UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Ana Pogačar

Mertonov model kreditnega tveganja

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Bor Plestenjak

Ljubljana, 2011

Zahvala

Iskreno se zahvaljujem svojemu mentorju prof. dr. Boru Plestenjaku, za strokovno svetovanje, potrpežljivost in pomoč pri nastajanju dela diplomskega seminarja. Zahvaljujem se vam za ves čas, ki ste mi ga namenili.

Zahvaljujem se tudi drugim profesorjem in asistentom Fakultete za matematiko in fiziko, ki so bili vedno pripravljeni pomagati in mi s tem olajšali študij finančne matematike.

Posebna zahvala gre tudi družini za vso podporo in finančno pomoč pri študiju. Hvala tudi drugim, ki ste mi stali ob strani. Hvala za vašo še tako pomembno moralno podporo.

Kazalo

Povzetek

Merton je zasnoval model, ki nam pomaga analizirati kreditno tveganost. Model zagotavlja objektivno merilo za sposobnost podjetja in njegove zmožnosti poplačila dolga.

Za odobritev posojila, morajo finančne ustanove najprej odkriti vsa možna tveganja in verjetnost neplačila. To pomaga posojilodajalcu oceniti sposobnost podjetja za poplačilo posojila. Kreditno tveganje je opredeljeno kot kakršenkoli dogodek, ki bi podjetju preprečil vrniti glavnico ali obresti na posojilo.

Varnostni analitiki kot možnost napovedovanja gibanja cen vrednostnih papirjev uporabljajo Mertonov model. V splošnem se bo podjetje, ki je v kakršnihkoli finančnih težavah, srečalo s padcem cen delnic. Če analitik lahko določi kreditno sposobnost podjetja s pomočjo uporabe tega modela, se lahko podjetje zavaruje s prodajo zalog, še preden vrednost pade, ali z nakupom zavarovanja proti posebnim kreditnim dogodkom.

Model ocenjuje kreditno tveganost, ki temelji na cenah opcij podjetja. Opcija daje pravico, ne pa tudi obveznost, za prodajo ali nakup določenega premoženja v prihodnosti. V Mertonovem modelu je vrednost opcije za prodajo sredstev podjetja uporabljena kot približek za kreditno tveganost podjetja.

Mertonov model predpostavlja, da je podjetje prodalo brezkuponske obveznice v namen zbiranja denarja. Brezkuponska obveznica je obveznica, ki imetnikom ne izplačuje fiksnih obrestnih mer vsako leto. Investicija se vrne, ko je obveznica poplačana za polno nominalno vrednost v prihodnosti.

Če podjetje ne more odplačevati dolga na brezkuponske obveznice, govorimo o kreditnem dogodku ali bankrotu. Po Mertonovem modelu se kreditni dogodek zgodi takrat, ko je vrednost sredstev podjetja manjša kot vrednost obveznic v prihodnosti. V empiričnih testih se je Mertonov model izkazal za zanesljivega pri nefinančnih podjetjih, kot so proizvodnja in trgovina na drobno. Model se ni izkazal pri kreditnih tveganjih v bankah, ki so visoko tvegane institucije.

Abstract

Merton designed a model that helps us to analize the credit risk. The model gives us an objective measure for the company's ability to pay back debt.

Financial institutions must first determine a company's risk or probability of default in order to approve loans. This helps the lender to value the company's ability to pay back the loan. A credit default is defined as any credit event which prevents the company from paying back the principal or interest on a loan.

Security analysts use the Merton model to help them analize trends in security prices. A company in financial distress will experience a drop in share price. If an analyst can determine the credit health of a company using the Merton model, they may be able to profit from that knowledge by selling the stock before it goes down or buying insurance against a particular credit event.

The model assesses credit risk based on a company's option prices. An option gives the right, but not the obligation, to sell or purchase a particular asset in the future. In the Merton model, the value of the option to sell the firm's assets can be used as a proxy for the firm's credit risk. Put plainly, the more investors buy insurance against the loss in value of a company's assets, the higher the risk of credit default.

The Merton model assumes that a company has sold zero coupon bonds in order to raise money. A bond that does not pay bondholders a fixed rate of interest every year is called a zero coupon bond. The investor makes a return when the bond is redeemed for the full face value in the future.

A company is in credit event or default, if one can not pay back the debt on the zero coupon bonds. A credit event occurs when the value of a company's assets are worth less than the value of the bonds in the future. In empirical testing, the Merton model has been shown to be accurate for non-financial firms such as manufacturing or retail organizations. It has not, however, proven to be a good measure for credit risk in banks as they are highly leveraged entities.

Math. Subj. Class. (2011):91G40
Ključne besede: Mertonov model, kreditna tveganost, evropska nakupna opcija
Keywords: Merton model, credit risk, Europian call option

1. Robert C. Merton

Robert Merton je bil rojen v mestu New York. Po zaključenem študiju na Tehnološkem inštitutu Massachusettsa se je leta 1970 pridružil fakulteti MIT Sloan School of Management, kjer je poučeval do leta 1988 in kasneje Univerzi Harvard, kjer je poučeval do leta 1998. Dela tudi na strateškem svetovalnem odboru QFINANCE.

Merton je napisal veliko del, za katere je Samuelson rekel da so "Newtonova dela modernih financ". Leta 1969 je objavil Mertonov model portfelja, s katerim je omogočil ljudem, da se odločijo, koliko prihodkov naj namenijo trenutni porabi in koliko naj namenijo kasnejšim investicijam. Leta 1970 je predstavil Mertonov model, ki sta ga kasneje razširila njegova učenca Robert A. Jarrow in Stuart Turnbull in ga poimenovala v Jarrow-Turnbullov model. Leta 1973 je Merton predstavil nov model ICAPM (Intertemporal Capital Asset Pricing Model). Objavil je tudi Mertonov model ocenjevanja evropske opcije leta 1973. Leta 1998 sta Scholes in Merton prejela prestižno Nobelovo nagrado za novo metodo določanja vrednosti izvedenih finančnih instrumentov.

Merton je tudi večkrat svetoval podjetjem iz industrije. Ta prizadevaja pa so se včasih končala slabo. Skupaj z Myronom Scholesom je bil Merton eden od direktorjev LCTM (Long-Term Capital Management) hedge sklada, ki je v letu 1998 v štirih mesecih zgubil 4,6 milijard ameriških dolarjev. Federal Reserve je bil takrat tako zelo zaskrbljen nad potencialnim vplivom neuspeha LCTM na finančni sistem, da je poskrbel za skupino 19 bank in drugih podjetij, ki so poskrbela za učinkovito likvidnost za preživetje bančnega sistema. Čeprav so bili ti investitorji na koncu izplačani, je ta dogodek poslabšal ugled idej Mertona in Scholesa.

Leta 2007 se je zaposlil kot vodja urada za znanost na Trinsum Group, podjetju za finančno svetovanje. Leta 2010 se je vrnil na Tehnološki inštitut Massachusettsa kot profesor na MIT Sloan School of Management.

2. Uvod

Vemo, da je vrednost izdaje dolgov odvisna predvsem od treh dejavnikov:

(1) Zahtevane stopnje donosnosti.
(2) Različnih določb in omejitev, ki so vsebovane v pogodbi (datum zapadlosti, kuponska obrestna mera, delovna doba v primeru neplačila ...).
(3) Verjetnosti neplačila (ko se ne izpolnijo nekatere ali pa vse zahteve pisnega dogovora).

Namen tega diplomskega dela je predstaviti teorijo, ki bi jo lahko poimenovali teorija strukture tveganja obrestnih mer. Uporaba izraza "tveganje"je omejena na morebitne dobičke ali izgube lastnikov obveznic kot rezultat sprememb verjetnosti neplačila. Torej govorimo o tretjem dejavniku. Model primerja vrednost podjetja z vrednostjo opcije. Izvršna cena opcije je torej enaka vrednosti dolga in dospelost opcije je enaka ročnosti dolga. Ko tržna vrednost podjetja pade pod ceno izvršitve, je vrednost podjetja manjša od višine dolga in podjetje ni več sposobno odplačati dolga. Takrat pride do točke neplačila. Če pa ima podjetje dobiček, potem lastnik kapitala, ki ga lahko enačimo z lastnikom opcije na kapital, obdrži vrednost, ki presega višino dolga.

