UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika - 2. stopnja

Anja Barle

Bayesovi verižni modeli za določanje škodnih rezervacij

Magistrsko delo

Mentor: doc. dr. Dejan Velušček

Ljubljana, 2014

Izjava

Podpisana Anja Barle izjavljam:

- da sem magistrsko delo z naslovom Bayesovi verižni modeli za določanje škodnih rezervacij izdelala samostojno pod mentorstvom doc. prof. Dejan Velušček in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

V Ljubljani, dne ________________ Podpis ____________________

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju doc. dr Dejanu Veluščku za pomoč in nasvete ob izdelavi magistrskega dela.

Hvala tudi staršem za podporo v času študija in za varstvo Tjaža v času nastajanja magistskega dela. Predvsem pa hvala Markotu in sinu Tjažu za njuno potrpežljivost.

Kazalo

Program magistrskega dela

V magistrskem delu predstavite verižne metode za določanje škodnih rezervacij za neživljenjska zavarovanja. Osredotočite se na Bayesova verižna modela, opisana v člankih:

- R. Salzmann, M. V. Wüthrich, Cost-of-capital margin for a general insurance liability runoff, Astin Bulletin 40/2, 415-451, 2010

in

- M. V. Wüthrich, P. Embrechts, A. Tsanakas, Risk margin for a non-life insurance run-off, Statistics & Risk Modeling, 28, 299-317, 2011,

in ju primerjajte s klasičnim determinističnim Mackovim modelom. Vse obravnavane metode implementirajte v primernem programskem jeziku in jih preizkusite na konkretnih primerih trikotnikov razvoja neživljenjskega zavarovanja.

doc. dr. Dejan Velušček

Ljubljana, 2014. Podpis mentorja ______________________

Povzetek

Vrednost škodnih rezervacij mora biti enaka vsoti najboljše ocene in marže za tveganje, in mora biti enaka pošteni vrednosti neporavnanih škodnih obveznosti. V nalogi bomo predstavili verižne metode za določanje škodnih rezervacij za neživljenjska zavarovanja. Predstavili bomo znani deterministični Mackov model in dva Bayesova verižna modela, ter jih uporabili za izračun najboljše ocene škodnih rezervacij. Za izračun marže za tveganje bomo uporabili štiri različne pristope stroška kapitala, kjer bomo kapital za kritje tveganj določili preko enoletnega tveganja. Nato bomo maržo izračunali na čisto drugačen način preko izkrivljanja prvotno predpostavljene porazdelitve zahtevkov. Na koncu bomo vse metode preizkusili na primeru trikotnika razvoja neživjenjskega zavarovanja.

Abstract

The value of claims reserves should be equal to the sum of a best estimate and risk margin, and should be equal to the fair value of the outstanding claim liabilities. In this thesis we will introduce chain ladder methods for claims reserving for a non-life insurance. We will present famous distribution-free Mack model and two Bayesian chain ladder models, and use them for best-estimate reserves calculation. For the calculation of the risk margin we will consider four different cost-of-capital approaches, where we will use one-year risk for determining risk bearing capital. Then we will present totally different approach and introduce risk margin calculation through insurance-technical probability distortion. All methods will be analysed on a specific development triangle from non-life insurance.

Math. Subj. Class. (2010): 91B30, 91B70
Ključne besede: Bayesove metode veriženja, Mackov model, faktorji razvoja, trikotniki razvoja zahtevkov, škodni zahtevek, škodne rezervacije, najboljša ocena rezervacij, marža za tveganje, pristop stroška kapitala, solventnost, zavarovanje, rezultat razvoja zahtevkov, enoletno tveganje, neživljenjsko zavarovanje
Keywords: Bayesian chain ladder methods, Mack model, development factors, claims development triangles, claims, claims reserves, best-estimate reserves, risk margin, cost-of-capital approach, solvency, insurance, claims development result, one-year risk, non-life insurance

Poglavje 1

Uvod

Metode veriženja (*Chain Ladder methods*), v nadaljevanju verižne metode, so najbolj razširjene metode za izračun škodnih rezervacij zavarovalnic. Temeljijo na predpostavki, da kumulativni škodni zahtevki rastejo s faktorji, ki so odvisni le od let razvoja zahtevkov, ne pa tudi od samih škodnih let. Pod to predpostavko izračunamo najboljšo oceno bodočih škodnih zahtevkov, ki hkrati predstavlja najboljšo oceno škodnih rezervacij. Drugi del škodnih rezervacij pa je marža za tveganje, ki najboljšo oceno rezervacij dopolni do poštene vrednosti zavarovalnih obveznosti. Vprašanje je, kakšna je poštena vrednost, in kolikšna je primerna višina marže.

V magistrskem delu bomo predstavili najosnovnejši model veriženja, znan kot Mackov model, nato pa bomo preko različnih modelov skušali določiti pravo višino marže za tveganje. Izpeljali bomo matematično celovit večobdobni model, za katerega bomo iskali dober enostavnejši približek. Vse predstavljene modele in pristope bomo med sabo primerjali na primeru trikotnika razvoja zahtevkov.

Poglavje 2

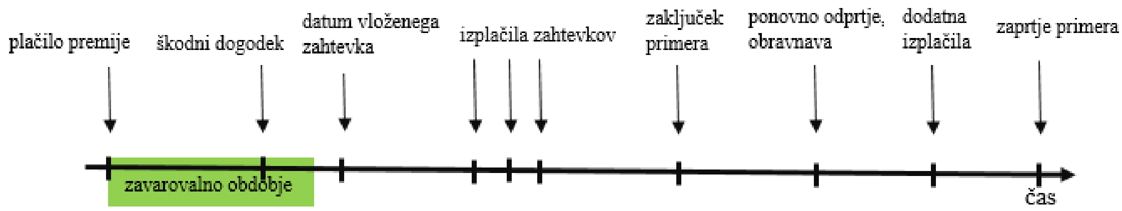
Oznake in ogrodje modela

V tem poglavju bomo definirali oznake in postavili ogrodje modela za izračun škodnih rezervacij. Definirane oznake bodo enotne skozi celo delo. Predstavili bomo klasični pristop preko trikotnikov razvoja za obravnavanje neporavnanih obveznosti in morebitnih izgub zaradi tveganj, ki izhajajo iz zavarovalnih pogodb. Ker bomo uporabili Bayesov pristop, bomo ponovili osnove Bayesove statistike. Pred tem pa na kratko predstavimo zavarovalništvo in zakonsko podlago za določanje zavarovalno-tehničnih rezervacij.

2.1 Splošno o zavarovalištvu in zakonska podlaga

Zavarovanje je namenjeno ustvarjanju varnosti oziroma nudenju finančne pomoči zavarovancu ob nastanku škodnega dogodka. V grobem ločimo med življenjskim in neživljenjskim oziroma splošnim zavarovanjem, ki ju je potrebno obravnavati in modelirati ločeno, saj so med njma pomembne razlike v pogojih zavarovalnih pogodb, v plačilu premije ipd. V nekaterih državah, kot sta na primer Švica in Nemčija, med njima celo strogo zakonsko ločijo, tako da se podjetje, ki prodaja neživljenjsko zavarovanje, ne sme ukvarjati tudi z življenjskim zavarovanjem, in obratno. Zato se tudi modeli za določanje rezervacij oblikujejo različno. V magistrskem delu bomo predstavili modele za oblikovanje rezervacij za neživljenjska zavarovanja. Med neživljenjska zavarovanja med drugim spadajo avtomobilsko, premoženjsko, nezgodno in zdravstveno zavarovanje.

Zavarovalna pogodba neživljenjskega zavarovanja je dogovor med dvema strankama, kjer ob sklenitvi zavarovanec plača fiksno premijo, zavarovalnica pa se v zameno za prejeto premijo zaveže, da bo zavarovancu v primeru (natančno opredeljenega) naključnega škodnega dogodka nastalega v določenem časovnem obdobju nadomestila nastalo finančno škodo. Premija je plačana ob sklenitvi pogodbe in je vnaprej določena, poravnava škodnih zahtevkov pa je naključna tako po višini, kot po času zahtevkov, lahko pa da do škodnega dogodka sploh ne pride. Tudi ko zavarovanec že prijavi škodo, lahko traja več let, preden pride do izplačila odškodnine (obravnavanje okoliščin dogodka, upravičenosti do odškodnine, sodni postopki ipd.). Tipičen razvoj dogodkov prikazuje slika 2.1.



Slika 2.1: Shema tipičnega razvoja dogodkov (vir: [3])

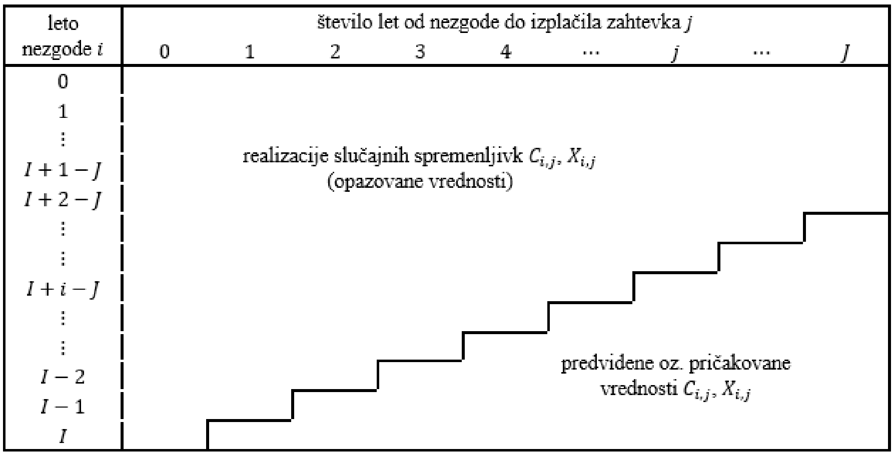
Zavarovalnica ob sklenitvi pogodbe prejme premijo. Del prejetih sredstev vloži v razne naložbe z namenom ustvarjanja čimvečjega donosa. Pomembno je, da ima v vsakem trenutku na voljo dovolj sredstev za izplačilo odškodnin zavarovancem ob morebitnih slučajnih dogodkih. Povedano drugače, sposobna mora biti poravnati vse dolgove ob njihovi dospelosti – biti mora solventna. Zaradi same narave zavarovalnega posla je nemogoče zagotoviti popolno solventnost v vsakem trenutku, zato pa je potrebno oblikovanje zavarovalno-tehničnih rezervacij, ki predstavljajo predvideno potencialno obveznost zavarovalnice. Izračun mora temeljiti na realnih predpostavkah in mora upoštevati vse dosegljive informacije.

Po Zakonu o zavarovalništvu ([15]) mora zavarovalnica zavarovalno-tehnične rezervacije oblikovati v zvezi z vsemi zavarovalnimi posli, ki jih opravlja. Namenjene so kritju bodočih obveznosti iz zavarovanj in morebitnih izgub zaradi tveganj, ki izhajajo iz zavarovalnih poslov, ki jih opravlja ([15, 113. člen]). Ena izmed vrst rezervacij so škodne rezervacije (*claims reserve*). Te je potrebno oblikovati v višini ocenjenih obveznosti, ki jih je zavarovalnica dolžna izplačati na podlagi zavarovalnih pogodb, pri katerih je zavarovalni primer nastopil do konca obračunskega obdobja, ne glede na to ali je zavarovalni primer že prijavljen – vključevati morajo ocenjene obveznosti za prijavljene nastale, a še nerešene škode, ter ocenjene obveznosti za nastale, a še neprijavljene škode ([15, 116. člen]).

Po novi evropski direktivi Solventnost II ([16]), mora biti vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij enaka vsoti, ki bi jo zavarovalnica morala plačati, če bi nemudoma prenesla svoje zavarovalne obveznosti drugi zavarovalnici (to pomeni, da morajo biti enake pošteni vrednosti zavarovalnih obveznosti). Določeno je tudi, da je za izračun zavarovalno-tehničnih rezervacij potrebno uporabiti vse dosegljive informacije, ki jih zagotavljajo finančni trgi, in splošno dostopne podatke o zavarovalnih tveganjih. Po direktivi Solventnost II ([16, 77. člen]) mora biti vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij enaka vsoti najboljše ocene in marže za tveganje, ki se morata vrednotiti ločeno. Najboljša ocena rezervacij je enaka tehtanemu povprečju, ovrednotenem glede na verjetnosti prihodnjih denarnih tokov ob upoštevanju časovne vrednosti denarja in ob uporabi ustrezne časovne strukture netvegane obrestne mere. Večji problem je izračun marže za tveganje, ki mora biti takšna, da zagotavlja, da je skupna vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij enakovredna znesku, ki bi ga zavarovalnica zahtevala za prevzem in izpolnitev zavarovalih obveznosti, torej pošteni vrednosti.

2.2 Trikotnik razvoja zahtevkov

Klasičen pristop za ocenjevanje neporavnanih obveznosti zavarovalnic iz naslova zahtevkov so t.i. trikotniki razvoja zahtevkov (*claims development triangles*). Za lažjo predstavitev slika 2.2 predstavlja splošen primer trikotnika razvoja.



Slika 2.2: Trikotnik razvoja zahtevkov (vir: [3])

Trikotnik ima dve časovni osi – ena predstavlja leto nastanka škodnega dogodka, druga pa leta razvoja oz. trajanje obravnave dogodka pred izplačilom odškodnine zavarovancu. Označimo

- i = leto nastanka škodnega dogodka (škodno leto),

- $j =$ število let od nastanka škode do poravnave zahtevka (razvojno leto).

Predpostavimo da imamo končni diskretni časovni horizont. Zadnje škodno leto označimo z I, in predpostavimo, da so vsi zahtevki poravnani najkasneje po J letih od nastanka škode. To pomeni, da $i \in \{0, \ldots, I\}$ in $j \in \{0, \ldots, J\}$. Predpostavimo še, da $I \geq J$.

Opomba. V drugem obravnavanem modelu bomo predpostavili, da $i \in \{1, \ldots, I\}$, $j \in \{0, \ldots, J\}$ in $I \geq J + 1$. Pogoja sta ekvivalentna, gre le za razliko v začetku štetja škodnih let – škodno leto i v prvem modelu bo enako škodnemu letu $i + 1$ v drugem modelu. Razlog za drugačno označitev bo pojasnjen kasneje.

Škodna leta so označena na vertikalni osi, leta razvoja pa na horizontalni osi. Ob času I, ko so se vsi škodni dogodki že zgodili, so znane vrednosti vseh izplačil v računovodskih letih do vključno leta I. To predstavlja zgornji trikotnik oz. trapez tabele na sliki 2.2, kjer je $i + j \leq I$. Zneski v spodnjem trikotniku ($i + j > I$) so ocenjene vrednosti neporavnanih zahtevkov. Opazujemo lahko kumulativne vrednosti $C_{i,j}$ ali vrednosti posameznih zahtevkov $X_{i,j}$ (definirano v nadaljevanju).

2.3 Oznake

Denarne tokove zavarovalnice označimo z $X_{i,j}$. $X_{i,j}$ predstavlja skupni znesek izplačil za poravnavo zahtevkov, ki so izplačani j let po nastanku škodnih dogodkov nastalih v letu i. Z drugimi besedami, $X_{i,j}$ je skupni znesek zahtevkov poravnanih v računovodskem letu $i + j$, ki so posledica škod nastalih v letu i.

Škodne rezervacije morajo vključevati ocenjene obveznosti za že nastale, a še ne rešene, ali še neprijavljene škode. Pred letom I se nekateri škodni dogodki še niso zgodili, zato jih ne smemo vključiti v izračun rezervacij. Po letu $I + J$ pa so vsi zahtevki že poravnani. Škodne rezervacije bomo zato modelirali za računovodska leta $I + k$, kjer je $k = 0, \ldots, J$.

Za izračun rezervacij moramo vedno uporabiti vse znane informacije. Množico informacij glede višin izplačil zahtevkov, ki jih imamo ob času $I + k$, definiramo z

$$\mathcal{D}_{I+k} = \{X_{i,j};\ i + j \leq I + k,\ 0 \leq i \leq I,\ 0 \leq j \leq J\}. \tag{2.1}$$

Vedno, ko bomo rekli, da računamo rezervacije v računovodskem letu k, bo pravzaprav mišljeno računovodsko leto $I + k$. Nikoli ne bo čas izračuna manjši od I, zato lahko uporabimo ta poenostavljen zapis. Ob času k bomo imeli na voljo nabor informacij $\mathcal{D}_{I+k}$, in bomo za napovedi in ocene uporabili matematično upanje, pogojeno na $\mathcal{D}_{I+k}$.

Iz vrednosti $X_{i,j}$ izračunamo skupni znesek obveznosti v računovodskem letu l

$$X_l = \sum_{i+j=l} X_{i,j} = \sum_{i=\max\{0,l-J\}}^{\min\{l,I\}} X_{i,l-i} = \sum_{j=\max\{0,l-I\}}^{\min\{l,J\}} X_{l-j,j}.$$

Opomba. V trikotniku razvoja (slika 2.2) je ta znesek enak vsoti vrednosti na $l+1$-vi diagonali.

Ob času $I+k$ so vsi zahtevki do vključno časa $I+k$ že poravnani, nerešene obveznosti imamo za leta $I+k+1, \ldots, I+J$. Oblikovati je potrebno rezervacije za nerešene škodne obveznosti $X_{I+k+1}, \ldots, X_{I+J}$.

2.3.1 Izračun najboljše ocene rezervacij iz $X_{i,j}$

Najboljša ocena škodnih rezervacij ob času $I+k$ je (nepristranska) napoved višine nerešenih škodnih obveznosti ob času $I+k$ glede na informacije znane ob času $I+k$. Najboljšo oceno za škodne rezervacije bomo izračunali na dva ekvivalentna načina. V tem podpoglavju jih bomo izračunali neposredno iz posameznih škodnih zahtevkov $X_{i,j}$, kasneje pa preko kumulativnih škodnih zahtevkov.

Ob času $I+k$ neporavnane obveznosti za vsa škodna leta skupaj predstavljajo vrednosti $X_{I+k+1}, \ldots, X_{I+J}$. Vse vrednosti diskontiramo z uporabo netvegane obrestne mere, in jih seštejemo. Rezultat je najboljša ocena škodnih rezervacij:

$$\widehat{\mathcal{R}}^{(k)} = \sum_{t\geq I+k+1}^{I+J} \mathbb{E}\left[X_t|\mathcal{D}_{I+k}\right] P(I+k,t) = \sum_{t\geq I+k+1}^{I+J} \sum_{i+j=t} \mathbb{E}\left[X_{i,j}|\mathcal{D}_{I+k}\right] P(I+k,t), \quad (2.2)$$

kjer je $P(I+k,t)$ cena ob času $I+k$ netvegane brezkuponske obveznice, ki zapade ob času $t > I+k$.

2.3.2 Kumulativni škodnih zahtevki in izračun najboljše ocene iz $C_{i,j}$

Kumulativne škode označimo s $C_{i,j}$. Vrednost predstavlja vsoto vseh zahtevkov za škode nastale v letu i, ki so izplačani z zamikom do vključno j let razvoja. Dana so z

$$C_{i,j} = \sum_{l=0}^{j} X_{i,l}. \quad (2.3)$$

Očitno velja

$$X_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}, \tag{2.4}$$

zato je ekvivalentno, če namesto posameznih vrednosti $X_{i,j}$ opazujemo kumulativne vrednosti $C_{i,j}$. Tudi množici informacij

$$\{X_{i,j};\, i + j \leq I + k,\, 0 \leq i \leq I,\, 0 \leq j \leq J\}$$

in

$$\{C_{i,j};\, i + j \leq I + k,\, 0 \leq i \leq I,\, 0 \leq j \leq J\}$$

sta ekvivalentni.

Ob času k je za škodno leto i vrednost že poravnanih obveznosti iz naslova škod enaka $C_{i,I+k-i}$, vrednost neporavnanih obveznosti za škodne zahtevke (*outstanding loss liabilities*) pa je $C_{i,J} - C_{i,I+k-i}$ (vrednost vseh obveznosti za škodno leto i, zmanjšana za že realizirane obveznosti). Vrednost $C_{i,I+k-i}$ je merljiva glede na $\mathcal{D}_{I+k}$ in je ob času k že znana. Vrednost vseh zahtevkov za škodnego leto i, $C_{i,J}$, pa je potrebno oceniti z upoštevanjem vseh dosegljivih informacij. Najboljša ocena je pogojno matematično upanje

$$\widehat{C}_{i,J}^{(k)} = \mathbb{E}\left[C_{i,J} | \mathcal{D}_{I+k}\right]. \tag{2.5}$$

Najboljša ocena rezervacij za nerešene škodne zahtevke ob času k za škodno leto i je enaka

$$\widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)} = \widehat{C}_{i,J}^{(k)} - C_{i,I-i+k}. \tag{2.6}$$

Najboljša ocena rezervacij za vsa škodna leta skupaj je

$$\widehat{\mathcal{R}}^{(k)} = \sum_{i=0}^{I} \widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)}. \tag{2.7}$$

Opomba. Za razliko z izračunom rezervacij po (2.2) tu ne upoštevamo časovne vrednosti denarja. Dobimo nominalno vrednost, ki je enaka, kot če v (2.2) predpostavimo $P(I + k, t) \equiv 1$.

Vsako računovodsko leto pride do realizacij nekaterih zahtevkov. To predstavlja dodatno informacijo, ki jo moramo v naslednjem letu uporabiti pri izračunih. Računali bomo najboljše napovedi zahtevkov $C_{i,J}$:

$$\widehat{C}_{i,J}^{(0)}, \widehat{C}_{i,J}^{(1)}, \ldots, \widehat{C}_{i,J}^{(J+i-I+1)}, \widehat{C}_{i,J}^{(J+i-I)} = C_{i,J}.$$

Opomba. Računovodsko leto $i + J$ je zadnje leto, v katerem imamo obveznost iz naslova škodnega leta i. Zapis leta preoblikujemo na obliko $I + k$: $i + J = I + k$, torej $k = i + J - I$.

2.3.3 Rezultat razvoja zahtevkov

Standardni pristop za merjenje tveganja, na podlagi katerega se potem izračuna marža za tveganje, je opazovanje skupnega tveganja – to je skupne negotovosti v napovedi kumulativnih zahtevkov za škodno leto i, $C_{i,J}$. Novejši pristop, ki je skladen tudi z zahtevami direktive Solventnost II, pa je opazovanje kratkoročnega, enoletnega tveganja. Solventnost II zahteva razkritje porazdelitve pričakovanih obveznosti v enem letu. Zato se vse pogosteje tveganje meri preko t.i. rezultata razvoja zahtevkov (*claims development result*), kar bomo v nadaljevanju označevali z angleško kratico CDR. Vrednost predstavlja razliko v napovedani vrednosti skupnih kumlativnih zahtevkov $C_{i,J}$ v trenutnem in preteklem letu. Podrobnejše ozadje in interpretacija sta opisana v članku [5] in predstavitvi [6].

Definicija 2.3.1 *Za računovodsko leto k in škodno leto i definiramo rezultat razvoja zahtevkov* CDR

$$\mathrm{CDR}_i\left(k\right) = \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k)}. \tag{2.8}$$

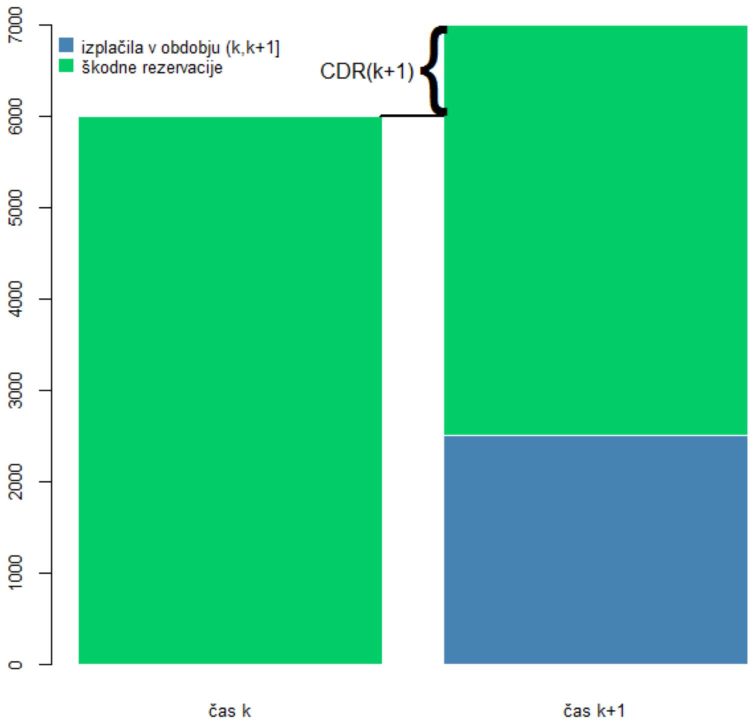
Zavarovalnice morajo imeti vedno na voljo dovolj rezervacij, za pokritje neporavnanih obveznosti in morebitnih izgub, ki izhajajo zavarovalnih pogodb. Zato predstavljajo velik del bilance stanja. CDR opisuje spremembo višine obveznosti, ki je posledica dodatnih informacij. Opazovati moramo le razvoj CDR-jev in rezervacije vsako leto le prilagajati za ta znesek. Za fiksno škodno leto i obravnavamo

$$CDR_i\left(1\right), \ldots, CDR_i\left(J+i-I\right),$$

ki zadoščajo enačbi

$$CDR_i\left(k\right) = \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k)} = \widehat{\mathcal{R}}_i^{(k-1)} - \left(X_{i,I-i+k} + \widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)}\right). \tag{2.9}$$

Shematični prikaz rezultata razvoja zahtevkov je prikazan na sliki 2.3.



Slika 2.3: Rezultat razvoja zahtevkov

2.4 Srednja kvadratna napaka napovedi (MSEP)

Škodne rezervacije določimo preko napovedi bodočih obveznosti z uporabo razpoložljivih informacij. Ko naredimo kakršnokoli napoved, nas običajno zanima, kako dobra je ta napoved. Za to potrebujemo druge momente – standarden pristop je opazovanje srednje kvadratne napake napovedi (*mean square error of prediction*), kar bomo označevali z angleško kratico MSEP. Za slučajno spremenljivko X predpostavimo, da je $\widehat{X}$ $\mathcal{D}$-merljiva cenilka za $\mathbb{E}[X|\mathcal{D}]$ in $\mathcal{D}$-merljiva napoved za X.

Definicija 2.4.1 (Pogojni MSEP) *Pogojni MSEP cenilke $\widehat{X}$ slučajne spremenljivke X definiramo kot*

$$\mathrm{msep}_{X|\mathcal{D}}(\widehat{X}) = \mathbb{E}\left[\left(\widehat{X} - X\right)^2 \middle| \mathcal{D}\right],$$

kar je za $\mathcal{D}$-merljivo cenilko $\widehat{X}$ enako

$$\mathrm{msep}_{X|\mathcal{D}}(\widehat{X}) = \mathrm{Var}\left(X|\mathcal{D}\right) + \left(\widehat{X} - \mathbb{E}\left[X|\mathcal{D}\right]\right)^2. \tag{2.10}$$

Prvi člen na desni je t.i. pogojna varianca procesa (stohastična napaka), ki opisuje nestanovitnost stohastičnega modela. Drugi člen pa je napaka ocene parametra, ki odraža negotovost v oceni parametrov in pogojnega matematičnega upanja. Ta napaka se z več opazovanimi podatki običajno manjša. Napako bomo računali za skupne kumulativne zahtevke $C_{i,J}$ – to je standardni pristop, kjer preko MSEP ocenjujemo tveganje dolgoročno do konca razvoja škod za škodno leto i. Poleg tega pa bomo računali še napako ocene CDR, ki glede na novejši pristop zajema le enoletno tveganje.

Opomba. Za nepristransko cenilko $\widehat{X}$ za X, torej če $\mathbb{E}[X|\mathcal{D}] = \widehat{X}$, je MSEP enak varianci spremenljivke X.

2.5 Mackov model (deterministični verižni model)

Verižni modeli so najpogosteje uporabljena tehnika za izračun škodnih rezervacij tudi v Sloveniji. V tem poglavju bomo predstavili osnovni deterministični verižni model (*distribution-free chain ladder model*), znan kot Mackov model, ki ga je predstavil T. Mack leta 1993 v članku [4]. Model je osnova za razvoj kasnejših stohastičnih verižnih modelov.

Vse različice verižnih modelov temeljijo na enaki predpostavki, da kumulativne škode z leti razvoja rastejo s faktorji, ki so odvisni le od razvojnega leta, in neodvisni od leta nezgode.

