UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Anja Drozg

Ameriške opcije brez dospetja

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Janez Bernik
Somentor: asist. dr. Gregor Šega

Ljubljana, 2011

Kazalo

Povzetek

V delu diplomskega seminarja bom opisala optimalni strategiji, ki določata ceni ameriške prodajne in nakupne opcije na delnice v različici Black–Scholesovega modela, to je Garman–Kohlhagenovem modelu. Model opredeljujejo predpostavke, na podlagi katerih tudi temelji. Ker nas bodo zanimale vrednosti ameriških opcij brez dospetja, bosta ključnega pomena dve ponastavitvi. To sta izbiri zgornje meje za prodajno opcijo, in spodnje meje za nakupno opcijo, ter izbira optimalne vrednosti za izračun ameriške nakupne in prodajne opcije.

Black–Scholesov model temelji na Brownovem gibanju, zato lastnosti le–tega pomembno določajo lastnosti modela. To gibanje je povezano s problemom naključnega sprehoda. Gre za proces, kjer je pozornost usmerjena na premik določenega delca v času pod vplivom naključnih trkov. Z lastnostmi, ki veljajo za gibanje, v delu pokažemo fraktalno lastnost Brownovega gibanja.

Cilj, ki smo ga dosegli z Black–Scholesovim modelom, sta povezava in prehod med vrednostjo ameriške nakupne in prodajne opcije. Ta povezava se pokaže v simetriji med obema opcijama, angleško *put–call symmetry*, ki v bistvu pride iz dejstva, da pravica do prodaje tuje valute ustreza pravici do nakupa domače valute z upoštevanjem tečaja.

Abstract

This diploma seminar describes the optimal strategies that define the price of the American call and put options for stocks in the version of the Black–Scholes model. That certain version is called the Garman–Kohlhagen model. A model is defined by the suppositions which also represent its basis. As we are interested in the value of the perpetual American currency options, the two settings will be crucial. Those two settings are the choice of the superior limit for put option and the inferior limit for call option, and the choice of the optimal value for the calculation of American call and put option.

The characteristics of the Brownian motion define the Black–Scholes model. A Brownian motion is connected with the problem of the random walk. That is a process which focuses on the movement of the certain particle in time suspect to random collisions. In the work we use the Brownian motion characteristics to show the fractal property of that same motion.

The connection and the passage between the value of an American call and put option is the aim which has been achieved with a Black-Scholes model. That connection is also the idea of American put-call symmetry. The symmetry stems from the fact that the right to sell the foreign currency corresponds with the right to buy the domestic currency, considering the exchange rate.

Math. Subj. Class. (2010): 60H30, 91G20
Ključne besede: Opcije, Simetrija ameriške nakupne in prodajne opcije, Black - Scholesov model, Brownovo gibanje
Keywords: Options, Amercan put - call symmetry, Black - Scholes model, Brownian motion

1. Uvod

Opcije pomenijo zavarovanje, saj kupca oziroma imetnika opcije zavarujejo pred neugodnim gibanjem cen tečaja. Po drugi strani pa dopuščajo, da ima korist od ugodnih premikov. Da bi si lahko kupec opcije pridobil to pravico, mora plačati premijo ob sklenitvi pogodbe. Premija pa je hkrati njegova najvišja možna izguba, vendar je teoretična možnost dobička, vsaj pri nakupni opciji, navzgor neomejena.

V delu diplomskega seminarja se bom osredotočila na ameriške opcije. Moj namen je, da s pomočjo Black–Scholesovega modela s poenostavljenimi mejnimi pogoji, predstavim optimalno strategijo za vrednost ameriške nakupne in prodajne opcije. Ta tip opcije omogoča imetniku, da jo lahko izvrši v kateremkoli trenutku do zapadlosti. To pomeni, da lahko osnovni instrument bodisi kupi bodisi proda do datuma dospetja. Če je datum fiksno določen v prihodnosti, govorimo o ameriških opcijah z dospetjem. V primeru, da opcija nima datuma zapadlosti, pa govorimo a ameriških opcijah brez dospetja.

Z ameriškimi opcijami brez dospetja se praktično ne trguje [8]. So pa zanimive, ker so enostavnejše od opcij z dospetjem. V takih primerih je dobro vedeti, kdaj je najboljši trenutek izvršitve, da bo naš dobiček čim večji. To nas vodi do preučevanja ameriških opcij kot problem iskanja optimalnega časa ustavljanja.

Delo diplomskega seminarja je razdeljeno na tri poglavja. V prvem poglavju o opcijah je podanih nekaj splošnih lastnosti, ki veljajo zanje. Naštete so vrste opcij, ki se med sabo razlikujejo glede na datum izvršitve, način trgovanja in glede na osnovni instrument na katerega so izdane. Opcije so lahko nakupne ali prodajne. V obeh primerih dajejo imetniku pravico, ne pa tudi dolžnosti do nakupa oziroma prodaje osnovnega instrumenta.

V ospredje postavimo ameriško opcijo, ki se od evropske razlikuje po datumu izvršitve. Ravno zaradi razlike v času izvršitve, velja, da je ameriška opcija bolj privlačna za trgovalce. Preden pa izračunamo vrednosti opcij v Black–Scholesovem modelu, pogledamo kako ga s svojimi lastnostmi oblikuje Brownovo gibanje. To gibanje je v 19. stoletju odkril Škot Robert Brown in je povezano s problemom naključnega sprehoda.

V drugem poglavju predstavim Black–Scholesov model, ki je primeren za vrednotenje opcij. S pomočjo dodatne predpostavke o tuji stopnji donosa δ, izračunamo vrednosti ameriške nakupne in prodajne opcije. V modelu, kjer meje vnaprej opredelimo, vrednosti opcij izpeljemo s pomočjo martingalov in se tako posledično izognemo računanju z diferencialnimi enačbami. Korak računanja nam poenostavi uporaba Laplaceove transformacije.

V zadnjem, tretjem poglavju bomo pogledali simetrijo med ameriško nakupno in prodajno opcijo. Povezava med opcijama je posledica rešitve problema njunega vrednotenja v Black–Scholesovem modelu. Za strog dokaz simetrije med nakupno in prodajno opcijo je potrebno precej dejstev iz teorije slučajnih procesov. Ker pa mi te cene v primeru opcij brez dospetja izračunamo, jo lahko preverimo.

2. Opcije

Opcija je vrednostni papir in jo uvrščamo med izvedene finančne instrumente. Je pogodba, podobna terminski pogodbi. Najpomembnejša razlika med opcijo in terminsko pogodbo je ta, da sta kupec in prodajalec terminske pogodbe v času sklenitve oba vezana na izpolnitev pogodbe, medtem ko to ne velja za opcije. Slednja predstavlja le možnost, da se določen posel izvede, v kolikor se kupcu še vedno zdi smiselno opraviti takšen nakup po prej dogovorjeni ceni. Cena opcije oziroma premija je odvisna od vrednosti osnovnega instrumenta za katerega so izdane. Imetnik ima pravico, ne pa tudi dolžnost, da kupi ali proda premoženje na katerega je napisana opcija po dani ceni pred (ameriške opcije) ali ob (evropske opcije) prihodnjem vnaprej dogovorjenem datumu. Cena osnovnega instrumenta, za katerega je opcija izdana, je vnaprej dogovorjena. Imenujemo jo izvršilna cena. Opcija je torej pogodba med nosilcem opcije in izdajateljem opcije o prodaji ali nakupu osnovnega premoženja po izvršilni ceni [14].

Izvedeni finančni instrumenti temeljijo na pogodbi oziroma dogovoru med dvema strankama. Njihova vrednost temelji na vrednosti osnovnega instrumenta. Lastniku prinašajo točno določene pravice in obveznosti vezane na osnovne finančne instrumente. Opcija spada v skupino izvedenih finančnih instrumentov, kjer izraz poudarja, da je cena teh finančnih oblik odvisna oz. izvedena iz vrednosti osnovnega instrumenta na katerega je napisana. Pomembni so, ker [13]:

- zavarujejo proti tveganju,
- temeljijo na pogodbi oz. dogovoru med dvema strankama,
- omogočajo odkrivanje cene v prihodnosti,
- omogočajo jasno, pošteno, likvidno, varno in stroškovno učinkovito trgovanje.

Sprejem odločitve za nakup ali prodajo osnovnega instrumenta imenujemo izvršitev opcije. Glede na to, kateri osnovni instrument imamo, ločimo več vrst opcij:

- opcije na delnice,
- opcije na tržni indeks,
- opcije na terminske pogodbe,
- devizne ali valutne opcije,
- obrestne opcije.

Z opcijami se lahko trguje na različne načine: Na organiziranih trgih, kjer se trguje preko borze in na prostih trgih *(angl. over the counter)*, kjer poteka trgovanje nepostredno med udeleženci. Za trgovanje z opcijami preko borze velja:

- Ob izpolnitvi naročila je direktna povezava med kupcem in ponudnikom prekinjena.
- Transakcijski stroški so nižji za opcije, s katerimi se trguje prek borze.
- Izvršilna cena in dan zapadlosti opcije sta standardizirana.

