveganja

Kapitalska zahteva za vsako od navedenih kategorij je odvisna od specifičnega nabora komponent tveganja, ki služijo kot vhodni podatki za izračun. Po IRB pristopu se različne komponente lahko pridobi z osnovnim ali z naprednim pristopom. Banka vsaki izpostavljenosti pripiše verjetnost neplačila (*probability of default*, v nadaljevanju PD), delež izgube ob neplačilu (*loss given default*, v nadaljevanju LGD), vrednost izpostavljenosti ob neplačilu (*exposure at default*, v nadaljevanju EAD) in ročnost (*maturity*, v nadaljevanju M). V nadaljevanju si bomo podrobneje ogledali posamezne komponente tveganja [20].

- **Verjetnost neplačila** - PD je ocenjena verjetnost, da dolžnik ne bo zmožen plačati svojih obveznosti. Določi se za vsak bonitetni razred ali skupino izpostavljenosti na podlagi dolgoročnih povprečij enoletnih stopenj neplačil.

- **Delež izgube ob neplačilu** - LGD predstavlja ocenjen delež dolga, ki bo izgubljen v primeru neplačila. Za razliko od prejšnje komponente tveganja, ki je funkcija bonitetne ocene, je LGD močno povezan s specifičnimi lastnostmi posamezne izpostavljenosti. Določimo ga lahko na dva načina. Po osnovnem pristopu za LGD izpostavljenosti brez primernega zavarovanja s premoženjem vzamemo vrednost 45% za nepodrejene in 75% za podrejene izpostavljenosti. Za zavarovane izpostavljenosti se vrednost spreminja s stopnjo zavarovanosti in je ob višji stopnji nižja.

Z uporabo naprednega pristopa lahko banke LGD določajo same, kar jim omogoča boljše razlikovanje med različnimi lastnostmi posameznih izpostavljenosti. Kot pri ocenah za PD se pričakuje, da ocene za LGD odražajo povprečne dejanske vrednosti z uporabo vseh ugotovljenih neplačil v okviru podatkovnih virov.

- **Vrednost izpostavljenosti ob neplačilu** - Tudi ocena za EAD je specifična za posamezno izpostavljenost. V večini primerov je vrednost izpostavljenosti ob neplačilu enaka nominalni vrednosti določene izpostavljenosti. Kot LGD se lahko tudi ta določi po osnovnem ali naprednem pristopu.

- **Ročnost** - Ročnost je ključni faktor, ki vpliva na kreditno tveganje. Krajša kot je ročnost, manjše je tveganje, povezano z določeno izpostavljenostjo. Krajša ročnost omogoča tudi večjo fleksibilnost banki. Kadar se dolžnikova kreditna sposobnost hitro poslabša, lahko banka primerno reagira in nadaljnjega posojila ne odobri oziroma se pred večjimi izgubami kako drugače zaščiti.

3.4.3 Uteži tveganja

Ocene za PD, LGD in v nekaterih primerih M se združijo za računanje uteži tveganja. IRB pristop omogoča boljšo opredelitev tveganja, saj so za vsako izpostavljenost komponente tveganja izračunane posebej in potem uporabljene kot vhodni podatki za izračun uteži. Namesto pet diskretnih vrednosti uteži, kot jih definira standardiziran pristop, se uteži v IRB pristopu določijo s pomočjo zvezne funkcije. Oblika funkcije za izračun uteži je enaka za vse izpostavljenosti, določeni parametri pa se razlikujejo za vsako kategorijo tveganja [1].

Rezultat različnih naborov komponent tveganja so torej različne uteži. Na ta način se izpostavljenostim, pri katerih izračunane komponente tveganja odražajo nizke stopnje tveganja, dodelijo uteži, ki so nižje, kot bi bile v primeru standardiziranega pristopa. Velja tudi obratno, izpostavljenosti z visokimi vrednostmi komponent tveganja dobijo višje uteži, kot bi jih dobile sicer.

3.4.4 Minimalni standardi

Kot smo že omenili, se morajo banke strogo držati minimalnih standardov, da se jim dovoli uporaba IRB pristopa za računanje kapitalske zahteve. Te minimalne zahteve so bile razvite na podlagi dobrih praks različnih bank, ki imajo dobro razvit sistem upravljanja s tveganji. BCBS meni, da so taki minimalni standardi nujno potrebni za doseganje zanesljivosti, konsistentnosti, natančnosti in integritete internih modelov ter ocen za posamezne komponente tveganja. Minimalni standardi so tesno povezani s tretjim stebrom nove kapitalske ureditve, ki opredeljuje tržno disciplino kot nujni del novih reform.

Minimalne standarde lahko razdelimo v naslednje širše kategorije:

- smiselno razlikovanje med tveganji;
- celovitost in integriteta ocenjevanja;
- preglednost sistema in procesa ocenjevanja;
- kriteriji ocenjevalnega sistema;
- ocenjevanje PD;
- zbiranje podatkov in IT sistemi;
- uporaba internih ocen;
- interni nadzor;
- transparentnost.

Vsaka od navedenih kategorij ima pomembno vlogo pri ocenjevanju kvalitete informacij, ki jih banke uporabljajo za izračun kapitalske zahteve. Banki se tako uporaba teh informacij dovoli, če odražajo zadostno kvaliteto. Ocenjevanje minimalnih standardov opravljajo zunanji nadzorniki, ki svoje ocene podajo za vsako kategorijo posebej. Več o minimalnih standardih za uporabo IRB pristopa najdemo v [20].

Kot vidimo, je izračun PD ključni element tveganja določene izpostavljenosti. Zaradi razvoja vedno bolj kompleksnih modelov za upravljanje s kreditnim tveganjem in spodbude bankam za uporabo IRB pristopa pri izračunu minimalne kapitalske zahteve, obstaja velika potreba po vedno boljših modelih za računanje PD. Trenutni standard na tem področju je model, predstavljen leta 1997 [11], ki sloni na teoriji markovskih verig. V naslednjem poglavju si bomo podrobneje pogledali, kaj so markovske verige in kako z njimi modeliramo verjetnosti neplačila.

4 Modeliranje verjetnosti neplačila z markovskimi verigami

4.1 Markovske verige v diskretnem času

Naj bo S poljubna števna množica, ki jo poimenujemo množica stanj, njene elemente $s_i \in S$ pa stanja. Za začetek bomo obravnavali le slučajne procese z diskretnim časom. Slučajni proces je torej vsako zaporedje diskretnih slučajnih spremenljivk $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, katerih zaloga vrednosti leži v S. Najenostavnejši primer slučajnega procesa je zaporedje neodvisnih enako porazdeljenih slučajnih spremenljivk. Naj bo vsepovsod verjetnostni prostor trojica $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Slučajna spremenljivka X_i z vrednostmi v S je torej funkcija $X_i : \Omega \to S$, za katero velja $P(X_i = s_i) = P(\{\omega \in \Omega : X_i(\omega) = s_i\})$.

Nekoliko splošnejša je predpostavka, da je vsak člen zaporedja odvisen le od zadnjega člena pred njim. To je markovska lastnost, ki jo formuliramo natančneje [12]

$$P(X_n = s_n | X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}) = P(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-1}).$$

Definicija 4.1. *Končna markovska veriga v diskretnem času* $\{X(t)|\ t = 0, 1, \ldots\}$ *je opredeljena z naslednjimi lastnostmi:*

1. *končna množica stanj* $S = \{1, 2, \ldots, n\}$,
2. *vektor začetne porazdelitve verjetnosti* $\pi_0 = (P(X(0) = 1), \ldots, P(X(0) = n))$, *kjer je* $P(X(0) = i) \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *in* $\sum_{i=1}^{n} P(X(0) = i) = 1$,
3. *družina prehodnih matrik* $P(t, t+1) = \{p_{ij}(t, t+1)\}_{i,j=1}^{n}$, *kjer je* $p_{ij}(t, t+1) = P(X(t+1) = j | X(t) = i)$. *Za prehodne verjetnosti velja*

$$\begin{aligned} p_{ij}(t, t+1) \geq 0 \quad &\text{za} \quad i,j = 1, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(t, t+1) = 1 \quad &\text{za} \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Pri modelih kreditnega tveganja v reducirani obliki je prehod med bonitetnimi ocenami modeliran kot slučajni proces, karakteriziran z markovsko lastnostjo. Množica stanj iz definicije 4.1 predstavlja množico bonitetnih ocen, urejenih po kreditni kvaliteti. Prvo stanje ustreza najvišji bonitetni oceni, zadnje pa neplačilu. $X(t)$ je bonitetna ocena izdajatelja za poljuben celoštevilski čas t.

Definicija 4.2. *Rečemo, da je markovska veriga homogena, če prehodne verjetnosti niso odvisne od časa, kar poudarimo tudi z oznako* $p_{ij}(t, t+1) = p_{ij}(0, 1) = p_{ij}$.

Prehodno matriko za eno obdobje lahko torej označimo s $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^n$, za t obdobij pa s $P(t) = \{p_{ij}(t)\}_{i,j=1}^n$. Prehodne verjetnosti za t obdobij predstavljajo verjetnosti, da veriga preide iz stanja i v stanje j v t korakih. Te verjetnosti dobimo s pomočjo prehodnih verjetnosti za eno obdobje. Da veriga preide iz stanja i v stanje j v t korakih, preide najprej iz i v k v m korakih in potem iz k v j v $t-m$ korakih, za $i \leq k \leq j$ in $0 < m < t$.

Izrek 4.3. *Chapman-Kolmogorov*

Za prehodne verjetnosti homogene markovske verige velja sistem enačb

$$p_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(m) p_{kj}(t-m), \quad 0 < m < t$$

oziroma v matrični obliki $P(t) = P(m)P(t-m)$.

