UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Ajda Pirnat

Koncept komonotonosti v aktuarstvu in financah

Delo diplomskega seminarja

Mentor: doc. dr. Jasna Prezelj

Ljubljana, 2010

Zahvala

Iskreno se zahvaljujem svoji mentorici doc. dr. Jasni Prezelj, ki mi je s svojim strokovnim znanjem pomagala razumeti težje izpeljave in dokaze. Hvala za vse nasvete in predloge, ki so mi olajšali pisanje dela diplomskega seminarja. Hvala tudi prof. dr. Mihaelu Permanu za pomoč pri nekaterih izpeljavah in za razlage neznanih pojmov iz področja zavarovalništva in bančništva. Obema se zahvaljujem za dragoceni čas, ki sta mi ga namenila. Njuni napotki so omogočili, da je delo diplomskega seminarja postalo matematično korektno.

Zahvaljujem pa se tudi profesorjem in asistentom Fakultete za matematiko in fiziko, ki so bili vedno pripravljeni pomagati in mi s tem olajšali študij finančne matematike.

Kazalo

1 Uvod **5**
1.1 Opredelitev problema 5
1.2 Zasnova dela 6

2 Ureditve slučajnih spremenljivk **8**

3 Inverz porazdelitvene funkcije **12**

4 Komonotonost **16**
4.1 Komonotone množice in slučajni vektorji 16
4.2 Vsota komonotonih slučajnih spremenljivk 20

5 Konveksne meje za vsoto slučajnih spremenljivk **25**
5.1 Komonotona zgornja meja 25
5.2 Izboljšana zgornja meja 30
5.3 Spodnja meja 32

6 Vrednotenje azijskih opcij s pomočjo koncepta komonotonosti **35**
6.1 Azijske opcije 35
6.2 Vrednotenje opcij v Black–Scholesovem modelu 36
6.3 Numerična ilustracija 41

7 Sklep **44**

Slike

1 Grafični prikaz funkcij F_X^{-1}, F_X^{-1+} in $F_X^{-1(\alpha)}$ 13

Tabele

1 Spodnja in zgornja meja za ceno azijske opcije za $T = 120$ in $n = 30$ v primerjavi z Monte Carlo metodo 42
2 Spodnja in zgornja meja za ceno azijske opcije za $T = 60$ in $n = 30$ v primerjavi z Monte Carlo metodo 42
3 Spodnja in zgornja meja za ceno azijske opcije za $T = 120$ in $n = 10$ v primerjavi z Monte Carlo metodo 43

Povzetek

Slučajne spremenljivke so eno izmed orodij v aktuarski znanosti in financah. Njena porazdelitvena funkcija se določa s pomočjo matematičnih in statističnih prijemov in nemalokrat se zgodi, da analitične rešitve ne znamo izračunati.

Pogost problem, na katerega naletijo zavarovalnice in banke, je iskanje porazdelitvene funkcije vsote slučajnih spremenljivk. Z matematičnega vidika je priročno predpostaviti, da so spremenljivke med seboj neodvisne, vendar je takšna predpostavka velikokrat nerealistična.

Koncept komonotonosti je eden izmed načinov, kako lahko aproksimiramo porazdelitev vsote slučajnih spremenljivk z danimi robnimi porazdelitvami, ne da bi zanemarili strukturo odvisnosti med spremenljivkami. V praksi se izkaže za dober način aproksimacije, saj so rezultati, ki nam jih vrne ta metoda, v realnosti blizu originalnim vrednostim.

Abstract

Random variables are an important tool in actuarial science and finance. Their distribution function is determined through mathematical and statistical approaches and often we do not know how to calculate the analytical result.

Searching for the distribution function of the sum of the random variables is a frequent problem encountered by many banks and insurance companies. The assumption of mutual independence between the components of the sum is very convenient from a computational point of view, but often not realistic.