Prosti trg ali trg preko okenc je pomemben predvsem za manjša podjetja, ki ne zadovoljujejo kriterijev za uvrstitev na borzni trg. Sestavljajo ga samo vlagatelji, ki so hkrati trgovci. OTC posel pomeni transakcijo z vrednostnimi papirji izven organiziranega trga, kjer so stroški trgovanja seveda višji, saj je potrebno vsako pogodbo posebaj prikrojiti. Preko okenca se trguje z različnimi opcijami, roki zapadlosti pa so poljubni. Na neorganiziranem trgu so opcije manj likvidne kot borzno trgovane opcije, kar pa ne predstavlja skrbi za institucionalne investitorje, saj uporabljajo OTC opcije kot del premoženjske ali dolžniške strategije in jih nameravajo obdržati do dneva zapadlosti.

Za opcije lahko rečemo, da predstavljajo veliko mero zavarovanja za kupca, v primeru, da bi se cene za določen osnovni instrument v prihodnosti zelo spremenile. *Nakupna opcija (angl. call option)* daje lastniku pravico, ne pa obveznosti, do nakupa osnovnega premoženja po dogovorjeni izvršilni ceni, kar je donosno ob rastočih tečajih. Za prodajalca predstavlja nakupna opcija obveznost, da bo na kupčevo željo dolžan izpolniti zahteve, ki izhajajo iz opcijske pogodbe oziroma bo moral prodati blago po določeni ceni.

Prodajna opcija (angl. put option) daje lastniku možnost, da proda osnovno premoženje po vnaprej določeni ceni v določenem času ali na določen dan v prihodnosti. Izdajatelj prodajne opcije pa ima obveznost nakupa tega istega osnovnega premoženja. Obratno kot pri nakupni opciji velja, da je prodajna opcija donosna ob padajočih tečajih.

Glede na datum izvršitve delimo opcije na evropske in ameriške. *Evropske opcije* so tiste opcije, ki se lahko izvedejo le na določen dan v prihodnosti. *Ameriške opcije* pa je mogoče izvršiti na katerikoli delovni dan pred datumom zapadlosti in ne samo na dan zapadlosti. Možnost predčasne izvršitve ameriške opcije omogoča nekoliko višjo ceno tem opcijam, saj izdajatelj opcije prevzame dodatno tveganje predčasne izvršitve, kupcu pa dajejo več pravic [1].

2.1. **Nakup in prodaja nakupne opcije.**

Investitor si z nakupom nakupne opcije kupi pravico do nakupa osnovnega instrumenta po v naprej znani vrednosti. Pravico nakupa želi izkoristiti, ko bo vrednost osnovnega instrumenta narasla na v naprej določeno ceno v določenem času. Ko se izvede prodaja nakupne opcije, mora lastnik izročiti delnice kupcu, lastnik pa si seveda želi, da bi vrednost padla pod dogovorjeno vrednost, saj mu v tem primeru ne bi bilo potrebno prodati omenjenih instrumentov. Izguba kupca nakupne opcije je lahko največ enaka premiji, ki jo je za opcijo plačal. Notranja vrednost nakupne opcije je razlika med trenutno tržno vrednostjo osnovnega instrumenta in izvršilno ceno, v primeru, da je ta vrednost negativna, je notranja vrednost enaka 0 [7].

Možni donosi investitorja, ki je kupil nakupno opcijo s ceno osnovnega instrumenta (npr. delnice) S_t in izvršilno ceno K , so naslednji:

$$\{S_t - K\} \quad \text{če je} \quad S_t > K$$
$$0 \quad \text{če je} \quad S_t \leq K$$

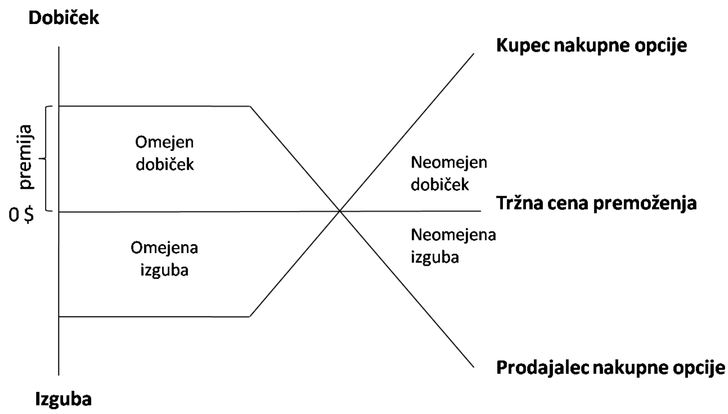
Če je tržna cena delnice večja od izvršilne cene, potem je dobiček imetnika opcije enak razliki med tržno in izvršilno ceno. Če je tržna cena manjša, opcija nima vrednosti.

Donos prodajalca nakupne opcije s ceno osnovnega premoženja:

$$-\{S_t - K\} \quad \text{če je} \quad S_t > K$$

$$0 \quad \text{če je} \quad S_t \leq K$$

Dobiček prodajalca je enak vsoti donosa in premije.



2.2. **Nakup in prodaja prodajne opcije.**

Prodajne opcije se lahko prodajajo ali kupujejo. Pravico prodaje želi kupec prodajne opcije izkoristiti, ko bo vrednost delnice padla. Tudi pri tej opciji je dogovorjen čas prodaje. Dobiček, ki ga lahko dosežemo, je kvečjemu enak izvršilni ceni K. Možnost izgube, ki se ji izpostavljamo, je v višini plačane premije. [7]

Možni donos kupca prodajne opcije so naslednji:

$$\{K - S_t\} \quad \text{če je} \quad S_t < K$$

$$0 \quad \text{če je} \quad S_t \geq K$$

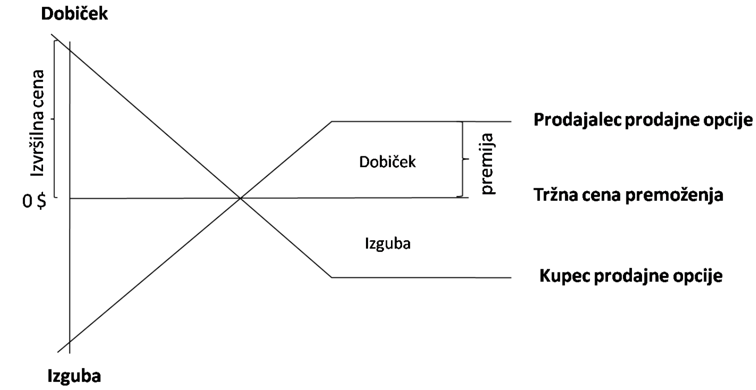
Pri prodajnih opcijah je notranja vrednost razlika med izvršilno in tržno ceno osnovnega instrumenta. Tudi tukaj velja, če je ta vrednost negativna, je notranja vrednost opcije enaka 0. Dobiček kupca je torej enak razliki med donosom in premijo.

Donos prodajalca:

$$-\{K - S_t\} \quad \text{če je} \quad S_t < K$$

$$0 \quad \text{če je} \quad S_t \geq K$$

Dobiček prodajalca je enak vsoti donosa in premije.



2.3. **Ameriška opcija.**

Ameriška opcija je opcija, ki daje pravico izvršitve kadarkoli do trenutka zapadlosti. To je glavna razlika, po kateri se loči od evropske opcije. Zaradi omenjene lastnosti pa velja, da je bolj iskana med trgovalci.

S $t = 0$ označimo čas izdaje opcije, s $t = T$ pa čas zapadlosti, S_t je cena osnovnega premoženja v času $t \in [0, T]$. Označimo s K izvršilno ceno, C_T vrednost nakupne opcije ob zapadlosti in P_T vrednost prodajne opcije ob zapadlosti. Imetnik opcije lahko v vsakem času $t \in [0, T]$ bodisi ne naredi nič bodisi opcijo proda ali pa, samo v primeru ameriške opcije, izvrši opcijo.

Za diskontni faktor je predpostavljeno, da velja:

$$D(t, T) \leq 1, \text{če je } t \in [0, T].$$

Ameriško prodajno opcijo lahko zapišemo kot:

$$max\{K - S_t, 0\} \leq max\{KD(t, T) - S_t, 0\} \leq p_t^a \leq K$$

kjer je p_t^a premija, ki jo moramo plačati za prodajno opcijo v času t.

Za ameriško nakupno opcijo velja:

$$max\{S_t - K, 0\} \leq max\{0, S_t - KD(t, T)\} \leq c_t^a$$

kjer je c_t^a premija, ki jo moramo plačati za nakupno opcijo v času t. Zgodnja izvršitev ameriške nakupne opcije se ne obrestuje, saj ima opcija vedno pozitivno vrednost v času.

V času $t \in [0, T]$ je dobiček pri ameriški opciji v primeru izvršitve enak:

$$C_t = max\{S_t - K, 0\} \text{ za nakupno opcijo in}$$
$$P_t = max\{K - S_t, 0\} \text{ za prodajno opcijo}$$

Če za C_t velja, da je $C_t > 0$ oziroma $P_t > 0$, se opcijo splača izvršiti. Ameriško nakupno opcijo izvršimo, kadar je $K > S_t$. Če tržna cena ne ustreza danemu pogoju, imetnik opcije ne bo prodal po vrednosti K, ampak bo prodal osnovno sredstvo na trgu za $S_t > K$. Ravno obratno velja za prodajno opcijo, ki jo izvršimo, če je $S_t < K$. Če je $S_t = K$, je opcija na meji.