Dokaz. Za dokaz uporabimo formulo o popolni verjetnosti in dejstvo, da je markovska veriga pozabljiva [18]

$$\begin{aligned}
p_{ij}(t) &= P(X(t) = j | X(0) = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X(t) = j, X(t-m) = k | X(0) = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{P(X(t) = j, X(t-m) = k, X(0) = i)}{P(X(0) = i)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{P(X(t) = j | X(t-m) = k, X(0) = i) P(X(t-m) = k, X(0) = i)}{P(X(0) = i)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(X(t-m) = k | X(0) = i) P(X(t) = j | X(t-m) = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(m) p_{kj}(t-m).
\end{aligned}$$

□

To pomeni, da prehodne verjetnosti za t obdobij, kjer je t celo število, dobimo z iterativnim množenjem prehodne matrike za eno obdobje same s sabo oziroma

$P(t) = P^t$. Enostavno je preveriti, da je vsaka celoštevilska potenca prehodne matrike tudi prehodna matrika. Iz tega sledi, da je v času t verjetnostna porazdelitev markovske verige s prehodno matriko P in začetno porazdelitvijo π_0 (rečemo ji tudi inducirana porazdelitev) enaka $\pi_t = (P(X(t) = 1), \ldots, P(X(t) = n)) = \pi_0 P^t$.

Markovsko verigo lahko včasih razbijemo na manjše dele, ki so vsak zase lažje razložljivi kot celoten proces, ki ga sestavljajo. Najprej opredelimo pojma dosegljivost in povezanost.

Definicija 4.4. *Stanje j je dosegljivo iz stanja i, če lahko iz stanja i pridemo v končno mnogo korakih v stanje j.*

Definicija 4.5. *Če je stanje j dosegljivo iz stanja i in stanje i dosegljivo iz stanja j, potem rečemo, da sta stanji povezani.*

Povezanost med dvema stanjema je ekvivalenčna relacija na množici stanj. Ekvivalenčni razredi so med seboj delno urejeni z relacijo, porojeno iz relacije dosegljivost med stanjema. Zato rečemo, da je ekvivalenčni razred minimalen, če iz njega ni dosegljiv noben drug ekvivalenčni razred [12].

Definicija 4.6. *Množica stanj C je zaprta, če ne obstajata nobeni taki stanji $i \in C$ in $j \notin C$, da je j dosegljivo iz i.*

Definicija 4.6 pravi, da zunaj zaprte množice ni nobenega iz nje dosegljivega stanja.

Izrek 4.7. *Za stanje i so ekvivalentne naslednje tri trditve.*

1. *Stanje i je edini element nekega minimalnega ekvivalenčnega razreda.*
2. *Množica, ki vsebuje samo stanje i, je zaprta.*
3. $p_{ii} = 1$.

Dokaz izreka 4.7 je trivialen, v vsakem od njegovih treh ekvivalentnih primerov pa rečemo, da je stanje i absorbirajoče. Ko veriga zaide v absorbirajoče stanje, ga torej nikoli več ne zapusti. Ustaljena praksa pri modeliranju kreditnega tveganja je predpostavka, da ko izdajatelj enkrat doseže stanje neplačila, se iz njega več ne povrne. Zato je v modelu stanje neplačila absorbirajoče, kar pomeni, da je $p_{nn} = 1$ in $p_{nj} = 0$, za $j = 1, \ldots, n-1$.

Zaradi predpostavke o absorbirajočem stanju neplačila za kreditne prehodne matrike velja

$$\lim_{t\to\infty} P^t = D, \tag{4.1}$$

kjer je

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Enačba 4.1 pove, da je stanje neplačila dosegljivo iz vsakega stanja oziroma da se neplačilo na dolgi rok zgodi, ne glede na začetno bonitetno oceno. Za določena stanja je seveda povprečen čas, da se to zgodi, lahko zelo dolg.

4.2 Markovske verige v zveznem času

Markovska lastnost v zveznem času je formalno enaka kot v diskretnem času. Pravimo, da ima proces markovsko lastnost, če velja

$$P(X(s+t) = j | X(s) = i, \{X(u) |\ 0 \le u < s\}) = P(X(s+t) = j | X(s) = i)$$

za vsa stanja $i, j \in S$ in poljubna časa $s, t > 0$.

Definicija 4.8. *Končna markovska veriga v zveznem času je slučajni proces tj. družina slučajnih spremenljivk $\{X(t)|\ t \ge 0\}$ s končno množico stanj S, ki zadošča markovski lastnosti.*

Analogno kot v diskretnem času pravimo, da je markovska veriga homogena, če so prehodne verjetnosti odvisne le od razlike med obema časovnima točkama

$$P(X(s+t) = j | X(s) = i) = P(X(t) = j | X(0) = i).$$

V tem primeru prehodne verjetnosti označimo s $p_{ij}(t)$ in jih zapišemo v prehodno matriko $P(t) = \{p_{ij}(t)\}_{i,j=1}^{n}$.

V diskretnem času je interval med prehodi vedno enota. V zveznem času pa koncepta enega koraka ne poznamo, saj je parameter t zvezen. Pri analizi markovskih verig v zveznem času se zato pojavi vprašanje, ali obstaja matrika, ki bi bila analogna matriki enega prehoda v diskretnem času. Odgovor na to vprašanje je pritrdilen.

Definicija 4.9. *Generator markovskega procesa v zveznem času je matrika Q, katere elementi zadoščajo naslednjim pogojem*

$$\sum_{j=1}^{n} q_{ij} = 0 \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.2}$$

$$q_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ in } i \neq j. \tag{4.3}$$

Trditev 4.10. *Naj bo $P(t) = \exp(tQ)$. Potem ima družina $\{P(t)|\ t \geq 0\}$ naslednje lastnosti:*

1. *$P(s + t) = P(s)P(t)$ za vse s, t (polgrupna lastnost);*
2. *$\{P(t)|\ t \geq 0\}$ je enolična rešitev naprejšnje diferencialne enačbe*

$$P'(t) = P(t)Q, \quad P(0) = I;$$

3. *$\{P(t)|\ t \geq 0\}$ je enolična rešitev nazajšnje diferencialne enačbe*

$$P'(t) = QP(t), \quad P(0) = I.$$

Dokaz trditve 4.10 in dodatne rezultate teorije markovskih verig najdemo v [17].

Čas zadrževanja verige v stanju i je zaradi lastnosti nepomnjenja porazdeljen eksponentno in sicer s parametrom q_{ii}. Markovsko verigo v zveznem času torej lahko sestavimo iz eksponentno porazdeljenih časov čakanja na naslednji prehod, ki nam povejo, kdaj bo veriga spet skočila ali iz markovske verige v diskretnem času, ki nam pove, kam bo veriga v zveznem času skočila. Izrek 4.10 pove, da elementi matrike Q predstavljajo intenzivnosti prehajanja, s pomočjo katerih lahko izračunamo prehodne matrike za poljuben čas.

4.3 Ocenjevanje prehodnih matrik

Osrednji cilj tega poglavja je opis procesa ocenjevanja prehodnih matrik. Obstaja več različnih metod za ocenjevanje prehodnih matrik glede na empirične podatke, v nadaljevanju pa si bomo pogledali dve najbolj pogosto uporabljeni.

4.3.1 Metoda kohort

Metoda, ki je postala industrijski standard, je t.i. frekventistična metoda ali metoda kohort (*cohort method*)[9]. Metoda temelji na principu največjega verjetja. Z maksimizacijo funkcije verjetja multinomske porazdelitve dobimo najbolj naravnega kandidata za oceno verjetnosti prehoda med bonitetnimi ocenami.

Naj bo N_i število dolžnikov z bonitetno oceno i na začetku leta in N_{ij} število tistih, ki se jim je tekom leta bonitetna ocena spremenila iz i v j. Potem je cenilka po metodi največjega verjetja za verjetnost prehoda enaka

$$\hat{p}_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_i}. \tag{4.4}$$

Verjetnost prehoda se po metodi kohort torej izračuna kot razmerje med številom podjetij z oceno j, ki so leto začela z oceno i in skupnim številom podjetij z oceno i na začetku leta. Slabost te metode je, da ne upošteva nobenih prehodov znotraj leta. Če bi podjetje recimo v prvi polovici leta spremenilo bonitetno oceno iz i v j in v drugi polovici leta spet nazaj v i, se to v izračunih ne bi nikjer upoštevalo. Enako je tudi s podjetji, čigar ocene so umaknjene iz sistema ocenjevanja. Prehodna matrika se določi tako, da se verjetnost prehoda v neocenjeno stanje proporcionalno razporedi med ostale ocene.

4.3.2 Metoda trajanja

Druga metoda, ki se imenuje metoda trajanja (*duration method*), ocenjuje generator markovskega procesa, s pomočjo katerega potem lahko izračunamo prehodne matrike za poljuben čas [9]. Tudi ta metoda sloni na principu največjega verjetja.

Za razliko od metode kohort, metoda trajanja pri ocenjevanju upošteva vse prehode znotraj opazovanega časovnega intervala. Cenilka največjega verjetja za elemente generatorske matrike Q je enaka

$$\hat{q}_{ij} = \frac{N_{ij}(T)}{\int_0^T Y_i(s)\mathrm{d}s}. \tag{4.5}$$

Analogno kot pri metodi kohort je $N_{ij}(T)$ število dolžnikov, ki se jim je tekom opazovanega obdobja bonitetna ocena spremenila iz i v j, T je dolžina časovnega intervala in $Y_i(s)$ število podjetij ocenjenih z oceno i v času s. Imenovalec predstavlja dejansko število let, ki so jih podjetja preživela v stanju i.

Če opazujemo na primer obdobje enega leta in podjetje, ki je bilo najprej ocenjeno z AA, potem mu ocena pade na A, da bi na koncu leta pristalo z oceno BBB, bo delež časa, ko je bilo podjetje ocenjeno z oceno A, vplival na oceno prehodne verjetnosti iz AA v A. Pri izračunu po metodi kohort bi bila ta informacija izgubljena. Poleg tega bodo podjetja, ki jim je tekom leta ocena umaknjena, vplivala na izračun imenovalca vsaj za tisti delež časa, ki so ga preživela v določenem stanju.