One of the ways to approximate the sum of random variables by knowing the marginal distribution whilst not knowing anything about the dependence structure of our variables, is the concept of comonotonicity. In practice it is an approximation method, for the results that the method produces, are in reality very close to the original values.

Math. Subj. Class. (2010): 62P20, 62P05, 60E05, 60E15
Ključne besede: aktuarska znanost, finančna matematika, porazdelitvene funkcije, stohastične ureditve, komonotonost
Keywords: actuarial sciences, financial mathematics, distribution functions, stochastic orderings, comonotonicity

1 Uvod

Čar življenja je v njegovi nepredvidljivosti. Le-ta s seboj prinaša strah pred različnimi nevarnostmi, saj smo jim ljudje že od nekdaj izpostavljeni. Borba enega posameznika proti naravnim katastrofam, ki ogrožajo življenje ljudi in njihovo premoženje, je Sizifovo delo. Zavedati se moramo, da tudi s skupnimi močmi vseh nevarnosti ne moremo preprečiti, lahko pa vsaj omilimo njihove posledice.

Začetke zavarovalne dejavnosti srečamo že v času zakonodaje kralja Hamurabija (1700 pr.n.š.). Različne oblike zavarovanj, ki jih najdemo v tistem in kasnejšem času, sicer nimajo dosti skupnega z današnjim zavarovanjem, vseeno pa nudijo dobre iztočnice. Za razvoj zavarovanja je zlasti pomembno 19. in 20. stoletje. Takrat so nastajale pravne podlage, s katerimi je bilo mogoče razviti zavarovalništvo kot pomembno gospodarsko dejavnost.

Z razvojem znanosti pa so se lahko enostavnejši matematični modeli lahko razvili v kompleksnejše, ki zahtevajo več znanja verjetnosti, statistike in ekonomije. Tu pa nastopi pomembna oseba, aktuar. Matematik, ki rešuje finančne probleme in tako pripomore k boljšim odločitvam v zavarovalništvu in v bančništvu.

1.1 Opredelitev problema

Ker je življenje negotovo, je znanje verjetnosti in statistike temelj uspešne zavarovalnice in banke. Kar pomeni, da se bo aktuar vseskozi srečeval s slučajnimi spremenljivkami. Vse informacije neke slučajne spremenljivke nosi njena porazdelitvena funkcija, zato je naloga aktuarja, da poišče ali pa vsaj dobro oceni to funkcijo.

Zavarovana tveganja niso odvisna samo od enega dejavnika, temveč so predmet večih skupnih dejavnikov, kot so npr. geografija, podnebje in gospodarsko okolje. Zato se v večini primerov pojavlja slučajna spremenljivka, oblike

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{1.1}$$

kjer so robne porazdelitvene funkcije znane, strukturo odvisnosti slučajnega vektorja $\underline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ pa poznamo samo delno ali pa je sploh ne poznamo.

Tradicionalna teorija upravljanja s tveganji temelji na predpostavki, da so posamezna tveganja med seboj neodvisna. Pod to predpostavko lahko s pomočjo zakona velikih števil predvidimo, kakšno bo povprečno tveganje, če se število zavarovanih tveganj veča. Prav tako lahko uporabimo centralni limitni izrek, ki pravi, da bo vsota (1.1) porazdeljena približno normalno, če bo le število zavarovanih tveganj dovolj veliko.

Predpostavka o medsebojni neodvisnosti dejavnikov je sicer z matematičnega vidika precej priročna, saj poznamo veliko načinov za iskanje porazdelitve zgoraj omenjene vsote. Utopično pa je pričakovati, da je takšna predpostavka tudi realna, saj nam

lahko napačno predpostavljanje prinese zavajajoče rezultate.