Predpostavka 2.5.1 *(Deterministični verižni model)*

- *Kumulativni zahtevki $C_{i,j}$ so za različna škodna leta i neodvisni.*
- *Obstajajo taki faktorji razvoja $f_1, f_2 \dots, f_J > 0$, da za vse $0 \le i \le I$ in vse $1 \le j \le J$ velja:*

$$\mathbb{E}\left[C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}\right] = \mathbb{E}\left[C_{i,j}|C_{i,j-1}\right] = f_j C_{i,j-1}.$$

- *Obstajajo taki parametri $\sigma_1^2, \dots, \sigma_J^2 > 0$, da za vse $0 \le i \le I$ in vse $1 \le j \le J$ velja:*

$$\mathrm{Var}(C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}) = \mathrm{Var}(C_{i,j}|C_{i,j-1}) = \sigma_j^2 C_{i,j-1}.$$

Faktorji razvoja f_j so glavni objekt opazovanj verižnih metod. Stohastične metode za njih predpostavljajo različne porazdelitve, v Mackovem modelu pa so faktorji deterministični, ocenjeni iz realizacij individualnih faktorjev $F_{i,j} = C_{i,j}/C_{i,j-1}$.

Lema 2.5.2 *Pod predpostavkami modela 2.5.1 za vse $I+k-J+1 \leq i \leq I$ velja*

$$\widehat{C}_{i,J}^{(k)} = \mathbb{E}\left[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+k}\right] = \mathbb{E}\left[C_{i,J}|C_{i,I+k-i}\right] = C_{i,I+k-i} f_{I+k-i+1} \cdots f_J. \tag{2.11}$$

Dokaz. Za $i + J \leq I + k$, torej $i \leq I + k - J$ je

$$\mathbb{E}\left[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+k}\right] = C_{i,J},$$

zato za te i tega ne računamo. Izračun velja za $I + k - J + 1 \leq i \leq I$. Za dokaz uporabimo lastnost pogojnega matematičnega upanja

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X|\mathcal{G}\right]\right]$$

in predpostavko 2.5.1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+k}\right] &= \mathbb{E}\left[C_{i,J}|C_{i,0},\ldots,C_{i,I+k-i}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[C_{i,J}|C_{i,J-1}\right]|C_{i,0},\ldots,C_{i,I+k-i}\right] \\
&= f_J \cdot \mathbb{E}\left[C_{i,J-1}|\mathcal{D}_{I+k}\right] \\
&= f_J \cdot \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[C_{i,J-1}|C_{i,J-2}\right]|C_{i,0},\ldots,C_{i,I+k-i}\right] \\
&= f_J \cdot f_{J-1} \cdot \mathbb{E}\left[C_{i,J-2}|\mathcal{D}_{I+k}\right]
\end{aligned}$$

Tako iterativno nadaljujemo dokler ne dosežemo zadnje znane diagonale $i+j = I+k$.

$$\begin{aligned}
&= f_J \cdot f_{J-1} \cdots f_{I+k-i+2} \cdot \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i+1}|C_{i,I+k-i}\right]|\mathcal{D}_{I+k}\right] \\
&= f_J \cdot f_{J-1} \cdots f_{I+k-i+1} \cdot C_{i,I+k-i}.
\end{aligned}$$

Za $\mathbb{E}\left[C_{i,J}|C_{i,I+k-i}\right]$ je postopek analogen in rezultat enak, zato velja enakost $\mathbb{E}\left[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+k}\right] = \mathbb{E}\left[C_{i,J}|C_{i,I+k-i}\right]$. □

Uporabimo lemo 2.5.2 in dobimo najboljšo oceno za potrebne škodne rezervacije, ki jih mora zavarovalnica oblikovati v računovodskem letu k za škode nastale v letu i. Dobimo

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)} &= \widehat{C}_{i,J}^{(k)} - C_{i,I+k-i} \\
&= C_{i,I+k-i}\left(f_{I+k-i+1} \cdot f_{I+k-i+2} \cdots f_J - 1\right).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Podobno lahko ocenimo tudi višino posameznega zahtevka $X_{i,j}$, za $i + j > I + k$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X_{i,j}|\mathcal{D}_{I+k}\right] &= \mathbb{E}\left[C_{i,j} - C_{i,j-1}|\mathcal{D}_{I+k}\right] \\
&= C_{i,I+k-i} f_{I+k-i+1} \ldots f_{j-1}\left(f_j - 1\right).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Opomba. Lema 2.5.2 nam da oceno vrednosti $C_{i,J}$, a enaka lastnost velja tudi za vsak fiksen $j \neq J$, le da morajo veljati pogoji: $0 \leq j \leq J$, $i + j > I + k$ in $i \leq I$.

Izračuni so zelo preprosti, če poznamo faktorje razvoja f_j. Največji problem je ravno to, da faktorjev v večini primerov ne poznamo, in jih je potrebno oceniti. V stohastičnih modelih za individualne razvojne faktorje $F_{i,j} = C_{i,j}/C_{i,j-1}$ predpostavimo neko verjetnostno porazdelitev, v determinističnem modelu pa jih ocenimo na podlagi že realiziranih škod. Iščemo rešitev sistema

$$\begin{pmatrix} C_{0,j} \\ \vdots \\ C_{I+k-j,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{0,j-1} \\ \vdots \\ C_{I+k-j,j-1} \end{pmatrix} f_j + \epsilon.$$

Levo in desno stran z leve strani pomnožimo z vektorjem $(1\,1\,\ldots\,1)$ in dobimo

$$\sum_{i=0}^{I+k-j} C_{i,j} = f_j \sum_{i=0}^{I+k-j} C_{i,j-1} + \sum_{i=0}^{I+k-j} \epsilon_i.$$

Minimalno 1-normo napake dobimo za

$$\widehat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I+k-j} C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{I+k-j} C_{i,j-1}} = \sum_{i=0}^{I+k-j} \frac{C_{i,j-1}}{\sum_{l=0}^{I+k-j} C_{l,j-1}} \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}. \tag{2.14}$$

Ocena za f_j je torej uteženo povprečje realiziranih faktorjev razvoja $F_{i,j} = C_{i,j}/C_{i,j-1}$ za leta $i = 0, \ldots, I + k - j$.

Parameter σ_j^2 ocenimo z (glej [4])

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I + k - j} \sum_{i=0}^{I+k-j} C_{i,j-1} \left(\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} - \widehat{f}_j \right)^2. \tag{2.15}$$

2.5.1 MSEP za Mackov model

Za Mackov model 2.5.1 je oceno za srednjo kvadratno napako procesa $C_{i,J}$ izpeljal že Mack v [4]. Rezultat je standardna Mackova formula

$$\widehat{\mathrm{msep}}_{C_{i,J}|\mathcal{D}_I} \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)} \right) = \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)} \right)^2 \sum_{j=I-i}^{J-1} \frac{\widehat{\sigma}_{j+1}^2}{\widehat{f}_{j+1}^2} \left(\frac{1}{\widehat{C}_{i,j}^{(0)}} + \frac{1}{S_j^{[I-j-1]}} \right), \tag{2.16}$$

kjer je

$$S_j^{[I-j-1]} = \sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}.$$

Za razlago rezultata glej [4, Izrek 3].

Vrednost $\mathrm{msep}_{C_{i,J}|\mathcal{D}_I}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)$ zajema skupno negotovost glede višine prihodnjih obveznosti, gledano dolgoročno, do konca obravnave škodnega leta i. Kratkoročno gledano, pa za Mackov model dobimo naslednjo oceno za srednjo kvadratno napako rezultata razvoja zahtevkov

$$\widehat{\mathrm{msep}}_{\mathrm{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I}(0) = \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2 \left[\frac{\widehat{\sigma}^2_{I-i+1}/\left(\widehat{f}^{(0)}_{I-i+1}\right)^2}{C_{i,I-i}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\widehat{\sigma}^2_{I-i+1}/\left(\widehat{f}^{(0)}_{I-i+1}\right)^2}{\sum_{k=0}^{i-1} C_{k,I-i}} + \sum_{j=I-i+1}^{J-1} \frac{C_{I-j,j}}{\sum_{k=0}^{I-j} C_{k,j}} \frac{\widehat{\sigma}^2_{j+1}/\left(\widehat{f}^{(0)}_{j+1}\right)^2}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}}\right]. \quad (2.17)$$

Formulo sta analitično izpeljala Merz in Wüthrich leta 2008. Za razlago izpeljave glej [5].

2.6 Bayesova statistika

Cilj statistike je iz numeričnih podatkov y podati nek sklep glede vrednosti količine, ki nas zanima – ta neznani parameter označimo z ϑ (ϑ je lahko tudi vektor neznanih parametrov). Postavimo verjetnostni model – za porazdelitev podatkov predpostavimo porazdelitev, ki je odvisna od parametra ϑ. Pogojno porazdelitev, ki je znana, označimo z $p(y|\vartheta)$ – to je funkcija verjetja. Ločimo med dvema glavnima statističnima pristopoma. Prvi je frekventistični oz. klasični pristop, kjer neznani parameter ϑ obravnavamo kot fiksno, a neznano konstanto. Iz znanih podatkov (vzorca) izračunamo statistiko in na podlagi te določimo interval zaupanja, v katerem z določeno stopnjo zaupanja leži prava vrednost parametra ϑ.

Bayesova statistika pa neznani parameter obravnava kot slučajno spremenljivko. Porazdelitvi parametra ϑ rečemo apriorna porazdelitev in jo označimo z $p(\vartheta)$. Apriorna porazdelitev je določena subjektivno, glede na naše znanje in pričakovanja, in ni odvisna od dejanskega vzorca podatkov. Nato združimo naše znanje z vzorcem realiziranih podatkov, in dobimo posteriorno porazdelitev parametra ϑ, ki jo označimo z $p(\vartheta|y)$. Po Bayesovi formuli velja

$$p(\vartheta|y) = \frac{p(\vartheta, y)}{p(y)} = \frac{p(\vartheta) \cdot p(y|\vartheta)}{\int p(\vartheta)\, p(y|\vartheta)\, \mathrm{d}\vartheta}.$$

Člen v imenovalcu imenujemo normalizacijski faktor, ki pa je konstanta, ki ne vpliva na vrsto porazdelitve, in se ga v izračunih zanemari. Velja naslednja sorazmernostna lastnost

$$p(\vartheta|y) \propto p(\vartheta) \cdot p(y|\vartheta).$$

Oba člena na desni sta znana. Prvi je apriorna porazdelitev hipoteze ϑ, drugi člen pa je funkcija verjetja izzidov, pogojno na parameter ϑ. Če je posteriorna porazdelitev enakega tipa kot apriorna rečemo, da je verjetje konjugirano temu tipu porazdelitve. Več o Bayesovi statistiki si lahko preberete npr. v [18] ali [19].

Bayesove metode za ocenjevanje rezervacij so torej metode, v katerih za ocenjevanje rezervacij uporabimo tako naša pričakovanja glede vrednosti faktorjev razvoja f_j, ki jih imamo na podlagi znanja in izkušenj, kot tudi dosegljive podatke iz pretekosti. V nekaterih primerih posteriorne porazdelitve ni mogoče eksplicitno izračunati. V takih primerih si lahko pomagamo npr. z Monte Carlo metodami za Markovske verige, da zgeneriramo empirično posteriorno porazdelitev. Mi bomo predstavili dva primera, kjer lahko rezultate analitično izračunamo, v splošnem pa lahko uporabimo kakršnokoli porazdelitev.

Poglavje 3

Bayesov verižni model z gama porazdelitvijo

V tem poglaju bomo obravnavali Bayesov gama-gama verižni model in pristop stroška kapitala za izračun marže za tveganje. Mero tveganja, ki bo določala kapital za varovanje pred tveganjem, bomo določili preko kratkoročnega tveganja – preko standardnega odklona rezultata razvoja zahtevkov (CDR). Glavna referenca za vse metode, izračune in trditve v tem poglavju je članek [1], ki sta ga leta 2010 objavila R. Salzmann in M. V. Wüthrich. Najboljšo oceno nerešenih škodnih obveznosti bomo izračunali preko kumulativnih vrednosti po formuli (2.6) za vsako škodno leto posebej. Maržo za tveganje bomo izračunali po pristopu stroška kapitala (*cost-of-capital approach*). Obravnavali bomo štiri različne pristope:

- $\widehat{\mathcal{R}^{(1)}}$: Pristop približka nadzorovane solventnosti (*The Regulatory Solvency Approach*). Tu se upošteva negotovost v prvem letu ($k = 1$), ne pa tudi v kasnejših letih ($k \geq 2$) – za ostala leta je mera tveganja proporcionalna meri tveganja za prvo leto.

- $\widehat{\mathcal{R}^{(2)}}$: Razdelitev skupne negotovosti (*The Split of Total Uncertainty Approach*). To je prilagoditev prvega pristopa, kjer se upošteva negotovost v vseh prihodnjih letih – tveganje se za vsako računovnodsko leto oceni posebej (za $k \geq 1$), glede na vse ob času $t = 0$ dostopne informacije.

- $\widehat{\mathcal{R}^{(3)}}$: Pričakovana samostojna mera tveganja (*The Expected Stand-Alone Risk Measure Approach*). Mero tveganja po tem pristopu se za vsako računovodsko leto k izračuna z uporabo vseh informacij znanih ob času $k - 1$.

- $\widehat{\mathcal{R}^{(4)}}$: Večobdobna mera tveganja (*The Multiperiod Risk Measure Approach*). To je dinamični in matematično najbolj konsistenten model, a veliko bolj kompleksen in tehnično zahteven v primerjavi s prejšnjimi.

3.1 Porazdelitev gama

Najprej ponovimo osnovne lastnosti gama porazdelitve, ki jih bomo večkrat potrebovali. Porazdelitev gama je določena z dvema parametroma – prvi je parameter oblike, drugi pa parameter stopnje. Porazdelitev označimo z $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$.

Funkcija gostote gama porazdelitve je

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}, \text{ za } x > 0$$

kjer je $\Gamma(x)$ funkcija gama, za katero velja:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t,$$
$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Prva dva momenta gama porazdelitve sta $\mathbb{E}[X] = \alpha/\beta$ in $\mathrm{Var}(X) = \alpha/\beta^2$. Večkrat bomo potrebovali tudi $\mathbb{E}[X^{-1}] = \beta/(\alpha - 1)$ in $\mathbb{E}[X^{-2}] = \beta^2/[(\alpha-1)(\alpha-2)]$.

3.2 Model

Individualne faktorje razvoja (*development factors*) definiramo z $F_{i,j} = C_{i,j}/C_{i,j-1}$ za $j = 1, \ldots, J$. Kumulativna plačila $C_{i,j}$ so potem dana s formulo

$$C_{i,j} = C_{i,0} \prod_{m=1}^{j} F_{i,m}.$$

Prvo plačilo $C_{i,0}$ predstavlja začetno vrednost procesa $(C_{i,j})_{j=0,\ldots,J}$, $F_{i,j}$ so faktorji sprememb. Ob času $I + k$, za $k = 0, \ldots, J$, so začetne vrednosti $C_{i,0}$ za vse $i \in \{0, \ldots, I\}$ že znane. Za $F_{i,j}$ izberemo gama porazdelitev s takimi parametri, da je pogojno matematično upanje spremenljivke $F_{i,j}$ enako Θ_j^{-1} – slučajne spremenljivke $\Theta_1^{-1}, \ldots, \Theta_J^{-1}$, oziroma natančneje njihova matematična upanja, bodo imeli vlogo faktorjev razvoja.

Predpostavka 3.2.1 (Bayesov $\Gamma - \Gamma$ verižni model) *Predpostavimo*

- *pogojno na* $\boldsymbol{\Theta} = (\Theta_1, \dots, \Theta_J)$ *velja:*
  - *kumulativna plačila* $C_{i,j}$ *so za različna škodna leta i neodvisna,*
  - $C_{i,0}, F_{i,1}, \dots, F_{i,J}$ *so neodvisni, in za* $j = 1, \dots, J$ *velja*

$$F_{i,j}\Big|_{\boldsymbol{\Theta}} \sim \Gamma\left(\sigma_j^{-2}, \Theta_j \sigma_j^{-2}\right),$$

  kjer so σ_j *dane pozitivne konstante,*

- $C_{i,0}$ *in* $\boldsymbol{\Theta}$ *sta neodvisna,*
- *spremenljivke* $\Theta_1, \dots, \Theta_J$ *so neodvisne z* $\Theta_j \sim \Gamma(\gamma_j, f_j \cdot (\gamma_j - 1))$ *in apriornimi parametri* $f_j > 0$ *in* $\gamma_j > 2$.

Pogojno na $\boldsymbol{\Theta}$ izračunamo prva dva momenta spremenljivk $C_{i,j}$:

$$\mathbb{E}\left[C_{i,j} | \boldsymbol{\Theta}, C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}\right] = C_{i,j-1}\, \mathbb{E}\left[F_{i,j} | \boldsymbol{\Theta}\right] = C_{i,j-1}\, \Theta_j^{-1},$$
$$\operatorname{Var}\left(C_{i,j} | \boldsymbol{\Theta}, C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}\right) = C_{i,j-1}^2 \operatorname{Var}\left(F_{i,j} | \boldsymbol{\Theta}\right) = C_{i,j-1}^2\, \sigma_j^2\, \Theta_j^{-2}.$$

Vidimo, da imajo Θ_j^{-1} vlogo faktorjev razvoja pri metodi veriženja. Glede na apriorno porazdelitev parametra Θ_j dobimo za Θ_j^{-1} naslednje momente

$$\mathbb{E}\left[\Theta_j^{-1}\right] = f_j, \quad \mathbb{E}\left[\Theta_j^{-2}\right] = f_j^2 \frac{\gamma_j - 1}{\gamma_j - 2} \quad \text{in} \quad \operatorname{Var}\left(\Theta_j^{-1}\right) = f_j^2 \frac{1}{\gamma_j - 2}.$$

Apriorno povprečje j-tega razvojnega faktorja je f_j. Predpostavka $\gamma_j > 2$ je potrebna za obstoj drugih momentov.

3.3 Posteriorna porazdelitev

Ob času $k \geq 0$ imamo nabor informacij $\mathcal{D}_{I+k}$, narediti pa moramo napoved neporavnanih obveznosti, ki smo jih za škodno leto i definirali kot vrednost $C_{i,J} - C_{i,I-i+k}$.

Za faktorje razvoja smo glede na naša pričakovanja, ki jih imamo na podlagi izkušenj in znanja, predpostavili apriorno porazdelitev. Apriorna porazdelitev je določena brez vseh informacij o realizaciji podatkov. Ker pa moramo za izračun rezervacij vedno uporabiti vse dosegljive informacije, moramo ustrezno posodobiti tudi porazdelitev faktorjev razvoja. Tako dobimo posteriorno porazdelitev, ki vključuje naša pričakovanja o porazdelitvi faktorjev razvoja, in tudi podatke, kakšni so bili realizirani individualni faktorji. Posteriorno porazdelitev izračunamo ob vsakem $k = 0, \dots, J$, glede na nabor informacij $\mathcal{D}_{I+k}$. Naslednja trditev nam pove, kakšna je posteriorna porazdelitev spremenljivk Θ_j ob času k.

Trditev 3.3.1 *Pod predpostavkami modela 3.2.1 so posteriorne porazdelitve spremenljivk Θ_j, pogojno na $\mathcal{D}_{I+k}$, neodvisne gama porazdelitve s parametroma*

$$\gamma_j^{(k)} = \gamma_j + \frac{\min\{I+k-j, I\}+1}{\sigma_j^2} \quad \textit{in} \quad c_j^{(k)} = f_j(\gamma_j - 1) + \sigma_j^{-2} \sum_{i=0}^{\min\{I+k-j,I\}} F_{i,j}.$$

Dokaz. Iz predpostavk modela poznamo porazdelitev podatkov $F_{i,j}|_{\mathbf{\Theta}} \sim \Gamma\left(\sigma_j^{-2}, \Theta_j\,\sigma_j^{-2}\right)$ za $j = 1, \ldots, J$, kjer so $F_{i,j}$ neodvisne slučajne spremenljivke. Funkcija verjetja je tako naslednja:

$$\prod_{j=1}^{J} \prod_{i=0}^{\min\{I+k-j,I\}} \frac{\left(\Theta_j\,\sigma_j^{-2}\right)^{\sigma_j^{-2}}}{\Gamma\left(\sigma_j^{-2}\right)} F_{i,j}^{\sigma_j^{-2}-1} \exp\left\{-\Theta_j\,\sigma_j^{-2} F_{i,j}\right\}.$$

Ker so spremenljivke $\Theta_1, \ldots, \Theta_J$ neodvisne, z apriorno porazdelitvijo $\Theta_j \sim \Gamma(\gamma_j, f_j(\gamma_j - 1))$, je apriorna gostota vektorja $\mathbf{\Theta} = (\Theta_1, \ldots, \Theta_J)$ enaka

$$\prod_{j=1}^{J} \frac{(f_j(\gamma_j - 1))^{\gamma_j}}{\Gamma(\gamma_j)} \Theta_j^{\gamma_j - 1} \exp\{-f_j(\gamma_j - 1)\,\Theta_j\}.$$

Produkt obeh je posteriorna gostota vektorja $\mathbf{\Theta}$, pogojno na $\mathcal{D}_{I+k}$, ki jo označimo z $h(\mathbf{\Theta}|\mathcal{D}_{I+k})$. Zanima nas samo vrsta porazdelitve, zato se osredotočimo samo na člene z Θ_j (ostalo so konstante), in dobimo naslednjo sorazmernostno lastnost

$$h(\mathbf{\Theta}|\mathcal{D}_{I+k}) \propto \prod_{j=1}^{J} \Theta_j^{\gamma_j + \frac{\min\{I+k-j,I\}+1}{\sigma_j^2} - 1} \exp\left\{-\left[f_j(\gamma_j - 1) + \sigma_j^{-2} \sum_{i=0}^{\min\{I+k-j,I\}} F_{i,j}\right]\Theta_j\right\}.$$

To je produkt neodvisnih gostot porazdelitev tipa gama $\Gamma\left(\gamma_j^{(k)}, c_j^{(k)}\right)$, z

$$\gamma_j^{(k)} = \gamma_j + \frac{\min\{I+k-j, I\}+1}{\sigma_j^2} \quad \text{in} \quad c_j^{(k)} = f_j(\gamma_j - 1) + \sigma_j^{-2} \sum_{i=0}^{\min\{I+k-j,I\}} F_{i,j},$$

kar dokazuje trditev. □

Trditev nam pove, da je tudi posteriorna porazdelitev tipa gama. Ob vsakem času $k = 0, \ldots, J$ je potrebno le ustrezno posodobiti parametra porazdelitve. Z uporabo trditve izračunamo prva dva momenta spremenljivke Θ_j^{-1} – to nam pove naslednja posledica.

Posledica 3.3.2 *Pod predpostavkami trditve 3.3.1 velja*

$$\widehat{f}_j^{(k)} \overset{def.}{=} \mathbb{E}\left[\Theta_j^{-1} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] = \frac{c_j^{(k)}}{\gamma_j^{(k)} - 1} = \alpha_j^{(k)} \overline{F}_j^{(k)} + \left(1 - \alpha_j^{(k)}\right) f_j, \tag{3.1}$$

$$\mathbb{E}\left[\Theta_j^{-2} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] = \frac{\left(c_j^{(k)}\right)^2}{\left(\gamma_j^{(k)} - 1\right)\left(\gamma_j^{(k)} - 2\right)} = \left(\widehat{f}_j^{(k)}\right)^2 \frac{\gamma_j^{(k)-1}}{\gamma_j^{(k)} - 2}, \tag{3.2}$$

kjer sta

$$\overline{F}_j^{(k)} = \frac{1}{\min\{I + k - j, I\} + 1} \sum_{i=0}^{\min\{I+k-j,I\}} F_{i,j} \quad \textit{(vzorčno povprečje), in} \tag{3.3}$$

$$\alpha_j^{(k)} = \frac{\min\{I + k - j, I\} + 1}{\min\{I + k - j, I\} + 1 + \sigma_j^2\left(\gamma_j - 1\right)}. \tag{3.4}$$

Posledico dobimo neposredno iz trditve 3.3.1. Vidimo, da je posteriorno povprečje $\widehat{f}_j^{(k)}$ enako uteženemu povprečju apriornega povprečja f_j in povprečja podatkov $\overline{F}_j^{(k)}$, kjer je $\alpha_j^{(k)}$ utež. Ko pošljemo $\gamma_j \to \infty$, gre apriorna varianca $\mathrm{Var}\left(\Theta_j^{-1}\right) \to 0$. V tem primeru gre za zanesljivo informativno apriorno porazdelitev, $\alpha_j^{(k)} \to 0$, in opazovane vrednosti skoraj nič ne vplivajo na posteriorno upanje. Ko pa $\gamma_j \to 1$, gre $\alpha_j^{(k)} \to 1$, v tem primeru bi šlo za neinformativno apriorno porazdelitev, in bi bila ocena faktorja kar enaka vzorčnemu povprečju. A za obstoj variance smo predpostavili da $\gamma_j > 2$, zato nam tega primera ni potrebno obravnavati.

Neposredno iz te posledice dobimo še naslednjo posledico, ki nam da rekurzivno zvezo za $\widehat{f}_j^{(k)}$.

Posledica 3.3.3 *Za $k \geq 1$ in $j \geq k$ imamo*

$$\widehat{f}_j^{(k)} = a_j^{(k)} F_{I+k-j,j} + \left(1 - a_j^{(k)}\right) \widehat{f}_j^{(k-1)},$$

kjer je utež kredibilnosti $a_j^{(k)}$ dana z

$$a_j^{(k)} = \left(I + k - j + 1 + \sigma_j^2\left(\gamma_j - 1\right)\right)^{-1}. \tag{3.5}$$

3.4 Najboljša ocena rezervacij za škodno leto i

Zdaj imamo model postavljen in lahko izračunamo najboljšo oceno za potrebne rezervacije $\widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)}$. Naslednja trditev določa najboljšo napoved skupnih zahtevkov za škodno leto i, glede na informacije $\mathcal{D}_{I+k}$. S tem je določena tudi najboljša ocena nerešenih škodnih obveznosti, ki je prva sestavina potrebnih rezervacij.

Trditev 3.4.1 *Predpostavimo, da veljajo vse predpostavke trditve 3.3.1. Napoved celotnih obveznosti za škodno leto i, to je $C_{i,J}$, z najmanjšo pogojno varianco, pogojno na $\mathcal{D}_{I+k}$, je dana z $\widehat{C}_{i,J}^{(k)} = \mathbb{E}\left[C_{i,J} | \mathcal{D}_{I+k}\right]$. Za $I + k < i + J$ dobimo*

$$\widehat{C}_{i,J}^{(k)} = \mathbb{E}\left[C_{i,J} | \mathcal{D}_{I+k}\right] = C_{i,I-i+k} \prod_{j=I-i+k+1}^{J} \widehat{f}_j^{(k)}. \tag{3.6}$$

Dokaz. Dokaz je analogen dokazu leme 2.5.2, le da za oceno faktorjev razvoja uporabimo matematično upanje $(\widehat{f}_j^{(k)})$, ker matematično upanje minimizira L^2 razdaljo. Uporabimo tudi posteriorno neodvisnost spremenljivk Θ_j (trditev 3.3.1). □

Najboljša ocena rezervacij je enaka

$$\widehat{\mathcal{R}}^{(k)} = \sum_{i=1}^{I} C_{i,I-i+k} \left(\prod_{j=I-i+k+1}^{J} \widehat{f}_j^{(k)} - 1 \right).$$

3.5 Marža za tveganje po pristopu stroška kapitala (*Cost-of-capital margin*)

Po direktivi Solventnost II mora biti vrednost zavarovalno-tehničnih rezervacij enaka tržni vrednosti vseh pravic in obveznosti, za katere se oblikujejo rezervacije. Glede na 77. člen direktive, se vrednost rezervacij deli na najboljšo oceno in maržo za tveganje, ki pa se morata vrednotiti ločeno. V prejšnjem poglavju smo izračunali najboljšo oceno, sedaj pa bomo izračunali še maržo za tveganje. Predlagani pristop je pristop stroška kapitala, kjer je marža definirana kot sedanja vrednost trenutnih in bodočih stroškov kapitala, ki do odliva krije obveznosti in tako zagotavlja solventnost.
Izračun marže za tveganje po pristopu stroška kapitala lahko razdelimo na štiri korake:

- projekcija pričakovanih kapitalskih zahtev do poravnave vseh zahtevkov,

- izbira stopnje stroška kapitala c, s katero pomnožimo vse projekcije kapitalskih zahtev,
- diskontiranje vseh zneskov na čas 0 in
- seštejemo dobljene vrednosti. To je marža za tveganje po pristopu stroška kapitala, oziroma marža za strošek kapitala.