V članku [9] Jafry in Schuermann predlagata uporabo metode trajanja pri ocenjevanju prehodnih matrik, saj ta upošteva več informacij. V knjigi o parametrih za izračun minimalne kapitalske zahteve po Baslu II [6] sta avtorja želela preveriti, ali je za praktične namene res boljša metoda trajanja. S simulacijo podatkov o prehodih med bonitetnimi ocenami sta izračunala prehodne matrike za obdobje enega leta po obeh metodah in primerjala povprečne napake, ki so pri tem nastale. Z variranjem velikosti portfelja in pogostosti opazovanja prehodov sta ugotovila, da povprečna napaka, ki nastane pri ocenjevanju po metodi kohort, konvergira proti 0, ko število naložb narašča. Istočasno pa sta ugotovila, da to ne drži za metodo trajanja razen v primeru, ko je pogostost opazovanja velika. Če so podatki na letni ravni, metoda trajanja povzroči napako, ki se ne zmanjša tudi če je število naložb v portfelju zelo veliko. Razlog za to je dejstvo, da cenilka po metodi trajanja sloni na predpostavki zveznosti trajektorij ocenjevanja. V praksi se podatki zbirajo na letnem nivoju, kar je tudi razlog, zakaj bonitetne agencije pri ocenjevanju uporabljajo metodo kohort.

5 Pogoji za obstoj in enoličnost generatorja

Kot smo že omenili v prejšnjem poglavju, se prehodne matrike skoraj po pravilu ocenjujejo za obdobje enega leta. Glavni razlog je ta, da je število opazovanih prehodov v krajšem časovnem intervalu premajhno za zanesljivo oceno prehodne matrike. Po drugi strani pa v praksi pogosto potrebujemo prehodne matrike za obdobje krajše od enega leta. Če bi za enoletno empirično prehodno matriko našli generator, ki je v ozadju markovskega procesa, potem bi lahko enostavno izračunali prehodne matrike za poljuben čas. Problem obstoja generatorja zato lahko poimenujemo tudi problem vložitve markovske verige v diskretnem času. Glavni vprašanji, ki se pri tem pojavita sta, ali oziroma kdaj tak generator obstaja in če obstaja, kako ga poiskati.

Israel et al. so bili prvi avtorji, ki so problem obstoja obravnavali v povezavi s prehodnimi matrikami za namene računanja kreditnega tveganja in vrednotenja kreditnih izvedenih finančnih instrumentov. V članku [8] so opredelili pogoje, pod katerimi generator obstaja in opisali postopek iskanja pravilnega, kadar je kandidatov za generator več. Po njihovem zgledu bomo v nadaljevanju predstavili glavne ugotovitve glede obstoja in enoličnosti generatorja.

Naj bo P enoletna prehodna matrika homogene markovske verige v diskretnem času s končno množico n stanj. To pomeni, da je P realna matrika velikosti $n \times n$ z nenegativnimi vrednostmi, vsoto vrstic 1 in da so verjetnosti prehodov na enem koraku neodvisne od časa. Zanima nas, ali obstaja taka matrika $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ki ji rečemo generator, z nenegativnimi izvendiagonalnimi vrednostmi in ničelno vsoto vrstic, da velja $\exp(Q) = P$. Eksponentna funkcija je definirana z vsoto

$$\exp(tQ) = I + tQ + \frac{(tQ)^2}{2!} + \frac{(tQ)^3}{3!} + \dots,$$

kjer je I identična matrika velikosti $n \times n$.

Obstoj matrike Q pomeni, da je veriga definirana s prehodno matriko P le diskretna manifestacija pripadajočega homogenega markovskega procesa v zveznem času. Za matrike velikosti 2×2 je problem po Kingmanu [13] trivialen. On namreč citira neobjavljeno delo D.G. Kendalla in podaja dokaz, da za prehodno matriko P velikosti 2×2 obstaja generator pripadajočega markovskega procesa v zveznem času natanko takrat, ko je $\det(P) > 0$. Pri matrikah v višjih dimenzijah situacija glede pogojev za obstoj generatorja ni več tako jasna. Z analizo lastnosti množice prehodnih matrik, za katere generator obstaja, je Kingman [13] prišel do zaključka, da za matrike velikosti $n \times n$, kjer je $n > 2$, ni enostavnih potrebnih in zadostnih pogojev za obstoj generatorja pripadajočega zveznega procesa.

Naj bo $S = \max\{(a-1)^2 + b^2; a + bi \text{ je lastna vrednost } P, a, b \in \mathbb{R}\}$. Za izračun S najprej določimo množico lastnih vrednosti matrike P. Morebitne kompleksne lastne vrednosti so oblike $a + bi$, kjer sta a in b realni števili. Za vsako lastno vrednost izračunamo vsoto kvadratov $(a-1)^2 + b^2$ in za S vzamemo največje izmed dobljenih števil.

Izrek 5.1. *Naj bo $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ prehodna matrika in naj bo $S < 1$. Potem je vrsta*

$$Q = (P - I) - \frac{(P-I)^2}{2} + \frac{(P-I)^3}{3} - \frac{(P-I)^4}{4} + \cdots \tag{5.1}$$

absolutno konvergentna in še več, konvergira proti matriki $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, ki ima ničelno vsoto vrstic in za katero velja $\exp(Q) = P$.

Dokaz izreka 5.1 najdemo v [8]. Izrek pove, kako na enostaven način dobiti matriko Q, ki ima večino želenih lastnosti generatorja, ne zagotavlja pa nenegativnosti izvendiagonalnih elementov. Na tem mestu je potrebno poudariti, da čeprav mogoče vrsta 5.1 ni konvergentna ali konvergira proti matriki, ki ne zadošča pogojem za generator, to še vedno ne izključuje možnosti za obstoj veljavnega generatorja, kar bomo videli v nadaljevanju.

Za prehodne matrike, ki se pojavljajo v praksi, preverjanje pogoja $S < 1$ ni preveč pomembno. Dokler je vrsta 5.1 absolutno konvergentna iz razvoja logaritemske funkcije okrog točke 1 oziroma v primeru matrik okrog identitete $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sledi, da je $\exp(Q) = P$. Ker je vsota vrstic matrike $P - I$ enaka 0, velja da je za vsak $k > 0$ tudi vsota vrstic $(P - I)^k$ enaka 0 in ker je vrsta, ki definira matriko Q, limita linearnih kombinacij različnih potenc $P - I$, to velja tudi za Q. Matrika Q ima torej ničelno vsoto vrstic ne glede na pogoj $S < 1$ in zato ta ni več nujen. Še več, za večino prehodnih matrik, ki se uporabljajo za izračun kreditnega tveganja in vrednotenje kreditnih izvedenih finančnih instrumentov, je pogoj $S < 1$ izpolnjen avtomatično po spodnjem izreku.

Izrek 5.2. *Če za vse diagonalne elemente prehodne matrike P velja $p_{ii} > \frac{1}{2}$, potem je $S < 1$ in je konvergenca vrste 5.1 zagotovljena.*

Dokaz izreka 5.2 najdemo v [8]. Cuthbert [4] je dokazal tudi, da ima pod pogojem iz izreka 5.2 matrika P največ en generator oziroma, da če generator obstaja, potem je enoličen. V praksi so vse prehodne matrike strogo diagonalno dominantne, kar pomeni, da je absolutna vrednost diagonalnega elementa večja od vsote vseh absolutnih vrednosti ostalih elementov. Ker so elementi prehodne matrike nenegativni in se seštejejo v 1, je za konvergenco vrste 5.1 ekvivalentno, če rečemo, da mora biti matrika P strogo diagonalno dominantna. Ta pogoj je sicer le zadosten, saj se lahko zgodi, da vrsta 5.1 konvergira in je $S < 1$, čeprav so nekateri diagonalni elementi manjši od $\frac{1}{2}$ [8].

V naslednjem izreku bomo povzeli pogoje, pod katerimi za dano prehodno matriko P generator ne obstaja. Spomnimo se, da je stanje j dosegljivo iz stanja i, če lahko iz stanja i pridemo v končno mnogo korakih v stanje j oziroma če obstaja tako zaporedje stanj $i = s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{k+1} = j$, da je $p_{s_l s_{l+1}} > 0$ za vsak $0 \leq l \leq k$.

Izrek 5.3. *Naj bo P prehodna matrika in naj velja eden izmed naslednjih pogojev*

1. $\det(P) \leq 0$,
2. $\det(P) > \prod_i p_{ii}$,
3. *obstajata stanji i in j, tako da je j dosegljivo iz i in velja $p_{ij} = 0$.*

Potem generator za matriko P ne obstaja.

Matrika Q definirana z vrsto 5.1 predstavlja generator procesa, če so vsi izvendiagonalni elementi nenegativni. Kaj pa lahko sklepamo, če vrsta 5.1 konvergira proti matriki, ki nima vseh nenegativnih izvendiagonalnih elementov? Odgovor je na žalost nič. Vrsta 5.1 predstavlja le glavno vejo logaritma matrike P in čeprav so nekateri njeni izvendiagonalni elementi negativni, druge veje logaritma lahko še vedno zagotovijo obstoj generatorja za dano matriko.

Trditev 5.4. *Dejstvo, da za prehodno matriko P realna matrika Q_1 z ničelno vsoto vrstic in nekaterimi negativnimi izvendiagonalnimi elementi zadošča $\exp(Q_1) = P$, ne izključuje možnosti za obstoj veljavnega generatorja Q_2 za P. To velja tudi, če je matrika Q_1 enaka matriki, ki jo dobimo iz vrste 5.1.*

V [8] je zgornja trditev dokazana na primeru prehodne matrike velikosti 4×4. Avtorji so pokazali, da za dano matriko P vrsta, ki predstavlja glavno vejo logaritma, konvergira proti matriki Q_1, ki ima 3 negativne izvendiagonalne vrednosti. Po drugi strani pa so našli tako matriko Q_2, z ničelno vsoto vrstic in nenegativnimi izvendiagonalnimi elementi, za katero velja $\exp(Q_2) = P$.

Kaj pa če vrsta 5.1 divergira? Nekaj časa je veljalo napačno prepričanje, da če vrsta 5.1 divergira, prehodna matrika ni porojena z markovsko verigo v zveznem času. V [19] sta avtorja pokazala, da to ne drži in s protiprimerom dokazala, da tudi ko vrsta 5.1 divergira, ima lahko prehodna matrika P veljaven generator Q, za katerega velja $\exp(Q) = P$.