3. Mertonov model

3.1. Predpostavke.

Za oblikovanje Black-Scholesovega cenovnega modela moramo sprejeti nekaj predpostavk:

(1) Nimamo transakcijskih stroškov, davkov ali problemov z nedeljivostjo premoženja.
(2) Obstaja zadostno število vlagateljev, z zadostno količino premoženja, tako da lahko vsak kupuje in prodaja kolikor sredstev si želi.
(3) Obstaja trg za najemanje in dajanje posojil po isti obrestni meri.
(4) Kratke prodaje vseh sredstev s polno uporabo iztržka niso dovoljene.
(5) Trgovanje sredstev poteka neprekinjeno v času.
(6) Velja Modigliani-Millerjev izrek:

Izrek 1 (**Osnovni Modigliani-Millerjev izrek**[4]). *Pri odsotnosti davkov, stroškov stečaja in asimetričnosti informacij, vrednost podjetja na trgu ni odvisna od tega, kako se to podjetje financira. Ni pomembno ali se podjetje financira z izdajo vrednostnih papirjev ali prodajo dolga.*

(7) Cena netvegane diskontirane obveznice, ki obljublja plačilo ene enote denarja v času t, je $P(t) = e^{-rt}$, kjer je r netvegana obrestna mera skozi ves čas.
(8) Dinamiko vrednosti podjetja skozi čas lahko zapišemo z diferencialno enačbo

$$dV = (\alpha V - C)dt + \sigma V dZ,$$

v kateri nastopajo naslednje spremenljivke:

- α je trenutna pričakovana stopnja donosa podjetja na enoto časa;
- C:
  - če je pozitiven, so to skupna izplačila, ki jih podjetje izplača na enoto časa svojim delničarjem ali imetnikom obveznosti,
  - če je negativen, je to neto vrednost, ki jo novo podjetje prejme iz novega financiranja;
- σ^2 je trenutna varianca donosnosti podjetja na časovno enoto;
- dZ je standardni Gauss-Wienerjev proces.

Definicija 2 (**Standardni Gauss-Wienerjev proces**[5]). *Standardni Gauss-Wienerjev proces (Brownovo gibanje) na intervalu $[0, T]$ opisuje slučajna spremenljivka $W(t)$, ki je odvisna od $t \in [0, T]$. Za to slučajno spremenljivko velja naslednje.*

- $W(0) = 0$.
- *Za poljubna s in t, taka, da velja $0 \leq s < t \leq T$, velja, da je $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}N(0, 1)$.*
- *Za s,t,u in v, za katere velja $0 \leq s < t < u < v \leq T$, sta slučajni spremenljivki $W(t) - W(s)$ in $W(v) - W(u)$ neodvisni.*

3.2. **Oblikovanje cen podjetniških dolgov.**

Vpeljimo še novo spremenljivko Y, ki predstavlja vrednost vrednostnega papirja in jo lahko zapišemo kot funkcijo $Y = F(V, t)$. Njeno gibanje lahko zapišemo kot

$$dY = (\alpha_Y Y - C_Y)dt + \sigma_Y Y dZ_Y, \tag{3.1}$$

kjer nastopajo naslednje spremenljivke:

- α_Y je trenutna pričakovana stopnja donosa na enoto časa za vrednostni papir,
- C_Y je plačilo na enoto časa vrednostnega papirja,
- σ_Y^2 je trenutna varianca donosa na časovno enoto,
- dZ_Y je standarni Gauss-Wienerjev proces.

Glede na to, da poznamo dY, lahko našo funkcijo $Y = F(V, t)$ zapišemo v novi obliki s pomočjo Itõve leme.

Še prej pa si poglejmo nekatere posledice Gauss-Wienerjevega procesa. Slučajna spremenljivka W opisuje Gauss-Wienerjev proces. Ker vemo, da za poljubna s in t, taka, da velja $0 \leq s < t \leq T$, velja, da je $W(t) - W(s) \sim \sqrt{t-s}N(0, 1)$, potem velja, da je $W(t) \sim \sqrt{t}N(0, 1)$. Torej velja:

$$E(W(t)) = 0$$

in

$$Var(W(t)) = t.$$

Lema 3 (**Itõva lema**). *Naj bo $X(t)$ Itõv proces, ki zadošča stohastični diferencialni enačbi $dX = a(X, t)dt + b(X, t)dW$. Potem lahko zvezni, dvakrat odvedljivi funkciji $F(X, t)$ zapišemo stohastično diferencialno enačbo*

$$dF(X, t) = \left(a\frac{\partial F}{\partial X} + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}\right)dt + b\frac{\partial F}{\partial X}dW.$$

Dokaz. [3] Dokaz bomo izpeljali s pomočjo razvoja v Taylorjevo vrsto do drugega odvoda, višje odvode pa zanemarimo. Torej diferencial funkcije $F(X, t)$ zapišemo takole:

$$dF(X, t) = \frac{\partial F}{\partial X}dX + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}dX^2 + ...$$

Sedaj lahko uporabimo definicijo dX in vstavimo v zgornjo enačbo:

$$dF(X, t) = \frac{\partial F}{\partial X}(adt + bdW) + \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial X^2}(a^2dt^2 + 2abdtdW + b^2dW^2) + ...$$

Da se dokazati, da ko gre dt proti 0, dW^2 lahko gledamo kot nestohastičen proces in je v limiti enak svojemu upanju: $dW^2 = E(dW^2)$. Vemo da velja, da je $E(dW^2) = dt$, torej je v limiti $dW^2 = dt$. V tej isti limiti velja tudi, da gre dt^2 proti 0 in prav tako tudi $dtdW$. To upoštevamo, izpostavimo dt ter dW in dobimo naslednjo enačbo:

$$df(x, t) = (a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2})dt + b\frac{\partial f}{\partial x}dW.$$

□

Torej bomo diferencial naše funkcije $Y = F(V, t)$ s pomočjo Itove leme zapisali takole:

$$dY = \left(\frac{1}{2}\sigma^2V^2F_{VV} + (\alpha V - C)F_V + F_t\right)dt + \sigma V F_V dz. \tag{3.2}$$

Sedaj lahko primerjamo enačbi (3.1) in (3.2) za dY in dobimo naslednje tri enačbe. Te povezujejo spremenljivke, ki nastopajo v enačbi za dinamiko vrednosti podjetja, s tistimi, ki nastopajo v enačbi za dinamiko vrednosti vrednostnega papirja.

$$\alpha_Y Y = \alpha_Y F = \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (\alpha V - C)F_V + F_t + C_Y, \tag{3.3}$$

$$\sigma_Y Y = \sigma_Y F = \sigma V F_V, \tag{3.4}$$

$$dz_y = dz. \tag{3.5}$$

3.3. **Oblikovanje portfelja.**

Zamislimo si nek portfelj. Njegovo vrednost bomo označili s spremenljivko W. Definirajmo naslednje oznake:

- W_1: vrednost portfelja, investiranega v podjetje,
- W_2: vrednost portfelja, investiranega v vrednostne papirje,
- $W_3 = -(W_1 + W_2)$: vrednost, ki je investirana v netvegan dolg.

Z oznako dx označimo trenutni donos portfelja. Njegov donos bo enak vsoti produkta pričakovane stopnje donosnosti podjetja z vrednostjo portfelja investiranega v podjetje ter pričakovane stopnje donosnosti vrednostnega papirja z vrednostjo portfelja investiranega v vrednostni papir. Ali drugače z enačbami:

$$dx = W_1\alpha + W_2\alpha_Y.$$

Spremenljivki α ter α_Y izpostavimo iz enačb za dV in dY. Upoštevamo še predpis za W_3 in dobimo:

$$\begin{aligned} dx &= W_1\frac{dV + Cdt}{V} + W_2\frac{dY + C_Y dt}{Y} + W_3 r dt \\ &= (W_1(\alpha - r) + W_2(\alpha_Y - r))dt + W_1\sigma dz + W_2\sigma_y dz_Y. \end{aligned}$$

Od tod, če upoštevamo enačbo (3.5), dobimo:

$$dx = (W_1(\alpha - r) + W_2(\alpha_Y - r))dt + (W_1\sigma + W_2\sigma_y)dz. \tag{3.6}$$