Najpomembnejši korak je izbira potrebnega kapitala za zagotavljanje solventnosti. Po [7] naj bi bil to znesek, ki ga zavarovalnica potrebuje v okviru enega leta, da z $99,5\%$ stopnjo zaupanja zagotavlja solventnost. Izračunan naj bi bil kot tvegana vrednost (*Value at Risk (VaR)*) kapitala, ki je na voljo. Le ta je odvisen od razmer na trgu, in zato sta marža za tveganje in potrebni kapital odvisna drug od drugega. Predlaganih je bilo več poenostavitev in približkov za projiciranje prihodnjih kapitalskih zahtev, ki zanemarijo to vzajemno odvisnost.

Mero tveganja za računovodsko leto k, ki bo predstavljala zahtevani kapital za zagotavljanje solventnosti v računovodskem letu k, označimo z ρ_k. To bo s strani regulatorja zahtevani kapital, ki je namenjen za pokritje nepričakovanih odlivov, ki niso bili predvideni pri napovedi najboljše ocene. Po pristopu stroška kapitala zavarovalnicam ni potrebno držati celotnega kapitala ρ_k, pokrit morajo imeti le strošek oz. ceno tega kapitala (marža za strošek kapitala).

Predpostavimo, da je strošek kapitala dan s konstantnim deležem $c > 0$. Cena zaščite pred tveganjem v računovodskem letu k je potem definirana kot $c\rho_k$. To si lahko predstavljamo kot obveznost do stranke, ki nam zagotavlja kapital ρ_k, če ga potrebujemo. Glede na TP.5.25. v [10] naj bi bil $c = 6\%$

Ob času k mora zavarovalnica poleg rezervacij za zahtevke $\widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)}$ oblikovati maržo za pokritje stroška kapitala v vseh naslednjih letih

$$c\,\rho_{k+1}, \ldots, c\,\rho_{J+i-I}.$$

Opomba. Računovodska leta označujemo z $I + k$. Zadnje leto, v katerem oblikujemo rezerve za škodno leto i je $i + J$, torej $k = i + J - I$.

Rezerve za pokritje skupnih stroškov kapitala, povezanih s škodnim letom i, $c\,\rho_{k+1}, \ldots, c\,\rho_{J+i-I}$, označimo z $\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k)}$. To je marža za strošek kapitala. Tveganju prilagojene rezerve, ki jih mora zavarovalnica oblikovati ob času k so potem dane z

$$\widehat{\mathcal{R}_i^{(*)}}^{(k)} = \widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)} + \widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k)}. \tag{3.7}$$

Opomba. V enačbi (3.7) bomo na mestu $^{(*)}$ označili pristop, po katerem bomo računali strošek kapitala.

Končen rezultat je odvisen od izbire zahtevanega kapitala oz. mere tveganja ρ_k. V nadaljevanju bomo predstavili štiri možne izbire le te, pri vseh pa bomo negotovost vpeljali preko negotovosti rezultata razvoja zahtevkov CDR, zato najprej navedimo dve pomembni trditvi, ki nam bosta pomagali pri izračunih.

Trditev 3.5.1 *Pod predpostavkami modela 3.2.1 velja*

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{CDR}_i\left(k\right)|\mathcal{D}_{I+k-1}\right] = 0.$$

Še več, CDR *so nekorelrani – za* $k \geq 1, l \leq J$ *in* $m < \max\{k,l\}$ *velja*

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{CDR}_i\left(k\right)\mathrm{CDR}_i\left(l\right)|\mathcal{D}_{I+m}\right] = 0$$

Dokaz. Ponovimo, $\mathrm{CDR}_i\left(k\right) = \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k)}$, $\widehat{C}_{i,J}^{(k)}$ pa je definiran kot $\mathbb{E}\left[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+k}\right]$. Najprej opazimo, da je $\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\right)_{k=0,\ldots,J}$ martingalski proces glede na $\mathcal{D}_{I+k}$, saj velja

$$\mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+k+1}\right]|\mathcal{D}_{I+k}\right] = \mathbb{E}\left[C_{i,J}|\mathcal{D}_{I+k}\right] = \widehat{C}_{i,J}^{(k)}.$$

Drugi enačaj velja zaradi stolpne lastnost pogojnega matematičnega upanja, saj $\mathcal{D}_{I+k} \subseteq \mathcal{D}_{I+k+1}$. Iz martingalske lastnosti procesa $\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\right)_{k=0,\ldots,J}$ takoj sledi da je

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{CDR}_i\left(k\right)|\mathcal{D}_{I+k-1}\right] = \mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right] = 0.$$

Za nekoreliranost pa uporabimo zakon o popolnem matematičnem upanju. Predpostavimo, da je $k = \max\{k,l\}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathrm{CDR}_i\left(k\right)\mathrm{CDR}_i\left(l\right)|\mathcal{D}_{I+m}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\right)\left(\widehat{C}_{i,J}^{(l)} - \widehat{C}_{i,J}^{(l-1)}\right)\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]\middle|\mathcal{D}_{I+m}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\widehat{C}_{i,J}^{(l)} - \widehat{C}_{i,J}^{(l-1)}\right)\mathbb{E}\left[\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\right)\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]\middle|\mathcal{D}_{I+m}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Drugi enačaj velja, ker je $l \leq k-1$ in sta $\widehat{C}_{i,J}^{(l)}$ in $\widehat{C}_{i,J}^{(l-1)}$ merljivi glede na $\mathcal{D}_{I+k-1}$. Tretji enačaj velja zaradi martingalske lastnosti $\mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right] = \mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right] = \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}$. □

3.5.1 Pristop približka nadzorovane solventnosti (***Regulatory Solvency Proxy Approach***)

Prva mera tveganja je preprost približek, kjer določimo zahtevani solventnostni kapital za prvo leto, za ostala leta pa predpostavimo, da je zahtevani kapital le temu proporcionalen.

Za $I + k \leq J + i$ in $i, k \geq 1$ definiramo konstanto

$$\beta_{i,k} = \left(\sigma^2_{I+k-i} + 1\right) \frac{\gamma^{(k-1)}_{I+k-i} - 1}{\gamma^{(k-1)}_{I+k-i} - 2} \prod_{j=I+k-i+1}^{J} \left[\left(a^{(k)}_j\right)^2 \left(\left(\sigma^2_j + 1\right) \frac{\gamma^{(k-1)}_j - 1}{\gamma^{(k-1)}_j - 2} - 1\right) + 1\right]. \tag{3.8}$$

Ker so vsi faktorji večji od 1, je tudi $\beta_{i,k} > 1$. Če pogledamo definiciji $a^{(k)}_j$ in $\gamma^{(k)}_j$ vidimo, da sta spremenljivki neodvisni od podatkov, torej to velja tudi za $\beta_{i,k}$. To je pomembna lastnost, ki jo bomo večkrat uporabili.

Trditev 3.5.2 *Pod predpostavkami modela 3.2.1 za $I + 1 \leq J + i$ velja*

$$\operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\left(1\right) | \mathcal{D}_I\right) = \operatorname{Var}\left(\widehat{C}^{(1)}_{i,J} \middle| \mathcal{D}_I\right) = \left(\widehat{C}^{(0)}_{i,J}\right)^2 \left(\beta_i, 1 - 1\right).$$

Dokaz. Trditev sledi iz izreka 3.5.3 v nadaljevanju. □

$\widehat{\mathcal{R}}^{(k)}_i$ je najboljša ocena potrebnih rezervacij, ki jih moramo oblikovati ob času k. Zdaj pa nas zanima, kakšna so ob času 0 naša pričakovanja glede višine le teh. To vrednost definiramo z

$$r^{(k)}_i = \mathbb{E}\left[\widehat{\mathcal{R}}^{(k)}_i \middle| \mathcal{D}_I\right] = \mathbb{E}\left[\widehat{C}^{(k)}_{i,J} - C_{i,I-i+k} \middle| \mathcal{D}_I\right] = \widehat{C}^{(0)}_{i,J} - \widehat{C}^{(0)}_{i,I-i+k}.$$

Vrednosti $r^{(0)}_i, \ldots, r^{(J+i-I-1)}_i, r^{(J+i-I)}_i = 0$ opisujejo pričakovane višine rezervacij, gledano ob času 0.

Preko tega definiramo prvo mero tveganja. Izberemo

$$\rho^{(1)}_{i,k} = \frac{r^{(k-1)}_i}{r^{(0)}_i} \phi \operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\left(1\right) | \mathcal{D}_I\right)^{1/2} = \frac{\widehat{C}^{(0)}_{i,J} - \widehat{C}^{(0)}_{i,I-i+k-1}}{\widehat{C}^{(0)}_{i,J} - C_{i,I-i}} \phi \widehat{C}^{(0)}_{i,J} \left(\beta_{i,1} - 1\right)^{1/2}, \tag{3.9}$$

kjer je ϕ fiksna pozitivna konstanta, ki določa želeno stopnjo varnosti. Večja kot je, bolj konzervativni smo, saj je strošek kapitala večji, posledično pa tudi končne rezervacije. Za $k = 1$ dobimo

$$\rho^{(1)}_{i,1} = \phi \operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\left(1\right) | \mathcal{D}_I\right)^{1/2} = \phi \widehat{C}^{(0)}_{i,J} \left(\beta_{i,1} - 1\right)^{1/2}.$$

Za prvo računovodsko leto je mera tveganja določena s standardnim odklonom rezultata razvoja zahtevkov v prvem letu. Predpostavimo, da sta negotovost, in s tem zahtevani kapital za ostala računovodska leta proporcionalna negotovosti v prvem letu. $\rho_{i,1}^{(1)}$ pomnožimo s faktorjem $r_i^{(k-1)}/r_i^{(0)}$ in dobimo mero tveganja $\rho_{i,k}^{(1)}$ za računovodska leta $k \geq 2$. To si lahko interpretiramo tako, da je v prvem letu zahtevani kapital za pokritje tveganj največji, in ustreza kar celotnemu standardnemu odklonu, pomnoženemu s faktorjem ϕ. Skozi naslednja leta pa potrebni kapital pada, ker so nekateri zahtevki že poravnani, zato je tudi negotovost manjša. Faktor $r_i^{(k-1)}/r_i^{(0)}$ predstavlja delež ob času $k-1$ preostalih obveznosti, glede na skupne ob času 0 pričakovane obveznosti, ki je manjši ali enak 1.

Tveganju prilagojene rezervacije, ki jih mora zavarovalnica oblikovati za škodno leto i ob času 0 so enake vsoti najboljše ocene neporavnanih obveznosti ob času 0 in marž za strošek kapitala v računovodskih letih $k = 1, \ldots, J+i-I$. Tveganju prilagojene škodne rezervacije ob času 0 so

$$\widehat{\mathcal{R}_i^{(1)}}^{(0)} = \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + c\,\phi\,\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\left(\beta_{i,1}-1\right)^{1/2}\sum_{k=1}^{J+i-I}\frac{\widehat{C}_{i,J}^{(0)} - \widehat{C}_{i,I-i+k-1}^{(0)}}{\widehat{C}_{i,J}^{(0)} - C_{i,I-i}}. \tag{3.10}$$

Rezervacije (3.10) so končni rezultat prvega pristopa. Ta pristop je najbolj preprost, saj je potrebno izračunati le standardni odklon CDR za prvo računovodsko leto, tveganje v nadaljnih letih pa je proporcionalno tveganju v prvem letu. Prednost tega pristopa je preprosta izračunljivost, slabost pa, da so vse mere odvisne le od variance CDR v prvem letu, ne pa tudi o ostalih. Negotovost iz računovodskih let $k = 2, \ldots, J+i-I$ tako v model ni zajeta.

3.5.2 Razdelitev skupne negotovosti (*Split of the Total Uncertainty Approach*)

Skupno negotovost ob času 0 odraža varianca $\mathrm{Var}\left(C_{i,J}|\mathcal{D}_I\right)$. Ker je $\widehat{C}_{i,J}^{(0)}$ merljiva glede na $\mathcal{D}_I$ velja

$$\mathrm{Var}\left(C_{i,J}|\mathcal{D}_I\right) = \mathrm{Var}\left(C_{i,J} - \widehat{C}_{i,J}^{(0)}\middle|\mathcal{D}_I\right).$$

$C_{i,J} - \widehat{C}_{i,J}^{(0)}$ pa je ravno vsota vseh CDR-jev:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{J+i-I}\mathrm{CDR}_i\left(k\right) &= \widehat{C}_{i,J}^{(1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(0)} + \widehat{C}_{i,J}^{(2)} - \widehat{C}_{i,J}^{(1)} + \cdots + \widehat{C}_{i,J}^{(J+i-I)} - \widehat{C}_{i,J}^{(J+i-I-1)} \\ &= \widehat{C}_{i,J}^{(J+i-I)} - \widehat{C}_{i,J}^{(0)} = C_{i,J} - \widehat{C}_{i,J}^{(0)}.\end{aligned}$$

Skupno negotovost lahko tako razdelimo na vsoto posameznih enoletnih negotovosti:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(C_{i,J}|\mathcal{D}_I\right) &= \operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{J+i-I}\operatorname{CDR}_i\left(k\right)\middle|\mathcal{D}_I\right) = \sum_{k=1}^{J+i-I}\operatorname{Var}\left(\operatorname{CDR}_i\left(k\right)|\mathcal{D}_I\right)\\ &= \sum_{k=1}^{J+i-I}\mathbb{E}\left[\operatorname{CDR}_i^2\left(k\right)\middle|\mathcal{D}_I\right] = \sum_{k=1}^{J+i-I}\mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)\middle|\mathcal{D}_I\right].\end{aligned}$$

Drugi enačaj velja zaradi nekoreliranosti CDR-jev, tretji sledi iz definicije variance in lastnosti $\mathbb{E}\left[\operatorname{CDR}_i\left(k\right)|\mathcal{D}_I\right] = 0$. Četrti enačaj dobimo z upoštevanjem formule o popolni verjetnosti in trditve 3.5.1:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\operatorname{CDR}_i^2\left(k\right)\middle|\mathcal{D}_I\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\operatorname{CDR}_i^2\left(k\right)\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]\middle|\mathcal{D}_I\right] = \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\operatorname{CDR}_i\left(k\right)|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)|\mathcal{D}_I\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)\middle|\mathcal{D}_I\right] = \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)\middle|\mathcal{D}_I\right].\end{aligned}$$

Naslednji izrek pove, kako izračunati variance, ki v tem izrazu nastopajo.

Izrek 3.5.3 *Pod predpostavkami modela 3.2.1 za $I + k \leq J + i$ velja*

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right) = \left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\right)^2\left(\beta_{i,k} - 1\right), \tag{3.11}$$

$$\operatorname{Var}\left(\operatorname{CDR}_i\left(k\right)|\mathcal{D}_I\right) = \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2\prod_{j=1}^{k-1}\beta_{i,j}\left(\beta_{i,k} - 1\right). \tag{3.12}$$

(Prazen produkt je enak 1.)

Dokaz. Za $I + k \leq J + i$ velja (glej trditev 3.4.1)

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right) = \operatorname{Var}\left(C_{i,I+k-i}\prod_{j=I+k-i+1}^{J}\widehat{f}_j^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right). \tag{3.13}$$

Za faktorje $\widehat{f}_j^{(k)}$ po posledici 3.3.3 velja

$$\widehat{f}_j^{(k)} = \alpha_j^{(k)}\overline{F}_j^{(k)} + \left(1 - \alpha_j^{(k)}\right)f_j = a_j^{(k)}F_{I+k-j,j} + \left(1 - a_j^{(k)}\right)\widehat{f}_j^{(k-1)}.$$

Pogojno na $\mathcal{D}_{I+k-1}$ je $F_{I+k-j,j}$ edini slučajni člen v $\widehat{f}_j^{(k)}$. Slučajni členi v varianci (3.13) so $F_{I+k-J,J}, F_{I+k-J+1,J-1}, \ldots, F_{i-1,I+k-i+1}, C_{i,I+k-i}$ – vsi so odvisni od različnih škodnih let in različnih let razvoja. Upoštevamo še posteriorno pogojno neodvisnost spremenljivk $\Theta_1, \ldots, \Theta_J$, in opazimo, da so spremenljivke $C_{i,I+k-i}$, $\widehat{f}^{(k)}_{I+k-i+1}$, $\ldots, \widehat{f}^{(k)}_J$ neodvisne (pogojno na $\mathcal{D}_{I+k-1}$). Dobimo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\Big(C_{i,I+k-i} & \prod_{j=I+k-i+1}^{J} \widehat{f}^{(k)}_j \Big| \mathcal{D}_{I+k-1}\Big) \\
&= \mathbb{E}\left[C^2_{i,I+k-i} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \prod_{j=I+k-i+1}^{J} \mathbb{E}\left[\left(\widehat{f}^{(k)}_j\right)^2 \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&\quad - \mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i} | \mathcal{D}_{I+k-1}\right]^2 \prod_{j=I+k-i+1}^{J} \mathbb{E}\left[\widehat{f}^{(k)}_j \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right]^2 \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Posebej izračunamo nastopajoče faktorje:

$$\mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i} | \mathcal{D}_{I+k-1}\right]^2 = C^2_{i,I+k-i-1} \mathbb{E}\left[F_{i,I+k-i} | \mathcal{D}_{I+k-1}\right]^2 = C^2_{i,I+k-i-1} \left(\widehat{f}^{(k-1)}_{I+k-i}\right)^2,$$

$$\mathbb{E}\left[\widehat{f}^{(k)}_j \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] = \widehat{f}^{(k-1)}_j.$$

Za izračun ostalih potrebujemo $\mathbb{E}\left[F^2_{i,I+k-i} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right]$, $\mathbb{E}\left[F_{i,I+k-i} | \mathcal{D}_{I+k-1}\right]$ in $\operatorname{Var}\left(F_{i,I+k-i} | \mathcal{D}_{I+k-1}\right)$, zato najprej izračunamo te:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F_{i,I+k-i} | \mathcal{D}_{I+k-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[F_{i,I+k-i} | \boldsymbol{\Theta}, \mathcal{D}_{I+k-1}\right] | \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Theta^{-1}_{I+k-i} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&= \widehat{f}^{(k-1)}_{I+k-i},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[F^2_{i,I+k-i} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[F^2_{i,I+k-i} \middle| \boldsymbol{\Theta}, \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(F_{i,I+k-i} | \boldsymbol{\Theta}\right) + \mathbb{E}\left[F_{i,I+k-i} | \boldsymbol{\Theta}\right]^2 \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\Theta^{-2}_{I+k-i} \sigma^2_{I+k-i} + \Theta^{-2}_{I+k-i} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&= \left(\sigma^2_{I+k-i} + 1\right) \mathbb{E}\left[\Theta^{-2}_{I+k-i} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&= \left(\sigma^2_{I+k-i} + 1\right) \left(\widehat{f}^{(k-1)}_{I+k-i}\right)^2 \frac{\gamma^{(k-1)}_{I+k-i} - 1}{\gamma^{(k-1)}_{I+k-i} - 2},
\end{aligned}$$

oz. v splošnem, za $i + j > I + k$:

$$\mathbb{E}\left[F_{i,j} | \mathcal{D}_{I+k}\right] = \widehat{f}^{(k)}_j \quad \text{in} \quad \mathbb{E}\left[F^2_{i,j} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] = \left(\sigma^2_j + 1\right) \left(\widehat{f}^{(k)}_j\right)^2 \frac{\gamma^{(k)}_j - 1}{\gamma^{(k)}_j - 2}.$$

Torej

$$\operatorname{Var}\left(F_{i,j}|\mathcal{D}_{I+k}\right) = \left(\widehat{f}_j^{(k)}\right)^2 \left(\left(\sigma_j^2+1\right)\frac{\gamma_j^{(k)}-1}{\gamma_j^{(k)}-2}-1\right).$$

Zdaj lahko izračunamo $\mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i}^2\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]$ in $\mathbb{E}\left[\left(\widehat{f}_j^{(k)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i}^2\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right] &= \mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i-1}^2F_{i,I+k-i}^2\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]\\
&= C_{i,I+k-i-1}^2\mathbb{E}\left[F_{i,I+k-i}^2\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]\\
&= C_{i,I+k-i-1}^2\left(\sigma_{I+k-i}^2+1\right)\left(\widehat{f}_{I+k-i}^{(k-1)}\right)^2\frac{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)}-1}{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)}-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\widehat{f}_j^{(k)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right] &= \operatorname{Var}\left(\widehat{f}_j^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)+\mathbb{E}\left[\widehat{f}_j^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]^2\\
&= \operatorname{Var}\left(a_j^{(k)}F_{I+k-j,j}+\left(1-a_j^{(k)}\right)\widehat{f}_j^{(k-1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)+\left(\widehat{f}_j^{(k-1)}\right)^2\\
&= \left(a_j^{(k)}\right)^2\operatorname{Var}\left(F_{I+k-j,j}|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)+\left(\widehat{f}_j^{(k-1)}\right)^2\\
&= \left(\widehat{f}_j^{(k-1)}\right)^2\left[\left(a_j^{(k)}\right)^2\left(\left(\sigma_j^2+1\right)\frac{\gamma_j^{(k-1)}-1}{\gamma_j^{(k-1)}-2}-1\right)+1\right].
\end{aligned}$$

Vse vstavimo v enačbo (3.14) in dobimo trditev izreka

$$\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right) = C_{i,I+k-i-1}^2\prod_{j=I+k-i}^{J}\left(\widehat{f}_j^{(k-1)}\right)^2\left(\beta_{i,k}-1\right),$$

kar je po trditvi 3.4.1 enako

$$\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\right)^2\left(\beta_{i,k}-1\right),$$

kjer je $\beta_{i,k}$ definiran v enačbi (3.8).

Za dokaz druge trditve izreka uporabimo

$$\operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\left(k\right)|\mathcal{D}_I\right) = \mathbb{E}\left[\mathrm{CDR}_i^2\left(k\right)\middle|\mathcal{D}_I\right] = \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)\middle|\mathcal{D}_I\right].$$

Uporabimo že dokazano trditev izreka, ter pomembno dejstvo, da je $\beta_{i,k}$ konstanta, saj podatki nanjo ne vplivajo.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)\middle|\mathcal{D}_I\right] &= (\beta_{i,k}-1)\,\mathbb{E}\left[\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_I\right]\\ &= (\beta_{i,k}-1)\,\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k-2}\right]\middle|\mathcal{D}_I\right]\\ &= (\beta_{i,k}-1)\,\mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-2}\right)+\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-2)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_I\right].\end{aligned}$$

Izračunamo

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-2}\right)\middle|\mathcal{D}_I\right] = (\beta_{i,k-1}-1)\,\mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-2)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-3}\right)+\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-3)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_I\right]$$

in

$$\mathbb{E}\left[\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-2)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_I\right] = \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-2)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-3}\right)+\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-3)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_I\right].$$

Vsota teh dveh je

$$\beta_{i,k-1}\left[\mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-2)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-3}\right)+\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-3)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_I\right]\right].$$

Iterativno nadaljujemo do zadnjega člena

$$\mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(1)}\middle|\mathcal{D}_I\right)+\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_I\right] = (\beta_{i,1}-1)\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2+\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2 = \beta_{i,1}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2$$

in dobimo

$$\operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\left(k\right)\middle|\mathcal{D}_I\right) = \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2\prod_{j=1}^{k-1}\beta_{i,j}\left(\beta_{i,k}-1\right),$$

kar dokazuje drugo trditev izreka. □

Iz izreka 3.5.3 takoj sledi naslednja posledica.

Posledica 3.5.4 (Skupno tveganje (*Aggregated One-Year Risks*)) *Pod predpostavkami modela 3.2.1 velja*

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(C_{i,J}\middle|\mathcal{D}_I\right) &= \operatorname{Var}\left(\sum_{k=1}^{J+i-I}\mathrm{CDR}_i\left(k\right)\middle|\mathcal{D}_I\right)\\ &= \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2\left[\prod_{k=1}^{J+i-I}\beta_{i,k}-1\right] = \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2\left[\prod_{j=I-i+1}^{J}\left(\left(\sigma_j^2+1\right)\frac{\gamma_j^{(0)}-1}{\gamma_j^{(0)}-2}\right)-1\right].\end{aligned}$$

Dokaz. Po izreku 3.5.3 velja

$$\operatorname{Var}\left(C_{i,j} \middle| \mathcal{D}_I\right) = \sum_{k=1}^{J+i-I} \operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\left(k\right) \middle| \mathcal{D}_I\right) = \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2 \sum_{k=1}^{J+i-I} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{i,j}\left(\beta_{i,k}-1\right).$$

Izračunamo vsoto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{J+i-I} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{i,j}\left(\beta_{i,k}-1\right) &= \left(\beta_{i,1}-1\right) + \left(\beta_{i,2}-1\right)\beta_{i,1} + \cdots + \left(\beta_{i,J+i-I}-1\right)\beta_{i,J+i-I-1}\cdots\beta_{i,1} \\
&= -1 + \beta_{i,1}\left(1 + \beta_{i,2} - 1 + \left(\beta_{i,3}-1\right)\beta_{i,2} + \cdots + \left(\beta_{i,J+i-I}-1\right)\beta_{i,J+i-I-1}\cdots\beta_{i,2}\right) \\
&= -1 + \beta_{i,1}\beta_{i,2}\left(1 + \beta_{i,3} - 1 + \left(\beta_{i,4}-1\right)\beta_{i,3} + \cdots + \left(\beta_{i,J+i-I}-1\right)\beta_{i,J+i-I-1}\cdots\beta_{i,3}\right) \\
\cdots &= \prod_{k=1}^{J+i-I} \beta_{i,k} - 1.
\end{aligned}$$

To dokazuje prvi enačaj posledice. Izračunamo $\operatorname{Var}\left(C_{i,J}\mathcal{D}_I\right)$ še na drug način, po definiciji variance.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}\left(C_{i,J} \middle| \mathcal{D}_I\right) &= \mathbb{E}\left[C_{i,J}^2 \middle| \mathcal{D}_I\right] - \mathbb{E}\left[C_{i,J} \middle| \mathcal{D}_I\right]^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[C_{i,J}^2 \middle| \boldsymbol{\Theta}, \mathcal{D}_{I+J-1}\right] \middle| \mathcal{D}_I\right] - \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(C_{i,J} \middle| \boldsymbol{\Theta}, \mathcal{D}_{I+J-1}\right) + \mathbb{E}\left[C_{i,J} \middle| \boldsymbol{\Theta}, \mathcal{D}_{I+J-1}\right]^2 \middle| \mathcal{D}_I\right] - \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left[C_{i,J-1}^2 \sigma_J^2 \Theta_J^{-2} + C_{i,J-1}^2 \Theta_J^{-2} \middle| \mathcal{D}_I\right] - \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2 \\
&= \left(\sigma_J^2 + 1\right) \mathbb{E}\left[\Theta_J^{-2} C_{i,J-1}^2 \middle| \mathcal{D}_I\right] - \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2
\end{aligned}$$

Upoštevamo posteriorno pogojno neodvisnost spremenljivk Θ_j in iterativno nadaljujemo.

$$\begin{aligned}
&= -\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2 + \left(\sigma_J^2 + 1\right) \mathbb{E}\left[\Theta_J^{-2} \middle| \mathcal{D}_I\right] \left(\sigma_{J-1}^2 + 1\right) \mathbb{E}\left[\Theta_{J-1}^{-2} \middle| \mathcal{D}_I\right] \cdots \\
&\quad \cdots \left(\sigma_{I-i+1}^2 + 1\right) \mathbb{E}\left[\Theta_{I-i+1}^{-2} \middle| \mathcal{D}_I\right] \mathbb{E}\left[C_{i,I-i}^2 \middle| \mathcal{D}_I\right] \\
&= C_{i,I-i}^2 \prod_{j=I-i+1}^{J} \left(\sigma_j^2 + 1\right) \mathbb{E}\left[\Theta_j^{-2} \middle| \mathcal{D}_I\right] - \left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2
\end{aligned}$$

Upoštevamo

$$\mathbb{E}\left[\Theta_j^{-2} \middle| \mathcal{D}_I\right] = \left(\widehat{f}_j^{(0)}\right)^2 \frac{\gamma_j^{(0)} - 1}{\gamma_j^{(0)} - 2} \quad \text{in} \quad \widehat{C}_{i,J}^{(0)} = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i+1}^{J} \widehat{f}_j^{(0)},$$

in dobimo

$$\mathrm{Var}\left(C_{i,J}|\mathcal{D}_I\right)=\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2\left[\prod_{j=I-i+1}^{J}\left(\left(\sigma_j^2+1\right)\frac{\gamma_j^{(0)}-1}{\gamma_j^{(0)}-2}\right)-1\right].$$

To dokazuje posledico. □

Sedaj definirajmo mero tveganja po drugem pristopu, kjer bomo za razliko od prvega pristopa upoštevali tveganja v vseh računovodskih letih posebej. Mero tveganja za leto k definiramo s standardnim odklonom $\mathrm{CDR}_i(k)$, pogojeno na $\mathcal{D}_I$, pomnoženim s konstanto ϕ.

$$\rho_{i,k}^{(2)}=\phi\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\left(k\right)|\mathcal{D}_I\right)^{1/2}=\phi\,\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\prod_{j=1}^{k-1}\beta_{i,j}^{1/2}\left(\beta_{i,k}-1\right)^{1/2}. \tag{3.15}$$

To pomeni, da analiziramo negotovost v gibanju CDR za vsako leto posebej, gledano ob času 0. Tveganju prilagojene rezervacije, določene z uporabo mere tveganja $\rho_{i,k}^{(2)}$ ob času 0 so

$$\widehat{\mathcal{R}_i^{(2)}}^{(0)}=\widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)}+c\,\phi\,\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\sum_{k=1}^{J+i-I}\prod_{j=1}^{k-1}\beta_{i,j}^{1/2}\left(\beta_{i,k}-1\right)^{1/2}. \tag{3.16}$$

Opomba. Ker sta $\widehat{C}_{i,J}^{(0)}$ in 0 nepristranski cenilki za $C_{i,J}|\mathcal{D}_I$ in $\mathrm{CDR}_i(1)$ velja

$$\mathrm{msep}_{C_{i,J}|\mathcal{D}_I}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)=\mathrm{Var}\left(C_{i,J}|\mathcal{D}_I\right) \tag{3.17}$$

in

$$\mathrm{msep}_{\mathrm{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I}\left(0\right)=\mathrm{Var}\left(\mathrm{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I\right). \tag{3.18}$$

3.5.3 Pričakovana samostojna mera tveganja (*Expected Stand-Alone Risk Measure Approach*

Meri tveganj po prvih dveh pristopih, $\rho_{i,k}^{(1)}$ in $\rho_{i,k}^{(2)}$, sta obe $\mathcal{D}_I$-merljivi. Določeni sta torej ob času 0, in se kasneje ne spreminjata, ne glede na kasnejše dogodke. Želena lastnost mere tveganja pa je gotovo ta, da je mera ρ_k $\mathcal{D}_{I+k-1}$-merljiva. Tako bi ρ_k odražala vse informacije do vključno leta $k-1$. Po izreku 3.5.3 velja

$$\mathrm{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\left(k\right)|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)=\mathrm{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)=\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\right)^2\left(\beta_{i,k}-1\right).$$

Opomba. Prvi enačaj velja ker je $\mathrm{CDR}_i^{(k)} = \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k)}$, kjer je prvi člen merljiv glede na $\mathcal{D}_{I+k-1}$, zato je pogojno na $\mathcal{D}_{I+k-1}$ konstanta in ne vpliva na varianco.