Zamislimo si slučajno spremenljivko X_i, ki predstavlja terjatev ene pogodbe v določenem obdobju i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Naj bo Y_i diskontni faktor za obdobje $[0, i]$. Vsota $S = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i$ potem predstavlja sedanjo vrednost pogodbe. Kljub determinističnemu faktorju Y_i bodo v vsoti nastopale odvisne slučajne spremenljivke. Lep primer je dosmrtna renta, saj so zneski, v primeru še živega zavarovanca, v časih $1, 2, \ldots, n$ med seboj enaki, kar pa nakazuje na močno pozitivno odvisnost med spremenljivkami. Drug primer je individualno avtomobilsko zavarovanje, kjer X_i predstavlja izgubo v letu i. Če sta X_1 in X_2 veliki, lahko na podlagi tega sklepamo na velike izgube v prihodnjih letih, kar ponovno kaže na odvisnost med komponentami.

V vsoti ne smemo zanemariti morebitne strukture odvisnosti slučajnega vektorja $\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, saj je diskontiranje na intervalu $[0, i + j]$ enako diskontiranju na $[0, i] \cup [i, i + j]$, kar pomeni, da sta Y_i in Y_{i+j} med seboj odvisna. Velika vrednost ene spremenljivke v vsoti S implicira tudi velike vrednosti ostalih komponent in zaradi tega ima vsota S lahko večjo nestanovitnost kot v primeru neodvisnih slučajnih spremenljivk. Zakon velikih števil v tem primeru lahko odpove.

Zgornji primeri kažejo na neustreznost upoštevanja predpostavke o neodvisnosti sumandov v vsoti (1.1), kar pomeni, da je potrebno poiskati drug način iskanja porazdelitvene funkcije.

1.2 Zasnova dela

Delo diplomskega seminarja predstavlja koncept, ki ne zanemarja medsebojne odvisnosti. Temelji na slučajnih vektorjih, ki imajo lastnost komonotonosti, kar v zelo grobem smislu pomeni, da so spremenljivke maksimalno odvisne.

Koncept komonotonosti sta leta 1998 prvič podrobno raziskovala Jan Dhaene in Shaun Wang. Sprva sta problem vsote S reševala na bivariatnih, nato pa sta koncept s pomočjo Marca J. Goovaertsa in Virginie Young nadgradila še do večrazsežnih slučajnih vektorjev. Delo diplomskega seminarja se v glavnem opira na [5] in [6].

V aktuarski znanosti je pogosta praksa, da iskano slučajno spremenljivko zamenjamo s preprostejšo in zaradi enostavnejše strukture lažje izračunamo njeno porazdelitveno funkcijo. Potrebno pa je razumeti, na kakšen način je lahko ena spremenljivka večja od druge, zato bomo v drugem poglavju predstavili dve ureditvi slučajnih spremenljivk, stop–loss in konveksno ureditev, ki imata pomen tako v financah kot v zavarovalništvu.

V primeru komonotone vsote se iskanje porazdelitvene funkcije precej poenostavi. Ugotovili bomo, da lahko inverz porazdelitvene funkcije vsote S zapišemo kot vsoto inverzov porazdelitvenih funkcij spremenljivk X_i, kar pomeni, da je za razumevanje koncepta komonotonosti potrebno znanje o inverzu porazdelitvene funkcije. Pomembne informacije o inverzu so tako predstavljene v tretjem poglavju.

V četrtem poglavju bomo razložili, kaj pomeni komonotonost slučajnih spremenljivk in predstavili nekaj pomembnih lastnosti. Porazdelitev slučajne vsote S bomo aproksimirali s porazdelitvijo komonotone vsote S^c. Ker s tem ne bomo dobili točnega rezultata, bomo lahko samo določili meje, znotraj katerih se lahko giblje vsota S. V petem poglavju bomo tako izpeljali konveksno zgornjo in spodnjo mejo za kvantile porazdelitve vsote S.

Na primeru azijskih opcij bomo v šestem poglavju predstavili nekaj rezultatov, ki jih da ta metoda, in jih primerjali z drugimi znanimi metodami. V praksi se izkaže, da s pomočjo komonotone spodnje in zgornje meje dobimo vrednosti, ki so blizu originalnim.