Če ameriške opcije nimajo podanega datuma zapadlosti, potem jih imenujemo ameriške opcije brez dospetja. Obstajajo pa tudi ameriške opcije s končnim časovnim obdobjem. Razlika med njima je, da se z opcijami brez dospetja ne trguje, ampak jih obravnavamo kot matematične probleme. Vemo namreč, da ameriške opcije trgovalcem omogočajo večjo izbiro pri datumu izvršitve. Posledično imajo lastniki take opcije večjo možnost pri uravnavanju dobička. Ravno iz vidika dobička pa je opcijo bolj optimalno izvršiti enkrat v prihodnosti, kot pa da ostane neizvršena [8].

Za ameriško opcijo je notranja vrednost opcije spodnja meja za premijo. Veljati mora:

$$c_t \geq C_t \text{ in } p_t \geq P_t,$$

sicer bi imeli arbitražo. Arbitražna strategija bi bila nakup opcije in njena takojšnja izvršitev. Če je razlika $c_t - C_t$ ali $p_t - P_t$ pozitivna, je vrednost opcije v času t ravnotako pozitivna. Če ima ameriška opcija pozitivno vrednost v času t, potem je smiselna njena prodaja kot izvršitev. V primeru prodaje dobimo c_t ali p_t, v primeru izvršitve pa C_t ali P_t. Če imamo ameriško opcijo in enako evropsko opcijo, potem je premija evropske opcije spodnja meja za premijo ameriške opcije. Ameriška opcija nam daje več priložnosti za zaslužek in zato mora biti dražja. Če bi veljalo $c_t^a < c_t^e$ (tu oznaka a pomeni ameriško in oznaka e pomeni evropsko opcijo), potem prodamo evropsko opcijo in kupimo ameriško opcijo ter počakamo do zapadlosti. Opcijo izvršimo, če jo izvrši lastnik evropske opcije. Ta strategija pomeni arbitražo [12].

2.4. **Brownovo gibanje.**

Brownovo gibanje je proces z več praktičnimi in teoretičnimi pomeni. Odkril ga je škotski botanik in biolog Robert Brown leta 1827. Pod mikroskopom je opazoval delce cvetnega prahu plavajočih v vodi. Opazil je njihovo neurejeno gibanje. Ta pojav so odkrili že številni drugi raziskovalci pred njim, Brown pa je bil prvi, ki ga je dejansko proučil in opisal, ni pa podal teoretične razlage za ta opisni pojav. Matematično razlago za Brownovo gibanje je leta 1905 objavil Albert Einstein. Danes pa se Brownovo gibanje uporablja kot model za opis stohastičnih pojavov, kot so na primer gibanje cen delnic na borzi.

Matematično je Brownovo gibanje Wienerjev proces. Proces si lahko predstavljamo kot zvezno limito naključnega sprehoda, pri čemer sta smer in dolžina koraka naključni spremenljivki in je dolžina normalno porazdeljena. Gre torej za proces, kjer je odvisna verjetnostna porazdelitev položaja delca v času $t + dt$ dana za položaj v času t, kot p. Torej je pozornost usmerjena na premik določenega delca v določenem času Δt iz točke, v kateri je bil opažen na začetku, do točke, v kateri je bil opažen kasneje [10].

Brownovo gibanje je povezano s problemom naključnega sprehoda in v splošnem lahko v tem smislu veliko različnih stohastičnih procesov v ustreznih mejah prevedemo na Brownovo gibanje. Izkaže se, da je Wienerjev proces edini časovno enovit (homogen) stohastični proces z neodvisnimi prirastki in je z verjetnostjo ena zvezen. Poleg tega je Brownovo gibanje markovsko oziroma ima markovsko lastnost.

Pri delnicah lahko opazimo, da se njihova vrednost s časom naključno spreminja. Tako lahko gibanje vrednosti delnic uvrstimo med stohastične procese. Za delnice predpostavimo, da sledijo procesu Markova, ki je določen tip stohastičnih procesov, za katerega je značilno, da je samo trenutna vrednost spremenljivke relevantna za napovedovanje vrednosti v prihodnosti. Napovedi vrednosti delnic so nedoločene in jih zato izrazimo v obliki verjetnostnih porazdelitev. Lastnost Markova za delnice je skladna s teorijo šibke oblike učinkovitosti trga, ki trdi, da trenutna vrednost delnice zajema vse pretekle informacije o vrednosti delnice [11].

Definicija 2.1. (Stohastični procesi) Stohastični proces je množica slučajnih spremenljivk X_t, definiranih na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, za vsak čas t v izbrani množici.

Definicija 2.2. (Lastnost Markova) Če predpostavimo, da je mogoče razvoj procesa napovedati le na osnovi sedanjega stanja, ne da bi se sklicevali na zgodovino, rečemo da ima proces lastnost Markova, ki jo izrazimo:

$$P(X_t \in A | X_{s_1} = x_1, X_{s_2} = x_2, ..., X_{s_n} = x_n, X_s = x) = P(X_t \in A | X_s = x)$$

za vse čase $s_1 < ... < s_n < s < t$ in stanja $x_1, ..., x_n, x \in S \subseteq \mathbb{R}$ in vse podmnožice $A \subset S$.

Teoretično je Brownovo gibanje Gaussov -Markov proces s stacionarnimi in neodvisnimi prirastki. Enodimenzionalno Brownovo gibanje $(B_t)_{t>0}$, ima sledeče lastnosti:

a) Če $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n$ potem so $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_n-1}$ neodvisni. Torej ima B_t neodvisne prirastke.

b) Če $s, t \geq 0$ potem:

$$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A (2\pi t)^{-1/2} exp(-x^2/2t) \mathrm{d}x$$

torej je razlika $B_{s+t} - B_s$ normalno porazdeljena, z upanjem 0 in varianco t.

c) Z verjetnostjo ena, je preslikava $t \mapsto B_t$, ki ji rečemo trajektorija, zvezna.

d) *Invariantnost*
$\{B_t - B_0, t > 0\}$ je neodvisno od B_0, in ima isto porazdelitev kot Brownovo gibanje z $B_0 = 0$. Brownovo gibanje, kjer je $B_0 = 0$ skoraj gotovo, imenujemo standardno Brownovo gibanje.

e) *Lastnosti Brownove spremembe skale*
Če $B_0 = 0$ za vsak $t > 0$, potem sta

$$\{B_{st}, s \geq 0\} \qquad \text{in} \qquad \{t^{1/2} B_s, s \geq 0\}$$

enako porazdeljeni. Velja namreč, da

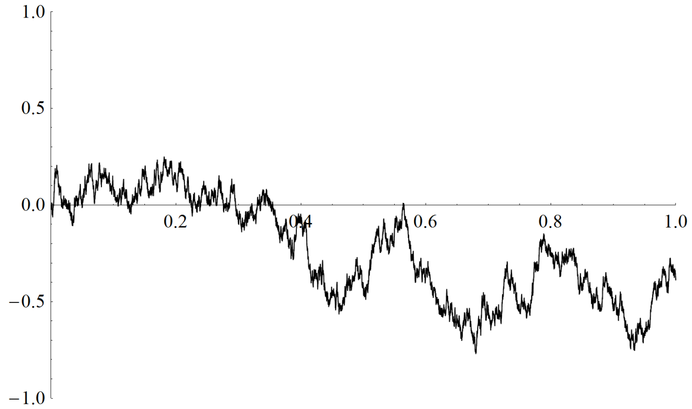
$$B_{st} \sim N(0, st), \text{torej } t^{1/2} B_s \sim \sqrt{t} N(0, s) \quad \text{enako porazdeljeni kot} \quad N(0, st).$$

Natančneje, dve družini slučajnih spremenljivk imajo enake končne porazdelitve in če $s_1 < s_2 < ... < s_n$ potem velja, da sta:

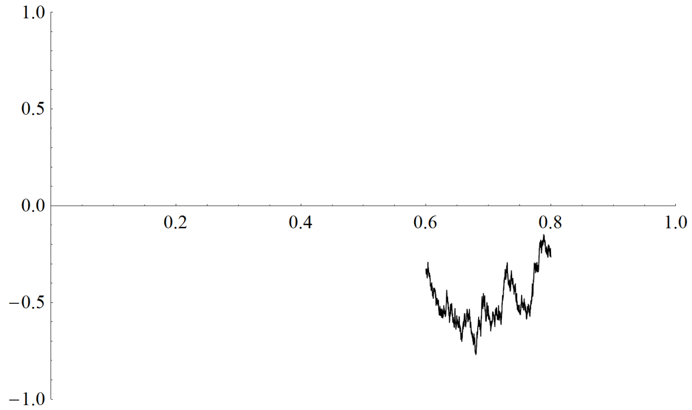
$$(B_{s_1 t}, ..., B_{s_n t}) \qquad \text{in} \qquad (t^{1/2} B_{s_1}, ..., t^{1/2} B_{s_n})$$

enako porazdeljeni.