Naj bo $W_Y^* = W_Y$ portfelj izbran tako, da ne bomo dopuščali arbitražnih priložnosti ter da bo naš portfelj nestohastičen. To, da ne dopuščamo arbitražnih priložnosti, dosežemo tako, da bo koeficient pri dt v enačbi (3.6) enak nič. Torej bo sprememba vrednosti v času enaka nič. To, da je naš portfelj nestohastičen, pa dosežemo takrat, ko koeficient pri dz iz te iste enačbe enačimo z nič.

$$W_1^*\sigma + W_2^*\sigma_Y = 0, \tag{3.7}$$

$$W_1^*(\alpha - r) + W_2^*(\alpha_Y - r) = 0. \tag{3.8}$$

Iz teh dveh enačb z upoštevanjem, da je $W_j^* \neq 0$ za vsak j, dobimo:

$$\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{\alpha_Y - r}{\sigma}. \tag{3.9}$$

Pri upoštevanju (3.3) in (3.4) (vstavimo α_Y in σ_Y), dobimo:

$$\frac{\alpha - r}{\sigma} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (\alpha V - C)F_V + F_t + C_Y - rF\right)}{\sigma V F_V}. \tag{3.10}$$

To enačbo pa lahko spravimo še v lepšo obliko:

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + (rV - C)F_V - rF + F_t + C_Y. \tag{3.11}$$

Dobljena enačba je parabolična parcialna enačba za F, katera mora biti zadoščena za katerikoli vrednostni papir, katerega vrednost znamo zapisati kot funkcijo vrednosti podjetja in časa. Seveda ta zapis enačbe zahteva robne pogoje in začetno vrednost. Ravno ti pogoji pa razlikujejo eno vrednost vrednostnega papirja od druge. Pomembno je zapisati, katere spremenljivke in parametri se pojavijo v naši zadnji enačbi. F ni odvisna od pričakovane stopnje donosa podjetja α, niti ne od naklonjenosti k tveganju, niti od karakteristik drugih premoženj, ki so investitorjem na voljo. Torej se bosta dva investitorja s precej različnima funkcijama koristnosti in drugačnimi pričakovanji za prihodnost podjetja lahko dogovorila za isto vrednost vrednostnega papirja F.

3.4. **O cenah diskontiranih obveznic.**

Kot posebno uporabo formulacije iz prejšnjega razdelka preučimo najpreprostejši primer podjetniških dolgov. Recimo, da imajo dohodki od pravnih oseb dva razreda terjatev:

- enoten, homogen razred dolga,
- preostalo terjatev (lastniški kapital).

Predvidevamo tudi, da pogodba za izdajo obveznic vsebuje naslednje odločbe in omejitve:

- Podjetje obljubi plačilo skupnega zneska B lastnikom obveznic na dan T.
- V primeru, ko plačilo ni izpolnjeno, lastniki obveznic takoj prevzamejo družbo in delničarji ne prejmejo nič.
- Podjetje ne more dati nobenih novih višjih ali enakovrednih terjatev od podjetja, niti ne more plačati denarnih dividend ali pa odkupiti delnic pred zapadlostjo dolga.

Če je F vrednost dolga v problemu, lahko enačbo (3.11) prepišemo še enkrat. Tokrat upoštevamo, da je $C_Y = 0$ in $C = 0$. Definiramo tudi čas do zapadlosti τ. Če je T čas zapadlosti in $t \in [0, T]$, bo τ definiran kot $\tau = T - t$. Velja tudi, da je $\tau \in [0, T]$. Opazimo, da mora potem veljati $F_t = -F_\tau$. Tudi to upoštevamo v enačbi (3.11) ter tako dobimo enačbo:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{VV} + rVF_V - rF - F_\tau = 0. \tag{3.12}$$

Da rešimo enačbo, moramo določiti dva robna pogoja in začetno stanje. $\tau = T - t$ je čas do zapadlosti, tako da velja $F_t = -F_\tau$. Označimo V kot vrednost podjetja, $F(V, \tau)$ vrednost dolga ter $f(V, \tau)$ vrednost lastniškega kapitala. Po predpostavkah velja, da je $V = F(V, \tau) + f(V, \tau)$. Vrednost dolga, ter vrednost lastniškega kapitala ne mora biti negativna. V primeru, ko je vrednost podjetja enaka nič sta tudi vrednost lastniškega kapitala in vrednost dolga enaka nič:

$$F(0, \tau) = f(0, \tau) = 0. \tag{3.13}$$

Zaradi predpostavk velja tudi, da je $F(V, \tau) \leq V$, oziroma:

$$\frac{F(V, \tau)}{V} \leq 1. \tag{3.14}$$

Na dan zapadlosti T, torej ko bo $\tau = 0$, mora podjetje bodisi plačati dolžnikom obljubljeno izplačilo B ali pa bo trenutna vrednost lastniškega kapitala brez vrednosti. Jasno je, da če v času T, torej na dan zapadlosti, velja $V(T) > B$, mora podjetje izplačati lastnikom obveznic. Vrednost lastniškega kapitala bo potem $V(T) - B > 0$, sicer bi bila vrednost lastniškega kapitala enaka nič. Če pa velja, da je $V(T) \leq B$, potem podjetje ne bo plačalo lastnikom obveznic. Sicer bi imetniki lastniškega kapitala morali plačati dodatno vsoto in vrednost lastniškega kapitala bi bila $V(T) - B < 0$. Torej je začetni pogoj za dolg, ko je $\tau = 0$, enak

$$F(V, 0) = \min(V, B). \tag{3.15}$$

Za določitev vrednosti lastniškega kapitala $f(V, \tau)$, lahko zapišemo enačbo $f(V, \tau) = V - F(V, \tau)$ in nadomestimo F v naši enačbi in pogojih. Dobimo naslednjo enačbo:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 f_{VV} + rVf_V - rf - f_\tau = 0. \tag{3.16}$$

Prepišemo tudi enačbo (3.15) kot začetni pogoj:

$$f(V,0) = \max(0, V - B). \tag{3.17}$$

Vrednost lahko izračunamo s pomočjo spodaj definirane Black-Scholesove formule.

Definicija 4 (**Black-Scholesova formula**[6])**.** *Vrednosti opcije $f(V,t)$ na dan t, ki zadošča stohastični diferencialni enačbi:*

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial V}dV + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2}dt,$$

lahko zapišemo s parcialno diferencialno enačbo:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rV\frac{\partial f}{\partial V} + \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 \frac{\partial^2 f}{\partial V^2} - rf = 0.$$

Če imamo opravka z evropskimi nakupnimi opcijami, potem upoštevamo pogoj $f(V,t) = \max(V - B, 0)$, in je vrednost evropske nakupne opcije enaka:

$$C = V\Phi(x_1) - Be^{-r\tau}\Phi(x_2),$$

kjer je:

- *C cena nakupne opcije,*
- *V vrednost podjetja,*
- *B obljubljeno izplačilo,*
- *r netvegana obrestna mera,*
- *τ trenutni čas do dospetja,*
- *$\Phi()$ normalna porazdelitev,*
- $x_1 = \Big(ln(V/B) + (r + \sigma^2/2)T\Big)/\sigma\tau^{1/2}$,
- $x_2 = d_1 - \sigma\tau^{1/2}$.

Evropska nakupna opcija se izvrši na dan dospetja, za razliko od ameriške, ki se lahko izvrši na katerikoli dan do dospetja.

Uporabimo Black-Scholesovo formulo in dobimo:

$$f(V,\tau) = V\Phi(x_1) - Be^{-r\tau}\Phi(x_2), \tag{3.18}$$

kjer je

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz,$$

$$x_1 = \frac{\log\frac{V}{B} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

in

$$x_2 = x_1 - \sigma\sqrt{\tau}.$$

3.5. **Zapis vrednosti dolga.**

Iz enačbe (3.18) in $F = V - f$ lahko zapišemo še vrednost dolga

$$F(V,\tau) = Be^{-r\tau}\left(\phi\Big(h_2(d,\sigma^2\tau)\Big) + \frac{1}{d}\phi\Big(h_1(d,\sigma^2\tau)\Big)\right), \tag{3.19}$$

kjer je

$$d = Be^{-r\tau}/V,$$
$$h_1(d,\sigma^2\tau) = -\frac{\frac{1}{2}\sigma^2\tau - \log(d)}{\sigma\sqrt{\tau}},$$
$$h_2(d,\sigma^2\tau) = -\frac{\frac{1}{2}\sigma^2\tau + \log(d)}{\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Ko govorimo o cenah obveznic, pogosto govorimo o donosu ne pa o cenah. Zato lahko (3.19) ponovno zapišemo takole:

$$R(\tau) - r = \frac{-1}{\tau}\log\left(\Phi\Big(h_2(d,\sigma^2\tau)\Big) + \frac{1}{d}\Phi\Big(h_1(d,\sigma^2\tau)\Big)\right), \tag{3.20}$$

kjer je:

$$e^{\left(-R(\tau)\tau\right)} = F(V,\tau)/B.$$

V enačbi nastopata:

- $R(\tau)$ donos do zapadlosti,
- $R(\tau) - r$ premija tveganja.