2 Ureditve slučajnih spremenljivk

Naš cilj je aproksimirati porazdelitev slučajne spremenljivke. Poiskali bomo preprostejšo spremenljivko, ki bo glede na neko ureditev večja ali manjša od iskane in pri kateri bomo lažje izračunali njeno porazdelitveno funkcijo. Zavedamo se, da z aproksimacijo ne bomo dobili popolnoma točnih rezultatov, se pa želimo čim bolj približati pravim vrednostim.

S pomočjo stohastičnih ureditev razvrščamo slučajne spremenljivke. Poznamo več vrst takšnih ureditev, za razumevanje koncepta komonotonosti pa sta pomembni dve, stop–loss in konveksna ureditev, ki imata pomen tako v zavarovalništvu kot v financah.

Vse informacije neke slučajne spremenljivke X se skrivajo v njeni porazdelitveni funkciji, ki jo definiramo kot

$$F_X(x) = \mathrm{P}[X \leq x]. \tag{2.1}$$

Matematično upanje slučajne spremenljivke X s porazdelitveno funkcijo $F_X(x)$ je potem enako

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \,\mathrm{d}\, F_X(x). \tag{2.2}$$

Upanje bo končno, če bo zgornji integral konvergenten. V nadaljevanju bomo predpostavili, da imajo obravnavane slučajne spremenljivke končno matematično upanje.

Enačbo (2.2) lahko zapišemo tudi drugače

$$\mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{0} x \,\mathrm{d}\, F_X(x) + \int_{0}^{\infty} x \,\mathrm{d}\, F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} x \,\mathrm{d}\, F_X(x) - \int_{0}^{\infty} x \,\mathrm{d}(1 - F_X(x)),$$

saj je

$$\mathrm{d}(1 - F_X(x)) = -\,\mathrm{d}\, F_X(x).$$

Za oba integrala sedaj uporabimo per partes in dobimo

$$\mathrm{E}[X] = -\int_{-\infty}^{0} F_X(x) \,\mathrm{d}\, x + \int_{0}^{\infty} (1 - F_X(x)) \,\mathrm{d}\, x. \tag{2.3}$$

V zavarovalništvu se pojavljajo večinoma pozitivne slučajne spremenljivke, zato je pomemben predvsem drugi člen v (2.3).

Zgornje definicije nam omogočajo, da lahko defniramo pomembni stohastični ureditvi. Prva je **stop–loss ureditev**. Njen pomen v zavarovalništvu se nanaša na **pozavarovanje letnega presežka škod** (*angl. Stop Loss Reinsurance*), ki je poseben način neproporcionalnega pozavarovanja, kjer se pozavarovatelj obveže, da

bo kril tisti del agregatnih letnih škod, ki presega vnaprej dogovorjen znesek. Ta se večinoma določi kot odstotek od premije in sicer se v pogodbi omeji spodnja in zgornja meja kritja. Omenjena vrsta pozavarovanja se ponavadi uporablja pri zavarovanjih, kjer lahko poslovni izid zaradi nastopa majhnih in srednjih škod iz leta v leto močno niha v velikosti in frekvenci. Pozavarovatelj ni odgovoren za kritje škod, dokler agregatni škodni rezultat ne doseže pogodbeno določenega minimalnega, zatem pa mora pokriti vse škode do maksimalno določenega praga zneska. Takšno pozavarovanje ni primerno za pozavarovanje naravnih katastrof, saj bi bila v vsakem primeru nastanka naravne katastrofe za pozavarovatelja presežena zgornja meja zmožnosti kritja škod.