Tretjo mero tveganja $\rho_{i,k}^{(3)}$ definiramo kot

$$\rho_{i,k}^{(3)} = \phi \operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\left(k\right) \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right)^{1/2} = \phi\, \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} \left(\beta_{i,k} - 1\right)^{1/2}. \tag{3.19}$$

Marža za strošek kapitala $c\,\rho_{i,k}^{(3)}$ je tako merljiva glede na $\mathcal{D}_{I+k-1}$, rezervacije zanjo pa moramo oblikovati ob času 0. Tveganju prilagojene rezerve za mero tveganja $\rho_{i,k}^{(3)}$ so potem enake pričakovani vrednosti marže, pogojno na $\mathcal{D}_I$.

$$\widehat{\mathcal{R}_i^{(3)}}^{(0)} = \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + c \sum_{k=1}^{J+i-I} \mathbb{E}\left[\rho_{i,k}^{(3)} \middle| \mathcal{D}_I\right] = \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + c\,\phi\, \widehat{C}_{i,J}^{(0)} \sum_{k=1}^{J+i-I} \left(\beta_{i,k} - 1\right)^{1/2}. \tag{3.20}$$

Slednje tveganju prilagojene rezerve se v povprečju samofinancirajo, kar pomeni, da imamo rezerve ravno za pričakovano vrednost denarnih tokov

$$X_{i,I-i+1} + c\,\rho_1^{(3)}, \ldots, X_{i,J} + c\,\rho_{J+i-I}^{(3)}.$$

Naslednja posledica pove, kakšna je relacija med tveganju prilagojenimi rezervacijami po drugem in tretjem pristopu.

Posledica 3.5.5 *Velja*

$$\widehat{\mathcal{R}_i^{(3)}}^{(0)} \leq \widehat{\mathcal{R}_i^{(2)}}^{(0)}.$$

Dokaz. Ker je $\beta_{i,j} > 1$, je tudi $\prod_{j=1}^{k-1} \beta_{i,j}^{1/2} > 1$ za $k = 2, \ldots, J+i-I$. Za $k = 1$ dobimo prazen produkt, ki je enak 1. Posledica velja. □

3.5.4 Večobdobna mera tveganja (*Multiperiod Risk Measure Approach*

To je dinamični pristop, kjer v mero tveganja vključimo tudi samo tveganje glede višine stroška kapitala $c\,\rho_k$. Postopek temelji na obratni indukciji. Fiksiramo škodno leto $i > I - J$. Kot prej, je zadnje računovodsko leto za to škodno leto dano z $k = J+i-I$. V letu $J+i-I+1$ gotovo ne bo nobenih obveznosti, zato ob $J+i-I$ ni potrebno več oblikovati rezervacij. Velja $\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(J+i-I)} = 0$. Za $k = 0, \ldots, J+i-I-1$ pa definiramo tveganju prilagojene rezervacije kot

$$\widehat{\mathcal{R}_i^{(4)}}^{(k)} = \widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)} + \mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\rho_{i,k+1}^{(4)} \stackrel{\text{def.}}{=} \widehat{\mathcal{R}}_i^{(k)} + \widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k)},$$

kjer je

$$\begin{aligned}\rho_{i,k+1}^{(4)} &= \phi\,\mathrm{Var}\left(\widehat{\mathcal{R}}_i^{(k+1)} + X_{i,I-i+k+1} + \widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k+1)}\Big|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2} \\ &= \phi\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\,(k+1) + \left(\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k+1)}\Big|\mathcal{D}_{I+k}\right] - \widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k+1)}\right)\Big|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Ta mera tveganja odraža tako negotovost v gibanju CDR, kot tudi negotovost gibanja stroška kapitala $c\,\rho_{i,j}^{(4)}$, za $j \geq k+1$. Skupne rezervacije ob času 0, ki so namenjene za pokritje stroška kapitala, so dane z $\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(0)}$. Za $k = 1, \ldots, J+i-I$ definiramo

$$b_{i,k} = 1 + c\,\phi\,(\beta_{i,k} - 1)^{1/2}. \tag{3.21}$$

Opomba. Tako kot $\beta_{i,j}$, je tudi $b_{i,j}$ konstanta > 1.

Trditev 3.5.6 *Rezerve za strošek kapitala ob času $k = 0, \ldots, J+i-I-1$ so dane z*

$$\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k)} = \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\left(\prod_{m=k+1}^{J+i-I} b_{i,m} - 1\right). \tag{3.22}$$

Dokaz. Dokazujemo z indukcijo. Za $k = J+i-I-1$ izračunamo rezerve za strošek kapitala. Pri izračunu upoštevamo izrek 3.5.3.

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(J+i-I-1)} &= \mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(J+i-I)}\Big|\mathcal{D}_{I+J+i-I-1}\right] + c\,\rho_{i,J+i-I}^{(4)} \\ &= 0 + c\,\phi\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\,(J+i-I)|\mathcal{D}_{J+i-1}\right)^{1/2} \\ &= c\,\phi\,\widehat{C}_{i,J}^{(J+i-I-1)}\,(\beta_{i,J+i-I} - 1)^{1/2}.\end{aligned}$$

Za $k = J+i-I-1$ trditev torej velja. Zdaj nadaljujemo po indukciji. Predpostavimo, da trditev velja za $k+1$, dokazati hočemo, da potem velja tudi za k. Dobimo

$$\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k)} = \mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k+1)}\Big|\mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\rho_{i,k+1}^{(4)} = \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\left(\prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m} - 1\right) + c\,\rho_{i,k+1}^{(4)},$$

kjer je

$$
\begin{aligned}
\rho_{i,k+1}^{(4)} &= \phi\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{CDR}_i\,(k+1) + \left(\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right] - \widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k+1)}\right)\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2} \\
&= \phi\,\mathrm{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k+1)} + \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\left(\prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m} - 1\right) - \widehat{C}_{i,J}^{(k+1)}\left(\prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m} - 1\right)\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2} \\
&= \phi\,\mathrm{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k+1)}\prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2} \\
&= \phi\prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m}\mathrm{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2} \\
&= \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m}\,\phi\,\left(\beta_{i,k+1}-1\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Uporabili smo osnovne lastnosti variance in izrek 3.5.3. Torej velja

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(k)} &= \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\left(\prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m} - 1\right) + \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m}\,\phi\,c\,\left(\beta_{i,k+1}-1\right)^{1/2} \\
&= \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\left(\prod_{m=k+2}^{J+i-I} b_{i,m}\left(1 + c\,\phi\,\left(\beta_{i,k+1}-1\right)^{1/2}\right) - 1\right) \\
&= \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\left(\prod_{m=k+1}^{J+i-I} b_{i,m} - 1\right),
\end{aligned}
$$

kar dokazuje trditev. □

Tveganju prilagojene rezervacije ob času 0 po pristopu večobdobne mere tveganja so

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{R}_i^{(4)}}^{(0)} &= \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + \mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(1)}\middle|\mathcal{D}_I\right] + c\,\rho_{i,1}^{(4)} \\
&= \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + \widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(0)} \\
&= \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + \widehat{C}_{i,J}^{(0)}\left(\prod_{k=1}^{J+i-I} b_{i,k} - 1\right).
\end{aligned}
$$

Trditev 3.5.7 *Velja*

$$
\widehat{\mathcal{R}_i^{(3)}}^{(0)} \leq \widehat{\mathcal{R}_i^{(4)}}^{(0)}.
$$

Dokaz. Ker so $c\,\phi\,(\beta_{i,k}-1)^{1/2} > 0$ za vse $k = 1, \ldots, J+i-I$ lahko ocenimo

$$\prod_{k=1}^{J+i-I} b_{i,k} = \prod_{k=1}^{J+i-I} \left(1 + c\,\phi\,(\beta_{i,k}-1)^{1/2}\right) \geq 1 + \sum_{k=1}^{J+i-I} c\,\phi\,(\beta_{i,k}-1)^{1/2}.$$

Sledi

$$\widehat{\mathcal{R}_i^{(4)}}^{(0)} \geq \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + \widehat{C}_{i,J}^{(0)}\,c\,\phi \sum_{k=1}^{J+i-I} (\beta_{i,k}-1)^{1/2} = \widehat{\mathcal{R}_i^{(3)}}^{(0)}.$$

□

Posledica je pričakovana, saj v dinamičnem modelu poleg marže za pričakovani strošek kapitala oblikujemo še posebno maržo za nepredvidene denarne tokove, povezane s stroškom kapitala.

Zdaj imamo izračunane tveganju prilagojene rezerve na vse štiri načine. Vemo, da velja

$$\widehat{\mathcal{R}_i^{(3)}}^{(0)} \leq \widehat{\mathcal{R}_i^{(2)}}^{(0)} \quad \text{in} \quad \widehat{\mathcal{R}_i^{(3)}}^{(0)} \leq \widehat{\mathcal{R}_i^{(4)}}^{(0)},$$

relacija med $\widehat{\mathcal{R}_i^{(4)}}^{(0)}$ in $\widehat{\mathcal{R}_i^{(2)}}^{(0)}$ pa je odvisna od izbire parametrov c in ϕ. Primerjati moramo

$$\left\{\prod_{k=1}^{J+i-I} \left(1 + c\,\phi\,(\beta_{i,k}-1)^{1/2}\right) - 1\right\} \quad \text{in} \quad \left\{c\,\phi \sum_{k=1}^{J+i-I} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{i,j}^{1/2}\,(\beta_{i,k}-1)^{1/2}\right\}.$$

Lema 3.5.8 *Za* $a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{R}$ *velja*

$$\prod_{k=1}^{i} (1+a_k) - 1 = \sum_{k=1}^{i} \prod_{j=1}^{k-1} (1+a_j)\,a_k.$$

Dokaz. Za dokaz uporabimo indukcijo. Lema očitno velja za $i = 1, 2$. Predpostavimo, da lema velja za i, torej $\prod_{k=1}^{i}(1+a_k) - 1 = \sum_{k=1}^{i}\prod_{j=1}^{k-1}(1+a_j)\,a_k$, in dokažimo, da potem velja tudi za $i+1$:

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{i+1} (1+a_k) - 1 &= (1+a_{i+1}) \prod_{k=1}^{i} (1+a_k) - 1 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{i} \prod_{j=1}^{k-1} (1+a_j)\,a_k - 1\right) + a_{i+1} \left(\prod_{k=1}^{i} (1+a_k)\right) - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{i} \prod_{j=1}^{k-1} (1+a_j)\,a_k + a_{i+1} \prod_{k=1}^{i} (1+a_k),
\end{aligned}$$

kar dokazuje lemo. □

Po lemi moramo primerjati izraza

$$\left\{ \sum_{k=1}^{J+i-I} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 + c\,\phi\, (\beta_{i,j} - 1)^{1/2}\right) (\beta_{i,k} - 1)^{1/2} \right\} \quad \text{in} \quad \left\{ \sum_{k=1}^{J+i-I} \prod_{j=1}^{k-1} \beta_{i,j}^{1/2}\, (\beta_{i,k} - 1)^{1/2} \right\}.$$

Posledica 3.5.9 *Predpostavimo, da za $i = I - J + 2, \ldots, I$ velja*

$$c\,\phi \geq \max_{j=1,\ldots,J+i-I-1} \left(\beta_{i,j}^{1/2} - 1\right)^{1/2} / \left(\beta_{i,j}^{1/2} + 1\right)^{1/2}.$$

Potem velja

$$\widehat{\mathcal{R}_i^{(2)}}^{(0)} \leq \widehat{\mathcal{R}_i^{(4)}}^{(0)}.$$

Dokaz. Dokazati moramo, da za vse $j = 1, \ldots, J + i - I - 1$ velja

$$1 + c\,\phi\, (\beta_{i,j} - 1)^{1/2} \geq \beta_{i,j}^{1/2}$$

oziroma

$$c\,\phi\, (\beta_{i,j} - 1)^{1/2} \geq \beta_{i,j}^{1/2} - 1.$$

Na levi strani uporabimo $(\beta_{i,j} - 1)^{1/2} = \left(\beta_{i,j}^{1/2} - 1\right)^{1/2} \left(\beta_{i,j}^{1/2} + 1\right)^{1/2}$, in opazimo, da je pogoj potem ekvivalenten pogoju

$$c\,\phi \geq \left(\frac{\beta_{i,j}^{1/2} - 1}{\beta_{i,j}^{1/2} + 1} \right)^{1/2}.$$

□

3.6 Združevanje škodnih let

V prejšnjem poglavju smo računali maržo za strošek kapitala za posamezna škodna leta i. Te vrednosti lahko preprosto seštejemo za vsa škodna leta, in dobimo skupno maržo. A negotovost različnih škodnih let je lahko povezana, in smo jo tako upoštevali prevečkrat. V tem poglavju bomo izmerili skupno negotovost škodnih let $i \in \{I - J + 1, \ldots, I\}$. Definiramo skupni CDR v računovodskem letu k, za $k = 1, \ldots, J$, kot

$$\mathrm{CDR}(k) = \sum_{i=I+k-J}^{I} \mathrm{CDR}_i(k).$$

Izračunali bomo varianco CDR(k), zato bomo potrebovali izrek podoben izreku 3.5.3. Za $i, m \geq I+k-J$ velja

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} + \widehat{C}_{i,J}^{(k)} \Big| \mathcal{D}_{I+k-1}\right) \\
&\qquad = \mathrm{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} \Big| \mathcal{D}_{I+k-1}\right) + \mathrm{Var}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)} \Big| \mathcal{D}_{I+k-1}\right) + 2\mathrm{Cov}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}, \widehat{C}_{i,J}^{(k)} \Big| \mathcal{D}_{I+k-1}\right)
\end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\left(\mathrm{CDR}_i(k) + \mathrm{CDR}_m(k) | \mathcal{D}_I\right) \\
&\quad = \mathrm{Var}\left(\mathrm{CDR}_i(k) | \mathcal{D}_I\right) + \mathrm{Var}\left(\mathrm{CDR}_m(k) | \mathcal{D}_I\right) + 2\mathrm{Cov}\left(\mathrm{CDR}_i(k), \mathrm{CDR}_m(k) | \mathcal{D}_I\right).
\end{aligned}$$

Neznane so le kovariance, ostali členi so znani po izreku 3.5.3. Za $I+k \leq J+i$ definiramo

$$\delta_{i,k} = \beta_{i,k}\left[a_{I+k-i}^{(k)} + \left(1 - a_{I+k-i}^{(k)}\right)\left(\sigma_{I+k-i}^2 + 1\right)^{-1} \frac{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)} - 2}{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)} - 1}\right] > 1. \tag{3.23}$$

Izrek 3.6.1 *Pod predpostavkami modela 3.2.1 za $m > i \geq I+k-J$ velja*

$$\mathrm{Cov}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}, \widehat{C}_{m,J}^{(k)} \Big| \mathcal{D}_{I+k-1}\right) = \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} \widehat{C}_{m,J}^{(k-1)} \left(\delta_{i,k} - 1\right), \tag{3.24}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\mathrm{CDR}_i(k), \mathrm{CDR}_m(k) | \mathcal{D}_I\right) = \widehat{C}_{i,J}^{(0)} \widehat{C}_{m,J}^{(0)} \prod_{j=1}^{k-1} \delta_{i,j}\left(\delta_{i,k} - 1\right). \tag{3.25}$$

Dokaz. Za $m > i \geq I+k-J$ velja

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}, \widehat{C}_{m,J}^{(k)} \Big| \mathcal{D}_{I+k-1}\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k)} \widehat{C}_{m,J}^{(k)} \Big| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] - \mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k)} \Big| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \mathbb{E}\left[\widehat{C}_{m,J}^{(k)} \Big| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\left(C_{i,I+k-i} \prod_{j=I+k-i+1}^{J} \widehat{f}_j^{(k)}\right)\left(C_{m,I+k-m} \prod_{j=I+k-m+1}^{J} \widehat{f}_j^{(k)}\right) \Bigg| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] - \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} \widehat{C}_{m,J}^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

Člene z istimi leti razvoja zberemo skupaj, zato drugi produkt zapišemo kot

$$\prod_{j=I+k-m+1}^{J} \widehat{f}_j^{(k)} = \prod_{j=I+k-m+1}^{I+k-i-1} \widehat{f}_j^{(k)} \cdot \widehat{f}_{I+k-i}^{(k)} \cdot \prod_{j=I+k-i+1}^{J} \widehat{f}_j^{(k)}.$$

Nastopajoče spremenljivke v matematičnem upanju so $C_{m,I+k-m}, F_{m+1,I+k-m+1}, \ldots,$ $F_{i+1,I+k-i-1}, F_{i,I+k-i}, C_{i,I+k-i}, F_{i-1,I+k-i+1}, \ldots, F_{I+k-J,J}$. Vse razen $F_{i,I+k-i}$ in $C_{i,I+k-i}$ so med sabo pogojno neodvisne. Dobimo

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}, \widehat{C}_{m,J}^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right) \\
&= \mathbb{E}\left[C_{m,I+k-m} | \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \prod_{j=I+k-m+1}^{I+k-i-1} \mathbb{E}\left[\widehat{f}_j^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i}\widehat{f}_{I+k-i}^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&\quad \times \prod_{j=I+k-i+1}^{J} \mathbb{E}\left[\left(\widehat{f}_j^{(k)}\right)^2 \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] - \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\widehat{C}_{m,J}^{(k-1)}.
\end{aligned}$$

Pri dokazu izreka 3.5.3 smo že izračunali člene

$$\mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i} | \mathcal{D}_{I+k-1}\right] = C_{i,I+k-i-1}\widehat{f}_{I+k-i}^{(k-1)}, \quad \mathbb{E}\left[\widehat{f}_j^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] = \widehat{f}_j^{(k-1)} \text{ in}$$

$$\mathbb{E}\left[(f_j^{(k)})^2 \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] = \left(\widehat{f}_j^{(k-1)}\right)^2 \left[\left(a_j^{(k)}\right)^2 \left(\left(\sigma_j^2+1\right)\frac{\gamma_j^{(k-1)}-1}{\gamma_j^{(k-1)}-2}\right) + 1\right].$$

Izračunati moramo še $\mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i}\widehat{f}_{I+k-i}^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] = C_{i,I+k-i-1}\mathbb{E}\left[F_{i,I+k-i}\widehat{f}_{I+k-i}^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right]$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[F_{i,I+k-i}\widehat{f}_{I+k-i}^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[F_{i,I+k-i}\left(a_{I+k-i}^{(k)}F_{i,I+k-i} + \left(1-a_{I+k-i}^{(k)}\right)\widehat{f}_{I+k-i}^{(k-1)}\right) \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \\
&= a_{I+k-i}^{(k)}\mathbb{E}\left[F_{i,I+k-i}^2 | \mathcal{D}_{I+k-1}\right] + \left(1-a_{I+k-i}^{(k)}\right)\left(\widehat{f}_{I+k-i}^{(k-1)}\right)^2 \\
&= \left(\widehat{f}_{I+k-i}^{(k-1)}\right)^2 \left[a_{I+k-i}^{(k)}\left(\sigma_{I+k-i}^2+1\right)\frac{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)}-1}{\gamma_{I+k-i}^{(k-1)}-2} + 1 - a_{I+k-i}^{(k)}\right].
\end{aligned}$$

Vstavimo vse vmesne rezultate v $\operatorname{Cov}(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}, \widehat{C}_{m,J}^{(k)} | \mathcal{D}_{I+k-1})$ in dobimo dokaz prve trditve izreka.

Za drugi del velja

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\left(\mathrm{CDR}_i(k), \mathrm{CDR}_m(k) | \mathcal{D}_I\right) \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{CDR}_i(k)\mathrm{CDR}_m(k) | \mathcal{D}_I\right] - \mathbb{E}\left[\mathrm{CDR}_i(k) | \mathcal{D}_I\right]\mathbb{E}\left[\mathrm{CDR}_m(k) | \mathcal{D}_I\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\right)\left(\widehat{C}_{m,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{m,J}^{(k)}\right) \middle| \mathcal{D}_I\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k)}\right)\left(\widehat{C}_{m,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{m,J}^{(k)}\right) \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right] \middle| \mathcal{D}_I\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\widehat{C}_{m,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\widehat{C}_{m,J}^{(k-1)} - \widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\widehat{C}_{m,J}^{(k-1)} + \mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k)}\widehat{C}_{m,J}^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\middle| \mathcal{D}_I\right]\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\operatorname{Cov}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)}, \widehat{C}_{m,J}^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+k-1}\right) \middle| \mathcal{D}_I\right].
\end{aligned}$$

Uporabimo prvo trditev izreka in dobimo

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\operatorname{Cov}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(k)},\widehat{C}_{m,J}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right)\middle|\mathcal{D}_I\right]=(\delta_{i,k}-1)\,\mathbb{E}\left[\widehat{C}_{i,J}^{(k-1)}\widehat{C}_{m,J}^{(k-1)}\middle|\mathcal{D}_I\right]\\&=(\delta_{i,k}-1)\,\mathbb{E}\left[\operatorname{Cov}\left(\widehat{C}_{i,J}^{((k-1))},\widehat{C}_{m,J}^{(k-1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-2}\right)+\widehat{C}_{i,J}^{(k-2)}\widehat{C}_{m,J}^{(k-2)}\middle|\mathcal{D}_I\right].\end{aligned}$$

Postopek iterativno nadaljujemo in dobimo trditev dokaza. □

3.6.1 Pristop približka nadzorovane solventnosti

Skupno mero tveganja za prvo računovodsko leto definiramo kot

$$\begin{aligned}\rho_1^{(1)}&=\phi\operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}(1)|\mathcal{D}_I\right)^{1/2}=\phi\operatorname{Var}\left(\sum_{i=I+1-J}^{I}\mathrm{CDR}_i(1)\middle|\mathcal{D}_I\right)^{1/2}\\&=\phi\left[\sum_{i=I+1-J}^{I}\operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}_i(1)|\mathcal{D}_I\right)+2\sum_{I+1-J\le i<m\le I}\operatorname{Cov}\left(\mathrm{CDR}_i(1),\mathrm{CDR}_m(1)|\mathcal{D}_I\right)\right]^{1/2}\\&=\phi\left[\sum_{i=I+1-J}^{I}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^2(\beta_{i,1}-1)+2\sum_{I+1-J\le i<m\le I}\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\widehat{C}_{m,J}^{(0)}\left(\delta_{i,1}-1\right)\right]^{1/2}.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Tveganju prilagojene rezerve ob času 0 za vsa škodna leta skupaj so

$$\widehat{\mathcal{R}^{(1)}}^{(0)}=\sum_{i=I+1-J}^{I}\widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)}+c\,\rho_1^{(1)}\sum_{k=1}^{J}\frac{\sum_{i=I+k-J}^{I}\widehat{C}_{i,J}^{(0)}-\widehat{C}_{i,I-i+k-1}^{(0)}}{\sum_{i=I+1-J}^{I}\widehat{C}_{i,J}^{(0)}-C_{i,I-i}}.\tag{3.27}$$

3.6.2 Razdelitev skupne negotovosti

Mero tveganja za računovodsko leto $k\ge 1$, merljivo ob času $I+t$, $t<k$ definiramo kot

$$\begin{aligned}\rho_k^{\mathcal{D}_{I+t}}&=\phi\operatorname{Var}(\mathrm{CDR}(k)|\mathcal{D}_{I+t})^{1/2}=\phi\operatorname{Var}\left(\sum_{i=I+k-J}^{I}\mathrm{CDR}_i(k)\middle|\mathcal{D}_{I+t}\right)^{1/2}\\&=\phi\left[\sum_{i=I+k-J}^{I}\operatorname{Var}(\mathrm{CDR}_i(k)|\mathcal{D}_{I+t})+2\sum_{i<m}\operatorname{Cov}\left(\mathrm{CDR}_i(k),\mathrm{CDR}_m(k)|\mathcal{D}_{I+t}\right)\right]^{1/2}\\&=\phi\left[\sum_{i=I+k-J}^{I}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(t)}\right)^2\prod_{j=t+1}^{k-1}\beta_{i,j}(\beta_{i,k}-1)+2\sum_{i<m}\widehat{C}_{i,J}^{(t)}\widehat{C}_{m,J}^{(t)}\prod_{j=t+1}^{k-1}\delta_{i,j}(\delta_{i,j}-1)\right]^{1/2}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

Za $t = 0$ definiramo $\rho_k^{(2)} = \rho_k^{\mathcal{D}_I}$. Skupne tveganju prilagojene rezerve ob času 0 so

$$\widehat{\mathcal{R}^{(2)}}^{(0)} = \sum_{i=I+1-J}^{I} \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + c \sum_{k=1}^{J} \rho_k^{(2)}. \tag{3.29}$$

3.6.3 Pričakovana samostojna mera tveganja

Mero tveganja za računovodsko leto k definiramo z $\rho_k^{(3)} = \rho_k^{\mathcal{D}_{I+k-1}}$. Skupne tveganju prilagojene rezerve so dane z

$$\widehat{\mathcal{R}^{(3)}}^{(0)} = \sum_{i=I+1-J}^{I} \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + c\,\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{J} \rho_k^{(3)} \middle| \mathcal{D}_I\right]. \tag{3.30}$$

Izraza ne moremo eksplicitno izračunati. Po Jensenovi neenakosti $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[X^2]^{1/2}$ velja $\widehat{\mathcal{R}^{(3)}}^{(0)} \leq \widehat{\mathcal{R}^{(2)}}^{(0)}$.