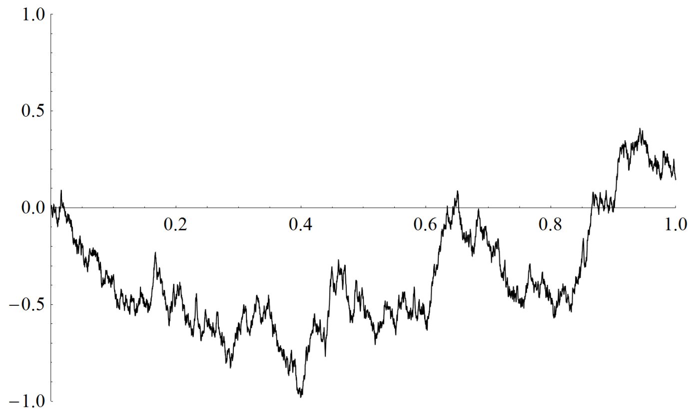
Primer grafa trajektorije enodimenzionalnega Brownovega gibanja na intervalu $[0, 1]$:



Zgoraj teoretično zapisane lastnosti lahko preverimo na primeru Brownovega gibanja, tako da neodvisno izberemo poljuben interval iz celotnega območja od 0 do 1, na primer od 0.6 do 0.8 :



Na dobljenem odseku $[0.6, 0.8]$ uporabimo lastnosti, ki opredeljujejo Brownovo gibanje, to je lastnost Brownove spremembe skale, s pomočjo katere raztegnemo in razširimo izbran odsek na celoten interval, torej od 0 do 1, upoštevamo invariantnost. Na novem grafu ponovno dobimo Brownovo gibanje, ki pa je različica prvotnega primera gibanja iz prve slike. Opazimo, da se lastnost zveznosti ohrani:



Če bi postopek ponovili, se pravi ponovno neodvisno izbrali poljuben interval, bi z upoštevanjem lastnosti, ki določajo Brownovo gibanje ponovno dobili novo kopijo prvotnega primera gibanja. Tako za Brownovo gibanje velja lastnost fraktalnosti.

3. Black–Scholesov model

Black–Scholesov model, ki sta ga leta 1973 razvila Fisher Black in Myron Scholes [2], je eden najpreprostejših modelov trga vrednostnih papirjev. Model je matematični opis finančnih trgov in izvedenih naložbenih instrumentov. Temelji na parcialnih diferencialnih enačbah, katere rešitev – Black–Scholesova formula – se v večini primerov uporablja za vrednotenje opcij. Model pri izračunu teoretične vrednosti opcije predvideva konstantno nestanovitnost delnice, ki jo v praksi izračunamo na podlagi predhodnega nihanja cene delnice.

Osnovni Black–Scholsov model temelji na naslednjih predpostavkah [4, 5]:

- Kratkoročna obrestna mera je znana, konstantna in netvegana.
- Varianca donosa osnovnega instrumenta je konstantna.
- Model ne upošteva nikakršnih transakcijskih stroškov, provizij in davkov.
- Investitorji si lahko izposodijo denar ali ga posodijo po isti, netvegani, konstantni obresti.
- Ni arbitražnih priložnosti.
- Obnašanje tržne cene osnovnega instrumenta ustreza lognormalni porazdelitvi verjetnosti, kar pomeni, da imajo naravni logaritmi donosnosti delnice $ln(\frac{S_{t+s}}{S_t})$ normalno porazdelitev, katere cena osnovnega instrumenta sledi geometrijskemu Brownovemu gibanju.

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t).$$

Osnovni Black–Scholesov model je bil razvit za vrednotenje evropskih opcij na delnico, ki ne izplačuje dividend. Prav zato sta v praksi nujna vsaj dva popravka osnovne Black–Scholesove formule in sicer izplačila dividend in predčasne izvršitve opcije.

V primeru, ko delnica ne izplačuje dividend, se izkaže, da je vrednost ameriške nakupne opcije v tem modelu enaka vrednosti evropske nakupne opcije in jo prav tako ovrednotimo z osnovnim Black–Scholesovim modelom. Vendar pa je predpostavka o neizplačevanju dividend nerealna in je zato potrebno v realnosti osnovni model nadgraditi. Izkaže se, da v Black–Scholesovem modelu obstaja do tveganja nevtralna verjetnost Q, ki nam omogoča da prihodne negotove denarne tokove diskontiramo z netvegano obrestno mero. Obstaja natanko takrat, ko ne obstaja arbitraža. Pri do tveganju nevtralni verjetnosti Q so cene pričakovane vrednosti prihodnjih izplačil. Velja, da je v povprečju matematično upanje enako 0.

3.1. **Black–Scholesov model z dividendami.**

Za do tveganja nevtralno verjetnost Q je za vrednotenje opcij na delnico s tujo stopnjo donosa podan Garman–Kohlhagenov model:

$$dS_t = S_t((r - \delta)dt + \sigma dB_t)$$

kjer označimo z:

$(B_t)_{t>0}$ Brownovo gibanje
r domačo netvegano stopnjo donosa
δ tujo netvegano stopnjo donosa oziroma konstantno dividendo
σ nestanovitnost cene delnice
S_t ceno osnovnega premoženja
Parametri δ, r in σ so konstantni in strogo pozitivni.

Garman–Kohlhagenov model je standardni model za izračun cen opcije na devizni tečaj. Mark Garman in Steven Kohlhagen sta leta 1983 dopolnila Black–Scholesov model, tako da je poleg domače obrestne mere prisotna tudi tuja, ravno tako konstantna in netvegana obrestna mera.
Dopolnitev Black–Scholesovega modela s tujo stopnjo donosa nam bo omogočila lažje razumevanje prehoda iz vrednosti nakupne v vrednost prodajne ameriške opcije, povezavo med njunima vrednostima in poenostavljeno razlago simetrije ameriške nakupne in prodajne opcije.

Model nam pove, da je prirastek oziroma pričakovana stopnja rasti odvisna od trenutne vrednosti S_t in razlike v domači in tuji netvegani stopnji donosa, katere predznak določa višjo vrednost domače oziroma tuje netvegane stopnje donosa. Prištet je še slučajni del, ki ga sestavljata Brownovo gibanje B_t in nestanovitnost cene delnice.

Znano je, da je v tem modelu rešitev zgornje stohastične diferencialne enačbe podana z:

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t}$$

Torej, trenutna vrednost osnovnega premoženja S_t je odvisna od začetne vrednosti instrumenta S_0, parametrov r, δ in σ ter razvoja Brownovega gibanja $(B_t)_{t>0}$.

Na ceno opcije v splošnem vplivajo vsi parametri $S_t, K, T-t, r, \delta, \sigma$. V modelu nas bodo zanimale vrednosti ameriških opcij brez dospetja, za katere kot smo rekli velja, da nimajo podanega časa zapadlosti. Kot pomoč nam bo služila teorija optimalnega časa ustavljanja glede na filtracijo.

Definicija 3.1. (Filtracija) Naraščajočemu zaporedju $\sigma-$algeber $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{F}_t \leq \mathcal{F}$, pravimo filtracija. Predstavlja nam že znane informacije, ki jih zberemo do danega trenutka.
Na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ na katerem je definirano Brownovo gibanje $(B_t)_{t\geq 0}$ običajno vzamemo za filtracijo naravno filtracijo, to je $\mathcal{F}_t$ je sigma algebra, generirana s slučajnimi spremenljivkami, $0 \leq s \leq t$. $(\sigma(B_s; 0 \leq s \leq t))$.

Definicija 3.2. Čas ustavljanja glede na filtracijo $(\mathcal{F})_{t\geq 0}$ na verjetnostnem prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je slučajna spremenljivka $\tau\colon \Omega \to [0, \infty]$ za katero velja, da je $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ za vsak $t \geq 0$.

Optimalni čas ustavljanja je običajno podan preko izvršilne meje v smislu, da opcijo izvršimo v prvem hipu, ko cena osnovnega instrumenta prečka izvršilno mejo. Za meje bomo predpostavili, da so konstantne, kar nam bo problem poenostavilo. Opcije s končnim časom dospetja je težje reševati. V tem primeru zgornja in spodnja izvršilna meja nista konstantni funkciji, ampak funkciji časa.

Naš cilj je poiskati optimalno nearbitražno vrednost opcije in optimalni čas izvršitve ameriške opcije brez dospetja.

Vrednost ameriške nakupne opcije z zapadlostjo T in izvršilno ceno K je:

$$C_A(S_0, T) = \sup_{\tau \in \tau(T)} E_Q(e^{(-r\tau)}(S_\tau - K)^+)$$

in vrednost ameriške prodajne opcije je:

$$P_A(S_0, T) = \sup_{\tau \in \tau(T)} E_Q(e^{(-r\tau)}(K - S_\tau)^+)$$

kjer je $\tau(T)$ množica časov ustavljanja τ z vrednostmi iz množice $[0, T]$.