Naslednja trditev pove, kako je z enoličnostjo generatorja.

Trditev 5.5. *Obstajajo prehodne matrike z več kot enim veljavnim generatorjem.*

V [8] in tudi v [19] je trditev dokazana s primerom. Avtorji so pokazali, da za dano prehodno matriko P obstajata dva veljavna generatorja Q_1 in Q_2, za katera velja $\exp(Q_1) = \exp(Q_2) = P$. Kadar za prehodno matriko obstaja več generatorjev, se pojavi vprašanje, kateri je najboljši za modeliranje prehodnih verjetnosti za obdobje krajše od enega leta. Matematično je vsak generator enako dober kot katerikoli drugi, zato je potrebno najti kriterij, ki nam bo omogočil, da iz množice veljavnih generatorjev izberemo tistega, ki najbolje opisuje dano empirično matriko za obdobje enega leta. Pri prehodnih matrikah, ki se pojavljajo v praksi, so prehodi med oddaljenimi stanji v kratkem časovnem obdobju malo verjetni. Metoda za izbiro najboljšega generatorja, ki je opisana v [8], sloni na tem dejstvu, saj minimizira možnost, da veriga v kratkem časovnem intervalu preide v oddaljeno stanje. Za vsak veljaven generator Q prehodne matrike P, izračunamo vrednost

$$J = \sum_{i,j} |j - i||q_{ij}|$$

in za najboljši generator proglasimo tistega z najmanjšo vrednostjo J.

Kljub zgoraj opisanim težavam je pod določenimi pogoji mogoče dokazati enoličnost generatorja [8]. Z $\ln(P)$ označimo glavno vejo logaritma matrike P, ki je enaka vsoti vrste 5.1, kadar je ta konvergentna. Vedno velja $\exp(\ln(P)) = P$ in če ima P vsoto vrstic 1, ima $\ln(P)$ vsoto vrstic 0.

Izrek 5.6. *Naj bo P prehodna matrika.*

1. *Če je* $\det(P) > \frac{1}{2}$*, potem ima P največ en generator.*

2. *Če je* $\det(P) > \frac{1}{2}$ *in* $||P - I|| < \frac{1}{2}$ *(kjer je $||\cdot||$ poljubna norma), potem je* $\ln(P)$ *edini možni generator za P.*

3. *Če ima P različne lastne vrednosti in velja* $\det(P) > e^{-\pi}$*, potem je* $\ln(P)$ *edini možni generator za P.*

Izrek 5.7. *Naj bo P prehodna matrika, ki ima realne in različne lastne vrednosti.*

1. *Če so vse lastne vrednosti P pozitivne, potem je* $\ln(P)$ *edina realna matrika Q, tako da velja* $\exp(Q) = P$*.*

2. *Če ima P vsaj eno negativno lastno vrednost, potem ne obstaja realna matrika Q, tako da velja* $\exp(Q) = P$*.*

Dokaz za veljavnost izrekov 5.6 in 5.7 najdemo v [19].

Za zaključek poglavja o obstoju in enoličnosti generatorja bomo povzeli izreka 5.6 in 5.7 v enostaven postopek za obravnavo prehodnih matrik, ki jih srečujemo v praksi. Pri iskanju generatorja markovskega procesa, ki naj bi ga v diksretnem času predstavljala prehodna matrika P, najprej preverimo vrsto za logaritem 5.1. Kot smo že ugotovili, je za prehodne matrike, ki se uporabljajo za izračun kreditnega tveganja, ta vrsta vedno konvergentna, vendar pogosto konvergira proti matriki Q, ki ima negativne izvendiagonalne elemente. Če za matriko P velja vsaj eden izmed naslednjih treh pogojev

- $\det(P) > \frac{1}{2}$ in $||P - I|| < \frac{1}{2}$,
- P ima različne lastne vrednosti in $\det(P) > e^{-\pi}$,
- P ima različne realne lastne vrednosti,

potem lahko sklepamo, da veljaven generator ne obstaja. To pomeni, da empirična matrika P ni diskretna manifestacija zveznega markovskega procesa oziroma da markovska veriga v diskretnem času ni vložljiva v zvezen markovski proces. Za praktične namene računanja prehodnih matrik glede na zgodovinske podatke je zato potrebno matriko za logaritem prilagoditi tako, da zadošča pogojem za generator. Postopke za iskanje približnega generatorja si bomo podrobneje pogledali v naslednjem poglavju.

6 Iskanje približnega generatorja

Za izračun kreditnega tveganja in vrednotenje kreditnih izvedenih finančnih instrumentov potrebujemo prehodne matrike za časovne intervale, ki so krajši od enega leta oziroma niso cela števila. Ker smo privzeli načelo homogenosti časa, se problem prevede na iskanje prehodne matrike X, za katero velja

$$X^t = P,$$

kjer je P prehodna matrika za obdobje enega leta in t število časovnih intervalov na leto. Za kvartalno prehodno matriko je na primer t enak 4, za mesečno pa 12.

Če za matriko P obstaja generator Q, ki zadošča enačbi $\exp(Q) = P$, potem je $X = \exp(\frac{1}{t}Q)$ iskana prehodna matrika. V praksi se na žalost srečujemo z letnimi prehodnimi matrikami, za katere generatorji skoraj po pravilu ne obstajajo. To pomeni, da matrike, ki jih dobimo s pomočjo enačbe $X = \exp(\frac{1}{t}\ln(P))$ niso prehodne matrike, saj ne izpolnjujejo pogoja nenegativnosti. Problem neobstoja generatorja pri iskanju prehodnih matrik za obdobje krajše od enega leta lahko rešimo s pomočjo regularizacije na več različnih načinov. Matriko $\ln(P)$ torej prilagodimo tako, da zadošča pogojem, ki definirajo generator procesa.

Obstaja več načinov, kako pristopiti k problemu iskanja generatorja. Enostavnejši pristop je, da vrednost vseh negativnih izvendiagonalnih elementov postavimo na 0 in razporedimo ustrezno razliko med ostale pozitivne elemente tako, da se ohrani ničelna vsota vsake vrstice. Obstajajo tudi bolj zapleteni numerični postopki, od ad hoc prilagoditve, kot je opisana v [8], do prilagoditve, ki sloni na optimizaciji [14].

Algoritem za iskanje generatorja, ki je predstavljen v [8], je zasnovan na Lagrangeovi interpolaciji. Ideja je, da logaritemsko funkcijo zamenjamo s polinomom stopnje $n-1$, ki se v vseh lastnih vrednostih matrike P ujema z vrednostmi logaritma. Potem po vrsti računamo veje logaritma, za katere velja določen pogoj, dokler ne dobimo matrike, ki nima negativnih izvendiagonalnih elementov. Slaba stran tega algoritma je, da deluje le na matrikah, ki imajo različne lastne vrednosti. Če želimo algoritem posplošiti, da velja tudi za matrike z enakimi lastnimi vrednostmi, se iskanje precej zakomplicira.

V nadaljevanju se bomo osredotočili na tri različne metode za iskanje generatorja prehodnih matrik in sicer diagonalno prilagoditev, uteženo prilagoditev in kvazi optimizacijo. Prvi dve metodi sodita v skupino najbolj intuitivnih in enostavnih metod, medtem ko tretja, kot je razvidno že iz samega imena, predstavlja optimizacijski problem.

6.1 Diagonalna prilagoditev

Naj bo $Q = \ln(P)$. Ideja v ozadju algoritma za diagonalno prilagoditev leži v dejstvu, da so morebitni negativni izvendiagonalni elementi matrike Q ponavadi zelo majhni po absolutni vrednosti. Zato lahko tem elementom enostavno priredimo vrednost 0

$$\hat{q}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{če } i \neq j \text{ in } q_{ij} < 0 \\ q_{ij} & \text{sicer} \end{cases} \qquad \text{za } i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Na ta način smo zadostili pogoju 4.3.

Drugi korak predstavlja prilagoditev vrednosti, da bo izpolnjen tudi pogoj 4.2. Diagonalna prilagoditev je najbolj enostavna metoda, ki spremeni le vrednost diagonalnih elementov in sicer

$$\hat{q}_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \hat{q}_{ij} \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Tako dobljena matrika $\hat{Q}$ ima vse lastnosti generatorja, ampak ne zadošča več enačbi $\exp(\hat{Q}) = P$.

6.2 Utežena prilagoditev

Prvi korak algoritma za uteženo prilagoditev je identičen kot pri algoritmu za diagonalno prilagoditev. Vsem negativnim izvendiagonalnim elementom torej priredimo vrednost 0.

Za razliko od diagonalne prilagoditve, kjer popravimo samo diagonalo, na drugem koraku utežene prilagoditve spremenimo vse elemente, ki so različni od 0, sorazmerno z njihovimi absolutnimi vrednostmi

$$\hat{q}_{ij} = \hat{q}_{ij} - |\hat{q}_{ij}| \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{q}_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} |\hat{q}_{ij}|} \quad \text{za } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Če ima matrika Q po absolutni vrednosti zelo majhne negativne izvendiagonalne elemente in dovolj velike diagonalne elemente, sta si matriki dobljeni po metodah diagonalne in utežene prilagoditve precej podobni. Teoretično bi lahko z optimizacijo funkcije več spremenljivk, ki predstavlja izbiro elementov, ki jih popravimo na drugem koraku, dodatno izboljšali algoritem. Kljub temu se v praksi izkaže, da taka izboljšava le redko pripelje do opaznih sprememb [8]. Zato se je iskanja boljše aproksimacije za generator prehodnih matrik treba lotiti na drugačen način.

6.3 Kvazi optimizacija generatorja

Tretji algoritem za izračun generatorja prehodnih matrik, ki ga bomo podrobneje opisali, sta Kreinin in Sidelnikova v svojem članku [14] poimenovala kvazi optimizacija generatorja. Naj bo $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^n$ množica generatorjev prehodnih matrik. $\mathcal{Q}$ torej vsebuje vse matrike, ki zadoščajo pogojem iz definicije 4.9.