Pričakovana izguba pri stop–loss zavarovanju predstavlja premijo, ki jo pozavarovalnica zaračuna zavarovalnici. Naj bo d pogodbeno določen minimalni znesek (v nadaljevanju odbitek) in naj slučajna spremenljivka X predstavlja terjatev nekega škodnega dogodka. Premija je tako določena s pričakovano razliko med X in d. Očitno je, da je stop–loss premija padajoča funkcija spremenljivke d, saj večji odbitek za pozavarovatelja pomeni, da bo razlika med X in d manjša.

Premija pri stop–loss zavarovanju (v nadaljevanju stop–loss premija) z odbitkom d je torej enaka upanju $\mathrm{E}[(X-d)_+]$, kjer je $(x-d)_+ = \max(x-d, 0)$. Ker imamo opravka s pozitivnimi slučajnimi spremenljivkami, lahko zapišemo

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[(X-d)_+] &= \int_0^\infty (1 - F_{(X-d)_+}(x))\,\mathrm{d}\,x = \int_0^\infty P((X-d)_+ > x)\,\mathrm{d}\,x = \\ &= \int_0^\infty P(X > d + x)\,\mathrm{d}\,x,\end{aligned}$$

z uvedbo nove spremenljivke $u = d + x$ pa pridemo do enačbe

$$\mathrm{E}[(X-d)_+] = \int_d^\infty (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}\,x, \qquad -\infty < d < +\infty. \tag{2.4}$$

Zgornja enačba predstavlja težo zgornjega repa porazdelitvene funkcije $F_X(x)$, kar pa je ekvivalentno pričakovani izgubi.

Na podlagi stop–loss premije lahko tako definiramo stop–loss ureditev.

Definicija 2.1 (Stop–loss ureditev)**.** *Naj bosta X in Y dve slučajni spremenljivki. X je manjša od Y v smislu stop–loss ureditve, oznaka $X \leq_{sl} Y$, natanko tedaj, ko velja*

$$\mathrm{E}[(X-d)_+] \leq \mathrm{E}[(Y-d)_+], \qquad -\infty < d < \infty. \tag{2.5}$$

Preprosto povedano, zgornja definicija nam pove, da je slučajna spremenljivka X za pozavarovatelja bolj privlačna, saj je pričakovana izguba manjša kot v primeru spremenljivke Y.

Potreben pogoj za $X \leq_{sl} Y$ je $\mathrm{E}[X] \leq \mathrm{E}[Y]$, kar preprosto dokažemo na naslednji način. Predpostavimo $d < 0$, zato lahko zapišemo

$$\begin{aligned} d + \mathrm{E}[(X-d)_+] &= d + \int_d^0 (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}\,x + \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}\,x = \\ &= d + (-d) - \int_d^0 F_X(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_0^\infty (1 - F_X(x))\,\mathrm{d}\,x. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pošljemo d proti $-\infty$ in dobimo

$$\lim_{d \to -\infty} (d + \mathrm{E}[(X-d)_+]) = \mathrm{E}[X].$$

Ko dodamo d na vsako stran neenačbe (2.5) in pošljemo $d \longrightarrow -\infty$, dobimo neenakost $\mathrm{E}[X] \leq \mathrm{E}[Y]$.

Zgornji premislek nam pokaže, da v primeru stop–loss ureditve med dvema spremenljivkama velja tudi neenakost $\mathrm{E}[X] \leq \mathrm{E}[Y]$. Intuitivno lahko sklepamo, da bomo najboljšo aproksimacijo našli v primeru $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y]$, kar nas pripelje do tako imenovane konveksne ureditve.