Posledica 3.6.2 *Za $n = 2, 3$ in $k \geq 0$ velja*

$$\rho_k^{(n)} \leq \sum_{i=I+k-J}^{I} \rho_{i,k}^{(n)}.$$

To pomeni, da sta meri subaditivni.

Dokaz. Dokaz sledi iz dejstva, da za poljubne slučajne spremenljivke $X_1, \ldots, X_m$ s končnim drugim momentom velja $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^m X_i)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^m \mathrm{Var}(X_i)^{1/2}$ □

To pomeni, da drugi in tretji pristop diverzificirata med škodnimi leti – tveganje je manjše, če škodna leta združimo, kot pa če vrednotimo tveganje vsakega leta posebej, in te vrednosti seštejemo.

3.6.4 Večobdobna mera tveganja

Skupna mera tveganja po tem pristopu je bolj zapletena in je ne moremo analitično izračunati. Tudi simulacije so preveč časovno zahtevne zaradi dimenzije problema, saj je mera tveganja dana rekurzivno. Rezervacije, ki jih moramo oblikovati v letu $k = J$ za strošek kapitala so $\widehat{\mathrm{CoC}}^{(J)} = 0$. Za $k = 0, \ldots, J-1$ pa so dane z rekurzivno formulo

$$\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k)} \stackrel{def.}{=} \mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\rho_{k+1}^{(4)},$$

kjer je

$$
\begin{aligned}
\rho_{k+1}^{(4)} &= \phi \operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}(k+1) + \left(\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right] - \widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\right)\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2} \\
&= \phi \operatorname{Var}\left(\sum_{i=I+k+1-J}^{I} \widehat{C}_{i,J}^{(k+1)} + \widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Tveganju prilagojene rezerve so dane z

$$
\widehat{\mathcal{R}^{(4)}}^{(0)} = \sum_{i=I+1-J}^{I} \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + \widehat{\mathrm{CoC}}^{(0)}. \tag{3.31}
$$

Rezultata ne moremo eksplicitno izračunati, lahko pa izraz analiziramo. Začnemo z računovodskim letom J. V tem letu je aktivno le še škodno leto I, zato je $\rho_J^{(4)} = \rho_{I,J}^{(4)}$, in za rezervacije za strošek kapitala za računovodsko leto $J-1$ velja

$$
\widehat{\mathrm{CoC}}^{(J-1)} = \widehat{\mathrm{CoC}}_I^{(J-1)} = c\,\phi\,\widehat{C}_{I,J}^{(J-1)}\left(\beta_{I,J}-1\right)^{1/2}.
$$

Gremo še eno obdobje nazaj, kjer dobimo

$$
\begin{aligned}
\widehat{CoC}^{(J-2)} &= \mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(J-1)}\middle|\mathcal{D}_{I+J-2}\right] + c\,\rho_{J-1}^{(4)} \\
&= c\left(\phi\,\widehat{C}_{I,J}^{(J-2)}\left(\beta_{I,J}-1\right)^{1/2} + \rho_{J-1}^{(4)}\right).
\end{aligned}
$$

Uporabimo izreka 3.5.3 in 3.6.1 in dobimo

$$
\begin{aligned}
\rho_{J-1}^{(4)} =& \phi \operatorname{Var}\left(\mathrm{CDR}_I(J-1)\left(1 + c\,\phi\left(\beta_{I,J}-1\right)^{1/2}\right) + \mathrm{CDR}_{I-1}(J-1)\middle|\mathcal{D}_{I+J-2}\right)^{1/2} \\
=& \phi\left[\left(\widehat{C}_{I,J}^{(J-2)}\right)^2\left(1 + c\,\phi\left(\beta_{I,J}-1\right)^{1/2}\right)^2\left(\beta_{I,J-1}-1\right) + \left(\widehat{C}_{I-1,J}^{(J-2)}\right)^2\left(\beta_{I-1,J-1}-1\right)\right. \\
&\left. + 2\,\widehat{C}_{I,J}^{(J-2)}\widehat{C}_{I-1,J}^{(J-2)}\left(1 + c\,\phi\left(\beta_{I,J}-1\right)^{1/2}\right)\left(\delta_{I-1,J-1}-1\right)\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Zdaj zaradi nelinearnosti v členih $\widehat{C}_{I,J}^{(J-2)}$ in $\widehat{C}_{I-1,J}^{(J-2)}$ analitično ne moremo nadaljevati izračuna. Lahko pa skupne rezervacije ocenimo navzgor:

$$
\widehat{\mathcal{R}^{(4)}}^{(0)} \leq \sum_{i=I+1-J}^{I} \widehat{\mathcal{R}_i^{(4)}}^{(0)}. \tag{3.32}
$$

Za $c\,\phi < 1$ dobimo še boljšo zgornjo mejo.

Trditev 3.6.3 *Za $c\,\phi < 1$ velja*

$$\widehat{\mathrm{CoC}}^{(0)} \le \widehat{\widehat{\mathrm{CoC}}}^{(0)} \overset{def.}{=} \sum_{k=1}^{J} \left(1 + (\sqrt{2}-1)\,c\,\phi\right)^{k-1} c\,\rho_k^{(2)}. \tag{3.33}$$

Za dokaz trditve potrebujemo naslednjo lemo.

Lema 3.6.4 *Izberemo $y \ge x \ge 0$, potem za $p \in (0,1)$ velja*

$$p\,x + (1-p)\left(y^2 - x^2\right)^{1/2} \le \left((1-p)y^2 + (2p-1)x^2\right)^{1/2}.$$

Dokaz. Definiramo diskretno slučajno spremenljivko Y z $P[Y = \sqrt{2}x] = p$ in $P[Y = y] = 1 - p$ za $p \in (0,1)$. Očitno velja

$$\mathbb{E}\left[(Y^2 - x^2)^{1/2}\right] = p\,x + (1-p)\left(y^2 - x^2\right)^{1/2},$$

in po Jensenovi neenakosti velja

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(Y^2 - x^2)^{1/2}\right] &\le \mathbb{E}\left[Y^2 - x^2\right]^{1/2} = \left(p\,x^2 + (1-p)(y^2 - x^2)\right)^{1/2} \\ &= \left((1-p)y^2 + (2p-1)x^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

□

Dokaz. (Trditev 3.6.3) Za fiksen $k \in \{0, 1, \dots, J-2\}$ velja

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k)} &= \mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\phi\,\mathrm{Var}\left(\mathrm{CDR}(k+1) - \widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2} \\ &\le c\,\varphi_{k+1}^{\mathcal{D}_{I+k}} + \mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\phi\,\mathrm{Var}\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right).\end{aligned}$$

Izraz zapišemo malo drugače. Naj bo $p \in (0,1)$.

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\phi\,\mathrm{Var}\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right) \\ &= \left(1 - c\,\phi\,\frac{p}{1-p}\right) \mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] \\ &\quad + \frac{c\,\phi}{1-p}\left(p\,\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] + (1-p)\,\mathrm{Var}\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2}\right).\end{aligned}$$

Zdaj uporabimo lemo 3.6.4 in dobimo zgornjo mejo

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\phi\,\mathrm{Var}\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2}\\
&\quad\le \left(1 - c\,\phi\,\frac{p}{1-p}\right)\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right]\\
&\quad+ \frac{c\,\phi}{1-p}\left((1-p)\,\mathbb{E}\left[\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right] + (2p-1)\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right]^2\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

$2p-1$ je večje od 0 za $p \ge 1/2$. Uporabimo Jensenovo neenakost in za $p \in [1/2, 1)$ dobimo

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\phi\,\mathrm{Var}\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2}\\
&\quad\le \left(1 - c\,\phi\,\frac{p}{1-p}\right)\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\phi\,\frac{p^{1/2}}{1-p}\mathbb{E}\left[\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Ker je $c\,\phi < 1$ je $(c\,\phi + 1)^{1/2} > 1/2$. Za $p \in [1/2, (c\,\phi+1)^{-1})$ velja $c\,\phi\,p/(1-p) < 1$. Jensenovo neenakost uporabimo še na prvem členu na desni strani in dobimo

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\phi\,\mathrm{Var}\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2}\\
&\quad\le \left(1 + c\,\phi\frac{p^{1/2}-p}{1-p}\right)\mathbb{E}\left[\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Minimum po p je pri $p = 1/2$. Definiramo $\kappa = 1 + (\sqrt{2}-1)\,c\,\phi$. Velja

$$
\mathbb{E}\left[\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right] + c\,\phi\,\mathrm{Var}\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right)^{1/2} \le \kappa\,\mathbb{E}\left[\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right].
$$

Iterativno nadaljujemo in dobimo

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)} &\le c\,\varphi_{k+1}^{\mathcal{D}_{I+k}} + \kappa\,\mathbb{E}\left[\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+1)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right]\\
&\le c\,\varphi_{k+1}^{\mathcal{D}_{I+k}} + \kappa\,\mathbb{E}\left[\left(c\,\varphi_{k+2}^{\mathcal{D}_{I+k+1}} + \kappa\,\mathbb{E}\left[\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+2)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k+1}\right]^{1/2}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k}.\right]^{1/2}
\end{aligned}
$$

Po neenakosti Minkowskega (za razlago glej[13]) velja

$$
\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k)} \le c\,\varphi_{k+1}^{\mathcal{D}_{I+k}} + \kappa\,c\,\mathbb{E}\left[\left(\varphi_{k+2}^{\mathcal{D}_{I+k+1}}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right]^{1/2} + \kappa^2\,\mathbb{E}\left[\left(\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k+2)}\right)^2\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right]^{1/2}.
$$

Z iteracijo dobimo

$$\widehat{\mathrm{CoC}}^{(k)} \leq \sum_{j=0}^{J-k-1} \kappa^j \, c \, \mathbb{E}\left[\left(\varphi_{k+j+1}^{\mathcal{D}_{I+k+j}}\right)^2 \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right]^{1/2}.$$

Ker velja

$$\mathbb{E}\left[\left(\varphi_{j+1}^{\mathcal{D}_{I+j}}\right)^2 \middle| \mathcal{D}_I\right]^{1/2} = \varphi_{j+1}^{\mathcal{D}_I} = \varphi_{j+1}^{(2)}$$

to dokazuje trditev. $\square$

Zaradi trditve velja

$$\widehat{\widehat{\mathcal{R}^{(4)}}}^{(0)} = \sum_{i=I+1-J}^{I} \widehat{\mathcal{R}}_i^{(0)} + \widehat{\widehat{\mathrm{CoC}}}^{(0)}.$$

Za $c\,\phi < 1$ velja naslednja relacija

$$\widehat{\widehat{\mathcal{R}^{(4)}}}^{(0)} \geq max\left\{\widehat{\mathcal{R}^{(2)}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{R}^{(3)}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{R}^{(4)}}^{(0)}\right\}. \tag{3.34}$$

Poglavje 4

Bayesov log-normalni verižni model

V tem poglavju bomo predstavili Bayesov log-normalni verižni model. Metode, izračuni in trditve opisane v tem poglavju so povzete po članku [2], v katerem so M. V. Wüthrich, P. Embrechts in A. Tsanakas uporabili pristop izkrivljanja osnovne porazdelitve za izračun marže za tveganje. Najboljšo oceno neporavnanih obveznosti bomo izračunali preko vrednosti individualnih zahtevkov po enačbi (2.2).

Tudi v tem poglavju veljajo vse oznake definirane na začetku, le da tu malo bolj natančno definiramo verjetnostni prostor, v katerem se gibamo. Predpostavimo, da $i \geq 1$ in $I \geq J+1$. S tem se spremeni le oznaka škodnih let – leto i v tem poglavju je ekvivalentno škodnemu letu $i-1$ v prejšnjem poglavju. S takim oštevilčenjem pridobimo lastnost, da je $\mathcal{D}_0$ trivialna σ-algebra, kar bomo v nadaljevanju potrebovali, ko bomo vpeljali motnjo v porazdelitvi.

Verjetnostni prostor označimo z $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, in predpostavimo, da imamo na tem prostoru dve ločeni vrsti informacij, ki sta dani s filtracijama $(\mathcal{F}_t)_{t=0,\dots,I+J}$, ki predstavlja filtracijo finančnega trga, ter $(\mathcal{D}_t)_{t=0,\dots,I+J}$, ki kot prej predstavlja zavarovalno-tehnično filtracijo. $\mathcal{F}_0$ in $\mathcal{D}_0$ naj bosta trivialni σ-algebri. (Zato potrebujemo pogoj $i \geq 1$.) Filtraciji $\mathbb{T}$ in $\mathbb{F}$ naj bosta stohastično neodvisni pod verjetnostjo $\mathbb{P}$.

4.1 Model

Kot prej naj bo $F_{i,j} = C_{i,j}/C_{i,j-1}$. Definiramo še $D_{i,j} = X_{i,j}/C_{i,j-1} = F_{i,j} - 1$ in $\xi_{i,j} = \log\{F_{i,j} - 1\}$.

Predpostavka 4.1.1 (Bayesov log-normalni verižni model) *Predpostavimo*

- *pogojno na* $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_J)$ *in* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_J)$ *velja:*
  - *kumulativna plačila* $C_{i,j}$ *so za različna škodna leta i neodvisna,*
  - $C_{i,0}, F_{i,1}, \ldots, F_{i,J}$ *so neodvisne, in za* $j = 1, \ldots, J$ *velja*

$$\xi_{i,j}\Big|_{\mathbf{\Phi},\sigma} \sim \mathcal{N}\left(\Phi_j, \sigma_j^2\right), \tag{4.1}$$

  kjer so σ_j *dane pozitivne konstante,*

- $C_{i,0}$ *in* $\mathbf{\Phi}$ *sta neodvisna za vsak* $i = 1, \ldots, I$*,*
- *spremenljivke* $\Phi_1, \ldots, \Phi_J$*, so neodvisne slučajne spremenljivke, porazdeljene kot*

$$\Phi_j \sim \mathcal{N}\left(\phi_j, s_j^2\right),$$

  z apriornima parametroma ϕ_j *in* $s_j > 0$*.*

Opomba. Predpostavka (4.1) pomeni so spremenljive $F_{i,j} - 1$ porazdeljene logaritemsko normalno, $F_{i,j}$ pa ima premaknjeno logaritemsko normalno porazdelitev z matematičnim upanjem $\mathbb{E}\left[F_{i,j}|\mathbf{\Phi}\right] = \mathbb{E}\left[F_{i,j} - 1|\mathbf{\Phi}\right] + 1$ in $\mathrm{Var}\left(F_{i,j}|\mathbf{\Phi}\right) = \mathrm{Var}\left(F_{i,j} - 1|\mathbf{\Phi}\right)$.

4.2 Izračun najboljše ocene rezervacij

V tem poglavju bomo izračunali najboljšo oceno rezervacij po formuli (2.2) za model 4.1.1.

Enako kot v prvem modelu, rezervacije tudi sedaj določamo v računovodskih letih $I+k$ za $k = 0, \ldots, J$. To pomeni, da so vse obveznosti, ki so poravnane brez zamika, že poravnane – $X_{i,0}$ so znani za vse $i \in \{1, \ldots, I\}$.

Za izračun $\mathbb{E}\left[X_{i,j}|\mathcal{D}_{I+k}, \mathbf{\Phi}\right]$, kjer $i + j \geq I + k$, uporabimo formulo (2.13), kjer upoštevamo, da so faktorji razvoja porazdeljeni premaknjeno logaritemsko normalno (model 4.1.1). Matematično upanje slučajne spremenljivke porazdeljene po zakonu $\log\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ je enako $\exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$.

Za $i + j > I + k$ velja

$$\mathbb{E}\left[F_{i,j}|\mathcal{D}_{I+k}, \mathbf{\Phi}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}}\bigg|\mathcal{D}_{I+k}, \mathbf{\Phi}\right] = \exp\left\{\Phi_j + \frac{\sigma_j^2}{2}\right\} + 1.$$

Po enačbi (2.13) velja

$$\mathbb{E}\left[X_{i,j}|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right] = C_{i,I+k-i}\left(\prod_{l=I+k-i+1}^{j-1}\left(\exp\left\{\Phi_l+\sigma_l^2/2\right\}+1\right)\right)\exp\left\{\Phi_j\sigma_j^2/2\right\}.$$

Pri tem smo pogojevali tudi na $\mathbf{\Phi}$, ki je slučajni vektor neodvisnih slučajnih spremenljivk Φ_j, $j=1,\ldots,J$, z apriorno porazdelitvijo $\Phi_j \sim \mathcal{N}\left(\phi_j, s_j^2\right)$ in apriornima parametroma ϕ_j in $s_j>0$. Če pogojujemo samo na $\mathcal{D}_{I+k}$ dobimo naslednjo Bayesovo cenilko:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[X_{i,j}|\mathcal{D}_{I+k}\right]\\ &= C_{i,I+k-i}\mathbb{E}\left[\left(\prod_{l=I+k-i+1}^{j-1}\left(\exp\left\{\Phi_l+\sigma_l^2/2\right\}+1\right)\right)\exp\left\{\Phi_j+\sigma_j^2/2\right\}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right].\end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2.1 Posteriorna porazdelitev

Izrek 4.2.1 *Pod predpostavkami modela 4.1.1 so posteriorne porazdelitve slučajnih spremenljivk Φ_j, pogojno na $\mathcal{D}_{I+k}$, neodvisne normalne porazdelitve*

$$\Phi_j\Big|_{\mathcal{D}_{I+k}} \sim \mathcal{N}\left(\phi_j^{(k)}, \left(s_j^{(k)}\right)^2\right),$$

s posteriornimima parametroma

$$\phi_j^{(k)} = \left(s_j^{(k)}\right)^2\left[\frac{\phi_j}{s_j^2}+\frac{1}{\sigma_j^2}\sum_{i=1}^{\min\{I+k-j,I\}}\xi_{i,j}\right] \quad in \quad \left(s_j^{(k)}\right)^2 = \left(\frac{1}{s_j^2}+\frac{\min\{I+k-j,I\}}{\sigma_j^2}\right)^{-1}.$$

Dokaz. Poznamo porazdelitev podatkov $\xi_{i,j}\big|_{\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi},\sigma} \sim \mathcal{N}\left(\Phi_j,\sigma_j^2\right)$ za $j=1,\ldots,J$, $i=1,\ldots,I$. Skupna porazdelitvena funkcija spremenljivk $\xi_{i,j}$, $i=1,\ldots,I$, $j=1,\ldots J$, $i+j\leq I+k$, pogojno na $\mathbf{\Phi}$, je funkcija verjetja

$$\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{\min\{J,I+k-i\}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}\left(\xi_{i,j}-\Phi_j\right)^2\right\}.$$

Apriorna porazdelitvena funkcija vektorja $\mathbf{\Phi}$ pa je

$$\prod_{j=1}^{J}\exp\left\{-\frac{1}{2s_j^2}\left(\Phi_j-\phi_j\right)^2\right\}.$$

Posteriorna gostota porazdelitve vektorja $\mathbf{\Phi}$ ob danih opazovanjih $\mathcal{D}_{I+k}$ je sorazmerna produktu funkcije verjetja in apriorne gostote.

$$h\left(\mathbf{\Phi}|\mathcal{D}_{I+k}\right) \propto \prod_{j=1}^{J} \exp\left\{-\frac{1}{2s_j^2}\left(\Phi_j-\phi_j\right)^2\right\} \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{\min\{J,I+k-i\}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_j^2}\left(\xi_{i,j}-\Phi_j\right)^2\right\}.$$

To je funkcija gostote verjetnosti slučajnega vektorja $\mathbf{\Phi}$ do normalizacijskega faktorja natančno. Zanimajo nas marginalne posteriorne verjetnosti slučajnih spremenljivk Φ_j, zato funkcijo zapišimo malo drugače.

$$h\left(\mathbf{\Phi}|\mathcal{D}_{I+k}\right) \propto \exp\left\{\sum_{j=1}^{J}\left(-\frac{1}{2s_j^2}\left(\Phi_j-\phi_j\right)^2\right) + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{\min\{I+k-i,J\}} \left(-\frac{1}{2\sigma_j^2}\left(\xi_{i,j}-\Phi_j\right)^2\right)\right\}$$

Spremenimo vrstni red seštevanja – najprej seštevamo po j in nato po i. Dobimo:

$$\begin{aligned}
&= \exp\left\{\sum_{j=1}^{J}\left[-\frac{1}{2s_j^2}\left(\Phi_j-\phi_j\right)^2 + \sum_{i=1}^{\min\{I+k-j,I\}} -\frac{1}{2\sigma_j^2}\left(\xi_{i,j}-\Phi_j\right)^2\right]\right\} \\
&= \prod_{j=1}^{J}\left[\exp\left\{\Phi_j^2\left(-\frac{1}{2s_j^2}-\frac{\min\{I+k-j,I\}}{2\sigma_j^2}\right) + \Phi_j\left(\frac{\phi_j}{s_j^2}+\frac{1}{\sigma_j^2}\sum_{i=1}^{\min\{I+k-j,I\}} \xi_{i,j}\right)\right\}\right. \\
&\quad \left.\times \exp\left\{-\frac{\phi_j^2}{2s_j^2}-\frac{1}{2\sigma_j^2}\sum_{i=1}^{\min\{I+k-j,I\}} \xi_{i,j}^2\right\}\right].
\end{aligned}$$

Označimo

$$\begin{aligned}
z_j &= -\frac{1}{2s_j^2}-\frac{\min\{I+k-j,I\}}{2\sigma_j^2}, \\
y_j &= \frac{\phi_j}{s_j^2}+\frac{1}{\sigma_j^2}\sum_{i=1}^{\min\{I+k-j,I\}} \xi_{i,j}, \\
w_j &= -\frac{\phi_j^2}{2s_j^2}-\frac{1}{2\sigma_j^2}\sum_{i=1}^{\min\{I+k-j,I\}} \xi_{i,j}^2.
\end{aligned}$$

V eksponentu prvega faktorja izpostavimo z_j in eksponent dopolnimo do popolnega kvadrata.

$$
\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^{J} \left[\exp \left\{ z_j \left(\Phi_j^2 + \Phi_j z_j^{-1} y_j \right) \right\} \cdot \exp \left\{ w_j \right\} \right] \\
&= \prod_{j=1}^{J} \left[\exp \left\{ z_j \left(\Phi_j + \frac{z_j^{-1} y_j}{2} \right)^2 \right\} \cdot \exp \left\{ w_j - z_j \left(\frac{z_j^{-1} y_j}{2} \right)^2 \right\} \right] \\
&= \prod_{j=1}^{J} \left[\exp \left\{ - \frac{1}{2 \left(-2 z_j \right)^{-1}} \left(\Phi_j - \left(-2 z_j \right)^{-1} y_j \right)^2 \right\} \cdot C \right]
\end{aligned}
$$

Drugi faktor je glede na Φ_j konstanta in ni pomemben za ugotavljanje tipa marginalnih gostot. Gostoto vektorja $\mathbf{\Phi} = (\Phi_1, \ldots, \Phi_J)$ smo zapisali kot produkt funkcij $f(\Phi_j)$, $j = 1, \ldots, J$, torej so slučajne $\Phi_1, \ldots, \Phi_J$ neodvisne slučajne spremenljivke z normalnimi posteriornimi porazdelitvami s parametroma $\phi_j^{(k)} = (-2z_j)^{-1} y_j$ in $(s_j^{(k)})^2 = (-2z_j)^{-1}$. □

Izraz za $\phi_j^{(k)}$ preoblikujemo tako, da ga ločimo na člen z vzorčnim povprečjem in člen z apriorno pričakovanim povprečjem:

$$
\begin{aligned}
\phi_j^{(k)} &= \left(\frac{1}{s_j^2} + \frac{\min\{I+k-j, I\}}{\sigma_j^2} \right)^{-1} \left(\frac{\phi_j}{s_j^2} + \frac{1}{\sigma_j^2} \sum_{i=1}^{\min\{I+k-j,I\}} \xi_{i,j} \right) \\
&= \frac{s_j^2 \sigma_j^2}{\sigma_j^2 + s_j^2 (\min\{I+k-j, I\})} \left(\frac{\phi_j}{s_j^2} + \frac{1}{\sigma_j^2} \frac{\min\{I+k-j, I\}}{\min\{I+k-j, I\}} \sum_{i=1}^{\min\{I+k-j,I\}} \xi_{i,j} \right) \\
&= \frac{\sigma_j^2}{\sigma_j^2 + s_j^2 \min\{I+k-j, I\}} \phi_j + \frac{s_j^2 \min\{I+k-j, I\}}{\sigma_j^2 + s_j^2 \min\{I+k-j, I\}} \bar{\xi}_j^{(k)}.
\end{aligned}
$$

Posledica 4.2.2 *Pod predpostavkami izreka 4.2.1 velja*

$$
\phi_j^{(k)} = \mathbb{E}\left[\Phi_j | \mathcal{D}_{I+k} \right] = \beta_j^{(k)} \bar{\xi}_j^{(k)} + \left(1 - \beta_j^{(k)} \right) \phi_j, \tag{4.3}
$$

kjer sta $\bar{\xi}_j^{(k)}$ *vzorčno povprečje*

$$
\bar{\xi}_j^{(k)} = \frac{1}{\min\{I+k-j, I\}} \sum_{i=1}^{\min\{I+k-j,I\}} \xi_{i,j}, \tag{4.4}
$$

in utež

$$
\beta_j^{(k)} = \frac{\min\{I+k-j, I\} s_j^2}{\sigma_j^2 + \min\{I+k-j, I\} s_j^2}. \tag{4.5}
$$

Posteriorno povprečje slučajne spremenljivke Φ_j je torej uteženo povprečje vzorčnega povprečja $\bar{\xi}_j^{(k)}$ in apriornega povprečja ϕ_j, uteženo z utežjo $\beta_j^{(k)}$. Privzeli smo apriorno porazdelitev $\Phi_j \sim \mathcal{N}\left(\phi_j, s_j^2\right)$. Večja kot je varianca s_j^2, manj informacij imamo, apriorna porazdelitev ni zanesljiva. Za neinformativno apriorno porazdelitev pošljemo $s_j \to \infty$. V tem primeru gre $\beta_j^{(k)} \to 1$. To pomeni, da se na apriorno informacijo ne zanašamo, in uporabimo samo vzorčno povprečje. Za popolnoma informativno apriorno informacijo pošljemo $s_j \to 0$, torej $\beta_j^{(k)} \to 0$, kar pomeni, da se popolnoma zanašamo na apriorno informacijo, in vzorčnega povprečja ne upoštevamo.

Neposredno iz te posledice dobimo še naslednjo posledico, ki nam da rekurzivno zvezo za $\phi_j^{(k)}$ (glej [8]).

Posledica 4.2.3 *Za $k \geq 1$ in $j \geq k$ velja*

$$\phi_j^{(k)} = a_j^{(k)} \xi_{I+k-j,j} + (1 - a_j^{(k)}) \phi_j^{(k-1)}, \tag{4.6}$$

kjer je utež $a_j^{(k)}$ dana z

$$a_j^{(k)} = \frac{s_j^2}{\sigma_j^2 + (I+k-j) s_j^2}. \tag{4.7}$$

Opomba. Opazimo da velja

$$a_j^{(k)} = \frac{(s_j^{(k)})^2}{\sigma_j^2} \quad \text{in} \quad b_j^{(k)} = 1 - a_j^{(k)} = \frac{(s_j^{(k)})^2}{(s_j^{(k-1)})^2}.$$

Zdaj se vrnemo na Bayesovo cenilko (4.2). Najprej upoštevamo neodvisnost slučajnih spremenljivk Φ_j, $j = 1, \ldots, J$, in osnovne lastnosti matematičnega upanja. Dobimo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X_{i,j} | \mathcal{D}_{I+k}\right] \\
&\quad = C_{i,I+k-i} \prod_{l=I+k-i+1}^{j-1} \mathbb{E}\left[\exp\left\{\Phi_l + \sigma_l^2/2\right\} + 1 \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] \cdot \mathbb{E}\left[\exp\left\{\Phi_j + \sigma_j^2/2\right\} \middle| \mathcal{D}_{I+k}\right] \\
&\quad = C_{i,I+k-i} \prod_{l=I+k-i+1}^{j-1} \left(\mathbb{E}\left[\exp\left\{\Phi_l\right\} | \mathcal{D}_{I+k}\right] \cdot \exp\left\{\sigma_l^2/2\right\} + 1\right) \\
&\qquad \times \mathbb{E}\left[\exp\left\{\Phi_j\right\} | \mathcal{D}_{I+k}\right] \cdot \exp\left\{\sigma_j^2/2\right\}.
\end{aligned}$$

Za $X \sim \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ velja

$$\mathbb{E}\left[e^X\right] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}.$$

Upoštevamo izrek 4.2.1 in dobimo sledečo posledico.