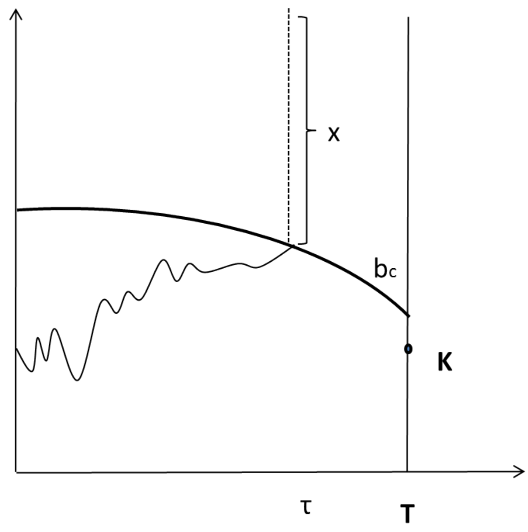
Formuli zahtevata takšen τ, da bo supremum upanja razlike med ceno osnovnega instrumenta S_τ in izvršilno ceno K pri nakupni opciji, in obratno pri prodajni opciji, ki jo v času diskontiramo z diskontnim faktorjem $e^{(-r\tau)}$, čim večji.

3.2. **Izvršilne meje opcije.**

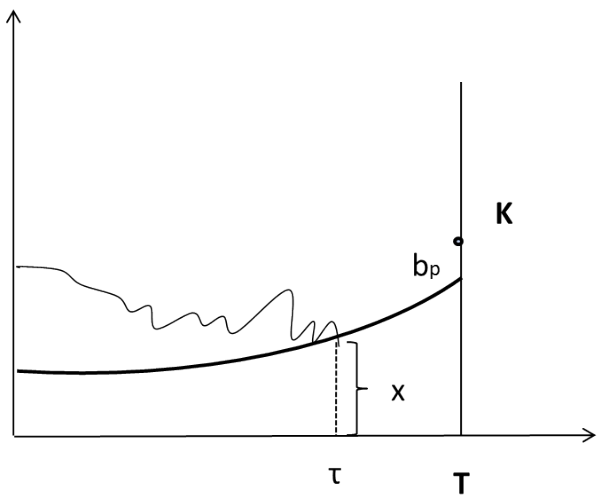
Za ameriške nakupne in prodajne opcije s časom zapadlosti T in za določen čas t, $t \in [0, T]$ so izvršilne meje opredeljene na naslednji način:

$$\begin{cases} b_c(T-t) = \inf\{x \geq 0 : x - K = C_A(x, T-t)\}, \\ b_p(T-t) = \sup\{x \geq 0 : K - x = P_A(x, T-t)\}, \end{cases}$$

kjer nakupno opcijo izvršimo v prvem trenutku, ko njena cena v času doseže mejo $b_c(T-t)$. Če cena opcije ne doseže kritične vrednosti, kjer bi bilo opcijo optimalno izvršiti, jo je boljše prodati, kot izvršiti.



Enako pri prodajni opciji velja, da jo je optimalno izvršiti v prvem trenutku, ko njena cena v času t doseže izvršilno mejo $b_p(T-t)$. Če ta meja ni dosežena, je zopet bolj optimalno opcijo prodati, kot izvršiti.



Meja za ameriško nakupno oziroma prodajno opcijo daje, za vsak določen čas t pred zapadlostjo, kritično vrednost v kateri bi opcija lahko bila izvedena. Kadar je vrednost osnovnega sredstva pod mejo za nakupno opcijo, potem je časovna vrednost ameriške opcije strogo pozitivna. V primeru prodajne opcije je časovna vrednost ameriške opcije strogo pozitivna, kadar je vrednost osnovnega instrumenta nad mejo. Lahko pa opcijo ne izvršimo. Te možnosti se poslužujemo, kadar je vrednost osnovnega instrumenta višja kot izvršilna cena.

Kadar pa je vrednost osnovnega sredstva nad mejo za nakupno opcijo je časovna vrednost enaka nič. Obratno velja za prodajno opcijo, kjer je časovna vrednost enaka nič, kadar je vrednost osnovnega instrumenta pod mejo. Zato se splača izvršiti opcijo takoj, ko osnovna vrednost doseže to območje. Kot je že bilo omenjeno, je za premoženje brez dividend neoptimalno izvršiti ameriško nakupno opcijo pred zapadlostjo.

3.3. **Ameriške opcije brez dospetja–martingali.**

Cene ameriških nakupnih in prodajnih opcij lahko izpeljemo s pomočjo parcialnih diferencialnih enačb ali s pomočjo martingalov. Z uporabo martingalov se izognemo uporabi diferencialnih enačb. Velja, da je strategija brez arbitraže, ki mora veljati na trgu, v bistvu pogoj za obstoj martingalov. Poleg danega pogoja, ki omogoča iskanje optimalnega časa ustavljanja, pa velja, da je instrument tvegan.

Definicija 3.3. (Martingali) Naj bo $\{\mathcal{F}_t\}$ filtracija, potem je proces $(X_t)_{t\geq 0}$, kjer je X_t merljiva slučajna spremenljivka glede na $\mathcal{F}_t$ in $E(|X_t|) < \infty$, za vsak $t \geq 0$, martingal, če velja $E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ skoraj gotovo, za $s \leq t$.

Vrednost nakupne opcije z martingali zapišemo:

$$C_A(S_t) = \sup_{\tau} E_Q((S_\tau - K)e^{-r(\tau-t)}|\mathcal{F}_t)$$

kjer $\tau > t$.

Diskontirana razlika $(S_t - K)$ je pogojena s filtracijo $\mathcal{F}_t$. Ta nam posreduje informacije, ki jih imamo do trenutka t. Nas pa zanima dogajanje od trenutka t naprej. Če bi se postavili na začetek, kjer bi bil čas $t = 0$, še ne bi imeli nobene informacije iz preteklosti, vrednost pa bi diskontirali od začetka, bi se nam zapis poenostavil na:

$$C_A(S_0, T) = \sup_{\tau\in\tau(T)} E_Q(e^{(-r\tau)}(S_\tau - K)^+)$$

in dobili bi prvotni zapis vrednosti ameriške nakupne opcije.

Namesto $(S_t - K)^+$ v nadaljevanju uporabljamo zapis $(S_t - K)$, saj gledamo le pozitivne vrednosti razlike in ker v modelu maksimiziramo vrednost opcije, velja $t \leq \tau \leq T$.

Pri izračunu vrednosti ameriške nakupne opcije brez dospetja s pomočjo različice Black–Scholesovega modela postavimo čas t na 0, torej opazujemo gibanje cene od začetka in privzamemo, da je izvršilna meja (zgornja za prodajno opcijo in spodnja za nakupno opcijo) konstantna in enaka L. Tako bo vrednost $S_\tau = L$. Dopustnost koraka, ki je ključnega pomena za rešitev modela, bomo na začetku samo predpostavili. Odgovor, zakaj smemo predpostaviti konstantnost in izvesti ta korak, bodo rešitve Black–Scholesovega modela. S T_L označimo čas ustavljanja, ki je prvi čas prihoda osnovne vrednosti S_t izven meja, za katerega velja:

$$T_L = T_L(S) = \inf\{t \geq 0; S_t \geq L\}$$

in ker je

$$S_t = S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t}$$

posledično velja, da

$$T_L = \inf\{t \geq 0; S_0 e^{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B_t} \geq L\} =$$

$$= \inf\{t \geq 0; (r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t \geq \ln(\frac{L}{S_0})\} =$$

$$= \inf\{t \geq 0; \frac{(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma} + B_t \geq \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{L}{S_0})\} =$$

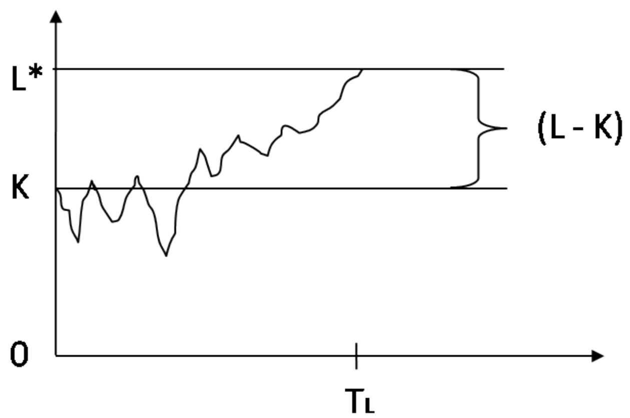
$$= \inf\{t \geq 0; \nu t + B_t \geq \beta\}$$

kjer je $\beta = \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{L}{S_0})$ in $\nu = \frac{(r-\delta-\frac{\sigma^2}{2})}{\sigma}$.

Povprečna vrednost nakupne opcije, če izvedemo opcijo pri vrednosti L je torej enaka:

$$C_A(S_0) = \sup_L E_Q[(S_{T_L} - K)(e^{-rT_L})] =$$
$$= \sup_L E_Q[(L - K)(e^{-rT_L})] = \sup_L[(L - K)E_Q(e^{-rT_L})]$$

Zanima nas torej vrednost L, pri kateri bo cena opcije največja. Upoštevamo realnost časa, saj nam več pomenijo manj oddaljeni denarni tokovi, kot pa enormna vrednost čez nekaj 10 let, ki ni več relevantna za nas. Hkrati upoštevamo, da bi nam prekratka čakalna časovna doba vrnila premajhen L in bi v tem primeru bil izkupiček majhen. Zanima nas torej razlika med vrednostjo L in izvršilno ceno K $(L - K)$, z upoštevanjem diskontnega faktorja $E_Q(e^{-rT_L})$, saj se vrednost nakupne opcije v času diskontira.