Definicija 6.1. *Kvazi optimizacija generatorja*

Za optimalen generator $Q^* \in \mathcal{Q}$ velja

$$\|Q^* - \ln(P)\| = \min_{Q \in \mathcal{Q}} \|Q - \ln(P)\|, \tag{6.1}$$

kjer je $\| \cdot \|$ ustrezna norma v prostoru $\mathbb{R}^n$.

Kriterijska funkcija, ki jo obravnavamo, je konveksna, tako kot množica dopustnih rešitev $\mathcal{Q}$. Zato za zgornji optimizacijski problem obstaja globalni minimum [15].

Ker so elementi prehodne matrike nenegativni in je vsota vsake vrstice enaka 1, lahko prostor prehodnih matrik predstavimo kot kartezični produkt n identičnih n-dimenzionalnih simpleksov $Sim(n)$, definiranih kot

$$Sim(n) = \Big\{ (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0 \Big\}. \tag{6.2}$$

Na podoben način lahko geometrično opredelimo tudi prostor generatorjev prehodnih matrik. Vsaka vrstica generatorja ima nenegativne izvendiagonalne elemente in vsoto 0. Zato lahko s permutacijo elementov vsako vrstico generatorja predstavimo kot točko v stožcu $K(n)$, definiranem na naslednji način

$$K(n) = \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0, x_1 \leq 0, x_i \geq 0 \text{ za } i \geq 2\right\}. \tag{6.3}$$

Prostor generatorjev prehodnih matrik je torej predstavljen kot kartezični produkt n-dimenzionalnih stožcev. Opazimo, da je stožec $K(n)$ vsebovan v hiperravnini

$$H(n) = \left\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}.$$

Ker so pogoji za generator ločeni za vsako vrstico, lahko problem kvazi optimizacije generatorja rešujemo po vrsticah tako, da točko $a \in \mathbb{R}^n$, ki predstavlja vrstico matrike $\ln(P)$, projeciramo na stožec $K(n)$. Za razdaljo med dvema točkama x in y v $\mathbb{R}^n$ vzamemo običajno evklidsko razdaljo

$$\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Problem se poenostavi na n neodvisnih nelinearnih podproblemov iskanja minimalne razdalje za vsako vrstico matrike $\ln(P)$.

Definicija 6.2. *Problem minimizacije razdalje za generator*

Za poljubno točko $a \in \mathbb{R}^n$ poišči $q^* \in K(n)$, da velja

$$\|a - q^*\| = \min_{q \in K(n)} \|a - q\|. \tag{6.4}$$

Algoritem za iskanje rešitve zgornjega optimizacijskega problema je predstavljen v [14]. Z dvema manjšima spremembama ga bomo opisali in dokazali v nadaljevanju.

6.3.1 Algoritem za iskanje rešitve problema minimizacije za generator

Vhodni parameter algoritma je vektor $a \in \mathbb{R}^n$. V našem primeru je to posamezna vrstica matrike $\ln(P)$.

Korak 1) Naj bo vektor b projekcija vektorja a na hiperravnino $H(n)$: $b_i = a_i - \lambda$, kjer je λ povprečna vrednost elementov vektorja a

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Korak 2) Izračunamo vektor $c = \pi(b)$, kjer je π permutacija, ki uredi elemente vektorja v naraščajočem vrstnem redu. Če bi elemente vektorja na tem koraku uredili padajoče (kot je opisano v [14]), ne bi prišli do pravilnega rezultata.

Korak 3) Poiščemo najmanjše celo število l^* za $1 \leq l \leq n-1$, ki zadošča neenačbi

$$(n-l+1)c_{l+1} \geq c_1 + \sum_{i=0}^{n-l-1} c_{n-i}.$$

Na tem koraku omenimo, da je l^* treba izbirati iz množice $1 \leq l \leq n-1$ in ne iz $2 \leq l \leq n-1$, kot je predlagano v [14].

Korak 4) Definiramo vektor $d \in K(n)$ na naslednji način

$$d_i = \begin{cases} 0 & \text{za } 2 \leq i \leq l^*, \\ c_i - \frac{1}{n-l^*+1}\left(c_1 + \sum_{j=l^*+1}^{n} c_j\right) & \text{sicer.} \end{cases}$$

Korak 5) Izračunamo inverzno permutacijo π^{-1} in jo uporabimo na vektorju d, da dobimo končno rešitev problema minimizacije za generator $q^* = \pi^{-1}(d)$.

6.3.2 Dokaz pravilnosti delovanja algoritma

Dokaz pravilnosti delovanja algoritma je zasnovan na argumentih predstavljenih v [23]. V nadaljevanju bodo brez dokaza podani v sklopu treh lem.

Lema 6.3. *Naj bo $a = (a_1, \ldots, a_n)$ začetna točka in $q^* = (q_1^*, \ldots, q_n^*)$ optimalna rešitev problema minimizacije za generator. Če velja $a_1 \leq \ldots \leq a_n$, potem velja tudi $q_1^* \leq \ldots \leq q_n^*$.*

Lema 6.3 pravi, da so elementi optimalne rešitve urejeni v istem vrstnem redu kot elementi začetne točke. To nam omogoči, da lahko brez škode za splošnost obravnavamo le primer, ko so koordinate vektorja a urejene v naraščajočem vrstnem redu.

Lema 6.4. *Naj bo q^* optimalna rešitev. Obstaja tak indeks l, da velja $q_1^* < 0$, $q_i^* = 0$, za $2 \leq i \leq l$ in $q_1^* > 0$, za $i > l$.*

Lema 6.5. *Vsi neničelni elementi optimalne rešitve q^* so oblike $q_i^* = a_i + \lambda$.*

Problem minimizacije razdalje za generator 6.4 prepišemo

$$\min \sum_{i=1}^{n} (a_i - q_i)^2$$

$$\text{p.p. } \sum_{i=1}^{n} q_i = 0, q_1 \leq 0, q_i \geq 0 \text{ za } i \geq 2.$$

Z $\mathcal{I} = \{i | 2 \leq i \leq l\}$ označimo množico indeksov, za katere je $q_i^* = 0$. Po lemi 6.5 za elemente optimalne rešitve z indeksom $i \notin \mathcal{I}$ velja $q_i^* = a_i + \lambda$.

Vsoto v kriterijski funkciji in pogoju lahko razbijemo na dve vsoti tako, da je $i \in \mathcal{I}$ in $i \notin \mathcal{I}$

$$\min \sum_{i \in \mathcal{I}} (a_i - q_i)^2 + \sum_{i \notin \mathcal{I}} (a_i - q_i)^2$$

$$\text{p.p. } \sum_{i \in \mathcal{I}} q_i + \sum_{i \notin \mathcal{I}} q_i = 0, q_1 \leq 0, q_i \geq 0 \text{ za } i \geq 2.$$

Poglejmo si najprej kriterijsko funkcijo. Prvi člen oziroma vsota, ki teče po $i \in \mathcal{I}$, se poenostavi v $\sum_{i \in \mathcal{I}} a_i^2$, saj vemo, da so za indekse $i \in \mathcal{I}$ elementi optimalne rešitve q_i^* ničelni. Ker vemo tudi, da za elemente optimalne rešitve z indeksom $i \notin \mathcal{I}$ velja $q_i^* = a_i + \lambda$, lahko v drugi vsoti q_i zamenjamo z $a_i + \lambda$. Drugi člen se torej poenostavi v $\sum_{i \notin \mathcal{I}} \lambda^2$. λ je število, neodvisno od indeksa i, kar pomeni, da je

$$\sum_{i \notin \mathcal{I}} \lambda^2 = (n - l + 1)\lambda^2,$$

saj je moč množice $\mathcal{I}$ enaka $l - 1$.

Na podoben način poskusimo čimbolj poenostaviti tudi množico pogojev. Prvi člen vsote odpade, ker vemo, da je v optimalni rešitvi enak 0. Drugi del se, zaradi istega argumenta kot pri kriterijski funkciji, poenostavi v $\sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i + (n - l + 1)\lambda$.

Pogoje z neenakostmi lahko tudi preformuliramo. Lema 6.4 nam zagotavlja, da so neenačbe strogo izpolnjene za nek l. Najprej je torej treba definirati množico dopustnih rešitev za l. Če je $l = 1$, potem je $\mathcal{I} = \emptyset$, kar pomeni, da je en element optimalne rešitve strogo negativen, vsi ostali pa so strogo pozitivni. Če je $l = 2$, je en element optimalne rešitve strogo negativen, eden je enak nič, ostali pa so strogo pozitivni. Podobno velja za vsa cela števila do vključno $n - 1$. V tem primeru so vsi elementi enaki 0, razen dveh, od katerih je eden strogo negativen, eden pa strogo pozitiven. l očitno ne sme biti enak n, saj bi v tem primeru samo en element optimalne rešitve bil različen od 0 oziroma strogo negativen in bi posledično kršil pogoj 4.2. l torej iščemo v množici $\{1, \ldots, n-1\}$.

Ker je l največji indeks, za katerega še velja $q_l = 0$ in je $a_1 \leq \ldots \leq a_n$, mora biti $\lambda \geq -a_l$. Problem minimizacije razdalje za generator sedaj lahko zapišemo kot

$$\min \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i^2 + (n-l+1)\lambda^2$$

$$\text{p.p. } \sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i + (n-l+1)\lambda = 0, \lambda \geq -a_l \text{ za } l \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Iz pogoja dobimo enačbo za λ

$$\lambda = -\frac{1}{n-l+1} \sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i. \tag{6.5}$$

Če izraz za λ vstavimo v kriterijsko funkcijo in združimo oba pogoja, opazimo, da se nelinearni optimizacijski problem z več spremenljivkami prevede na optimizacijski problem z omejitvami le ene spremenljivke in sicer

$$\min \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i^2 + \frac{1}{n-l+1} \Big(\sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i \Big)^2 \tag{6.6}$$

$$\text{p.p. } -\sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i + (n-l+1)a_l \geq 0 \text{ za } l \in \{1, \ldots, n-1\}. \tag{6.7}$$

Označimo kriterijsko funkcijo z $f(l)$ in pokažimo, da je nepadajoča v l

$$\begin{aligned} f(l) - f(l-1) &= \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i^2 + \frac{1}{n-l+1} \Big(\sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i \Big)^2 - \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i^2 - \frac{1}{n-l+2} \Big(\sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i \Big)^2 \\ &= \frac{n-l+2-(n-l+1)}{(n-l+1)(n-l+2)} \Big(\sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i \Big)^2 \\ &= \frac{1}{(n-l+1)(n-l+2)} \Big(\sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i \Big)^2. \end{aligned}$$

Izraz na desni strani enačbe je očitno nenegativen. Ker je $f(l)$ nepadajoča, je rešitev problema 6.6 najmanjši indeks l^*, ki zadošča pogoju 6.7.