Torej nam enačba (3.20) definira strukturo tveganja obrestnih mer.
Za dano zapadlost je premija tveganja funkcija samo dveh spremenljivk:

- σ varianca operacij podjetja,
- d koeficient današnje vrednosti obljubljenega plačila in trenutne vrednosti podjetja.

3.6. **Primerjalne statistične analize stukture tveganja.**

Pregled enačbe (3.19) nam pokaže, da lahko vrednost dolga zapišemo v polni odvisnosti, $F(V, \tau, B, \sigma^2, r)$. Lahko pokažemo, da je F homogena funkcija prve stopnje, konkavna funkcija po spremenljivkah V in B:

$$\begin{aligned} F_V &= 1 - f_V \geq 0, \\ F_B &= -f_B > 0, \\ F_\tau &= -f_\tau < 0, \\ F_{\sigma^2} &= -f_{\sigma^2} < 0, \\ F_r &= -f_r < 0. \end{aligned}$$

V zgornjih enačbah indeksi označujejo parcialne odvode. Rezultati v enačbah (3.21) so rezultati za diskontirane obveznice. Vrednost dolga je naraščajoča funkcija trenutne tržne vrednosti podjetja in obljubljenega plačila ob zapadlosti, ter padajoča funkcija časa do zapadlosti, poslovnega tveganja podjetja in netvegane obrestne mere.

Ker nas zanima struktura tveganja obrestnih mer, si bomo bolje ogledali razmerje cen $P = F(V, \tau)/Be^{-r\tau}$ namesto absolutne ravni cen F. P je današnja vrednost obljubljena v času τ (vrednost, ki bo dostavljena na ta dan z gotovostjo), torej $P \leq 1$. Iz enačbe (3.19) dobimo

$$P(d, T) = \Phi\Big(h_2(d, T)\Big) + \frac{1}{d}\Phi\Big(h_1(d, T)\Big), \tag{3.21}$$

kjer je $T = \sigma^2\tau$. Za razliko od F je P celotno odvisen od d in T, ki je merilo za volatilnost vrednosti podjetja skozi življensko dobo obveznice. P je padajoča funkcija obeh spremenljivk d in T. Za parcialne odvode velja:

$$P_d = -\Phi(h_1)/d^2 < 0 \tag{3.22}$$

in

$$P_T = -\Phi'(h_1)/(2d\sqrt{T}) < 0, \tag{3.23}$$

kjer je $\Phi'(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$ gostota standardne normalne porazdelitve.

Sedaj definiramo novo spremenljivko, ki je pomembna pri analiziranju strukture tveganja; $g = \sigma_Y/\sigma$, kjer je:

- σ_Y: trenutni standardni odklon na obveznico,
- σ: trenutni standardni odklon na podjetje.

Ker sta ti dve spremenljivki trenutno popolno korelirani, je g merilo relativne tveganosti obveznice v smislu tveganosti podjetja v nekem trenutku. S pomočjo formul (3.4) in (3.19) dobimo naslednje:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_Y}{\sigma} &= VF_V/F \\ &= \Phi\Big(h_1(d, T)\Big)/\Big(P(d, T)d\Big) \\ &= g(d, T). \end{aligned}$$

V poglavju Modigliani-Millerjeve teorije stečaja bomo g podrobneje obravnavali, v tem poglavju pa predpostavimo le to, da je g funkcija dveh spremenljivk d in T.

Iz pogoja o tem, da ne dopuščamo arbitraže, dobimo:

$$\frac{\alpha_Y - r}{\alpha - r} = g(d, T). \tag{3.24}$$

V enačbi nastopata:

- $(\alpha_Y - r)$ pričakovani presežen donos na dolg,
- $(\alpha - r)$ pričakovani presežen donos na podjetje.

Ponovno lahko zapišemo enačbi (3.22) in (3.23) v obliki elastičnosti takole:

$$sP_d/P = -g(d, T) \tag{3.25}$$

in

$$TP_T/P = -g(d, T)\sqrt{T}\Phi'(h_1)/\Big(2\Phi(h_1)\Big). \tag{3.26}$$

Kot smo že povedali v prejšnem poglavju, uporabimo kot merilo tvegane premije na dolg raje donos do dospetja. Če definiramo $\big(R(\tau) - r\big) \equiv H(d, \tau, \sigma^2)$, potem iz (3.21) dobimo naslednje enačbe:

$$H_d = \frac{1}{\tau d} g(d, T) > 0, \tag{3.27}$$

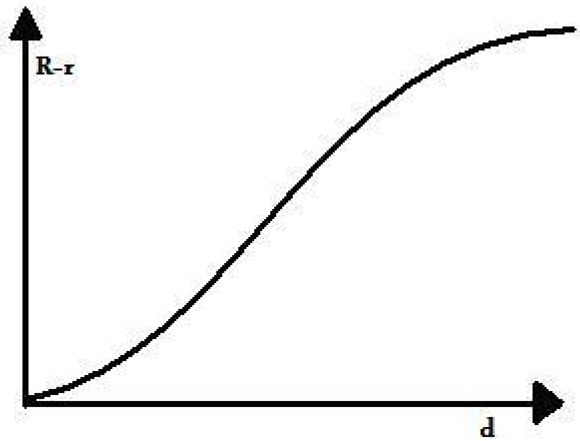
$$H_{\sigma^2} = \frac{1}{2\sqrt{T}} g(d, T) \frac{\Phi'(h_1)}{\Phi(h_1)} > 0, \tag{3.28}$$

$$H_\tau = \Big(\log(P) + \frac{\sqrt{T}}{2} g(d, T) \frac{\Phi'(h_1)}{\Phi(h_1)}\Big)/\tau^2 \neq 0. \tag{3.29}$$

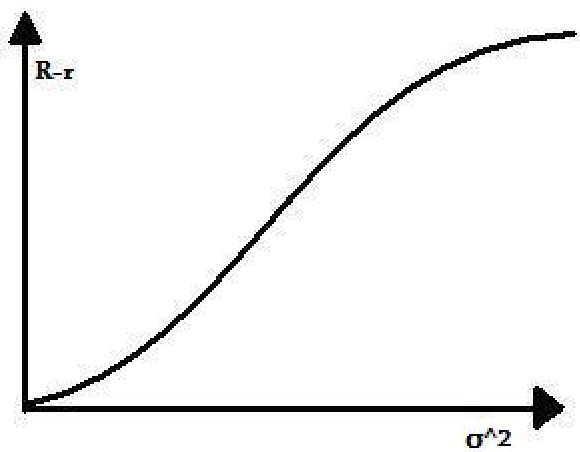
Vrednosti R-r

Čas do zapadlosti = 2			Čas do zapadlosti = 5		
σ^2	d	R-r(%)	σ^2	d	R-r(%)
0,03	0,2	0,00	0,03	0,2	0,01
0,03	0,5	0,02	0,03	0,5	0,16
0,03	1,0	5,13	0,03	1,0	3,34
0,03	1,5	20,58	0,03	1,5	8,84
0,03	3,0	54,94	0,03	3,0	21,99
0,10	0,2	0,01	0,10	0,2	0,12
0,10	0,5	0,82	0,10	0,5	1,74
0,10	1,0	9,74	0,10	1,0	6,47
0,10	1,5	23,03	0,10	1,5	11,31
0,10	3,0	55,02	0,10	3,0	22,59
0,20	0,2	0,12	0,20	0,2	0,95
0,20	0,5	3,09	0,20	0,5	4,23
0,20	1,0	14,27	0,20	1,0	9,66
0,20	1,5	26,60	0,20	1,5	14,24
0,20	3,0	55,82	0,20	3,0	24,30
Čas do zapadlosti = 10			Čas do zapadlosti = 25		
σ^2	d	R-r(%)	σ^2	d	R-r(%)
0,03	0,2	0,01	0,03	0,2	0,09
0,03	0,5	0,38	0,03	0,5	0,60
0,03	1,0	2,44	0,03	1,0	1,64
0,03	1,5	4,98	0,03	1,5	2,57
0,03	3,0	11,07	0,03	3,0	4,68
0,10	0,2	0,48	0,10	0,2	1,07
0,10	0,5	2,12	0,10	0,5	2,17
0,10	1,0	4,83	0,10	1,0	3,39
0,10	1,5	7,12	0,10	1,5	4,26
0,10	3,0	12,15	0,10	3,0	6,01
0,20	0,2	1,88	0,20	0,2	2,69
0,20	0,5	4,38	0,20	0,5	4,06
0,20	1,0	7,36	0,20	1,0	5,34
0,20	1,5	9,55	0,20	1,5	6,19
0,20	3,0	14,08	0,20	3,0	7,81