Ker želimo optimalni L, odvajamo $(L - K)E_Q(e^{-rT_L})$ z upoštevanjem, da ima odvod vrednost 0 za optimalne vrednosti L^*, torej:

$$[(L - K)E_Q(e^{-rT_L})]' = E_Q(e^{-rT_L}) + (L - K)\frac{\partial E_Q(e^{-rT_L})}{\partial L}$$

$$E_Q(e^{-rT_L^*}) + (L^* - K)\frac{\partial E_Q(e^{-rT_L^*})}{\partial L} = 0$$

$$L^* = \frac{-E_Q(e^{-rT_L^*})}{\frac{\partial E_Q(e^{-rT_L})}{\partial L|_{L=L^*}}} + K$$

Dobljeno rešitev za vrednost L vstavimo v prvotno enačbo vrednosti cene nakupne opcije in dobimo:

$$C_A(S_0) = (\frac{-(E_Q(e^{-rT_L^*}))}{\frac{\partial E_Q(e^{-rT_L})}{\partial L}|_{L=L^*}} + K - K)E_Q(e^{-rT_L^*}) =$$

$$= \frac{-(E_Q(e^{-rT_L^*}))}{\frac{\partial E_Q(e^{-rT_L})}{\partial L}|_{L=L^*}} E_Q(e^{-rT_L^*}) =$$

$$= \frac{-(E_Q(e^{-rT_L^*}))^2}{\frac{\partial E_Q(e^{-rT_L})}{\partial L}|_{L=L^*}}$$

Odvoda matematičnega upanja po parametru L ne znamo eksplicitno izračunati, zato bi si imenovalec želeli poenostaviti. Spomnimo se, da je

$$T_L = \inf\{t \geq 0; \nu t + B_t \geq \beta\}$$

Torej je T_L čas prvega prehoda Brownovega gibanja z linearno tendenco ν preko nivoja β. Znano je [6], da je Laplaceova transformacija potencialno izrojene slučajne spremenljivke T_L enaka:

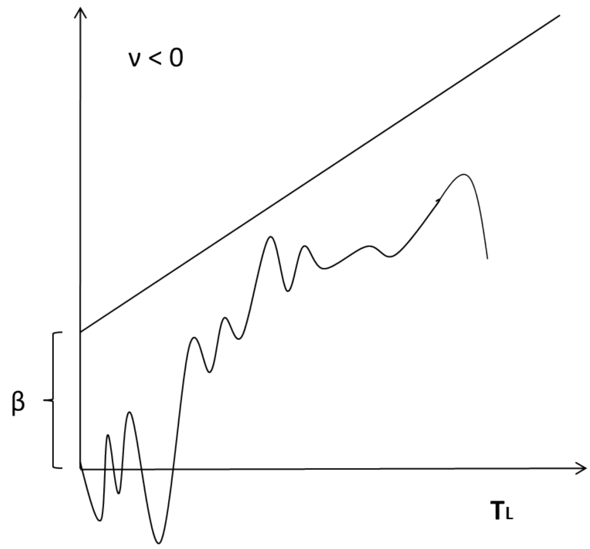
$$E_Q(e^{-rT_L}) = e^{-(-\nu+\sqrt{\nu^2+2r})\beta},$$

kjer je to, ali je T_L izrojena ali ne, odvisno od linearne tendence ν. Možnosti, ki lahko nastopijo so torej:

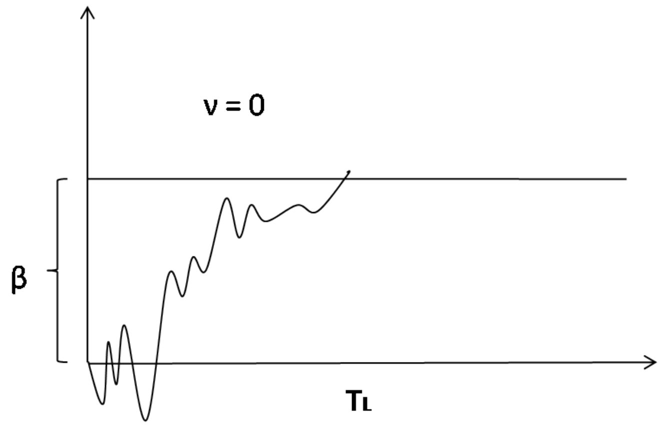
$$P(T_L < \infty) = \lim_{r \searrow 0} e^{-(-\nu+\sqrt{\nu^2+2r})\beta} = e^{-(-\nu+|\nu|)\beta} =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{za } \nu \geq 0. \\ e^{-2|\nu|\beta} & \text{za } \nu < 0. \end{cases}$$

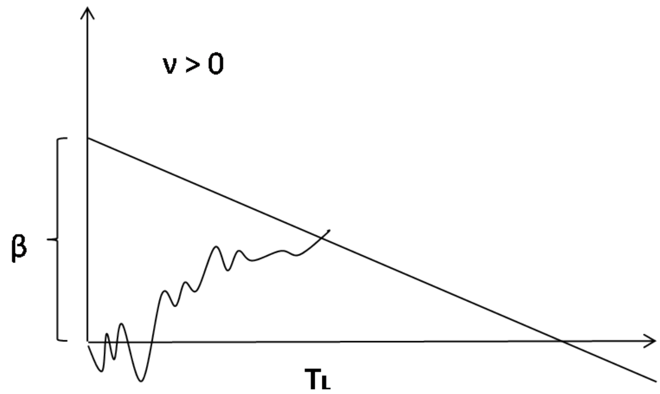
Ker velja, da je $T_L = \inf\{t \geq 0; B_t \geq \beta - \nu t\}$, lahko možnosti ilustriramo tudi s slikami. Najprej narišemo možnost za $\nu < 0$. Verjetnost, da v takem primeru dosežemo mejo in izvršimo opcijo, je enaka $e^{-2|\nu|\beta} < 1$. Vpliv povišane vrednosti parametra β, pa verjetnost še dodatno zmanjša.



Drugo možnost prikazuje slika, kjer je $\nu = 0$. Pri ničelnem parametru ν bo vrednost opcije slej ko prej dosegla mejo in jo bomo lahko izvršili.



Tretja možnost se pojavi, kadar je $\nu > 0$. V tem primeru imamo negativni naklon. Vrednost opcije bo z verjetnostjo ena v realnem času ravnotako dosegla mejo, zato jo bomo lahko izvršili.



V našem primeru za ν velja, da je sestavljen iz parametrov, ki so nam poznani, in sicer je enak:

$$\nu = \frac{1}{\sigma}(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})$$

Parameter β je enak:

$$\beta = \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{L}{S_0})$$

ter γ_1, ki je definiran kot:

$$\gamma_1 = \frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 + 2r}}{\sigma}$$

Torej dobimo, da je matematično upanje enako:

$$E_Q(e^{-rT_L}) = e^{-\gamma_1 \ln(\frac{L}{S_0})} = (\frac{S_0}{L})^{\gamma_1}.$$

Rešitev, ki jo dobimo potem ko poenostavimo matematično upanje s pomočjo definicije Laplaceove transformacije, je "lepa", saj se dobljena rešitev $(S_0/L)^{\gamma_1}$ poenostavi in jo za razliko od $E_Q(e^{-rT_L})$ znamo odvajati po parametru L.

$$dE_Q(e^{-rT_L})/dL|_{L=L^*} = [(\frac{S_0}{L^*})^{\gamma_1}]' = \gamma_1(\frac{S_0}{L^*})^{\gamma_1-1}(-\frac{S_0}{L^{*2}}) = \frac{-\gamma_1 S_0^{\gamma_1}}{L^{*\gamma_1+1}}$$

Z upoštevanjem definicije Laplaceove transformacije najprej izpeljemo vrednost za mejo, ki jo potem lahko zapišemo kot $L^* = \frac{L^*}{\gamma_1} + K$. Izpostavimo L^* in dobimo $L^* = \frac{\gamma_1}{(\gamma_1-1)}K \geq K$. Rešitev vrednosti amriške nakupne opcije s parametrom L^* je:

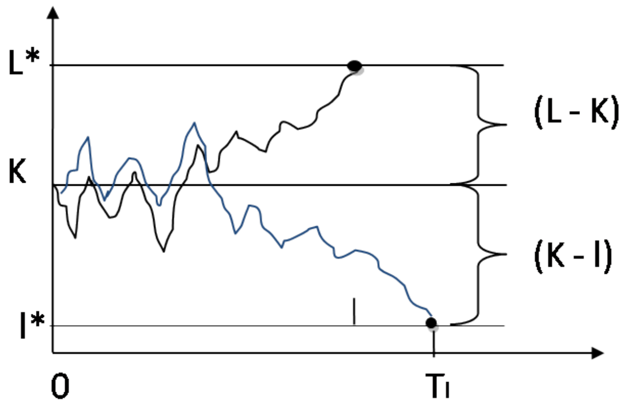
$$C_A(S_0) = \frac{-(\frac{S_0}{L^*})^{2\gamma_1}}{\gamma_1(\frac{S_0}{L^*})^{\gamma_1-1}(\frac{-S_0}{L^{*2}})} = \frac{S_0^{\gamma_1}}{\gamma_1 L^{*\gamma_1-1}}$$