Trditev 4.2.4 *Za model 4.1.1, za $i + j > I + k$, kjer je $k = 0, \dots, J$, velja*

$$\mathbb{E}\left[X_{i,j}|\mathcal{D}_{I+k}\right] = C_{i,I+k-i}\left(\prod_{l=I+k-i+1}^{j-1}\widehat{f}_l^{(k)}\right)\left(\widehat{f}_j^{(k)} - 1\right), \tag{4.8}$$

s posteriornimi razvojnimi faktorji

$$\widehat{f}_l^{(k)} = \mathbb{E}\left[\exp\left\{\Phi_l + \sigma_l^2/2\right\} + 1\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right] = \exp\left\{\phi_l^{(k)} + \left(s_l^{(k)}\right)^2/2 + \sigma_l^2/2\right\} + 1. \tag{4.9}$$

$\left(\widehat{f}_l^{(k)}\right)_{k=0,\dots,J}$ *je martingal za vse $l = 1, \dots, J$.*

Sedaj z upoštevanjem posledice 4.2.4 izračunamo najboljšo oceno rezervacij po formuli (2.2):

$$\widehat{\mathcal{R}}^{(k)} = \sum_{i=I+k+1-J}^{I} C_{i,I+k-i}\sum_{j=I+k-i+1}^{J}\left(\prod_{l=I+k-i+1}^{j-1}\widehat{f}_l^{(k)}\right)\left(\widehat{f}_j^{(k)} - 1\right)P\left(I+k, i+j\right). \tag{4.10}$$

4.3 Tveganju prilagojene rezerve in marža za tveganje

V tem poglavju v model vključimo dejstvo, da je v zavarovalništvu vedno prisotno določeno tveganje. Najboljša ocena rezervacij, ki smo jo izračunali v prejšnjem poglavju, temelji na pričakovani vrednosti zahtevkov, ter na točno določenih predpostavkah. Upoštevati pa moramo še dejstvo, da obstaja tveganje, da bo skupna vrednost zahtevkov v resnici še višja, in da tveganju nenaklonjeni agenti zahtevajo premijo, ki je višja od pričakovanih diskontiranih zahtevkov. V ta model tveganje vpeljemo preko izkrivljanja porazdelitve zahtevkov $X_{i,j}$, in tako dobimo tveganju prilagojene rezerve $\widehat{\mathcal{R}}_+^{(k)}$ ob času $I + k$. Maržo za tveganje v času $I + k$ potem definiramo kot razliko med najboljšo oceno rezervacij, ter tveganju prilagojenimi rezervacijami:

$$\mathrm{RM}^{(k)} = \widehat{\mathcal{R}}_+^{(k)} - \widehat{\mathcal{R}}^{(k)}.$$

Porazdelitev mora biti spremenjena tako, da bo marža za tveganje vedno strogo pozitivna. To bomo storili preko vpeljave procesa $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_{I+J})$, ki bo ustrezno modificiral verjetnostno porazdelitev.

4.3.1 Zavarovalno-tehnični verjetnostni šoki

Zavarovalno-tehnični vpliv na verjetnostno porazdelitev $\varphi = (\varphi_0, \ldots, \varphi_{I+J})$ je $\mathbb{T}$-prilagojen strogo pozitiven slučajni proces, ki je $(\mathbb{P}, \mathbb{T})$-martingal z normalizacijo $\varphi_0 = 1$. To pomeni, da je φ slučajni proces v prostoru $(\mathbb{P}, \mathbb{T})$. Za denarni tok $\mathbf{X} = (X_0, \ldots, X_{I+J})$ definiramo tveganju prilagojene enote kot

$$\Lambda_{m,n} = \frac{1}{\varphi_m} \mathbb{E}\left[\varphi_n X_n | \mathcal{D}_m\right].$$

Tveganju prilagojene rezerve so potem definirane kot

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{R}}_+^{(k)} &= \sum_{t \geq k+1} \Lambda_{I+k,I+t} P\left(I+k, I+t\right) \\
&= \sum_{t \geq k+1} \sum_{i+j=I+t} \frac{1}{\varphi_{I+k}} \mathbb{E}\left[\varphi_{I+t} X_{i,j} | \mathcal{D}_{I+k}\right] P\left(I+k, I+t\right).
\end{aligned}$$

Za $\varphi \equiv 1$ sta najboljša ocena rezervacij in tveganju prilagojene rezerve enaki in marže za tveganje ni. Za primerno izbiro procesa φ, ki ustreza tveganju nenaklonjenemu agentu, pa dobimo strogo pozitivno maržo za tveganje $\mathrm{RM}^{(k)}$. Pogoj za to je pozitivna koreliranost med $\varphi_{I+t}\big|\mathcal{D}_{I+k}$ in $X_{I+t}\big|\mathcal{D}_{I+k}$, kar pomeni, da

$$\begin{aligned}
\Lambda_{I+k,I+t} &= \frac{1}{\varphi_{I+k}} \mathbb{E}\left[\varphi_{I+t} X_{I+t} | \mathcal{D}_{I+k}\right] \\
&\geq \frac{1}{\varphi_{I+k}} \mathbb{E}\left[\varphi_{I+t} | \mathcal{D}_{I+k}\right] \mathbb{E}\left[X_{I+t} | \mathcal{D}_{I+k}\right] = \mathbb{E}\left[X_{I+t} | \mathcal{D}_{I+k}\right].
\end{aligned}$$

Zadnji enačaj je posledica martingalske lastnosti procesa φ, $\mathbb{E}\left[\varphi_{I+t} | \mathcal{D}_{I+k}\right] = \varphi_{I+k}$ za $t \geq k$.

4.3.2 Tveganju prilagojene rezervacije za log-normalni Bayesov verižni model

Izberemo

$$\varphi_{I+J} = \prod_{j=1}^{J} \exp\left\{\alpha_1 \sum_{i=1}^{I} \xi_{i,j} + \alpha_2 \Phi_j - \left(I\alpha_1 + \alpha_2\right) \phi_j - \left(I\alpha_1 + \alpha_2\right)^2 \frac{s_j^2}{2} - I\alpha_1^2 \frac{\sigma_j^2}{2}\right\},$$

kjer sta $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ fiksni konstanti. Parametra α_1 in α_2 ponazarjata nenaklonjenost tveganju: α_1 predstavlja tveganje procesa $\xi_{i,j}$, α_2 pa negotovosti parametrov pri $\mathbf{\Phi}$. Proces φ definiramo z $\varphi_t = \mathbb{E}\left[\varphi_{I+J} | \mathcal{D}_t\right]$, za $t = 0, \ldots, I+J$.

Lema 4.3.1 *φ je strogo pozitiven in normaliziran $(\mathbb{P}, \mathbb{T})$-martingal.*

Dokaz. *Stroga pozitivnost in martingalske lastnosti sledijo iz definicije procesa φ. Za dokaz normaliziranosti upoštevamo predpostavke modela 4.1.1, zakon o popolnem matematičnem upanju in dejstvo, da je $\mathcal{D}_0$ trivialna σ-algebra $(\emptyset, \Omega)$, in velja $\varphi_0 = \mathbb{E}[\varphi_{I+J}|\mathcal{D}_0] = \mathbb{E}[\varphi_{I+J}]$. S preprostim izračunom lahko pokažemo, da za $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ in $C \in \Re$ velja*

$$\mathbb{E}\left[e^{CX}\right] = e^{\mu C + C^2\sigma^2/2}.$$

Najprej izračunamo $\mathbb{E}[\varphi_{I+J}|\mathbf{\Phi}]$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\varphi_{I+J}|\mathbf{\Phi}] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{J} \exp\left\{\alpha_1 \sum_{i=1}^{I} \xi_{i,j} + \alpha_2 \Phi_j - (I\alpha_1 + \alpha_2)\,\phi_j - (I\alpha_1+\alpha_2)^2 \frac{s_j^2}{2} - I\alpha_1^2 \frac{\sigma_j^2}{2}\right\} \middle| \mathbf{\Phi}\right] \\
&\quad = \prod_{j=1}^{J} \left[\exp\left\{\alpha_2 \Phi_j - (I\alpha_1 + \alpha_2)\,\phi_j - (I\alpha_1+\alpha_2)^2 \frac{s_j^2}{2} - I\alpha_1^2 \frac{\sigma_j^2}{2}\right\}\right. \\
&\qquad\quad \left. \times \prod_{i=1}^{I} \mathbb{E}\left[\exp\{\alpha_1 \xi_{i,j}\}|\mathbf{\Phi}\right]\right] \\
&\quad = \prod_{j=1}^{J} \exp\left\{(I\alpha_1+\alpha_2)\,\Phi_j - (I\alpha_1+\alpha_2)\,\phi_j - (I\alpha_1+\alpha_2)^2 s_j^2/2\right\}.
\end{aligned}$$

Upoštevamo formulo o popolni verjetnosti, $\mathbb{E}[\varphi_{I+J}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi_{I+J}|\mathbf{\Phi}]]$, in dobimo $\mathbb{E}[\varphi_{I+J}] = 1$, kar smo želeli dokazati. □

Izrek 4.3.2 *Za model 4.1.1, za $t > k \geq 0$ in $i \in \{I+t-J, \ldots, I\}$ velja*

$$\frac{1}{\varphi_{I+k}} \mathbb{E}[\varphi_{I+t} X_{i,I+t-i}|\mathcal{D}_{I+k}] = C_{i,I+k-i} \left(\prod_{l=I+k-i+1}^{I+t-i-1} \widehat{f}_l^{(+k)}\right)\left(\widehat{f}_{I+t-i}^{(+k)} - 1\right),$$

s tveganju prilagojenimi faktorji razvoja

$$\widehat{f}_l^{(+k)} = \exp\left\{\phi_l^{(k)} + \frac{\left(s_l^{(t)}\right)^2}{2} + \frac{\sigma_l^2}{2}\right\} \exp\left\{(\alpha_2 + [I - (I+k-l)]\,\alpha_1)\left(s_l^{(t)}\right)^2 + \alpha_1 \sigma_l^2\right\} + 1 \tag{4.11}$$

Dokaz. Ker je $C_{i,I+t-i} = X_{i,I+t-i} - X_{i,I+t-i-1}$ je dovolj dokazati, da izrek velja za kumulativne zahtevke $C_{i,I+t-i}$. Uporabimo formulo o popolni verjetnosti, kjer uporabimo matematično upanje pogojeno na parametre $\mathbf{\Phi}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varphi_{I+k}}\mathbb{E}\left[\varphi_{I+t}C_{i,I+t-i}|\mathcal{D}_{I+k}\right] &= \frac{1}{\varphi_{I+k}}\mathbb{E}\left[\varphi_{I+J}C_{i,I+t-i}|\mathcal{D}_{I+k}\right] \\ &= \frac{1}{\varphi_{I+k}}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi_{I+J}C_{i,I+t-i}|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right]|\mathcal{D}_{I+k}\right].\end{aligned}$$

Kot v dokazu leme najprej izračunamo matematično upanje φ_{I+J}, pogojeno na vrednosti $\mathbf{\Phi}$ (in $\mathcal{D}_{I+k}$). Zato φ_{I+J} ločimo na del, ki je glede na $\mathbf{\Phi}$ konstanten, in slučajni del:

$$\varphi_{I+J} = \left[\prod_{j=1}^{J}\prod_{l=1}^{I}\exp\left\{\alpha_1\xi_{l,j}\right\}\right]\prod_{j=1}^{J}\exp\left\{\alpha_2\Phi_j - (I\alpha_1+\alpha_2)\,\phi_j - (I\alpha_1+\alpha_2)^2\frac{s_j^2}{2} - I\alpha_1^2\frac{\sigma_j^2}{2}\right\}.$$

Pogojno na $\mathbf{\Phi}$ je del z $\xi_{i,j}$ edini slučajni del v φ_{I+J}. $\varphi_{I+k} = \mathbb{E}\left[\varphi_{I+J}|\mathcal{D}_{I+k}\right]$, definiramo pa še spremenljivko $\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}$, kjer pogojujemo še na $\mathbf{\Phi}$. Drugi del v φ_{I+J} je pogojno na $\mathcal{D}_{I+k}$ in $\mathbf{\Phi}$ konstanta, zato posebej izračunamo matematično upanje prvega dela:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{J}\prod_{l=1}^{I}\exp\left\{\alpha_1\xi_{l,j}\right\}\middle|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right] \\ &= \prod_{j=1}^{J}\left(\prod_{l=1}^{\min\{I+k-j,I\}}\exp\left\{\alpha_1\xi_{l,j}\right\}\times\prod_{l=\min\{I+k-j,I\}+1}^{I}\mathbb{E}\left[\exp\left\{\alpha_1\xi_{l,j}\right\}|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right]\right) \\ &= \prod_{j=1}^{J}\left(\left[\prod_{l=1}^{\min\{I+k-j,I\}}\exp\left\{\alpha_1\xi_{l,j}\right\}\right]\times\prod_{l=\min\{I+k-j,I\}+1}^{I}\exp\left\{\alpha_1\Phi_j+\alpha_1^2\sigma_j^2/2\right\}\right).\end{aligned}$$

Uporabili smo dejstvo, da pogojno na $\mathcal{D}_{I+k}$ in $\mathbf{\Phi}$ vrednosti $\xi_{i,j}$ za $i+j \le I+k$ niso slučajne. Slučajne so samo vrednosti za $i+j > I+k$. Upoštevali smo tudi pogojno neodvisnost spremenljivk $\xi_{i,j}$, pogojeno na $\mathcal{D}_{I+k}$ in $\mathbf{\Phi}$. Zdaj definirajmo $\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}$:

$$\begin{aligned}\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k} = \mathbb{E}\left[\varphi_{I+J}|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right] &= \prod_{j=1}^{J}\prod_{l=1}^{\min\{I+k-j,I\}}\exp\left\{\alpha_1\xi_{l,j}-\alpha_1\Phi_j-\alpha_1^2\sigma_j^2/2\right\} \\ &\quad\times\prod_{j=1}^{J}\exp\left\{(I\alpha_1+\alpha_2)\,\Phi_j-(I\alpha_1+\alpha_2)\,\phi_j-(I\alpha_1+\alpha_2)^2\frac{s_j^2}{2}\right\}.\end{aligned}$$

Za $t > k$ torej velja

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\varphi_{I+J}C_{i,I+t-i}|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi_{I+J}C_{i,I+t-i}|\mathcal{D}_{I+t},\mathbf{\Phi}\right]|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+t}C_{i,I+t-i}|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right].\end{aligned}$$

Zadnji enačaj velja, ker je $C_{i,I+t-i}$ merljiva glede na $(\mathcal{D}_{I+t},\mathbf{\Phi})$.

Iz definicije $\xi_{i,j}$ zapišemo rekurzivno formulo za kumulativne zahtevke $C_{i,I+t-i}$:

$$\xi_{i,I+t-i} = \log\left\{\frac{C_{i,I+t-i}}{C_{i,I+t-i-1}}-1\right\},$$

$$C_{i,I+t-i} = C_{i,I+t-i-1}\left(\exp\left\{\xi_{i,I+t-i}\right\}+1\right) = \cdots = C_{i,I+k-i}\prod_{j=I+k-i+1}^{I+t-i}\left(\exp\left\{\xi_{i,j}\right\}+1\right).$$

Rekurzivno formulo lahko zapišemo tudi za $\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+t}$, $t>k$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+t} =& \prod_{j=1}^{J}\left[\prod_{l=1}^{\min\{I+k-j,I\}}\exp\left\{\alpha_1\xi_{l,j}-\alpha_1\Phi_j-\alpha_1^2\sigma_j^2/2\right\}\right.\\
&\times\left.\prod_{l=\min\{I+k-j,I\}+1}^{\min\{I+t-j,I\}}\exp\left\{\alpha_1\xi_{l,j}-\alpha_1\Phi_j-\alpha_1^2\sigma_j^2/2\right\}\right]\\
&\times\prod_{j=1}^{J}\exp\left\{(I\alpha_1+\alpha_2)\,\Phi_j-(I\alpha_1+\alpha_2)\,\phi_j-(I\alpha_1+\alpha_2)^2\,\frac{s_j^2}{2}\right\}\\
=&\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}\times\prod_{j=1}^{J}\prod_{l=\min\{I+k-j,I\}+1}^{\min\{I+t-j,I\}}\exp\left\{\alpha_1\xi_{l,j}-\alpha_1\Phi_j-\alpha_1^2\sigma_j^2/2\right\}.
\end{aligned}$$

Proces $\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}$ je martingal glede na $(\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi})$, saj je za $l+j\geq I+k+1$

$$\mathbb{E}\left[\exp\{\alpha_1\xi_{l,j}-\alpha_1\Phi_j-\alpha_1^2\sigma_j^2/2\}\middle|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right]=1,$$

in je $\mathbb{E}\left[\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+t}\middle|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right]=\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}$. V matematičnem upanju produkta $\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+t}C_{i,I+t-i}$ dobimo faktorje različne od 1 samo za $j=I+k-i+1,\ldots I+t-i$. Dobimo

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+t}C_{i,I+t-i}\middle|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right]\\
&=\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}C_{i,I+k-i}\mathbb{E}\left[\prod_{j=I+k-i+1}^{I+t-i}\left(\exp\left\{\xi_{i,j}\right\}+1\right)\cdot\left(\exp\left\{\alpha_1\xi_{i,j}-\alpha_1\Phi_j-\alpha_1^2\sigma_j^2/2\right\}\right)\middle|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right]\\
&=\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}C_{i,I+k-i}\prod_{j=I+k-i+1}^{I+t-i}\left(\exp\left\{-\alpha_1\Phi_j-\alpha_1^2\sigma_j^2/2\right\}\right.\\
&\qquad\times\left.\mathbb{E}\left[\exp\left\{(1+\alpha_1)\,\xi_{i,j}\right\}+\exp\left\{\alpha_1\xi_{i,j}\right\}|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right]\right)\\
&=\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}C_{i,I+k-i}\prod_{j=I+k-i+1}^{I+t-i}\left(\exp\left\{-\alpha_1\Phi_j-\alpha_1^2\sigma_j^2/2\right\}\right.\\
&\qquad\times\left.\left[\exp\left\{(1+\alpha_1)\,\Phi_j+(1+\alpha_1)^2\,\sigma_j^2/2\right\}+\exp\left\{\alpha_1\Phi_j+\alpha_1^2\sigma_j^2/2\right\}\right]\right)\\
&=\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}C_{i,I+k-i}\prod_{j=I+k-i+1}^{I+t-i}\left(\exp\left\{-\alpha_1\Phi_j-\alpha_1^2\sigma_j^2/2+\alpha_1\Phi_j+\alpha_1^2\sigma_j^2/2\right\}\right.\\
&\qquad\times\left.\left[\exp\left\{\Phi_j+\sigma_j^2/2+\alpha_1\sigma_j^2\right\}+1\right]\right)\\
&=\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}C_{i,I+k-i}\prod_{j=I+k-i+1}^{I+t-i}\left(\exp\left\{\Phi_j+\sigma_j^2/2+\alpha_1\sigma_j^2\right\}+1\right).
\end{aligned}$$

Upoštevamo vse ugotovitve skupaj, in dobimo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varphi_{I+k}}\mathbb{E}\left[\varphi_{I+t}C_{i,I+t-i}|\mathcal{D}_{I+k}\right] \\
&\qquad = \frac{C_{i,I+k-i}}{\varphi_{I+k}}\mathbb{E}\left[\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{i+k}\prod_{j=I+k-i+1}^{I+t-i}\left(\exp\left\{\Phi_j+\alpha_1\sigma_j^2+\sigma_j^2/2\right\}+1\right)\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right].
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Opazimo, da velja

$$
\mathbb{E}\left[\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\varphi_{I+J}|\mathcal{D}_{I+k},\mathbf{\Phi}\right]|\mathcal{D}_{I+k}\right]=\mathbb{E}\left[\varphi_{I+J}|\mathcal{D}_{I+k}\right]=\varphi_{I+k}.
$$

Φ_j so pogojno na $\mathcal{D}_{I+k}$ edine slučajne, saj so $\xi_{l,j}$, ki nastopajo v $\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}$ $\mathcal{D}_{I+k}$-merljive, ostale spremenljivke pa so konstante. Iz izreka 4.2.1 vemo, da so, pogojno na $\mathcal{D}_{I+k}$, slučajne spremenljivke Φ_j neodvisne, torej lahko matematično upanje produkta po j zamenjamo s produktom posameznih matematičnih upanj. To lahko naredimo tudi za φ_{I+k}. Ker je $\varphi_{I+k}=\mathbb{E}\left[\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}\middle|\mathcal{D}_{I+k}\right]$, so vsi členi enaki in se pokrajšajo, razen za $j\in\{I+k-i+1,\dots,I+t-i\}$. Za $j\in\{I+k-i+1,I+t-i\}$ se med φ_{I+k} in $\varphi^{\mathbf{\Phi}}_{I+k}$ pokrajšajo tudi vsi členi s konstantami $\alpha_1,\alpha_2,\phi_j,s_j$, ter členi z $\xi_{l,j}$, ker so $\mathcal{D}_{I+k}$-merljivi. Ostane le še

$$
\begin{aligned}
&C_{i,I+k-i} \\
&\times\prod_{j=I+k-i+1}^{I+t-i}\frac{\mathbb{E}[\exp\{-\alpha_1\sum_{l=1}^{\min\{I+k-j,I\}}\Phi_j+(I\alpha_1+\alpha_2)\Phi_j\}(\exp\{\Phi_j+\alpha_1\sigma_j^2+\sigma_j^2/2\}+1)|\mathcal{D}_{I+k}]}{\mathbb{E}[\exp\{-\alpha_1\sum_{l=1}^{\min\{I+k-j,I\}}\Phi_j+(I\alpha_1+\alpha_2)\Phi_j\}|\mathcal{D}_{I+k}]} \\
&=C_{i,I+k-i}\prod_{j=I+k-i+1}^{I+t-i}\frac{\mathbb{E}[\exp\{\Phi_j([I-(I+k-j)]\alpha_1+\alpha_2])\}(\exp\{\Phi_j+\alpha_1\sigma_j^2+\sigma_j^2/2\}+1)|\mathcal{D}_{I+k}]}{\mathbb{E}[\exp\{\Phi_j([I-(I+k-j)]\alpha_1+\alpha_2])\}|\mathcal{D}_{I+k}]}.
\end{aligned}
$$

Zadnji korak je izračun količnika matematičnih upanj za $j\in\{I+k-i+1,\dots,I+t-i\}$. Upoštevamo, da $\Phi_j\big|_{\mathcal{D}_{I+k}}\sim\mathcal{N}\big(\phi_j^{(k)},(s_j^{(k)})^2\big)$ iz izreka 4.2.1, in dobimo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{E}[\exp\{\Phi_j([I-(I+k-j)]\alpha_1+\alpha_2])\}(\exp\{\Phi_j+\alpha_1\sigma_j^2+\sigma_j^2/2\}+1)|\mathcal{D}_{I+k}]}{\mathbb{E}[\exp\{\Phi_j([I-(I+k-j)]\alpha_1+\alpha_2])\}|\mathcal{D}_{I+k}]} \\
&\quad=\frac{\mathbb{E}[\exp\{(1+\alpha_2+[I-(I+k-j)]\alpha_1)\Phi_j\}|\mathcal{D}_{I+k}]}{\mathbb{E}[\exp\{(\alpha_2+[I-(I+k-j)]\alpha_1)\Phi_j\}|\mathcal{D}_{I+k}]}\exp\{\alpha_1\sigma_j^2+\sigma_j^2/2\}+1 \\
&\quad=\exp\left\{\phi_j^{(k)}+(s_j^{(k)})^2/2+\sigma_j^2/2\right\}\exp\left\{(\alpha_2+[I-(I+k-j)]\alpha_1)(s_j^{(k)})^2+\alpha_1\sigma_j^2\right\}+1.
\end{aligned}
$$

To dokazuje izrek. □

Sedaj s pomočjo izreka izračunamo tveganju prilagojene rezerve, ki vključujejo tako tveganje procesa $\xi_{i,j}$ in negotovost parametrov v Φ_j. Tveganju prilagojene rezerve so dane z

$$
\widehat{\mathcal{R}}_+^{(k)}=\sum_{i=I+k+1-J}^{I}C_{i,I+k-i}\sum_{j=I+k-i+1}^{J}\left(\prod_{l=I+k-i+1}^{j-1}\widehat{f}_l^{(+k)}\right)\left(\widehat{f}_j^{(+k)}-1\right)P(I+k,i+j).
\tag{4.13}
$$

Če primerjamo faktorje razvoja iz posledice 4.2.4 in izreka 4.3.2 vidimo, da za $l \geq k$ velja $\widehat{f}_l^{(+k)} \geq \widehat{f}_l^{(k)}$, torej imamo pozitivno maržo za tveganje RM_k.

Opomba. Za izračun tveganju prilagojenih rezerv je potrebno samo prilagoditi originalne faktorje razvoja:

$$\widehat{f}_l^{(+k)} = \left(\widehat{f}_l^{(k)} - 1\right) \exp\left\{(\alpha_2 + [I - (I + k - l)]\alpha_1)(s_j^{(k)})^2 + \alpha_1 \sigma_l^2\right\} + 1. \tag{4.14}$$

Definiramo funkcijo

$$\tau_{l,k}(\alpha_1, \alpha_2) = \exp\left\{(\alpha_2 + [I - (I + k - l)]\alpha_1)(s_l^{(k)})^2 + \alpha_1 \sigma_l^2\right\}.$$

Vrednost funkcije je ≥ 1 za $l \geq k \geq 0$.

Parameter α_2 ponazarja nenaklonjenost tveganju pri negotovosti parametrov, α_1 pa nenaklonjenost tveganju v tveganju procesa. Hkrati pa α_1 vpliva tudi na negotovost parametrov, ker v Bayesovi statistiki na parametre vplivajo tudi vse znane informacije $\mathcal{D}_{I+k}$.

4.3.3 Pričakovani razvoj marže za tveganje

V tem poglavju izračunamo pričakovani razvoj marže za tveganje, to je pričakovano razliko med najboljšo oceno in tveganju prilagojenimi rezervacijami.

Lema 4.3.3 *Za $l \geq k \geq s \geq 0$ imamo*

$$\widehat{f}_l^{(+k,s)} = \mathbb{E}\left[\widehat{f}_l^{(+k)} \middle| \mathcal{D}_{I+s}\right] = \left(\widehat{f}_l^{(s)} - 1\right) \tau_{l,k}(\alpha_1, \alpha_2) + 1. \tag{4.15}$$

Dokaz. Dokaz leme sledi neposredno iz enačbe (4.14) in martingalske lastnosti faktorjev $(\widehat{f}_l^{(k)})_{k=0,\ldots,J})$, $\tau_{l,t}(\alpha_1, \alpha_2)$ pa ne vsebuje slučajnih členov. □

Izrek 4.3.4 *Za $k > s \geq 0$ imamo pričakovano najboljšo oceno rezervacij*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widehat{\mathcal{R}}^{(k)} \middle| \mathcal{D}_{I+s}, \mathcal{F}_{I+s}\right] = &\sum_{i=I+k+1-J}^{I} C_{i,I+s-i} \\ &\times \sum_{j=I+k-i+1}^{J} \prod_{l=I+s-i+1}^{j-1} \widehat{f}_l^{(s)} \left(\widehat{f}_j^{(s)} - 1\right) \mathbb{E}\left[P(I+k, i+j) | \mathcal{F}_{I+s}\right],\end{aligned} \tag{4.16}$$

in tveganju prilagojene rezerve

$$\mathbb{E}\left[\widehat{\mathcal{R}}_{+}^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+s},\mathcal{F}_{I+s}\right] = \sum_{i=I+k+1-J}^{I}\Bigg[C_{i,I+s-i}\prod_{l=I+s-i+1}^{I+k-i}\widehat{f}_l^{(s)}$$
$$\times\sum_{j=I+k-i+1}^{J}\prod_{l=I+k-i+1}^{j-1}\widehat{f}_l^{(+k,s)}\left(\widehat{f}_{j-1}^{(+t,s)}-1\right)\mathbb{E}\left[P(t,i+j)|\mathcal{F}_{I+s}\right]\Bigg]. \quad (4.17)$$

Dokaz. Dokaz naredimo le za pričakovano vrednost najboljše ocene rezervacij, saj je drugi dokaz analogen.