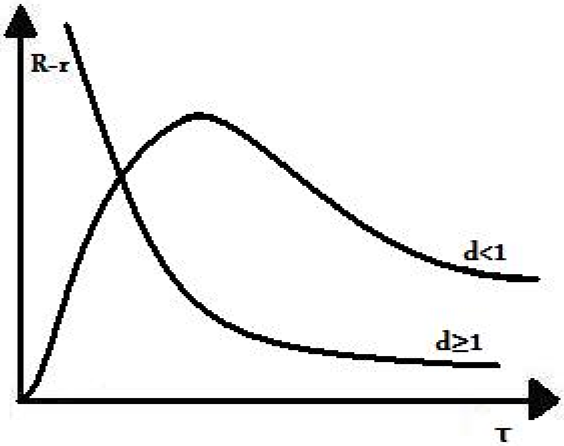
TABELA 1. Vrednost premije tveganja $R-r$ pri danih vrednostih σ^2, d in času zapadlosti.



SLIKA 1. Premija tveganja $R - r$ v odvisnosti od d.



SLIKA 2. Premija tveganja $R - r$ v odvisnosti od σ^2.



SLIKA 3. Premija tveganja $R-r$ v odvisnosti od τ pri različnih vrednostih d.

Kot lahko opazimo v tabeli 1 in slikah 1 in 2, je premija naraščajoča funkcija obeh spremenljivk d in σ^2. Iz enačbe (3.29) vidimo, da je sprememba v premiji, ko spremenimo dospetje, lahko katerega koli predznaka. Iz slike 3 je razvidno, da bo $R-r$ za $d \geq 1$ negativen. Pokažimo še, da je premija padajoča funkcija netvegane obrestne mere:

$$\frac{dH}{dr} = H_d \frac{\partial d}{\partial r} = -g(d,T) < 0. \tag{3.30}$$

Še vedno nas zanima ali je $R-r$ pravo merilo tveganja obveznice. Torej, ali lahko sklepamo, da, če je $R-r$ ene obveznice večji od druge, potem je ta bolj tvegana od druge? Da odgovorimo na to vprašanje, moramo najprej točno definirati izraz "bolj tvegan". Logično bi bilo definirati izraz kot negotovost stopnje donosa v naslednjih menjalnih intervalih. V takem smislu je "bolj tvegan"logična izbira za izraz tvegana standardna deviacija (standardni odklon) za vrnitev obveznic; $\sigma_Y = \sigma g(d,T) = G(d,\sigma,\tau)$. Moramo poudariti, da standardna deviacija ni zadostna za primerjavo tveganja dolga različnih podjetij v smislu portfelja, ker so korelacije dveh podjetij, z različnimi premoženji v ekonomiji različne. Ker pa lahko izračunamo $R-r$ za vsako obveznico posebej, brez podatkov o korelacijah, ne moremo izraziti take razlike razen posredno preko tržne vrednosti podjetja. $R-r$ se mora gibati v skladu z G. Iz definicije spremenljivke G in (3.24) dobimo naslednje:

$$G_d = \frac{\sigma g^2}{\sqrt{T}} \frac{\Phi(h_2)}{\Phi(h_1)} \Big(\frac{\Phi'(h_2)}{\Phi(h_2)} + \frac{\Phi'(h_1)}{\Phi(h_1)} + h_1 + h_2 \Big), \tag{3.31}$$
$$> 0$$

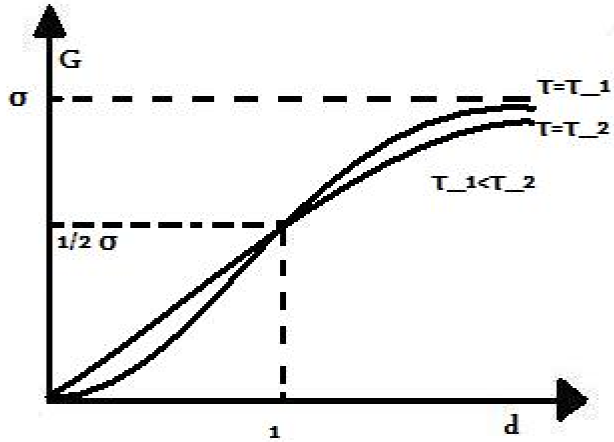
$$G_\sigma = g \left(\Phi(h_1) - \Phi'(h_1) \Big(\frac{1}{2}(1-2g) + \frac{\log d}{T} \Big) \right) / \Phi(h_1), \tag{3.32}$$
$$> 0$$

$$G_\tau = \frac{-\sigma^2 G}{\sqrt{T}} \frac{\Phi'(h_1)}{\Phi(h_1)} \Big(\frac{1}{2}(1-2g) + \frac{\log d}{T} \Big). \tag{3.33}$$

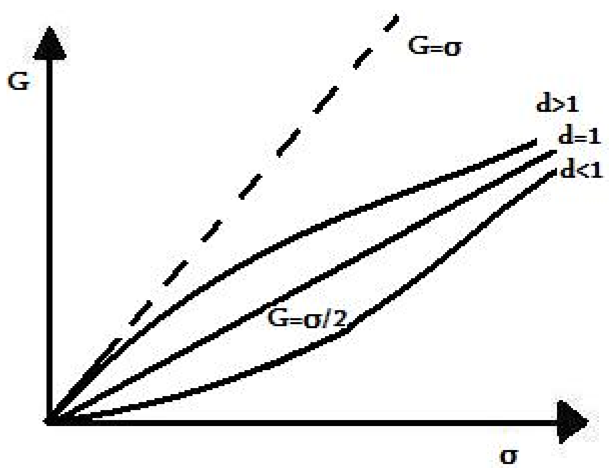
Vrednosti R-r

Čas do zapadlosti = 2				Čas do zapadlosti = 5			
σ^2	d	g	G	σ^2	d	g	G
0,03	0,2	0,000	0,000	0,03	0,2	0,000	0,000
0,03	0,5	0,003	0,001	0,03	0,5	0,048	0,008
0,03	1,0	0,500	0,087	0,03	1,0	0,500	0,087
0,03	1,5	0,943	0,163	0,03	1,5	0,833	0,144
0,03	3,0	1,000	0,173	0,03	3,0	0,996	0,173
0,10	0,2	0,000	0,000	0,10	0,2	0,021	0,007
0,10	0,5	0,077	0,024	0,10	0,5	0,199	0,063
0,10	1,0	0,500	0,158	0,10	1,0	0,500	0,158
0,10	1,5	0,795	0,251	0,10	1,5	0,689	0,218
0,10	3,0	0,989	0,313	0,10	3,0	0,913	0,289
0,20	0,2	0,011	0,005	0,20	0,2	0,092	0,041
0,20	0,5	0,168	0,075	0,20	0,5	0,288	0,129
0,20	1,0	0,500	0,224	0,20	1,0	0,500	0,224
0,20	1,5	0,712	0,318	0,20	1,5	0,628	0,281
0,20	3,0	0,939	0,420	0,20	3,0	0,815	0,364
Čas do zapadlosti = 10				Čas do zapadlosti = 25			
σ^2	d	g	G	σ^2	d	g	G
0,03	0,2	0,003	0,001	0,03	0,2	0,056	0,010
0,03	0,5	0,128	0,022	0,03	0,5	0,253	0,044
0,03	1,0	0,500	0,087	0,03	1,0	0,500	0,087
0,03	1,5	0,745	0,129	0,03	1,5	0,651	0,113
0,03	3,0	0,966	0,167	0,03	3,0	0,857	0,148
0,10	0,2	0,092	0,029	0,10	0,2	0,230	0,073
0,10	0,5	0,288	0,091	0,10	0,5	0,377	0,119
0,10	1,0	0,500	0,158	0,10	1,0	0,500	0,158
0,10	1,5	0,628	0,199	0,10	1,5	0,573	0,181
0,10	3,0	0,815	0,258	0,10	3,0	0,691	0,219
0,20	0,2	0,196	0,088	0,20	0,2	0,324	0,145
0,20	0,5	0,358	0,160	0,20	0,5	0,422	0,189
0,20	1,0	0,500	0,224	0,20	1,0	0,500	0,224
0,20	1,5	0,584	0,261	0,20	1,5	0,545	0,244
0,20	3,0	0,719	0,321	0,20	3,0	0,622	0,278