Ko upoštevamo še izračunano vrednost za L^* dobimo končno rešitev vrednosti ameriške nakupne opcije:

$$C_A(S_0) = \frac{S_0^{\gamma_1}}{\gamma_1(\frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}K)^{\gamma_1-1}}$$

Podoben način dopušča izpeljavo cene prodajne opcije, ki jo zapišemo kot

$$P_A(S_0) = \inf_l[(K-l)E_Q(e^{-rT_l})]$$



kjer nas pa za razliko od nakupne ameriške opcije zanima optimalna vrednost l, kjer bo razlika $(K-l)$ v optimalnem času največja. Optimalni l^* dobimo z odvodom $(K-l)E_Q(e^{(-rT_l)})$. Torej:

$$[(K-l)E_Q(e^{(-rT_l)})]' = -E_Q(e^{(-rT_l)}) + (K-l)\frac{\partial E_Q(e^{(-rT_l)})}{\partial l}$$

$$-E_Q(e^{(-rT_l^*)}) + (K-l^*)\frac{\partial E_Q(e^{(-rT_l^*)})}{\partial l} = 0$$

$$l^* = \frac{-E_Q(e^{-rT_l^*})}{\frac{\partial E_Q(e^{-rT_l})}{\partial l|_{l=l^*}}} + K$$

Če izračun optimalne vrednosti prodajne opcije primerjam z nakupno, opazim, da sta enaki. Dobljeno rešitev vstavim v prvotno enačbo vrednosti cene prodajne opcije, kjer dobim za predznak različno vrednost vrednosti nakupne opcije:

$$
\begin{aligned}
P_A(S_0) &= (K - (\frac{-(E_Q(e^{-rT_l^*}))}{\frac{\partial E_Q(e^{-rT_l})}{\partial l|_{l=l^*}}} + K))E_Q(e^{-rT_l^*}) = \\
&= \frac{(E_Q(e^{-rT_l^*}))}{\frac{\partial E_Q(e^{-rT_l})}{\partial l|_{l=l^*}}} E_Q(e^{-rT_l^*}) = \\
&= \frac{(E_Q(e^{-rT_l^*}))^2}{\frac{\partial E_Q(e^{-rT_l})}{\partial l|_{l=l^*}}}
\end{aligned}
$$

Z upoštevanjem definicije Laplaceove transformacije ta posledično vrne le za predznak različno rešitev, kot smo jo dobili pri nakupni opciji:

$$E_Q(e^{-rT_l}) = e^{-\gamma_2 \ln(\frac{l}{S_0})} = (\frac{S_0}{l})^{\gamma_2}$$

kjer vrednost γ_2 zapišemo kot

$$\gamma_2 = \frac{-\nu - \sqrt{\nu^2 + 2r}}{\sigma}$$

Vrednost γ_2 je ravnotako sestavljena iz znanih parametrov. Potem ko vmesne rešitve vstavimo v prvotno enačbo, je končna rešitev vrednosti ameriške prodajne opcije enaka:

$$P_A(S_0) = \frac{(\frac{S_0}{l^*})^{2\gamma_2}}{\gamma_2(\frac{S_0}{l^*})^{\gamma_2-1}(\frac{-S_0}{l^{*2}})} = -\frac{S_0^{\gamma_2}}{\gamma_2 l^{*\gamma_2-1}}$$

Ko upoštevamo še izračunano vrednost za l^* dobimo končno rešitev vrednosti ameriške prodajne opcije:

$$P_A(S_0) = -\frac{S_0^{\gamma_2}}{\gamma_2(\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}K)^{\gamma_2-1}}$$

Meja brez dospetja ameriške prodajne opcije je konstantna, dana z $l^* = \frac{\gamma_2 K}{\gamma_2 - 1} < K$.

Primerjava rešitev, ki smo jih izračunali s pomočjo Black–Scholesovega modela:

Vrednost ameriške nakupne opcije:

$$C_A(S_0) = \frac{S_0^{\gamma_1}}{\gamma_1 L^{*\gamma_1-1}} = \frac{S_0^{\gamma_1}}{\gamma_1(\frac{\gamma_1}{\gamma_1-1}K)^{\gamma_1-1}}$$

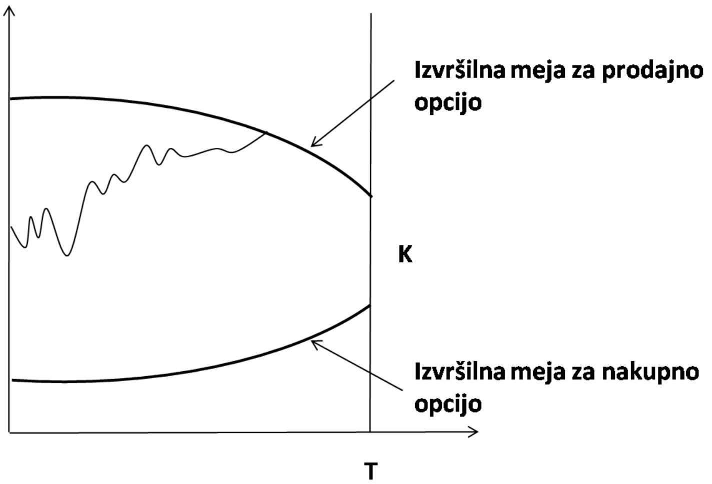
Vrednost ameriške prodajne opcije:

$$P_A(S_0) = \frac{S_0^{\gamma_2}}{-\gamma_2 l^{*\gamma_2-1}} = -\frac{S_0^{\gamma_2}}{\gamma_2(\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}K)^{\gamma_2-1}}$$

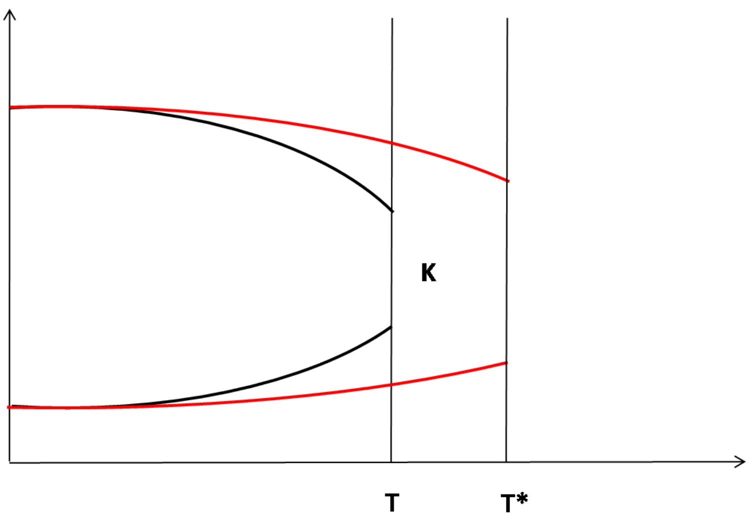
Vrednost obeh opcij se je poenostavila, saj so nam parametri v obeh končnih rešitvah poznani. Rešitvi ameriške nakupne in prodajne opcije se razlikujeta le v γ_1 in γ_2, ki pa, kot že omenjeno, imata različen predznak.

Daljše kot je časovno obdobje do dospetja opcije, višja je časovna vrednost opcije in posledično višja je tudi vrednost opcije. Verjetnost, da bo lastnik opcijo izvršil, je pri daljšem času do zapadlosti opcije veliko večja kot pri krajšem času, saj v daljšem času obstaja večja verjetnost, da bo prišlo do spremembe vrednosti delnice, saj se s približevanjem datumu izvršitve verjetnost, da se bodo razmere na delniškem trgu spremenile, tako da bo lastnik opcije zaslužil, znižuje. Stopnja, s katero opcija izgublja svojo časovno vrednost, ni linearna, temveč je enaka kvadratnemu korenu časa, ki je ostal do zapadlosti opcije v izvršitev.

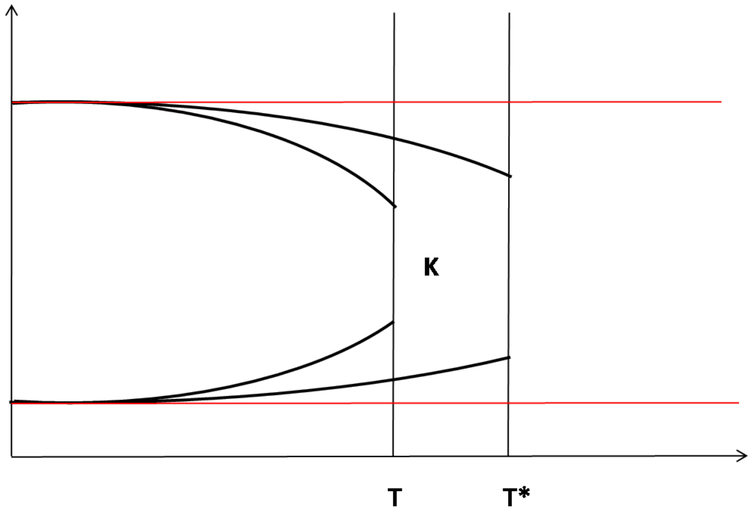
Če postavimo dan izvršitve na nek fiksni datum v prihodnosti, potem vrednost nakupne in prodajne opcije ponazorimo:



Če bi čas dospetja premaknili še bolj v prihodnost, torej v nek trenutek T', se bi izvršilni ceni nakupne in prodajne opcije ukrivili kasneje, drugače rečeno, začeli bi se ravnati.