Iz enačbe 6.5 sledi, da je optimalen λ enak

$$\lambda^* = -\frac{1}{n-l^*+1} \sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i.$$

Kot smo želeli pokazati, je rešitev problema minimizacije razdalje za generator torej

$$q_i^* = \begin{cases} 0 & \text{za } 2 \leq i \leq l^*, \\ a_i - \frac{1}{n-l^*+1}\left(\sum_{i \notin \mathcal{I}} a_i\right) & \text{sicer.} \end{cases}$$

V nadaljevanju si bomo na primeru S&P prehodne matrike ogledali vse tri do sedaj opisane metode za izračun generatorja. Metode bomo med sabo primerjali s pomočjo različnih mer, ki se najpogosteje uporabljajo za primerjavo prehodnih matrik in glede na rezultate ugotovili, katera izmed treh metod je najboljša.

7 Aproksimacija generatorja za primer prehodne matrike S&P

Za ilustracijo algoritmov opisanih v prejšnjem poglavju bomo uporabili najnovejšo povprečno prehodno matriko za obdobje enega leta, objavljeno v poročilu bonitetne agencije S&P [5], ki je prikazana v tabeli 3.

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	87.17%	8.69%	0.54%	0.05%	0.08%	0.03%	0.05%	0	3.38%
AA	0.54%	86.29%	8.36%	0.57%	0.06%	0.08%	0.02%	0.02%	4.05%
A	0.03%	1.86%	87.26%	5.53%	0.36%	0.15%	0.02%	0.07%	4.71%
BBB	0.01%	0.12%	3.54%	85.09%	3.88%	0.61%	0.14%	0.22%	6.39%
BB	0.02%	0.04%	0.15%	5.18%	76.12%	7.2%	0.72%	0.86%	9.71%
B	0	0.03%	0.11%	0.23%	5.42%	73.84%	4.4%	4.28%	11.68%
CCC/C	0	0	0.16%	0.24%	0.73%	13.69%	43.89%	26.85%	14.43%

Tabela 3: S&P povprečna prehodna matrika za gospodarske družbe, 1981-2012

Preden se lotimo samih izračunov, poglejmo, kakšna je bila metodologija pridobivanja podatkov in kaj pravzaprav ti podatki pomenijo.

7.1 Metodologija in opis podatkov

Kot je bilo omenjeno v poglavju o bonitetnih agencijah, ocena izdajatelja predstavlja mnenje agencije S&P glede celotne kreditne sposobnosti nekega podjetja, da izplača svoje finančne obveznosti. To mnenje se osredotoča na dolžnikovo sposobnost in motivacijo, da izplača svoje obveznosti ob zapadlosti roka in se kot tako ne nanaša na eno določeno finančno obveznost, ker ne upošteva konkretnih lastnosti posamezne obveznosti in njenega položaja v stečaju ali likvidaciji. Podjetju je zato lahko dodeljena splošna bonitetna ocena, čeprav posamezni dolgovi niso ocenjeni.

Kljub temu, da je lahko kakšen nadrejeni in dobro zavarovan dolg podjetja ocenjen višje kot je ocenjena kreditna sposobnost izdajatelja, je v navadi, da se dolgovi ocenjujejo kvečjemu z isto ali nižjo bonitetno oceno, odvisno od pozicije dolga v finančni strukturi podjetja. Ocena izdajateljev v špekulativnem razredu je na podrobno razdelani lestvici običajno za dve oceni višja od ocene posameznega dolga. Sicer je ocena izdajatelja praviloma le za eno oceno višja od ocene posameznega dolga. Na primer, dolg izdajatelja z oceno BB+ bo običajno ocenjen z BB-, medtem ko bo dolg izdajatelja z oceno AA običajno dobil oceno AA-.

Podatki so pridobljeni na podlagi bonitetnih ocen 16 005 podjetij, ki jih je agencija S&P ocenila v času med 31. decembrom 1980 in 31. decembrom 2012. Mednje so uvrščene industrije, javne gospodarske službe, finančne institucije in zavarovalnice iz držav širom sveta, za katere obstaja dolgoročna bonitetna ocena lokalne valute. Iz podatkov so izključene ocene, ki so bile pridobljene na osnovi javno objavljenih podatkov in ocene na podlagi mnenja drugih podjetij ali držav.

Ocena je umaknjena, če je dolg podjetja v celoti izplačan, če pride do združitev in prevzemov ali če neko podjetje zaradi finančnega položaja noče več razkriti vseh podatkov in prekine sodelovanje z bonitetno agencijo.

Dolžniku se dodeli oceno SD (*selective default*) ali D (*general default*), če ni plačal ene ali več finančnih obveznosti, razen v primeru, ko agencija meni, da bo obveznosti poravnal v roku petih delovnih dni ne glede na dolžino zakonsko določenega roka. Dolžniku se prav tako dodeli ocena D, če vloži vlogo za stečaj ali sprejme podobne ukrepe, ki ogrozijo plačilo finančnih obveznosti. Agencija dodeli oceno D, ko meni, da dolžnik ne bo sposoben plačati vseh svojih dolgov ob zapadlosti. Ocena SD se dodeli, ko agencija meni, da dolžnik ne bo poravnal samo določenega dolga ali skupine obveznosti, vendar se njegova plačilna sposobnost glede drugih obveznosti ne bo spremenila. Poznamo tudi oceno R, ki se dodeli, ko je dolžnik zaradi finančnega stanja pod regulativnim nadzorom. To ne pomeni nujno, da dolžnik svojih obveznosti ne bo plačal, vendar v tem primeru regulatorji lahko dajo prednost določenim obveznostim pred drugimi. Prednostne delnice se recimo ne štejejo kot finančne obveznosti, zato neizplačane dividende prednostnih delnic ne vplivajo na znižanje boinitetne ocene. Pri problematiki, ki jo obravnavamo, bomo vse zgoraj omenjene ocene obravnavali kot neplačilo, označeno z oceno D.

Ko dolžnik ne izpolni svojih obveznosti, bonitetna agencija sčasoma umakne oceno D. V primeru, ko po stečaju nastane novo podjetje, ali ko dolžnik prestrukturira svoje neizplačane dolgove in s tem vzpostavi pravočasno in redno plačevanje obveznosti, se vnese v podatkovno bazo agencije kot novo podjetje. Pri nadaljnjem ocenjevanju je to podjetje popolnoma ločeno od dogodkov, ki so vodili do prejšnjega stanja in se ocenjuje, kot bi bilo ustanovljeno na novo.

Opazimo, da so na dolgi rok višje ocene bolj stabilne kot nižje. Iz tabele 3 je razvidno, da so podjetja z oceno AAA v 87.17% primerov obdržala isto oceno po preteku leta. Za podjetja z oceno CCC pa se to zgodi v 43.89% primerih. Vse raziskave, ki jih je izvedla bonitetna agencija S&P, kažejo negativno korelacijo med bonitetno oceno in nezmožnostjo plačila dolga. Višja kot je ocena, nižje so opazovane frekvence prehoda v stanje neplačila in obratno. Podobne raziskave so večkrat potrdile tudi dejstvo, da so višje ocene običajno bolj stabilne, medtem ko špekulativne ocene na splošno podležejo večji volatilnosti.

V izračune so vključene samo ocene podjetij na začetku in koncu vsakega leta, ne pa tudi spremembe, ki se zgodijo tekom leta. Na primer, če je podjetje na začetku leta ocenjeno z oceno A in se ocena sredi leta spremeni v BBB, proti koncu leta pa spet v A, je to podjetje vključeno v skupino podjetij, ki so začela leto z oceno A in ga s tako oceno tudi končala. Če subjekt med letom postane nesolventen ali zaradi kakšnih drugih razlogov prekine sodelovanje z bonitetno agencijo v sredini leta, se mu šele konec leta dodeli oceno D ali NR (*not rated*).

7.2 Aproksimacija generatorja po treh metodah

Tabela 3, v kateri so prikazane povprečne frekvence prehodov med bonitetnimi ocenami, predstavlja izhodišče za analizo. V zadnjem stolpcu tabele je za vsako bonitetno oceno prikazan delež podjetij, ki jim je bila ocena umaknjena tekom leta. Da dobimo veljavno prehodno matriko, je potrebno narediti določene predpostavke o podjetjih, ki so bila odstranjena iz vzorca. En način je, da predpostavimo, da se podjetjem v kategoriji NR ni spremenila bonitetna ocena in vrednosti prištejemo diagonali. V tem primeru verjetnosti neplačila ostanejo nespremenjene. Drugi način prilagoditve je, da vrednosti iz stolpca NR sorazmerno razporedimo med ostale ocene. Verjetnosti neplačila se tako nekoliko spremenijo, vendar je predpostavka o sorazmerni razdelitvi veliko bolj realistična.

Kot smo že razložili v poglavju o markovskih verigah, je v modelu stanje neplačila absorbirajoče stanje. To pomeni, da podatkom iz tabele 3 dodamo še eno vrstico, ki pripada oceni D in ima povsod vrednost 0, razen na diagonali, kjer ima vrednost 1. Tako smo iz tabele 3 dobili matriko P velikosti 8×8, ki predstavlja prehodno matriko enega koraka markovske verige v diskretnem času.