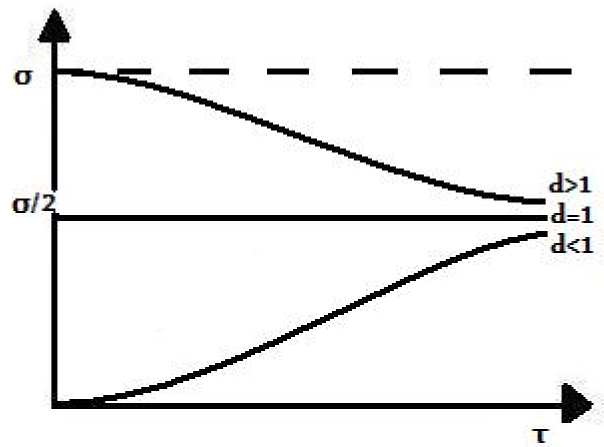
TABELA 2. Vrednost standardne deviacije $G(d, \sigma, \tau)$ pri danih vrednostih σ^2, d, g in času zapadlosti.



SLIKA 4. Standardna deviacija $G(d, \sigma, \tau)$ v odvisnosti od d pri različnih vrednostih τ.



SLIKA 5. Standardna deviacija $G(d, \sigma, \tau)$ v odvisnosti od σ pri različnih vredostih d.



SLIKA 6. Standardna deviacija $G(d, \sigma, \tau)$ v odvisnosti od τ pri različnih vrednostih d.

Tabela 2 in slike 4,5 in 6 prikazujejo standardno deviacijo $G(d, \sigma, \tau)$ za tipične vrednosti d,σ in τ. Če primerjamo enačbe (3.31)-(3.33) z enačbami (3.27)-(3.29) vidimo, da premija in standardna deviacija istočasno naraščata ali padata, ko spreminjamo tveganost podjetja. Ne spreminjata se pa v isto smer, ko spreminjamo dospelost kot prikazujeta sliki 3 in 6.

Zaključek primerjave $R - r$ in G: standardna deviacija je padajoča funkcija tvegane obrestne mere, tako kot v primeru premij v enačbi (3.30).

$$\frac{dG}{dr} = G_d \frac{\partial d}{\partial r} = \tau d G_d < 0. \tag{3.34}$$

3.7. **Modigliani-Millerjeva teorija stečaja.**

Modigliani-Millerjev izrek pravi, da je pri odsotnosti davkov, stroškov stečaja in asimetričnosti informacij, vrednost podjetja neodvisna od tega, kako se podjetje financira. Pa si poglejmo, če to drži.

Recimo, da imamo dve podjetji, identični v smislu odločitev, ki jih sprejemajo glede investicij, različne le v tem, da ima ena problem dolga. Investitor lahko ustvari vrednostni papir s strukturo podobno tveganim obveznicam s tem, da sledi strategiji mešanja kapitala podjetja z netveganim dolgom. Pravilna strategija portfelja je, da držimo $F_V V$ vrednosti v kapitalu in $F - F_V F$ vrednosti v netveganih obveznicah, kjer je V vrednost podjetja ter sta F in F_V rezultata enačbe (3.11). Ker je vrednost tveganega dolga vedno F, se dolg drugega podjetja ne more nikoli prodati za več kot F. Podobno bi lahko ustvarili kapital s strategijo portfelja tako, da držimo $f_V V$ vrednosti v kapitalu in $f - f_V V$ vrednosti zadolževanja na marže, ki bi imela izplačilno strukturo enako kapitalu zadolženega podjetja.

Vrednost kapitala zadolženega podjetja se nikoli ne more prodati za več kot f. Struktura za nezadolženo podjetje pa je $f + F = V$. Torej vrednost zadolženega podjetja ne more biti večja kot vrednost nezadolženega podjetja, in ne manjša.

Sedaj se posvetimo problemu dolga za eno podjetje. V tem kontekstu nas merilo tveganja dolga zanima bolj kot tveganost podjetja. Kot smo že povedali, je pravo merilo za relativno tveganje $\sigma_Y/\sigma = g(d, T)$, ki smo ga definirali v enačbi (3.24). Iz (3.21) in (3.24) dobimo da je:

$$\frac{1}{g} = 1 + \frac{d\Phi(h_2)}{\Phi(h_1)}. \tag{3.35}$$

Vidimo, da velja $0 \leq g \leq 1$. To pomeni, da dolg podjetja nikoli ne more biti bolj tvegan kot podjetje samo. Posledica tega je, da mora biti kapital zadolženega podjetja vedno vsaj toliko tvegan kot podjetje samo. Iz enačb (3.19) in (3.35) vidimo, da velja:

$$\lim_{d\to\infty} F(V, \tau) = V,$$

$$\lim_{d\to\infty} g(d, T) = 1.$$

Ko razmerje današnje vrednosti obljubljenega plačila in trenutne vrednosti podjetja postane veliko, takrat tudi verjetnost bankrota postane velika. Ko gre d proti 0, se verjetnost neplačila približa ničli, $F(V, \tau)$ gre proti $Be^{(-r\tau)}$ in vrednost netvegane obveznice ter g gresta proti 0. Torej v tem primeru karakteristike tveganja dolga postanejo iste kot pri netveganem dolgu. Med tema dvema ekstremoma se bo dolg obnašal kot kombinacija netveganega dolga in kapitala in se bo spremenil v konstanto. Da to opazimo, premislimo, da je v portfelju g odraz portfelja investiranega v kapital in $1 - g$ odraz investiranja v netvegane obveznice. Ko se g poveča, bo portfelj vseboval velik del kapitala dokler v limiti, ko gre g proti 1, ne bo vse samo še kapital. Iz enačb (3.24) in (3.35) dobimo:

$$g_d = \frac{g}{d}\Big(- (1 - g) + \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\Phi'(h_1)}{\Phi(h_1)}\Big) > 0. \tag{3.36}$$

Relativna tveganost dolga je naraščajoča funkcija spremenljivke d in velja:

$$g_T = \frac{-g\Phi'(h_1)}{2\sqrt{T}\Phi(h_1)}\Big(\frac{1}{2}(1 - 2g) + \frac{\log d}{T}\Big). \tag{3.37}$$

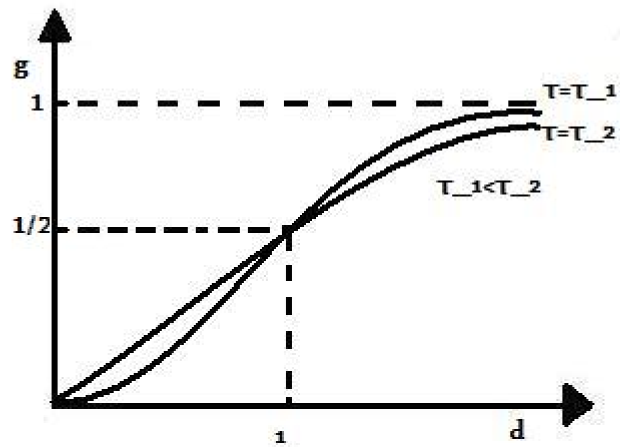
Vemo tudi, da je:

$$g(1,T) = \frac{1}{2}, T > 0 \tag{3.38}$$

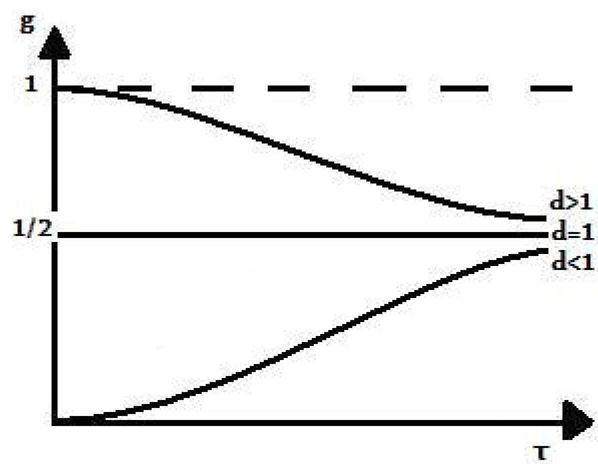
in

$$\lim_{T\to\infty} g(d,T) = \frac{1}{2}, 0 < d < \infty. \tag{3.39}$$

Za $d = 1$, neodvisno od podjetniškega tveganja podjetja ali časa do zapadlosti, je standardna deviacija dolga enaka polovici standardne deviacije vrednosti podjetja. Iz (3.39) sledi, da, ko se povečuje tveganost podjetja ali čas do zapadlosti, gre σ_Y proti $\sigma/2$ za vse vrednosti d.