In če bi čas dospetja, ki je bil do zdaj postavljen na določen dan v prihodnosti, postavili v neskončnost, bi se krivulja K povsem izravnala. Torej K postane konstantna, funkcija pa homogena, kar smo upoštevali v prejšnjem razdelku.



Konstantnost, ki smo jo pred začetkom računanja vrednosti ameriških nakupnih in prodajnih opcij s pomočjo različice Black–Scholesovega modela predpostavili, lahko opravičimo in uporabimo le v primeru, kadar ameriške opcije nimajo dospetja, torej je njihov čas zapadlosti enak neskončno. V tem primeru se izračun v modelu poenostavi do točke, kjer iščemo največjo razliko med dvema konstantnima vrednostima.

4. Simetrija ameriške nakupne in prodajne opcije

Simetrijo med ameriško nakupno in prodajno opcijo, angl. american put- call symmetry, zapišemo kot:

$$P_A(S_0, K, r, \delta) = C_A(K, S_0, \delta, r),$$

kjer so cene opcij odvisne od štirih argumentov. S $C_A(K, S_0, \delta, r)$ označimo vrednosti ameriške nakupne opcije, kjer je S_0 cena osnovnega premoženja in velja $S_0 > 0$, izvršilna cena opcije je $K > 0$, tuja netvegana obrestna mera $\delta > 0$ in r, ki je domača netvegana obrestna mera. Podobno za ameriško prodajno opcijo označimo $P_A(S_0, K, r, \delta)$, kjer za ceno osnovnega premoženja velja, da $S_0 > 0$ in ravno tako velja, da $K > 0$, $\delta > 0$ in $r > 0$ [14].

Ta simetrija odraža dejstva, da pravica do prodaje tuje valute ustreza pravici do nakupa domače valute z upoštevanjem tečaja.

Implicitno imata ameriški nakupni in prodajni opciji isto osnovno premoženje in isti čas do zapadlosti. Te ugotovitve so se najprej uporabljale za prenos znanja o pravični ceni in optimalni izvedbi enega tipa opcije v drugega. Na primer, znano je, da ameriška prodajna opcija ni izvedena zgodaj, če osnovno premoženje nima dividendnih donosov ($\delta = 0$). Poleg tega pa, ko donos na dividendo raste, rastejo interesi spodbujanja predčasnega uveljavljanja ameriških nakupnih opcij.

Če pogledamo iz teoretičnega vidika, pomeni, da če je S_t cena osnovnega instrumenta, potem obstaja nakupna opcija na eni strani te vrednosti z izvršilno ceno K, ki je enako oddaljena od S_t, kot da gledamo prodajno opcijo na drugi strani S_t. Upoštevati je potrebno, da ta izjava vnaprej predvideva, da ni (čeprav predpostavka ni realna) simetrično volatilna na obeh straneh S_t. Matematično to pomeni [15]:

$$log(\frac{K}{S_t}) = -log(\frac{S_t}{K})$$

Kljub nerealni predpostaviki, velja, da se ta simetrija v veliki meri uporablja pri opcijah s katerimi se ne trguje. Zgoraj zapisana relacija pa ima velik vpliv na tveganja.

Zgoraj omenjeno simetrijo sta prva opisala Carr in Bowie [12], leta 1994. Medtem ko so leta 1998 Carr, Ellis in Gaupta uporabili malo bolj sofisticirano matematiko. Strog dokaz simetrije med nakupno in prodajno opcijo, ki velja za vse dospelosti, potrebuje precej dejstev iz teorije slučajnih procesov. Ker pa smo mi te cene v primeru opcij brez dospetja izračunali, jo lahko preverimo.

Z Garman–Kohlhagnovim modelom smo izračunali vrednost ameriške nakupne opcije, ki je enaka:

$$C_A(S_0, K, r, \delta) = \frac{S_0^{\gamma_1}}{\gamma_1(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1}K)^{\gamma_1 - 1}}.$$

Preveriti želimo ali obstaja povezava med vrednostjo prodajne opcije, ki smo jo izračunali, da je:

$$P_A(S_0, K, r, \delta) = -\frac{S_0^{\gamma_2}}{\gamma_2(\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1}K)^{\gamma_2 - 1}}$$

in ameriške nakupne opcije. Kot pomoč nam bodo služile ugotovitve Garman–Kohlhagnovega modela. Ta nam omogoča zapis vrednosti nakupne opcije v obrnjenem gledišču, torej kot

$$C_A(K, S_0, \delta, r) = \frac{K^{\epsilon_1}}{\epsilon_1(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 - 1}S_0)^{\epsilon_1 - 1}}.$$

Parametra $\gamma_1 = \frac{-\nu + \sqrt{\nu^2 + 2r}}{\sigma}$ in $\gamma_2 = \frac{-\nu - \sqrt{\nu^2 + 2r}}{\sigma}$ imata obliko ničel polinoma, zato za njiju veljata lastnosti: $\gamma_1\gamma_2 = \frac{2r}{\sigma^2}$ ter $\gamma_1 + \gamma_2 = \frac{-\nu}{\sigma}$. Posledično mora za ϵ_1 in ϵ_2 veljati podobno, torej: $\epsilon_1\epsilon_2 = \frac{2\delta}{\sigma^2}$ ter $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{-(\delta - r - \frac{\sigma^2}{2})}{\sigma^2}$.

Če pogledamo povezavo parametrov enačbe nakupne opcije v obeh primerih zapisa, opazimo zvezo:

$$\epsilon_1 - 1 = -\gamma_2.$$

Preveriti moremo ali povezava, ki jo dobimo s primerjavo, velja:

$$\gamma_2 = \frac{-(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}) - \sqrt{(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}$$

$$1 - \gamma_2 = \frac{\sigma^2 - (-(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}) - \sqrt{(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})^2 + 2r\sigma^2})}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}) + \sqrt{(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2})^2 + 2r\sigma^2})}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}) + \sqrt{(r^2 - 2r\delta + \delta^2 - 2(r-\delta)\frac{\sigma^2}{2}) + \frac{\sigma^4}{4} + 2r\sigma^2)}}{\sigma^2} =$$

$$\epsilon_1 = \frac{(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}) + \sqrt{(\delta - r - \frac{\sigma^2}{2})^2 + 2\delta\sigma^2)}}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{(r - \delta + \frac{\sigma^2}{2}) + \sqrt{(r^2 - 2r\delta + \delta^2 - 2(\delta - r)\frac{\sigma^2}{2}) + \frac{\sigma^4}{4} + 2\delta\sigma^2)}}{\sigma^2}$$

Če torej izračunamo in primerjamo $1 - \gamma_2$ in ϵ_1 se izkaže, da sta enaka. Tako smo preverili in potrdili povezavo med opcijama, ki jo imenujemo simetrija ameriške nakupne in prodajne opcije.

Literatura

[1] E. Bajuk, J. Dedič, A. Makovšek, G. Pipan, H. Platovšek in K. Vidic, *Opcije*,[ogled 17. 10. 2010] dostopno na http://www.cek.ef.uni-lj.si/magister/lukancic3698.pdf.

[2] F. Black in M. Scholes *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, **81, (1973), 637-54.**

[3] M. Chesney, P. Carr in M. Stanley *American Put Call Symmetry*, [ogled 25. 7. 2011], dostopno na http://www.math.nyu.edu/research/carrp/papers/pdf/apcs2.pdf.

[4] R. Durrett, *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, New York, 2010

[5] J. Hull, *Options, Futures, and Other Derivatives*, New Jersey, Prentice Hall, 2005

[6] M. Jeanblanc, M. Yor in M. Chesney Springer, *Mathematical methods for financial markets*, Springer, London, 2009

[7] A. Pavšič, *Vrste opcij*, [ogled 23. 8. 2011], dostopno na http://www.denarnitok.com/elcaso/112004.pdf.

[8] J. Sunzu, *American Options and Optimal Stopping Problems*, [ogled 25. 7. 2011], dostopno na http://resources.aims.ac.za/archive/2006/jefta.pdf.

[9] *Black–Scholes*, [ogled 18. 10. 2010], dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Black-Scholes.

[10] *Brownovo gibanje*, [ogled 19. 10. 2010], dostopno na http://iris.pfmb.uni-mb.si/old/said/scenarij.pdf.

[11] *Brownovo gibanje*, [ogled 19. 10. 2010], dostopno na http://sl.wikipedia.org/wiki/Brownovo_gibanje.

[12] *Finančni instrumenti*, verzija 19. 6. 2009, [ogled 4. 7. 2011], dostopno na http://ucilnica0910.fmf.uni-lj.si/mod/resource/view.php?id=5453.

[13] *Izvedeni finančni instrumenti*, [ogled 4. 7. 2011], dostopno na http://www.zlato-srebro.eu/borza/izvedeni-financni-instrumenti/.

[14] *Opcije*, [ogled 4. 7. 2011], dostopno na http://www.finport.si/dokument.aspx?id=7&mid=14.

[15] *Put Call Symmetry*, [ogled 21. 7. 2011], dostopno na http://www.risklatte.com/Articles_new/Simply_Complx/SimplyComplex08.php.