Edini slučajni člen v $\widehat{f}_l^{(k)}$ je $\phi_l^{(k)}$. Najprej razdelimo $\phi_l^{(k)}$ na del, ki je $\mathcal{D}_{I+k-1}$-merljiv:

$$\phi_l^{(k)} = \beta_l^{(k)}\bar{\xi}_l^{(k)} + (1-\beta_l^{(k)})\phi_l = \gamma_l^{(k-1)}\xi_{k-l,l} + (1-\gamma_l^{(k)})\phi_l^{(k-1)},$$

z utežjo

$$\gamma_l^{(k-1)} = \frac{s_l^2}{\sigma_l^2 + (I+k-l)s_l^2}.$$

Pogojno na $\mathcal{D}_{I+k-1}$ je $\xi_{I+k-l,l}$ edini slučajni del v $\widehat{f}_l^{(k)}$. Ker vsi ti členi pripadajo različnim letom nezgod in letom razvoja za $l \in \{I+k-i+1,\ldots,J\}$ imamo posteriorno neodvisnot, pogojno na $\mathcal{D}_{I+k-1}$. Zato za $k > s \geq 0$ velja

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i}\prod_{l=I+k-i+1}^{j-1}\widehat{f}_l^{(k)}\left(\widehat{f}_j^{(k)}-1\right)\middle|\mathcal{D}_{I+s}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i}\prod_{l=I+k-i+1}^{j-1}\widehat{f}_l^{(k)}\left(\widehat{f}_j^{(k)}-1\right)\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]\middle|\mathcal{D}_{I+s}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i}|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]\prod_{l=I+k-i+1}^{j-1}\mathbb{E}\left[\widehat{f}_l^{(k)}\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]\mathbb{E}\left[\widehat{f}_j^{(k)}-1\middle|\mathcal{D}_{I+k-1}\right]\middle|\mathcal{D}_{I+s}\right]\\
&=\mathbb{E}\left[C_{i,I+k-i-1}\prod_{l=I+k-i}^{j-1}\widehat{f}_l^{(k-1)}(\widehat{f}_j^{(k-1)}-1)\middle|\mathcal{D}_{I+s}\right]
\end{aligned}$$

Iterativno nadaljujemo in dobimo dokaz. $\square$

Poglavje 5

Implementacija in izračun na primeru trikotnika razvoja

Vse predstavljene metode in izračuni so implementirani v programskem jeziku R, ki je prosto dostopen program na [14], in zelo dobro podprt s statističnimi in verjetnostnimi funkcijami. Obstaja celo paket "ChainLadder", kjer je med drugim vgrajena Mackova verižna metoda. Implementacija je priložena elektronski obliki magistrskega dela. V tem poglavju bomo vse opisane metode preiskusili na primeru trikotnika razvoja, in primerjali dobljene rezultate. Trikotniki razvoja in dejansko določene rezervacije za zavarovalnice predstavljajo pomembno poslovno skrivnost, na spletu pa je veliko primerov trikotnikov razvoja, ki so namenjeni prav študiju določanja škodnih rezervacij. Uporabili bomo podatke, dostopne na spletni strani društva Casualty Actuarial Society [11], kjer je zbranih veliko trikotnikov ameriških zavarovalnic iz različnih področij premoženjskega in nezgodnega zavarovanja. Vsi trikotniki vključujejo 10 škodnih let (1988-1997) in 10 let razvoja (od vključno 0 do maksimalno 9 let razvoja). Podatki vključujejo tako zgornji kot spodnji (neznani) trikotnik, s katerim lahko ocenimo smiselnost dobljenih rezultatov.

5.1 Izbira apriornih parametrov in parametrov variance

5.1.1 Gama-gama model

Prvi korak je določitev parametrov σ_j^2 in apriornih parametrov f_j in γ_j. Izbira je subjektivna glede na znanje in izkušnje agenta, ki določa rezervacije. Mi jih bomo določili empirično iz znanih podatkov, podobno kot Wüthrich v [9].

Manjši kot je parameter γ_j, manjši je vpliv apriornega parametra f_j na posteriorno porazdelitev. Popolnoma neinformativnih apriornih parametrov ne smemo vzeti, saj imamo omejitev $\gamma_j > 2$. Lahko bi določili $\gamma_j = 2.1$ za $j = 1, \ldots, J$, in v tem primeru je skoraj vseeno kakšne apriorne vrednosti f_j določimo. Če imamo dostopnih več trikotnikov razvoja, lahko parametre f_j ocenimo na podlagi K trikotnikov sorodnega tipa zavarovanja. Za k-ti trikotnik, $k = 1, \ldots, K$, za ocene faktorjev razvoja vzamemo kar povprečja

$$\overline{F}_{j,k}^{(0)} = \frac{1}{I-j+1} \sum_{i=0}^{I-j} F_{i,j}^{k}.$$

Za apriorni parameter f_j vzamemo uteženo povprečje dobljenih ocen $\overline{F}_{j,k}^{(0)}$

$$f_j = \sum_{k=1}^{K} \omega_k \, \overline{F}_{j,k}^{(0)}, \tag{5.1}$$

kjer je $\sum_{k=1}^{K} \omega_k = 1$.

Parametre γ_j določimo tako, je utež (3.4) ustrezna glede na naša pričakovanja.

Ostane nam le še ocena parametrov variance σ_j^2. Ti parametri so fiksni in se ne spreminjajo glede na dodatne informacije, in ravno zato je njihov vpliv na celoten izračun največji. Majhna sprememba zelo vpliva na rezultate, predvsem na višino marže za tveganje – za napačno izbiro lahko dobimo povsem nesmiselne rezultate. Dobimo lahko npr. višjo maržo za tveganje, kot je sama najboljša ocena rezervacij. Za oceno σ_j^2 bomo uporabili klasično nepristransko cenilko za varianco: za $j \leq \min\{I-1, J\}$

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \left(\overline{F}_j^{(0)}\right)^{-2} \frac{1}{I-j} \sum_{i=0}^{I-j} \left(F_{i,j} - \overline{F}_j^{(0)}\right)^2. \tag{5.2}$$

V primeru $I = J$ na ta način ne moremo oceniti σ_J^2, ker nimamo na voljo dovolj podatkov, zato izberemo (tako izbiro je predstavil že Mack v [4])

$$\widehat{\sigma}_J^2 = \min\{\widehat{\sigma}_{J-1}^4 / \widehat{\sigma}_{J-2}^2, \widehat{\sigma}_{J-1}^2, \widehat{\sigma}_{J-2}^2\}.$$

Opomba. V tem razdelku indeks k označuje različne trikotnike razvoja. Kjer je indeks izpuščen, to pomeni, da gledamo trikotnik razvoja, za katerega računamo rezervacije.

Opomba. $\mathrm{Var}(F_{i,j}|\boldsymbol{\Theta}) = \sigma_j^2 \Theta_j^{-2}$, zato je $\sigma_j^2 = \Theta_j^2 \mathrm{Var}(F_{i,j}|\boldsymbol{\Theta})$, kjer varianco ocenimo s klasično nepristransko cenilko, za Θ_j^{-1} pa uporabimo oceno $\overline{F}_j^{(0)}$.

5.1.2 Log-normalni model

Predstavili bomo dva možna načina izbire parametrov. Princip izbire parametrov je v obeh primerih podoben kot za gama-gama model. Predpostavimo, da imamo na voljo K trikotnikov razvoja.

- **1. način:** za k-ti trikotnik, $k = 1, \ldots, K$, izračunamo ocene za parametre ϕ kot povprečja realiziranih podatkov

  $$\overline{\xi}_{j,k}^{(0)} = \frac{1}{I-j} \sum_{i=1}^{I-j} \xi_{i,j}^{k},$$

  kjer je $\xi_{i,j} = \log\left(C_{i,j}/C_{i,j-1} - 1\right)$. Apriorne parametre ϕ_j določimo kot uteženo povprečje zgornjih ocen

  $$\phi_j = \sum_{k=1}^{K} \omega_k \overline{\xi}_{j,k}^{(0)},$$

  kjer je $\sum_{k=1}^{K} \omega_k = 1$.
  Parametre variance za $j \leq \min\{I-1, J\}$ ocenimo s klasično nepristransko cenilko

  $$\widehat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=1}^{I-j} \left(\xi_{i,j} - \overline{\xi}_j^{(0)}\right)^2.$$

  V primeru $I = J$ za $j = J$ kot prej izberemo

  $$\widehat{\sigma}_J^2 = \min\{\widehat{\sigma}_{J-1}^4/\widehat{\sigma}_{J-2}^2, \widehat{\sigma}_{J-1}^2, \widehat{\sigma}_{J-2}^2\}.$$

  Parametre s_j določimo tako, da je utež (4.5) ustrezna.

- **2. način:** parametre določimo tako, da bosta apriorno povprečje in varianca spremenljivk $F_{i,j}$ ustrezala empiričnim vrednostim. Veljati morata enačbi

  $$\mathbb{E}\left[F_{i,j}\right] = \exp\left\{\phi_j + s_j^2/2 + \sigma_j^2/2\right\} + 1 = f_j,$$

  kjer je f_j določen kot v (5.1)), in

  $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\operatorname{Var}\left(F_{i,j}|\mathbf{\Phi}\right)\right] &= \left(\exp\{\sigma_j^2\} - 1\right)\exp\{2\phi_j + s_j^2 + \sigma_j^2\} \\ &= \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=1}^{I-j} \left(F_{i,j} - \overline{F}_j^{(0)}\right)^2.\end{aligned}$$

Iz druge enačbe takoj dobimo oceno za parameter variance

$$\widehat{\sigma}_j^2 = \log\left((f_j - 1)^{-2} \frac{1}{I-j-1} \sum_{i=1}^{I-j} \left(F_{i,j} - \overline{F}_j^{(0)}\right)^2 + 1\right),$$

iz prve pa za apriorni parameter ϕ_j

$$\phi_j = \log(f_j - 1) - s_j^2/2 - \sigma_j^2/2.$$

Parameter s_j spet izberemo tako, da bo vpliv apriornega parametra ϕ_j ustrezen.

Opomba. V log-normalnem modelu škodna leta štejemo od 1 naprej, v gama-gama modelu pa od 0, zato je za isti nabor podatkov I v log-normalnem modelu za 1 večji od vrednosti I v gama-gama modelu.

5.2 Trikotnik razvoja – zavarovanje odgovornosti za uporabo produktov in storitev (*products liability - occurrence*)

Obravnavali bomo trikotnik razvoja v tabeli 5.1. Rezervacije bomo določali na podlagi zgornjega trikotnika, ki predstavlja nabor vseh znanih informacij $\mathcal{D}_I$. Spodnji trikotnik nam bo služil le kot referenca za primerjavo dobljenih rezultatov, saj ga v realnosti ne poznamo. Rezervacije bomo določali ob času I, torej $k = 0$. Prvo škodno leto 1988 označimo z $i = 0$, zadnje leto 1997 pa ustreza $I = 9$. Oznake let v rezultatih bodo enotne za vse modele, čeprav smo v log-normalnem modelu leta šteli od 1 naprej.

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1988	3.894	7.409	11.199	16.913	18.517	19.722	20.417	20.902	21.208	21.368
1989	3.883	6.869	10.489	14.410	16.605	18.485	20.112	20.654	20.835	21.119
1990	4.178	7.473	11.281	15.874	19.186	20.993	22.069	22.477	22.742	23.279
1991	3.872	8.137	14.577	18.071	22.125	23.770	24.559	25.283	26.017	26.380
1992	4.095	7.260	11.015	14.844	19.309	20.097	20.927	21.138	21.424	21.658
1993	2.223	4.048	6.651	8.229	9.141	10.446	11.078	11.098	11.510	11.598
1994	2.500	4.003	6.893	9.379	11.092	11.386	11.602	11.684	12.304	12.353
1995	2.442	4.657	7.303	8.380	9.553	10.170	10.446	10.522	10.618	10.883
1996	2.761	4.661	7.009	10.018	11.108	12.333	13.023	13.131	14.071	14.100
1997	2.642	5.027	9.539	12.343	15.013	16.282	16.917	17.105	17.236	17.336

Tabela 5.1: Trikotnik razvoja (vir: [11])

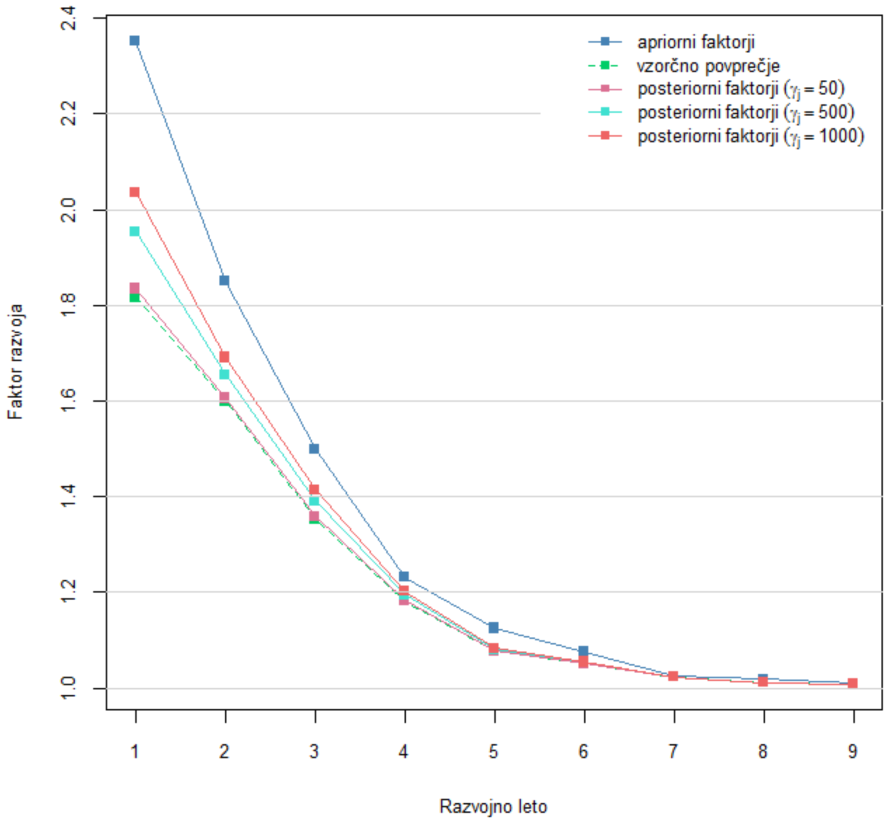
5.2.1 Apriorni parametri

Za določitev apriornih parametrov uporabimo štiri trikotnike razvoja enakega tipa zavarovanja z utežjo $\omega_1 = 0.7$ za trikotnik v tabeli 5.1, in $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0.1$ za ostale tri. Za gama-gama model parametre f_j in σ_j^2 določimo po (5.1) in (5.2), za parameter γ_j izberemo vrednost 50 za $j = 1, \ldots, J$ (na sliki 5.1 je prikazan vpliv vrednosti γ_j na posteriorne faktorje). V tabeli 5.2 so prikazani izbrani parametri, vzorčno povprečje $\overline{F}_j^{(0)}$ in utež kredibilnosti $\alpha_j^{(0)}$. Za log-normalni model izberemo parametre na oba opisana načina. V obeh primerih je potrebna korekcija parametrov σ_8 in σ_9, ker je sicer varianca prevelika, in ne dobimo smiselnih marž za tveganje. Parameter s_j v obeh primerih določimo tako, da je vpliv apriornih parametrov podoben kot v gama-gama modelu. Poleg izbranih parametrov so v tabeli 5.2 še vrednosti $\overline{\xi}_j^{(0)}$ in utež kredibilnosti $\beta_j^{(0)}$. Pri parametrih σ_8 in σ_9 za log-normalna modela je prva vrednost popravljena vrednost, ki jo uporabimo, v oklepaju pa je zapisana vrednost, ki jo dobimo po izračunu.

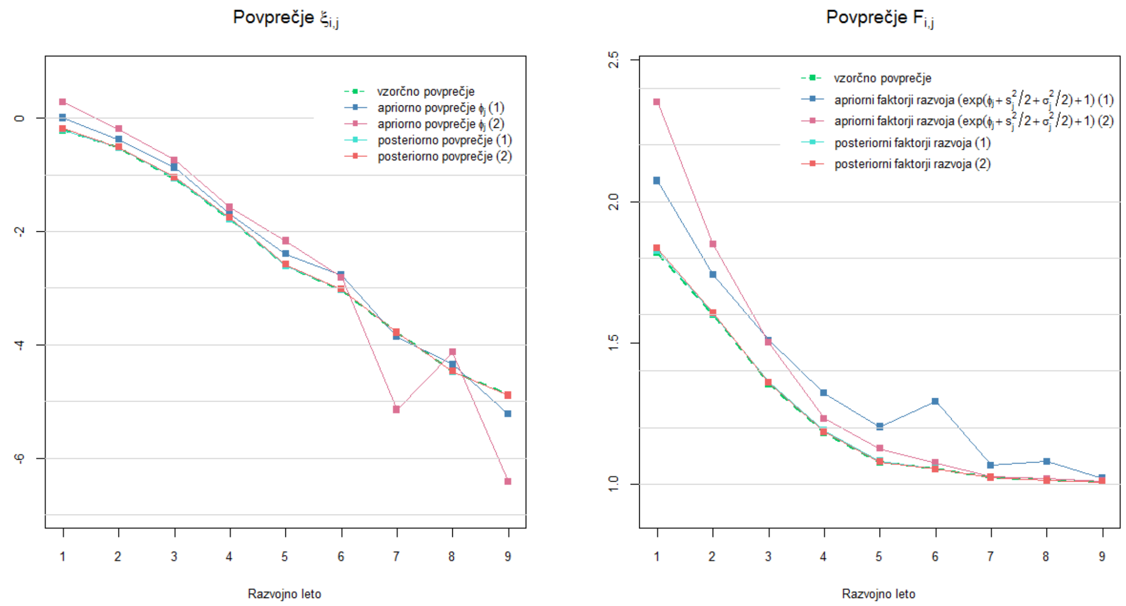
	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
gama-gama	f_j	2,352	1,85	1,5	1,231	1,125	1,075	1,025	1,019	1,01
	γ_j	50	50	50	50	50	50	50	50	50
	σ_j	0,079	0,068	0,07	0,066	0,026	0,024	0,004	0,004	0,004
	$\overline{F}_j^{(0)}$	1,817	1,59	1,35	1,18	1,078	1,052	1,023	1,012	1,01
	$\alpha_j^{(0)}$	0,967	0,972	0,967	0,966	0,993	0,993	0,9997	0,9996	0,999
log-normal (1)	ϕ_j	0,004	−0,38	−0,872	−1,695	−2,396	−2,776	−3,861	−4,348	−5,23
	s_j	0,32	0,36	0,56	0,96	1,2	1,7	1,5	1,9	1,6
	σ_j	0,173	0,172	0,277	0,443	0,39	0,449	0,192	0,18 (0,363)	0,17 (0,192)
	$\overline{\xi}_j^{(0)}$	−0,22	−0,53	−1,07	−1,78	−2,61	−3,04	−3,78	−4,48	−4,89
	$\beta_j^{(0)}$	0,969	0,972	0,966	0,966	0,98	0,983	0,995	0,996	0,989
log-normal (2)	ϕ_j	0,286	−0,191	−0,741	−1,579	−2,167	−2,811	−5,147	−4,497	−6,485
	s_j	0,144	0,202	0,244	0,346	0,355	0,577	1,7	1,011	1,9
	σ_j	0,106	0,127	0,188	0,329	0,221	0,328	0,163	0,16 (0,211)	0,15 (0,388)
	$\overline{\xi}_j^{(0)}$	−0,22	−0,53	−1,07	−1,78	−2,61	−3,04	−3,78	−4,48	−4,89
	$\beta_j^{(0)}$	0,943	0,953	0,922	0,869	0,928	0,925	0,997	0,96	0,994

Tabela 5.2: Parametri za gama-gama in log-normalni model.

Slika 5.1 prikazuje apriorne faktorje f_j, vzorčno povprečje $\overline{F}_j^{(0)}$ in posteriorne faktorje glede na različne izbire parametrov γ_j, za gama-gama model. Izberemo $\gamma_j = 50$ za $j = 1, \ldots, 9$. S tako izbiro dobimo uteži kredibilnosti $\alpha_j^{(0)}$ (po formuli (3.4)). Slika 5.2 pa prikazuje apriorne in posteriorne parametre ϕ_j ter vzorčno povprečje $\overline{\xi}_j^{(0)}$ (levo), in apriorne in posteriorne faktorje razvoja f_j ter vzorčno povprečje $\overline{F}_j^{(0)}$. Vse vrednosti so prikazane za obe izbiri parametrov, ločeni z oznako kot v tabeli 5.2 z (1) in (2). Vidimo, da z ustrezno izbiro parametrov s_j razlik v posteriornih parametrih skoraj ni, saj so vsi zelo blizu vzorčnemu povprečju. So pa pomembne razlike v varianci – po izbiri parametrov na 1. način je gibanje posteriornega povprečja gladko, brez posebnih skokov, kar pa ne velja za izbiro parametrov na 2. način.



Slika 5.1: Faktorji razvoja – apriorni, posteriorni in povprečje podatkov



Slika 5.2: Apriorni in posteriorni parametri ϕ_j in f_j, ter vzorčno povprečje $\overline{F}_j^{(0)}$ in $\overline{\xi}_j^{(0)}$ za log-normalni model

5.2.2 Najboljša ocena rezervacij

Najboljšo oceno rezervacij izračunamo po formuli (2.12) za Mackov model, gama-gama model in log-normalni model. Rezultati so prikazani v tabelah 5.3 in 5.4. Izračunali smo tudi diskontirano vrednost najboljše ocene rezervacij po formuli (2.2). Za diskontiranje smo uporabili spot obrestne mere za AAA-ocenjene državne obveznice evro območja (podatki, dostopni na [12], na datum 11. avgust 2014). Donosi državnih obveznic z oceno AAA so zelo nizki (donos eno- in dve-letnih obveznic je bil celo negativen: $-0,031$ za enoletne, in $-0,019$ za dvoletne obveznice), zato je učinek diskontiranja minimalen.

i	Mackov model		Gama-gama model	
	$\widehat{C}_{i,J}^{(0)}$	$\widehat{R}_i^{(0)}$	$\widehat{C}_{i,J}^{(0)}$	$\widehat{R}_i^{(0)}$
1	$20.992,19$	$157,19$	$20.992,23$	$157,23$
2	$22.911,97$	$434,97$	$22.911,68$	$434,68$
3	$25.608,15$	$1.049,15$	$25.611,34$	$1.052,34$
4	$22.013,04$	$1.916,04$	$22.049,81$	$1.952,81$
5	$10.778,53$	$1.637,53$	$10.809,90$	$1.668,90$
6	$13.130,01$	$3.751,01$	$13.128,32$	$3.749,32$
7	$13.855,69$	$6.552,69$	$13.888,32$	$6.585,32$
8	$14.084,86$	$9.423,86$	$14.432,53$	$9.571,53$
9	$14.582,20$	$11.940,2$	$14.799,57$	$12.157,57$
Skupaj	nominalna vr.	$36.862,63$	nominalna vr.	$37.329,6$
	diskontirana vr.	$36.689,25$	diskontirana vr.	$37.152,87$
	efekt	$0,47\%$	efekt	$0,47\%$

Tabela 5.3: Rezultati izračunov najboljše ocene rezervacij za Mackov in gama-gama model

i	Log-normalni model (1)		Log-normalni model (2)	
	$\widehat{C}_{i,J}^{(0)}$	$\widehat{R}_i^{(0)}$	$\widehat{C}_{i,J}^{(0)}$	$\widehat{R}_i^{(0)}$
1	$20.996,15$	$161,15$	$20.994,23$	$159,23$
2	$22.913,87$	$436,87$	$22.913,87$	$436,87$
3	$25.620,81$	$1.061,81$	$25.614,66$	$1.055,66$
4	$22.110,34$	$2.013,34$	$22.052,66$	$1.955,66$
5	$10.866,94$	$1.725,94$	$10.811,32$	$1.670,32$
6	$13.256,36$	$3.877,36$	$13.130,18$	$3.751,18$
7	$14.040,91$	$6.737,91$	$13.890,47$	$6.587,47$
8	$14.365,7$	$9.704,7$	$14.234,89$	$9.573,9$
9	$14.862,22$	$12.220,22$	$14.801,96$	$12.159,96$
Skupaj	nominalna vr.	$37.939,3$	nominalna vr.	$37.350,23$
	diskontirana vr.	$37.757,55$	diskontirana vr.	$37.173,08$
	efekt	$0,48\%$	efekt	$0,47\%$

Tabela 5.4: Rezultati izračunov najboljše ocene rezervacij za log-normalni model

Vidimo, da za najboljšo oceno rezervacij po vseh modelih dobimo podoben rezultat, saj smo apriorne parametre in parametre variance določili na podoben način. Če bodoče obveznosti izračunamo glede na spodnji trikotnik tabele 5.1, dobimo vrednost rezervacij 37.612, kar je blizu vsem rezultatom.

Srednja kvadratna napaka

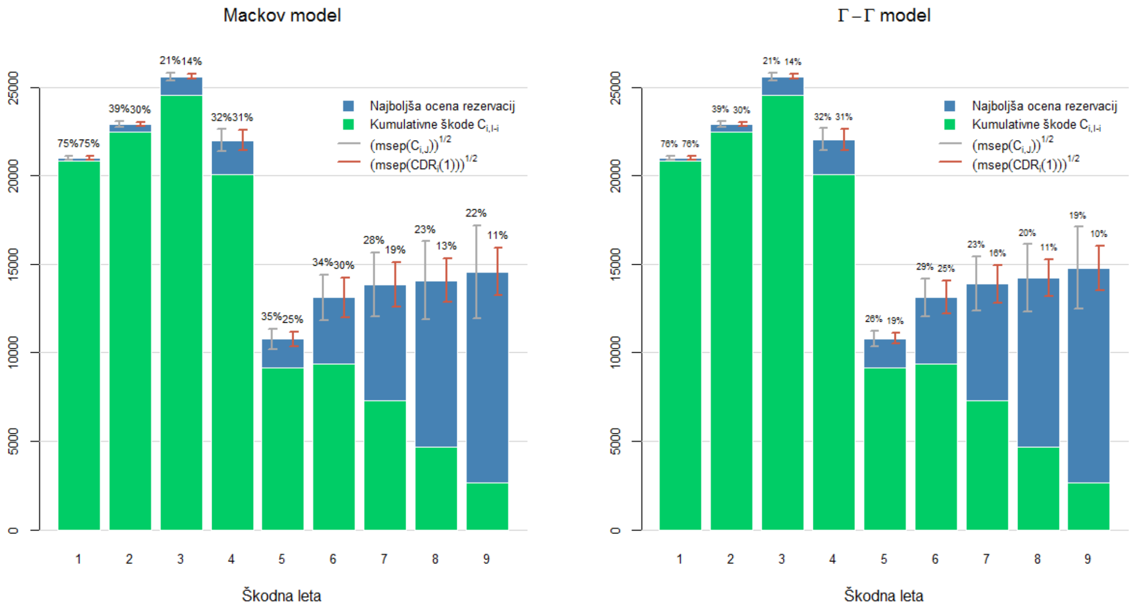
Za gama-gama model lahko izračunamo srednjo kvadratno napako napovedi $C_{i,J}$ in $\mathrm{CDR}_i(1)$ po enačbah (3.17) in (3.18). Rezultat primerjamo s srednjo kvadratno napako napovedi za Mackov model po (2.16) in (2.17). Rezultati so prikazani v tabeli 5.5, slika 5.3 pa prikazuje višino najboljše ocene rezervacij po škodnih letih za Mackov model (levo) in gama-gama model (desno). Na grafih so označeni tudi koreni srednjih kvadratnih napak, ki predstavljajo pričakovano napako naše napovedi, ter njen delež od najboljše ocene.

i	Mackov model				Gama-gama model			
	$\mathrm{msep}_{C_{i,j}\mid\mathcal{D}_I}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^{1/2}$		$\mathrm{msep}_{\mathrm{CDR}_i(1)\mid\mathcal{D}_I}(0)^{1/2}$		$\mathrm{msep}_{C_{i,j}\mid\mathcal{D}_I}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^{1/2}$		$\mathrm{msep}_{\mathrm{CDR}_i(1)\mid\mathcal{D}_I}(0)^{1/2}$	
1	117,17	(75%)	117,17	(75%)	118,73	(76%)	118,73	(76%)
2	168,16	(39%)	128,95	(30%)	171,43	(39%)	129,58	(30%)
3	216,81	(21%)	143,93	(14%)	225,20	(21%)	144,85	(14%)
4	616,07	(32%)	589,44	(31%)	622,28	(32%)	596,2	(31%)
5	576,45	(35%)	413,81	(25%)	433,41	(26%)	315,32	(19%)
6	1.290,21	(34%)	1.122,25	(30%)	1.072,69	(29%)	939,71	(25%)
7	1.821,9	(28%)	1.255,05	(19%)	1.539,92	(23%)	1.052,35	(16%)
8	2.209,32	(23%)	1.240,17	(13%)	1.885,31	(20%)	1.049,01	(11%)
9	2.617,01	(22%)	1.352,48	(11%)	2.320,5	(19%)	1.257,66	(10%)

Tabela 5.5: $\mathrm{msep}_{C_{i,j}\mid\mathcal{D}_I}\left(\widehat{C}_{i,J}^{(0)}\right)^{1/2}$ in $\mathrm{msep}_{\mathrm{CDR}_i(1)\mid\mathcal{D}_I}(0)^{1/2}$ za Mackov in gama-gama model.