Cilj je preveriti, ali za dano prehodno matriko P obstaja generator markovskega procesa v zveznem času in v primeru, da ne obstaja, z različnimi metodami poiskati približek za generator.

$$P = \begin{pmatrix} 0.9023 & 0.0899 & 0.0056 & 0.0005 & 0.0008 & 0.0003 & 0.0005 & 0.0000 \\ 0.0056 & 0.8994 & 0.0871 & 0.0059 & 0.0006 & 0.0008 & 0.0002 & 0.0002 \\ 0.0003 & 0.0195 & 0.9158 & 0.0580 & 0.0038 & 0.0016 & 0.0002 & 0.0007 \\ 0.0001 & 0.0013 & 0.0378 & 0.9090 & 0.0414 & 0.0065 & 0.0015 & 0.0024 \\ 0.0002 & 0.0004 & 0.0017 & 0.0574 & 0.8431 & 0.0797 & 0.0080 & 0.0095 \\ 0.0000 & 0.0003 & 0.0012 & 0.0026 & 0.0614 & 0.8361 & 0.0498 & 0.0485 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0019 & 0.0028 & 0.0085 & 0.1600 & 0.5130 & 0.3138 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

Tretja točka izreka 5.3 pravi, da če za prehodno matriko P obstajata stanji i in j, tako da je j dosegljivo iz i in velja $p_{ij} = 0$, potem generator ne obstaja. S pregledom matrike P hitro ugotovimo, da je pogoj iz izreka izpolnjen in da zato natančen generator za našo empirično matriko ne obstaja. Direktna verjetnost neplačila za podjetja z bonitetno oceno AAA je 0, pri čemer se lahko zgodi, da se podjetju ocena z AAA najprej zniža na AA ($p_{12} > 0$) in nato še z AA na D ($p_{28} > 0$).

Ker natančen generator ne obstaja, je potrebno z regularizacijskimi algoritmi prilagoditi matriko Q, ki jo dobimo iz razvoja za logaritem 5.1.

$$Q = \begin{pmatrix} -0.103118 & 0.099817 & 0.001384 & 0.000205 & 0.000872 & 0.000187 & 0.000699 & -0.000141 \\ 0.006206 & -0.107377 & 0.095985 & 0.003453 & 0.000390 & 0.000786 & 0.000239 & 0.000113 \\ 0.000260 & 0.021461 & -0.090298 & 0.063525 & 0.002754 & 0.001466 & 0.000142 & 0.000587 \\ 0.000096 & 0.000978 & 0.041419 & -0.098248 & 0.047119 & 0.005057 & 0.001698 & 0.001883 \\ 0.000225 & 0.000386 & 0.000475 & 0.065617 & -0.175734 & 0.094263 & 0.008182 & 0.006590 \\ -0.000009 & 0.000320 & 0.001217 & 0.000456 & 0.073291 & -0.190326 & 0.075473 & 0.039468 \\ 0.000000 & -0.000077 & 0.002498 & 0.003582 & 0.003139 & 0.243359 & -0.678380 & 0.425893 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{pmatrix}$$

Opazimo, da ima matrika Q negativne izvendiagonalne vrednosti v prvi, šesti in sedmi vrstici. S pomočjo algoritmov, opisanih v šestem poglavju, bomo izračunali tri generatorje, ki aproksimirajo Q.

QDA je generator, dobljen s pomočjo algoritma za diagonalno prilagoditev, QWA je generator, dobljen s pomočjo algoritma za uteženo prilagoditev in QOG generator, dobljen po metodi kvazi optimizacije. Izračuni so izvedeni v programu `Matlab` s kodo priloženo v prilogah.

$$QDA = \begin{pmatrix} -0.103164 & 0.099817 & 0.001384 & 0.000205 & 0.000872 & 0.000187 & 0.000699 & 0.000000 \\ 0.006206 & -0.107171 & 0.095985 & 0.003453 & 0.000390 & 0.000786 & 0.000239 & 0.000113 \\ 0.000260 & 0.021461 & -0.090195 & 0.063525 & 0.002754 & 0.001466 & 0.000142 & 0.000587 \\ 0.000096 & 0.000978 & 0.041419 & -0.098250 & 0.047119 & 0.005057 & 0.001698 & 0.001883 \\ 0.000225 & 0.000386 & 0.000475 & 0.065617 & -0.175739 & 0.094263 & 0.008182 & 0.006590 \\ 0.000000 & 0.000320 & 0.001217 & 0.000456 & 0.073291 & -0.190226 & 0.075473 & 0.039468 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.002498 & 0.003582 & 0.003139 & 0.243359 & -0.678471 & 0.425893 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{pmatrix}$$

$$QWA = \begin{pmatrix} -0.103141 & 0.099795 & 0.001384 & 0.000205 & 0.000872 & 0.000187 & 0.000699 & 0.000000 \\ 0.006212 & -0.107274 & 0.096077 & 0.003456 & 0.000390 & 0.000787 & 0.000239 & 0.000113 \\ 0.000260 & 0.021473 & -0.090246 & 0.063561 & 0.002756 & 0.001467 & 0.000142 & 0.000587 \\ 0.000096 & 0.000978 & 0.041419 & -0.098249 & 0.047119 & 0.005057 & 0.001698 & 0.001883 \\ 0.000225 & 0.000386 & 0.000475 & 0.065616 & -0.175736 & 0.094262 & 0.008182 & 0.006590 \\ 0.000000 & 0.000320 & 0.001217 & 0.000456 & 0.073310 & -0.190275 & 0.075493 & 0.039478 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.002498 & 0.003582 & 0.003139 & 0.243343 & -0.678425 & 0.425864 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{pmatrix}$$

$$QOG = \begin{pmatrix} -0.102907 & 0.100029 & 0.000000 & 0.000416 & 0.001083 & 0.000398 & 0.000910 & 0.000070 \\ 0.000000 & -0.106461 & 0.096901 & 0.004369 & 0.001306 & 0.001702 & 0.001155 & 0.001028 \\ 0.003341 & 0.000000 & -0.087217 & 0.066605 & 0.005835 & 0.004546 & 0.003222 & 0.003668 \\ 0.006013 & 0.006894 & 0.000000 & -0.092331 & 0.053035 & 0.010974 & 0.007615 & 0.007800 \\ 0.009598 & 0.009759 & 0.009848 & 0.000000 & -0.166360 & 0.103636 & 0.017556 & 0.015964 \\ 0.010476 & 0.010806 & 0.011703 & 0.010942 & 0.000000 & -0.179840 & 0.085959 & 0.049954 \\ 0.034763 & 0.034687 & 0.037261 & 0.038345 & 0.037903 & 0.000000 & -0.643616 & 0.460657 \\ 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 & 0.000000 \end{pmatrix}$$

7.3 Primerjava metod

Da lahko primerjamo metode med sabo, najprej izračunajmo približno enoletno prehodno matriko $\hat{P}$ za vsakega izmed generatorjev QDA, QWA in QOG. Primerjali bomo odstopanje med originalno prehodno matriko P in njeno aproksimacijo $\hat{P}$ s pomočjo različnih matričnih razdalj.

Z $M_1(P)$ označimo L_1 razdaljo, ki je definirana kot povprečna absolutna razlika elementov

$$M_1(P) = ||P - \hat{P}||_1 = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} |p_{ij} - \hat{p}_{ij}|.$$

Z $M_\infty(P)$ označimo neskončno razdaljo, ki predstavlja maksimalno absolutno razliko elementov

$$M_\infty(P) = ||P - \hat{P}||_\infty = \max_{i,j} |p_{ij} - \hat{p}_{ij}|.$$

Čeprav se pogosto uporabljata, zgornji dve razdalji imata glavno pomanjkljivost v tem, da zagotovita le relativno primerjavo med dvemi matrikami, ne podata pa nobene absolutne mere. Zato sta Jafry in Schuermann konstruirala novo razdaljo, ki uporablja singularne vrednosti matrike [10]. Večja vrednost razdalje pomeni, da je matrika bolj dinamična, saj ima v povprečju manjše diagonalne elemente.

Za dano prehodno matriko P, definiramo t.i. mobilnostno matriko $\tilde{P}$ kot razliko med P in identiteto iste velikosti $\tilde{P} = P - I$. Ker identična matrika označuje, da ni nobenih prehodov, na ta način v $\tilde{P}$ izoliramo dinamiko prehodov matrike P. Potem je

$$M_{SVD}(P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i(\tilde{P}^T \tilde{P})}.$$

Razdalja je torej definirana kot povprečje singularnih vrednosti mobilnostne matrike.

V tabeli 4 so prikazane vrednosti vseh treh razdalj za enoletne matrike, dobljene s pomočjo treh opisanih metod za aproksimacijo generatorja.

	QDA	QWA	QOG
M_1	0.1116	0.1088	0.1062
M_∞	1.8494	1.3391	1.3376
M_{SVD}	0.2447	0.0816	0.0013

Tabela 4: Primerjava razdalj za približne enoletne prehodne matrike ($\times 10^{-4}$)

V vseh treh primerih se kot najboljša izkaže metoda, ki sloni na optimizaciji.

8 Sklep in smernice za izboljšave

Osrednji del magistrske naloge opisuje ocenjevanje generatorske matrike markovskega procesa na podlagi diskretnih podatkov o prehodih med bonitetnimi ocenami. Za namen izračuna kreditnega tveganja in s tem povezane minimalne kapitalske zahteve ter za vrednotenje kreditnih izvedenih finančnih instrumentov potrebujemo verjetnosti neplačila za poljuben čas. Modeli za izračun verjetnosti neplačila, ki slonijo na teoriji markovskih verig, omogočajo izračun napovedi za poljuben čas tako, da predpostavijo, da je gibanje bonitetne ocene dolžnika, ki je glavna determinanta verjetnosti neplačila, opisano z markovskim procesom.

S pomočjo generatorja markovskega procesa lahko izračunamo prehodne matrike in s tem verjetnosti neplačila za poljuben čas. Direktne metode za ocenjevanje generatorja na podlagi empiričnih podatkov niso zanesljive, saj predpostavljajo zveznost trajektorij ocenjevanja. Da bi bile ocene prehodnih verjetnosti zanesljive, bi morali podatke o prehodih med bonitetnimi ocenami zbirati vsaj na tedenskem nivoju, kar pa v praksi ni izvedljivo, zato tak način zaenkrat ni uporaben.