SLIKA 7. g v odvisnosti od d pri različnih vrednostih τ.



SLIKA 8. g v odvisnosti od τ pri različnih vrednostih d.

Sliki 7 in 8 prikazujeta razmerje med pričakovanim preseženem donosom na dolg in pričakovanim preseženem donosom na podjetje g kot funkcijo d in T.

V nasprotju s tem, kar naj bi nekateri verjeli, relativna tveganost dolga lahko upada, ko tveganost podjetja ali čas do zapadlosti naraščata. Pregled enačbe (3.37) nam pokaže, da je to primer, ko je $d > 1$. Da vidimo zakaj ta rezultat ni nerazumljiv, poglejmo naslednje: za majhen T (torej majhen σ^2 ali τ) je verjetnost, da bo dolg postal kapital skozi neplačilo, velika. To se bo odražalo skozi karakteristike tveganja dolga ko bo g velik. Ko bomo T povečevali bo verjetnost, da se vrednost podjetja poveča dovolj za plačilo dolga, večja. Je pa tudi res, da se poveča verjetnost, da bo vrednost podjetja manjša. Zapomnimo si, da je g mera tega, kolikšen del dolga se obnaša kot dolg in kolikšen del kot kapital. Ko je g velik, je podjetje že bolj opisano s kapitalom kot z netveganim dolgom. (Za $d > 1$ in $g > \frac{1}{2}$ bi nadomestitveni portfelj vseboval več kot polovico kapitala.) Za $d < 1$ bo g manjši od ene polovice, in bo argument šel ravno v nasprotno smer. Ko bo $d = 1$ je g enak eni polovici; nadomestitveni portfelj je natanko polovica kapitala in polovica netveganega dolga.

V zaključku tega dela si poglejmo klasični problem v kooperativnih financah: kako se dolg in kapital spremenita, ko izberemo alternativno razmerje dolga in kapitala pri fiksnih investicijskih odločitvah? Ker so investicijske odločitve fiksne, se Modigliani-Millerjeva teorija obdrži in V,σ^2 ter α ostajajo fiksne. Za preprostost recimo, da je dospelost dolga τ fiksna in da je obljubljeno plačilo v času zapadlosti na obveznico ena denarna enota. Potem je razmerje dolga in kapitala določeno z izbiro števila obveznic. Tako, kot je bila v naših prejšnih analizah F vrednost celotnega dolga in B obljubljeno plačilo za cel problem, potem bo B število obveznic v trenutni analizi in F/B bo cena ene obveznice.

Naj bo X tržno razmerje med dolgom in kapitalom, kar je enako $F/f = F/(V-F)$. Iz enačbe (3.24) sledi, da je potrebna pričakovana stopnja donosnosti na dolg α_Y enaka $r + (\alpha - r)g$. Potem za fiksne investicije velja:

$$\frac{d\alpha_Y}{dX} = (\alpha - r)\frac{dg}{dB}/\frac{dX}{dB}, \tag{3.40}$$

kjer $dX/dB \neq 0$. Iz definicije X in enačbe (3.19) dobimo, da je:

$$\frac{dX}{dB} = \frac{X(1+X)(1-g)}{B} > 0. \tag{3.41}$$

Ker je $dg/dB = g_d d/B$, s pomočjo (3.36),(3.40) in (3.41) dobimo:

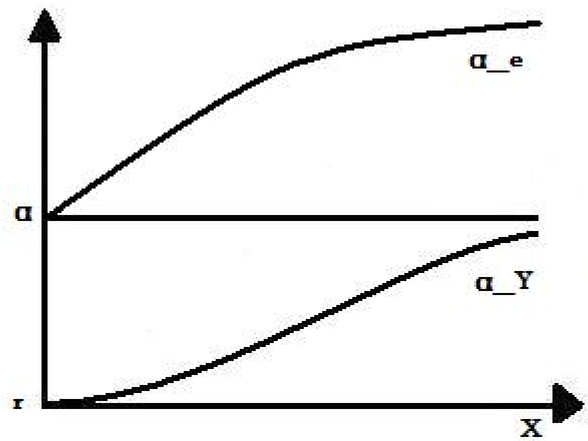
$$\frac{d\alpha_Y}{dX} = \frac{d(\alpha - r)g_d}{X(1+X)(1-g)} = \frac{(\alpha - r)}{X(1+X)}\bigg(-g + \frac{1}{\sqrt{T}}\frac{\Phi'(h_2)}{\Phi(h_2)}\bigg). \tag{3.42}$$

Nadaljna analiza enačbe (3.42) nam pokaže, da se α_Y začne kot konveksna funkcija X, potem gre skozi točko prevoja, postane konkavna in se asimptotsko približa vrednosti α, ko gre X proti neskončno.

Za določitev poti potrebne vrednosti na kapital α_e, ko gre X od nič do neskončno, uporabimo dobro poznano enakost, da je vrednost kapitala enaka povprečju vrednosti dolga in vrednosti podjetja.

$$\alpha_e = \alpha + X(\alpha - \alpha_Y) = \alpha + (1-g)X(\alpha - r). \tag{3.43}$$

Funkcija α_e ima naklon $\alpha - r$ pri $X = 0$ in je konkavna funkcija nad funkcijo $\alpha + (\alpha - r)X$. Slika 9 nam pokaže funkciji α_Y in α_e.



SLIKA 9. Pričakovani donos v odvisnosti od vrednosti X.

3.8. **Verjetnost neplačila.**

Investitorja bo očitno najbolj zanimalo, kakšna je verjetnost neplačila. Kdaj bo tržna vrednost sredstev podjetja v času T manjša ali enaka dolgu. Torej, kakšna je verjetnost, da bo tržna vrednost manjša od dolga. Označimo s PD verjetnost neplačila oziroma angleško probability of default in izračunajmo verjetnost. Najprej pa si še poglejmo enačbo za $V(T)$, ki jo bomo potrebovali za izračun verjetnosti neplačila.

$$V(T) = V(t)e^{(\alpha V - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma\sqrt{\tau}z},$$

kjer vemo, da je $z \sim N(0,1)$. Sedaj pa si poglejmo verjetnost neplačila:

$$PD = P(V < B) = P\biggl(V(t)e^{(\alpha V - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma\sqrt{\tau}z} \leq F\biggr).$$

Pomagamo si z logaritmiranjem

$$PD = P\biggl(\ln(V(t)) + (\alpha V - \frac{\sigma^2}{2})\tau + \sigma\sqrt{\tau}z \leq \ln(F)\biggr).$$

Sedaj uporabimo idejo o tem, da je $z \sim N(0,1)$ in verjetnost preoblikujemo tako, da bo z nastopal sam. Dobimo:

$$\begin{aligned} PD &= P\biggl(z \leq -\frac{ln\frac{V(t)}{B} + (\alpha V - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}\biggr), \\ &= \int_{-\infty}^{-\frac{ln\frac{V(t)}{B} + (\alpha V - \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}} \Phi(x)dx, \\ &= \Phi(-x_2). \end{aligned}$$

3.9. **Oblikovanje cen tveganih kuponskih obveznic.**

Kar smo razvili v prejšnjih poglavjih, je dovolj dobro za rešitev problema kupona. Predvidevajmo enako preprosto kapitalsko strukturo in pogodbena razmerja kot v poglavju 3, razen pogoja, ki zahteva plačila po kuponski obrestni meri na enoto časa $\bar{C}$. Velja, da je $C = C_Y = \bar{C}$. Poglejmo si našo parcialno diferencialno enačbo:

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 FVV + (rV - \bar{C})F_V - rF - F_\tau + \bar{C}. \tag{3.44}$$

Ustrezna enačba za lastniški kapital f je:

$$0 = \frac{1}{2}\sigma^2 V^2 f_{VV} + (rV - \bar{C})f_V - rf - f_\tau. \tag{3.45}$$

Dodamo še robne pogoje (3.13), (3.14) in (3.17). Enačba (3.45) je identična enačbi za vrednost evropske opcije na delnici, ki izplača dividende po konstantni obrestni meri na enoto časa. Rešitev zaprtega tipa v enačbi (3.45) za poljuben τ še ni znana. Poznamo pa rešitev za primer, ko je $\tau = \infty$. Če uporabimo enačbo, da je $F = V - f$, potem lahko zapišemo rešitev tvegane kuponske obveznice takole:

$$F(V, \infty) = \frac{\bar{C}}{r}\left(1 - \frac{(\frac{2\bar{C}}{\sigma^2 V})^{\frac{2r}{\sigma^2}}}{\Gamma(2 + \frac{2r}{\sigma^2})} M\left(\frac{2r}{\sigma^2}, 2 + \frac{2r}{\sigma^2}, \frac{-2\bar{C}}{\sigma^2 V}\right)\right), \tag{3.46}$$

kjer smo uporabili gama funkcijo in hipergeometrijsko funkcijo M.

Definicija 5 (**Hipergeometrijska porazdelitev**). *Hipergeometrijska porazdelitev, ki jo krajše zapišemo kot $M(n, H, N)$ opisuje verjetnost, da v n poskusih dobimo k ugodnih izidov, če je vseh možnih izidov N, od tega jih je H ugodnih. Zaloga vrednosti je $0, 1, 2, \ldots$ njena verjetnostna funkcija pa je:*

$$p_k = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

kjer je $k \leq n \leq \min(M, N - M)$.

Enačbo (3.46) se lahko potem naknadno razširi na različne primere finančnih inštrumentov.

4. Prednosti in slabosti modela

Glavna prednost modela je, da omogoča neposredno uporabo teorije evropske cene opcije po izpeljavi Black-Sholesovega modela iz leta 1973. Ampak, da do tega pridemo, moramo privzeti kar nekaj predpostavk, da prilagodimo dinamiko vrednosti podjetja obrestnih mer in kapitalsko strukturo tako, da zadovoljimo potrebe Black-Scholesove formulacije. Obstaja nek kompromis med realnimi predpostavkami ter lažjim reševanjem. Merton se je torej odločil sprejeti nekaj bolj realnih predpostavk, tako da reševanje modela ni preveč kompleksno ali pa je vsaj numerično rešljivo. Merton model razširi v smer, da velja tudi za kuponske obveznice, plačljive obveznice in stohastične obrestne mere.

Ena od težav Mertonovega modela je omejitev privzetega časa do zapadlosti dolga. Ta izključi možnost zgodnjega neplačila, ne glede na to, kaj se zgodi z vrednostjo družbe pred zapadlostjo dolga. Problem bi bil na primer takrat, ko vrednost dolga pade do minimalane vrednosti še pred zapadlostjo dolga, vendar je še možnost da se do časa zapadlosti vrednost dvigne. V tem primeru verjetno ne bi izbrali Mertonovega pristopa.

Predpostavka o konstantni obrestni meri je druga kritika modela. Seveda bi uvedba spremenljivih obrestnih mer kot tudi vpeljava davkov model močno izboljšala. Spremenljiva obrestna mera je bila uporabljena že pri mnogih matematičnih modelih. Še ena kritika je na predvidljivost neplačila. Ker je vrednost podjetja neko Brownovo gibanje, se lahko zgodi le ob dospelosti dolga. Torej, ko se bo čas zapadlosti dolga bližal, bomo lahko s precejšnjo natančnostjo napovedali, kaj se bo zgodilo. Glede na ta pristop potem neplačilo ne bo nikakršno presenečenje.

5. Uporaba v programu Credit Metrics

Ta model je bil tudi nek glaven osnutek za program Creditmetrics, ki pregleduje podjetja in jih uvršča v posamezne razrede tveganja. Tu se lahko uporablja tudi več informacij samega podjetja; govorimo o starosti podjetja, številu zaposlenih, lokaciji, panogi s katero se ukvarja, potem pa seveda tudi o preteklem poslovanju in njihovi uspešnosti. V tem programu je za osnovo pristopa vrednotenja dolga uporabljen ravno Mertonov model. Program je predstavljen tako, da ima neplačilo definirano kot funkcijo sredstev vrednosti podjetja. Do tega plačila pa pride, ko se zmanjša vrednost sredstev podjetja do te mere, da je njihova vrednost manjša od obveznosti, ki jih mora podjetje izpolnjevati. To je točka default threshold ali točka neplačila. Ker pa Mertonov model upošteva le neplačila dolžnikov, je Creditmetrics dopolnil model z vključitvijo sprememb kreditne kakovosti dolžnikov.

V praksi so si izdelovalci računalniškega programa Creditmetrics zamislili naslednje. Mertonov model so uporabili kot osnovni model za ocene kreditnega tveganja. Problem je bil v tem, da je ta model ločil le med tveganimi in netveganimi naložbami. Tako so si na podoben način izbrali še več delilnih mest poleg točke neplačila in dobili razrede najbolj tveganih, ki so še tik nad točko neplačil: to je razred poimenovan CCC. Najštevilčnejša skupina so B, BB in BBB, ki predstavljajo srednje tvegana podjetja. Najmanj tvegana so podjetja z oznako A.

S tem programom si torej lahko pomagamo uvrstiti podjetja v razrede tveganja. Poleg tega lahko opazujemo podjetja, ki v času zamenjajo razred tveganja. Če so ti skoki med razredi prepogosti lahko sklepamo, da je podjetje nestabilno. Prehode iz razreda v razred spremljamo v matrikah prehodov.

6. Zaključek

Razvili smo model, ki ocenjuje kreditno tveganost podjetja. Najprej smo izpeljali model v najprejprostejši obliki, tako da smo si lahko pomagali z Black-Scholesovo formulo. Ugotavljali smo, od česa je bil naš rezultat odvisen in kaj to pomeni. Odgovorili smo na vprašanje, kakšna je verjetnost neplačila. Nato smo še pogledali primer kaj se zgodi v primeru kuponov. Za konec pa si še ogledali, kakšni so bili odzivi na to Mertonovo delo.

Za konec moramo opozoriti na še eno stvar. Opravljanje s tveganji se deli na dva dela. Objektivno in subjektivno ocenjevanje. Ekonomsko matematični modeli s področja tveganja so osnova računalniškim programom, ki so glavno orodje za objektivno oceno. Potem pa je delo ocenjevalca še opraviti subjektivni pregled. Ta vsebuje preglede bilanc stanja, nepredvidene spremembe v le teh, pregled preteklega poslovanja, načrte za prihodnost in podobno. Tako delo pa potrebuje dobrega ocenjevalca z veliko izkušnjami. Zato se moramo zavedati, da so nam takšni modeli zgolj v pomoč in bo odločitev o odobritvi kredita še vedno odvisna od nas.

Literatura

[1] R. C. Merton, *On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates*, Journal of Finance 29, 1974, 449-470.

[2] G. Gupton, C. Finger in M. Bhatia, *Creditmetrics-technical document*, Technical report, The RiskMetrics Group, 1997.

[3] P. Brandimarte, *Numerical Methods in Finance and Economics*, John Wiley and Sons, New York, 2006.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Modigliani

[5] http://www.me.ucsb.edu/ moehlis/APC591/tutorials/tutorial7/node2.html

[6] http://bradley.bradley.edu/ arr/bsm/pg04.html

[7] http://www.quickmba.com/finance/black-scholes/

[8] http://info.freeman.tulane.edu/breese714/Investments

[9] http://www.wisegeek.com/what-is-the-merton-model.htm

[10] http://www.efalken.com/papers/Mertonmodel.htm

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/Merton-Model

[12] http://www.riskglossary.com/link/asset-value-model.htm

[13] http://ideas.repec.org/p/uts/rpaper/112.html