Vidimo, da so za prva štiri leta rezultati skoraj enaki, za kasnejša leta pa po gama-gama modelu naredimo pričakovano manjšo napako pri napovedi. Tukaj se vidi, da je vpliv apriornih parametrov večji za kasnejša škodna leta. Na splošno pa je pričakovana napaka napovedi po obeh modelih kar velika, saj je za vsa škodna leta višja od 10%.

Če primerjamo kratkoročno negotovost preko srednje kvadratne napake $\mathrm{CDR}_i(1)$ in dolgoročno negotovost preko srednje kvadratne napake $C_{i,J}$ vidimo, da je kratkoročno tveganje manjše od dolgoročnega, kar je seveda pričakovano. Razlika je višja za poznejša škodna leta.



Slika 5.3: Višina najboljše ocene rezervacij po škodnih letih in koren srednje kvadratne napake za Mackov in gama-gama model

Opomba. Za log-normalni model srednje kvadratne napake nismo izpeljali, saj smo uporabili drugačen pristop za računanje marže za tveganje. Ker imamo premaknjeno log-normalno porazdelitev faktorjev $F_{i,j}$, ne dobimo lepe formule za varianci $C_{i,J}$ in $\mathrm{CDR}_i(k)$.

5.2.3 Marža za tveganje

Pristop stroška kapitala

Za gama-gama model izračunamo maržo za tveganje po pristopu stroška kapitala, za individualna škodna leta, ter za združena škodna leta. Za izračun marže za tveganje izberemo stopnjo stroška kapitala 6%, kar ustreza členu TP.5.25. v tehničnih specifikacijah [10]. Izberemo $\phi = 1$, kar odraža naša pričakovanja, da je v varianci CDR-jev zajeta vsa negotovost. Če mislimo, da je tveganje v resnici višje, oziroma hočemo višjo stopnjo varnosti, pa izberemo $\phi > 1$. In obratno, izberemo $\phi < 1$ če smo bolj naklonjeni tveganju. Izbira višine parametra ϕ je subjektivna, saj je vsak agent drugače naklonjen tveganju, in se odloča glede na svoje znanje in izkušnje. Mogoče bi bila glede na visoke vrednosti srednje kvadratne napake bolj smiselna izbira $\phi > 1$, a za nas so pomembna predvsem razmerja med višinami marž po različnih pristopih, zato izberemo $\phi = 1$.

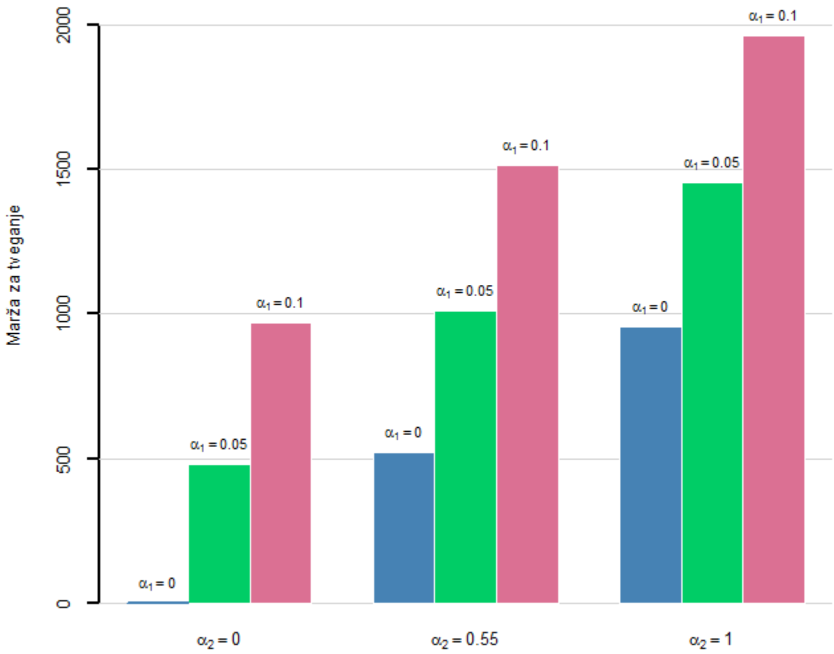
Pristop večobdobne mere tveganja najbolje zajema vso negotovost, a je preveč kompleksen za uporabo, zato zanj iščemo dober, a enostavnejši približek. Rezultati izračunov so prikazani v tabeli 5.6. Skupne marže za združena škodna leta po tretjem in četrtem pristopu analitično ni možno izračunati. Za tretji pristop je rezultat v tabeli približek, dobljen z Monte Carlo simulacijo (100 simulacij). Za četrti pristop pa je izračunana zgornja meja po (3.6.3).

i	$\widehat{R}_i^{(0)}$	Marža za strošek kapitala $\widehat{\mathrm{CoC}}_i^{(0)}$				% marže glede na $\widehat{R}_i^{(0)}$			
		#1	#2	#3	#4	#1	#2	#3	#4
1	$157,23$	$7,12$	$7,12$	$7,12$	$7,12$	$4,5\%$	$4,5\%$	$4,5\%$	$4,5\%$
2	$434,69$	$10,84$	$14,51$	$14,51$	$14,51$	$2,5\%$	$3,3\%$	$3,3\%$	$3,3\%$
3	$1.052,34$	$14,29$	$23,32$	$23,32$	$23,32$	$1,4\%$	$2,2\%$	$2,2\%$	$2,2\%$
4	$1.952,81$	$63,06$	$54,29$	$54,28$	$54,31$	$3,2\%$	$2,8\%$	$2,8\%$	$2,8\%$
5	$1.668,9$	$38,05$	$44,78$	$44,76$	$44,82$	$2,3\%$	$2,7\%$	$2,7\%$	$2,7\%$
6	$3.749,23$	$117,68$	$109,81$	$109,66$	$109,96$	$3,1\%$	$2,9\%$	$2,9\%$	$2,9\%$
7	$6.585,32$	$142,52$	$178,18$	$177,7$	$178,53$	$2,2\%$	$2,7\%$	$2,7\%$	$2,7\%$
8	$9.571,53$	$163,11$	$244,21$	$243,24$	$244,88$	$1,7\%$	$2,6\%$	$2,5\%$	$2,6\%$
9	$12.157,57$	$235,55$	$328,13$	$326,24$	$329,2$	$1,9\%$	$2,7\%$	$2,7\%$	$2,7\%$
Skupaj	$37.329,6$	$792,22$	$1.004,4$	$1.000,8$	$1.006,7$	$2,1\%$	$2,7\%$	$2,7\%$	$2,7\%$
Združevanje škodnih let		$429,94$	$554,64$	$\sim 553,38$	$\leq 578,6$	$1,2\%$	$1,5\%$	$1,5\%$	$1,5\%$
Efekt diverzifikacije		$45,7\%$	$44,75\%$	$44,4\%$	$42,59\%$				

Tabela 5.6: Rezultati izračunov najboljše ocene rezervacij in marže za tveganje za gama-gama model

Marža preko izkrivljanja porazdelitve

Za log-normalni model maržo za tveganje izračunamo kot razliko med tveganju prilagojenimi rezervacijami in najboljšo oceno rezervacij. Izbrati moramo parametra α_1 in α_2 – izberemo ju tako, da bo višina marže primerljiva z maržo po večobdobnem pristopu stroška kapitala. Graf 5.4 prikazuje gibanje višine marže za tveganje glede na različne izbire parametrov.



Slika 5.4: Višina marže za tveganje glede na različne vrednosti parametrov α_1 in α_2.

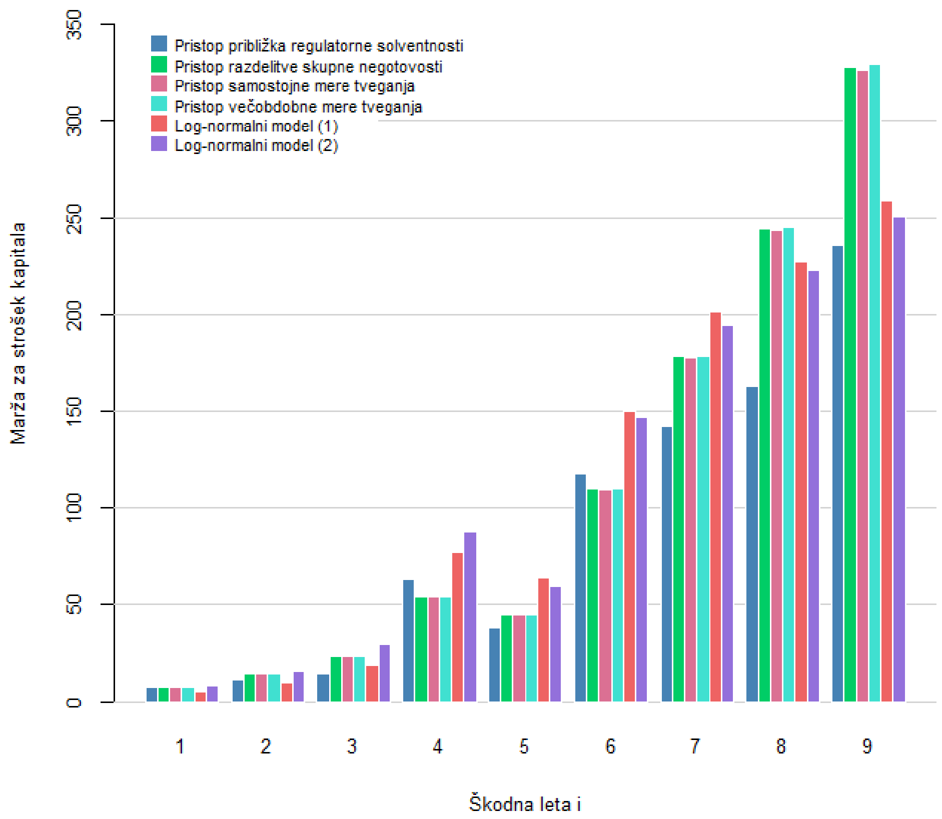
Za model (1) izberemo $\alpha_1 = 0,05$ in $\alpha_2 = 0,55$. Tako dobimo maržo za tveganje, primerljivo z maržo po večobdobnem dinamičnem pristopu, hkrati pa imata oba parametra približno enak vpliv na maržo – če izberemo $\alpha_1 = 0$ in $\alpha_2 = 0,55$ dobimo približno enako maržo, kot če izberemo $\alpha_1 = 0,05$ in $\alpha_2 = 0$. Za model (2) podobno izberemo $\alpha_1 = 0,11$ in $\alpha_2 = 1,1$. Parametra za model (2) morata biti višja, da dobimo primerljivo višino marže. Izbira parametrov je subjektivna, in seveda zelo vpliva na rezultate. Rezultati za oba log-normalna modela so v tabeli 5.7.

Opomba. Računamo nominalne vrednosti.

i	Log-normalni model (1)				Log-normalni model (2)			
	$\widehat{R}_i^{(0)}$	$\widehat{R}_{i,+}^{(0)}$	Marža	%	$\widehat{R}_i^{(0)}$	$\widehat{R}_{i,+}^{(0)}$	Marža	%
1	$161,2$	$166,1$	$4,9$	3%	$159,2$	$167,3$	$8,1$	5%
2	$436,9$	$446,7$	$9,86$	$2,3$%	$436,9$	$452,9$	$16,1$	$3,7$%
3	$1.061,8$	$1.080,4$	$18,58$	$1,8$%	$1.055,7$	1.085	$29,3$	$2,8$%
4	$2.013,3$	$2.090,7$	$77,39$	$3,8$%	$1.955,7$	$2.043,4$	$87,8$	$4,5$%
5	$1.725,9$	$1.789,9$	64	$3,7$%	$1.670,3$	$1.729,4$	$59,1$	$3,5$%
6	$3.877,4$	$4.027,6$	$150,26$	$3,9$%	$3.751,2$	$3.898,2$	$147,0$	$3,9$%
7	$6.737,9$	$6.939,6$	$201,7$	3%	$6.587,5$	$6.782,3$	$194,8$	3%
8	$9.704,7$	$9.932,0$	$227,3$	$2,3$%	$9.573,9$	$9.797,1$	$223,2$	$2,3$%
9	$12.220,2$	$12.478,9$	$258,6$	$2,1$%	12.160	$12.410,2$	$250,3$	$2,1$%
Skupaj	37.939	38.952	1.013	$2,7$%	37.350	38.366	1.016	$2,7$%

Tabela 5.7: Marže za tveganje po motnji v porazdelitvi za log-normalni model.

Grafični prikaz višin marže za tveganje za posamezna škodna leta glede na vse štiri pristope stroška kapitala in za log-normalna modela (1) in (2) prikazan na sliki 5.5.



Slika 5.5: Višina marže za tveganje za posamezna škodna leta

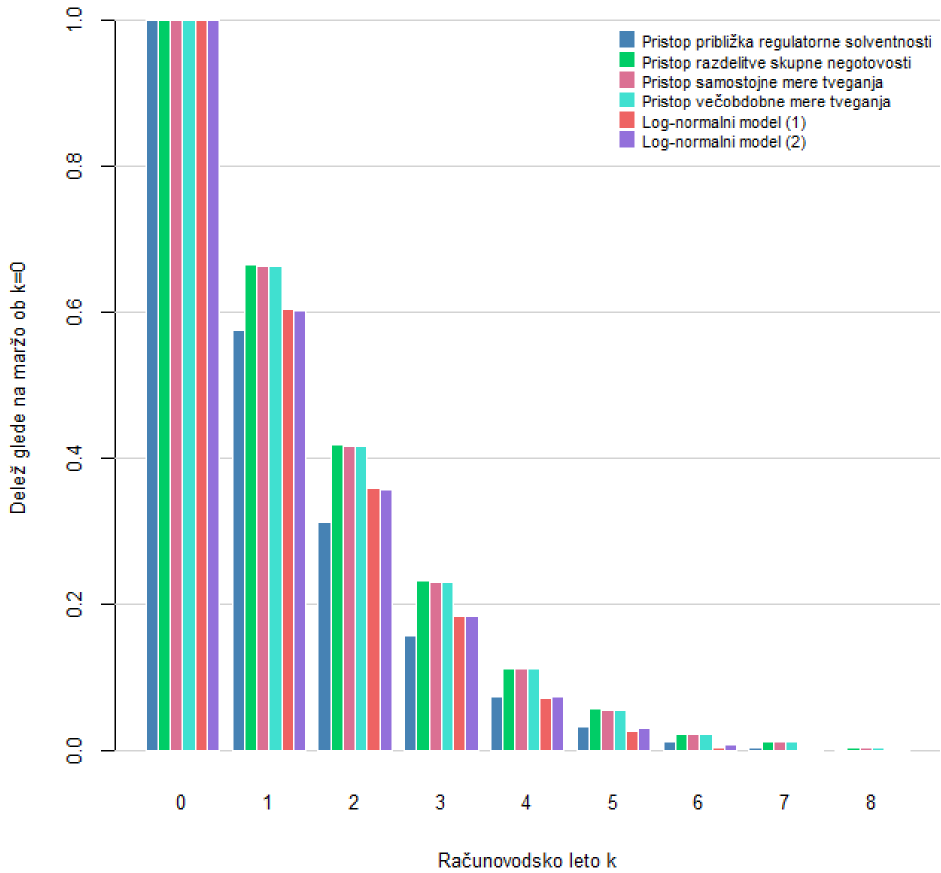
Najprej analizirajmo pristop stroška kapitala. Tako iz numeričnih rezultatov kot iz grafa je očitno, da se rezultati prvega pristopa precej razlikujejo od ostalih treh, rezultati slednjih pa so zelo podobni. V večini primerov pristop regulatorne solventnosti, ki temelji le na negotovosti prvega leta, višino potrebne marže podcenjuje, in nam ne daje dovolj zaščite pred tveganjem. Razlika je najbolj očitna za zadnja tri škodna leta, kjer je tveganje zelo podcenjeno. Marža za tveganje raste z naraščajočimi škodnimi leti (razen za škodno leto $i = 5$ pade v primerjavi z $i = 4$, kar je izjema), kar je tudi pričakovano: več kot imamo za določeno škodno leto še nerešenih zahtevkov, manj negotovosti je zajeto v najboljšo oceno, zato mora biti marža za tveganje višja. Marža raste po vseh štirih pristopih, le da po prvem pristopu raste počasneje. Pristopi stroška kapitala z izjemo prvega dajejo podobne rezultate, a vendar veljajo vse relacije med njimi, kot so pričakovane. Pogoji predpostavke 3.5.9 so izpolnjeni in relacija

$$\widehat{\mathcal{R}_i^{(3)}}^{(0)} \leq \widehat{\mathcal{R}_i^{(2)}}^{(0)} \leq \widehat{\mathcal{R}_i^{(4)}}^{(0)}$$

velja za vsa škodna leta tudi na našem izračunu, čeprav je za nekatera leta razlika le en cent, ali je sploh ni. Tudi za združena škodna leta je četrti pristop najbolj konzervativen, kar je intuitivno pričakovano, saj večobdobni pristop poleg negotovosti v gibanju CDR vključuje tudi negotovost same višine potrebnega kapitala v prihodnjih letih. Tako pristop razdelitve skupne negotovosti, kot pristop pričakovane samostojne mere tveganja sta dober približek za "pravo" mero tveganja po večobdobnem dinamičnem pristopu, a gledano z vidika enostavnosti, je pristop razdelitve skupne negotovosti boljši.

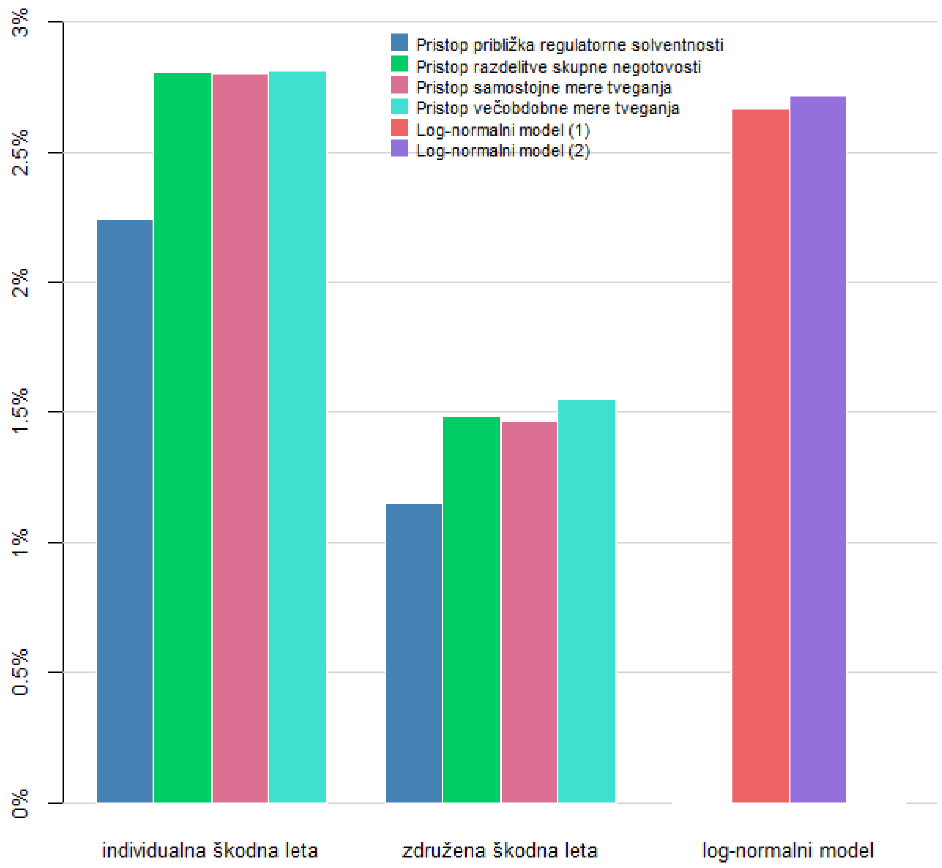
Marža po pristopu modifikacije porazdelitve (log-normalni model (1) in (2)) tudi raste s škodnimi leti, le da je ta rast za škodna leta $7, 8$ in 9 manj intenzivna – model maržo precenjuje za leta $3, 4, 5, 6$ in 7, za leta 8 in 9 pa jo že podcenjuje, v primerjavi z večobdobnim modelom. To pomeni, da bi v večini primerov imeli preveč rezervacij, in bi imeli pozitivni presežek, za zadnji dve leti pa se nebi dovolj zavarovali.

Slika 5.6 prikazuje pričakovane višine marž, ki jih moramo oblikovati ob računovodskih letih $k = 0, \ldots, 8$, gledano relativno glede na skupno maržo ob $k = 0$. Deleži padajo z naraščajočim k, saj je vedno več računovodskih let že realiziranih, in se marža, ki jo pričakovana marža manjša. Tudi tu vidimo, da drugi, tretji in četrti pristop stroška dajejo skoraj enake rezultate, po pristopu nadzorovane solventnosti in obeh log-normalnih pristopih pa pričakovane marže padajo hitreje. Gibanje deležev za oba log-normalna modela je podobno kot pri pristopu nadzorovane solventnosti.



Slika 5.6: Deleži marž po računovodskih letih k glede na maržo v računovodskem letu $k = 0$ (individualna škodna leta)

Slika 5.7 prikazuje skupno višino marže kot delež najboljše ocene rezervacij za log-normalna modela (1) in (2), ter za štiri pristope stroška kapitala, glede na posamezna in združena škodna leta. Efekt diverzifikacije je zelo velik, več kot 40%, kar pomeni, da lahko oblikujemo veliko nižjo maržo, če jo oblikujemo za združena škodna leta. Vprašanje je, če je tolikšen efekt sploh smiselen, oz. ali je sploh dovoljen. Več o diverzifikaciji in smiselnosti višine efekta si lahko preberete v [17, poglavje 2.3.3], kjer so skušali odgovoriti na to vprašanje.



Slika 5.7: Deleži marž kot % najboljše ocene rezervacij za log-normalni model (1) in (2), ter za gama-gama model po štirih pristopih stroška kapitala.

5.3 Zaključek

Na primeru smo preizkusili tri različne modele za izračun najboljše ocene in različne pristope za izračun marže za tveganje. Največji izziv je bil določiti apriorne parametre in parametre variance za gama-gama in log-normalni model, saj lahko za napačno izbiro parametrov hitro dobimo nesmiselne rezultate (npr. višjo maržo za tveganje od same najboljše ocene ali pa celo negativno maržo za tveganje). Ker smo parametre določili empirično, nam tako gama-gama, kot log-normalni model vrneta skoraj enako najboljšo oceno rezervacij kot znani in pogosto uporabljeni Mackov model. Večji izziv je določitev ustrezne marže za tveganje, ki bi najboljšo oceno dopolnila do poštene vrednosti nerešenih škodnih obveznosti. To je še vedno odprto vprašanje in predmet mnogih raziskav.

Mi smo uporabili različne pristope stroška kapitala. Pristop razdelitve skupne negotovosti in pristop samostojne mere tveganja dober približek za matematično gledano "pravi" model večobdobne mere tveganja, pristop nadzorovane solventnosti pa tveganje in s tem tudi potrebni solventnostni kapital podcenjuje, ker ne zajema tveganja vseh računovodskih let. Zaradi preprostosti je boljši pristop razdelitve skupne negotovosti. Pri vseh pristopih stroška kapitala je pomembna tudi ustrezna izbira parametrov c in ϕ, kar vpliva tudi na relacije med višinami marž po posameznih pristopih. V tehničnih specifikacijah [10] je določena stopnja stroška kapitala $c = 6\%$, izbira ϕ pa je subjektivna, in je lahko različna za vsak posamezen trikotnik razvoja.

Obravnavali smo tudi log-normalni model, in čisto drugačen, verjetnostni pristop za izračun marže za tveganje. Tu je pomembna ustrezna izbira parametrov α_1 in α_2. Mi smo parametra izbrali tako, da je skupna marža primerljiva marži po večobdobnem pristopu. Gibanje marže po računovodskih in po škodnih letih pa je bolj primerljivo s pristopom nadzorovane solventnosti – več marže je namenjeno zaščiti v prvih letih, dolgoročnejše tveganje pa je podcenjeno.

Literatura

[1] R. Salzmann, M. V. Wüthrich, *Cost-of-capital margin for a general insurance liability runoff*, Astin Bulletin 40/2, 415-451, 2010.

[2] M. V. Wüthrich, P. Embrechts, A. Tsanakas, *Risk margin for a non-life insurance run-off*, Statistics & Risk Modeling, 28, 299-317, 2011.

[3] M. V. Wüthrich, M. Merz, *Stochastic claims reserving methods in insurance*, Wiley, 2008.

[4] T. Mack, *Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserves estimates*, Astin Bulletin 23/2, 213-225, 1993.

[5] M. Merz, M. V. Wüthrich, *Modelling the claims development result for solvency purposes*, CAS E-Forum, 542-568, 2008.

[6] P. England, A. Czernuszewicz, *The ultimate and one-year views of reserving risk with respect to solvency and risk margins*, General Insurance Convention, EMB, 2009.

[7] M. Daya-Viossat, *Market value margin: practical calculations under the Solvency II cost of capital approach*, SCOR Papers, 2012.

[8] C. Y. Robert, *Market value margin calculations under the cost of capital approach within a Bayesian chain ladder framework*, Insurance: Mathematics and Economics, 53/1, 216-229, 2013.

[9] M. V. Wüthrich, *Runoff of the vlaims reserving uncertainty in non-life insurance: a case study*, Zavarovalniški horizonti, št. 3-4, 5-18, 2010.

[10] *Quantitative impact study QIS5*, QIS5 Technical Specifications, annex to call for advice from CEIOPS on QIS5, Brussels, 2010.

[11] G. G. Meyers, P. Shi, *Loss reserving data pulled from NAIC schedule p*, verzija posodobljena 1.9.2011, [ogled 1.6.2014], dostopno na `http://www.casact.org/research/index.cfm?fa=loss_reserves_data`.

[12] ECB,*Euro area yield curve*, [ogled 11.8.2014], dostopno na https://www.ecb.europa.eu/stats/money/yc/html/index.en.html.

[13] Wikipedia*Minkowski inequality*, verzija 17.5.2014, [ogled 15.7.2014],dostopno na http://en.wikipedia.org/wiki/Minkowski_inequality.

[14] *The R project for statistical computing*, verzija programa 3.1.0 (10.4.2014), dostopen na http://www.r-project.org/.

[15] *Zakon o zavarovalništvu, uradno prečiščeno besedilo (ZZavar-UPB7)*, Uradni list RS, št. 99/2010, dostopno na http://www.uradni-list.si/1/objava.jsp?urlid=201099&stevilka=5105.

[16] Evropski Parlament, *Direktiva 2009/138/EC*, datum dokumenta 25.11.2009, [ogled 15.8.2014], dostopno na http://eur-lex.europa.eu/legal-content/SL/TXT/PDF/?uri=CELEX:32009L0138&from=en.

[17] A. Brown, *Demystifying the risk margin: theory, practice and regulation*, presented to the Staple Inn Actuarial Society, May 2012.

[18] A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, D. B. Rubin, *Bayesian Data Analysis, Second Edition*, Chapman & Hall/CRC, 2004.

[19] W. M. Bolstad, *Introduction to Bayesian Statistics, Second Edition*, Wiley, 2007.