Namesto direktne metode ocenjevanja generatorja se iz empiričnih podatkov, ki se v praksi objavljajo na letnem nivoju, oceni prehodna matrika za obdobje enega leta. Ta matrika predstavlja prehodno matriko enega koraka markovske verige v diskretnem času in jo skupaj z začetnim pogojem v celoti opisuje. Z vložitvijo diskretne markovske verige v zvezni markovski proces dobimo iskano generatorsko matriko. Pokazali smo, da v praksi tak generator največkrat ne obstaja in ga je zato potrebno aproksimirati. V nalogi so bile predstavljene tri metode aproksimacije generatorja, od katerih se je kot najboljša izkazala metoda, ki sloni na optimizaciji.

Pri modeliranju verjetnosti neplačila z markovskimi verigami se je potrebno vprašati, ali je markovska lastnost smiselna za opisovanje dinamike prehodov med bonitetnimi ocenami. Bluhm in Overbeck sta v [2] pokazala, da se kljub natančnemu generatorju napovedane verjetnosti neplačila za daljše obdobje znatno razlikujejo od dejanskih vrednosti. Za reševanje tega problema sta avtorja pri analizi obdržala markovsko lastnost, opustila pa sta predpostavko o homogenosti časa in za modeliranje uporabila nehomogeno markovsko verigo v zveznem času. Glede na dobljene rezultate lahko sklepamo, da markovska lastnost pri modeliranju verjetnosti neplačila ni tako vprašljiva. Izkaže pa se, da z opustitvijo predpostavke o homogenosti časa markovski proces dobi zadostno fleksibilnost, ki se odraža v boljšem ujemanju z empirično pridobljenimi podatki.

Nehomogena markovska veriga v zveznem času je definirana s t.i. Nelson-Aalenovo cenilko, ki za izračun generatorja zahteva poznavanje točnih časov prehodov med bonitetnimi ocenami [22]. Kot smo že omenili v poglavju o ocenjevanju generatorja homogene markovske verige, se podatki o prehodih sporočajo enkrat letno, pri čemer točen čas prehoda navadno ni znan. Zaradi tega ocenjevanje prehodnih matrik s pomočjo metod za direktno ocenjevanje generatorja homogenega ali nehomogenega markovskega procesa ni primerno.

Vidimo, da ima visoka frekvenca opazovanj prehodov med bonitetnimi ocenami ključni pomen pri zagotavljanju kakovostnih vhodnih podatkov za opisane modele. Še več, če so podatki dovolj zgoščeni, je možno direktno oceniti generator in se s tem izogniti težavam, ki se pojavijo pri vložitvi markovskega procesa v diskretnem času. Poleg tega direktno ocenjevanje omogoča učinkovito obravnavo informacij, ki sicer ne bi bile upoštevane.

Dodatna izboljšava se nanaša na absorbirajoče stanje v opisanih modelih. Modeli z absorbirajočim stanjem imajo nezanemarljivo teoritično pomanjkljivost, ki še posebej pride do izraza pri dolgoročnih napovedih. Dolgoročne dinamike prehodov med bonitetnimi ocenami se ne da ustrezno opisati s tovrstnimi modeli, saj ne predvidevajo pojavljanja novih podjetij na trgu. Ta problem lahko rešimo z uporabo rojstno smrtnih procesov, ki modelirajo tako vstop novih podjetij v ocenjevalni proces kot prenehanje ocenjevanja. Pri teh modelih se generator markovskega procesa ocenjuje direktno iz podatkov, s čimer se izognemo problemom, povezanim z vložitvijo.

Kot vidimo, je prostora za izboljšave še veliko, za razvoj v prav smer pa je potrebno odgovorno vodstvo s strani regulatorjev. Le ti lahko pospešijo implementacijo novih pristopov, ki se bodo uspešno spopadli s problemi ocenjevanja kreditnega tveganja.

Literatura

[1] C. Bluhm, L. Overbeck in C. Wagner, *An Introduction to Credit Risk Modeling*, Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, London 2010.

[2] C. Bluhm in L. Overbeck, *Calibration of PD Term Structures: To Be Markov or Not to Be*, Risk **20(11)** (2007), str. 98–103.

[3] *Corporate Ratings Criteria*, Standard & Poor's, The McGraw-Hill Companies (2008).

[4] J. R. Cuthbert, *On Uniqueness of the Logarithm for Markov Semi-gropus*, Journal London Mathematical Society **s2-4(4)** (1972), str. 623–630.

[5] *Default, Transition, and Recovery: 2012 Annual Global Corporate Default Study And Rating Transitions*, Standard & Poor's Financial Services (2013).

[6] B. Engelmann in R. Rauhmeier, *The Basel II Risk Parameters: Estimation, Validation, Stress Testing - with Applications to Loan Risk Management*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2011.

[7] J. S. Fons, *Using Default Rates to Model the Term Structure of Credit Risk*, Financial Analysts Journal **50(5)** (1994), str. 25–33.

[8] R. Israel, J. Rosenthal in J. Wei, *Finding Generators for Markov Chains via Empirical Transition Matrices, with Application to Credit Ratings*, Mathematical Finance **11(2)** (2001), str. 245–265.

[9] Y. Jafry in T. Schuermann, *Measurement, Estimation and Comparison of Credit Migration Matrices*, Journal of Banking and Finance **28(11)** (2003), str. 2603–2639.

[10] Y. Jafry in T. Schuermann, *Metrics for Comparing Credit Migration Matrices*, Wharton School Center for Financial Institutions, University of Pennsylvania, Working Paper (2003).

[11] R. A. Jarrow, D. Lando in S. M. Turnbull, *A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads*, The Review of Financial Studies **10(2)** (1997), str. 481–523.

[12] J. G. Kemeny in J. L. Snell, *Finite Markov Chains*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo 1976.

[13] J. F. C. Kingman, *The Imbedding Problem for Finite Markov Chains*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **1(1)** (1962), str. 14–24.

[14] A. Kreinin in M. Sidelnikova, *Regularization Algorithms for Transition Matrices*, Algo Research Quarterly **4(1/2)** (2001), str. 23–40.

[15] L. Lin, *Roots of Stochastic Matrices and Fractional Matrix Powers*, School of Mathematics, The University of Manchester (2011).

[16] P. Millossovich, *An Extension of the Jarrow-Lando-Turnbull Model to Random Recovery Rate*, Facoltà di Economia, Università degli Studi di Trieste (2003).

[17] J. R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

[18] K. Sigman, *Discrete-time Markov chains*, 2009 (citirano 17.11.2013), dostopno na naslovu: `http://www.columbia.edu/~ks20/stochastic-I/stochastic-I-MCI.pdf`.

[19] B. Singer in S. Spilerman, *The Representation of Social Processes by Markov Models*, The American Journal of Sociology **82(1)** (1976), str. 1–54.

[20] *Sklep o izračunu kapitalske zahteve za kreditno tveganje po pristopu na podlagi notranjih bonitetnih sistemov za banke in hranilnice*, Uradni list RS, št. 22/12 (z dne 23.3.2012).

[21] *Sklep o izračunu kapitalske zahteve za kreditno tveganje po standardiziranem pristopu za banke in hranilnice*, Uradni list RS, št. 100/12 (z dne 20.12.2012).

[22] S. Trueck in S. T. Rachev, *Rating Based Modeling of Credit Risk - Theory and Application of Migration Matrices*, Elsevier Academic Press, Burlington-San Diego 2009.

[23] H. Tuenter, *The Minimum L_2-Distance Projection onto the Canonical Simplex: A Simple Algorithm*, Algorithmics Inc., Working paper (2000).

[24] L. J. White, *Market: The Credit Rating Agencies*, Journal of Economic Perspectives **24(2)** (2010), str. 211–226.

[25] L. J. White, *The Credit-Rating Agencies and the Subprime Debacle*, Critical Review, **21(2–3)** (2009) str. 389—99.

Priloga A   Algoritem za diagonalno prilagoditev

```
function f = QDA(Q)

QDA = Q;
for i=1:length(Q)
    for j=1:length(Q)
          if (i≠j) && (QDA(i,j)<0)
              QDA(i,j)=0;
          end
    end
end

for i=1:length(Q)
   for j=1:length(Q)
         if (i==j) QDA(i,j) = ...
             -sum(QDA(i,1:i-1))-sum(QDA(i,i+1:length(Q)));
         end
   end
end

QDA
end
```

Priloga B Algoritem za uteženo prilagoditev

```
function f = QWA(Q)

QWA = Q;
for i=1:length(Q)
    for j=1:length(Q)
          if (i≠j) && (QWA(i,j)<0)
              QWA(i,j)=0;
          end
    end
end

for i=1:length(Q)-1
    for j=1:length(Q)
        QWA(i,j) = QWA(i,j) - ...
            abs(QWA(i,j))*sum(QWA(i,:))/sum(abs(QWA(i,:)));
    end
end

QWA
end
```

Priloga C Kvazi optimizacija generatorja

```
function f = QOG(Q)

 QOG = zeros(length(Q));

 for i = 1:length(Q);
     a = Q(i,:);
     n = length(a);
     lambda = 1/n * sum(a);

     b = zeros(1,n);
     for k=1:n
          b(k) = a(k) - lambda;
     end

     [c, ind] = sort(b, 'ascend');

     l = zeros(1,n-1);
     for k=1:n-1
         if (n-k+1) * c(k+1) ≥ c(1) + sum(c(k+1:n))
             l(k)=1;
         end
     end
     l_min = find(l,1);

     d = zeros(1,n);
     d(1) = c(1) - (c(1)+sum(c(l_min+1:n)))/(n-l_min+1);
     for k=l_min+1:n
         d(k) = c(k) - (c(1)+sum(c(l_min+1:n)))/(n-l_min+1);
     end

     id = 1:n;
     nov_ind(ind) = id;

     QOG(i,:) = d(nov_ind);
 end
     QOG
end
```