Definicija 2.2 (Konveksna ureditev)**.** *Naj bosta X in Y dve slučajni spremenljivki. X je manjša od Y v smislu konveksne ureditve, oznaka $X \leq_{cx} Y$, natanko tedaj, ko velja*

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y], \qquad \mathrm{E}[(X-d)_+] \leq \mathrm{E}[(Y-d)_+], \qquad -\infty < d < \infty. \tag{2.7}$$

Ker je matematično upanje monoton linearen funkcional, velja

$$\mathrm{E}[(X-d)_+] - \mathrm{E}[(d-X)_+] = \mathrm{E}[X] - d,$$

zato lahko konveksno ureditev zapišemo kot

$$X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y], \\ \mathrm{E}[(d-X)_+] \leq \mathrm{E}[(d-Y)_+], \end{cases} \qquad -\infty < d < \infty. \tag{2.8}$$

S podobnim postopkom kot za $\mathrm{E}[(X-d)_+]$ dobimo

$$\mathrm{E}[(d-X)_+] = \int_{-\infty}^d F_X(x)\,\mathrm{d}\,x, \tag{2.9}$$

kar pomeni, da lahko $\mathrm{E}[(d-X)_+]$ interpretiramo kot težo spodnjega repa slučajne spremenljivke X. Videli smo, da stop–loss ureditev vključuje težje zgornje repe. Z dodatnim pogojem $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y]$ pa nam konveksna ureditev da še težje spodnje repe.

Naj bo $d > 0$. Podobno kot prej s pomočjo (2.9) dobimo

$$\lim_{d \to \infty} (d - \mathrm{E}[(d-X)_+]) = \mathrm{E}[X],$$

kar pomeni, da lahko konveksno ureditev zapišemo kot

$$X \leq_{cx} Y \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{E}[(X-d)_+] \leq \mathrm{E}[(Y-d)_+], \\ \mathrm{E}[(d-X)_+] \leq \mathrm{E}[(d-Y)_+], \end{cases} \quad -\infty < d < \infty. \tag{2.10}$$

Ime konveksna ureditev izhaja iz alternativne definicije, ki pravi, da je X manjša od Y v smislu konveksne ureditve natanko tedaj, ko za vsako konveksno funkcijo v velja $\mathrm{E}[v(X)] \leq \mathrm{E}[v(Y)]$. Ker je funkcija v, definirana kot $v = x^2$, konveksna, velja, da iz $X \leq_{cx} Y$ sledi $\mathrm{Var}[X] \leq \mathrm{Var}[Y]$. Implikacija v obratno smer ne velja v splošnem.

3 Inverz porazdelitvene funkcije

S pomočjo inverza porazdelitvene funkcije bomo lažje zapisali porazdelitveno funkcijo slučajne spremenljivke, s katero bomo aproksimirali iskano vsoto (1.1). V tem poglavju so zato predstavljene pomembne lastnosti inverza, s katerimi bomo lahko razvili koncept komonotonosti.

Definicija porazdelitvene funkcije je predstavljena že v prejšnjem poglavju z enačbo (2.1). Njene bistvene lastnosti so: je z desne zvezna, nepadajoča funkcija, za katero velja

$$F_X(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0, \qquad F_X(+\infty) = \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1.$$

Standardna definicija inverza porazdelitvene funkcije je z leve zvezna in nepadajoča funkcija $F_X^{-1}(p)$, za katero velja

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}, \qquad p \in [0,1], \tag{3.1}$$

kjer predpostavljamo $\inf \emptyset = +\infty$. Če ima $F_X(x)$ kakšen skok, nam zgornja definicija za $F_X^{-1}(p)$ zagotavlja, da bo inverz definiran za vse $p \in [0,1]$. Kar pomeni, da sicer nepovezano krivuljo povežemo s horizontalnim odsekom. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ in vsak $p \in [0,1]$ potem velja

$$F_X^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x). \tag{3.2}$$

Zgornjo enačbo preprosto dokažemo. Ker je $F_X^{-1}(p)$ nepadajoča funkcija, velja $p \leq F_X^{-1}(p) \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq F_X^{-1}(F_X(x))$. Desna stran te neenačbe pa je manjša od x, s tem pa je (3.2) dokazana.

Če ima graf porazdelitvene funkcije kakšen horizontalen odsek, inverz ni enolično določen, zato možna izbira leži na intervalu

$$\big[\inf\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \geq p\}, \sup\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \leq p\}\big],$$

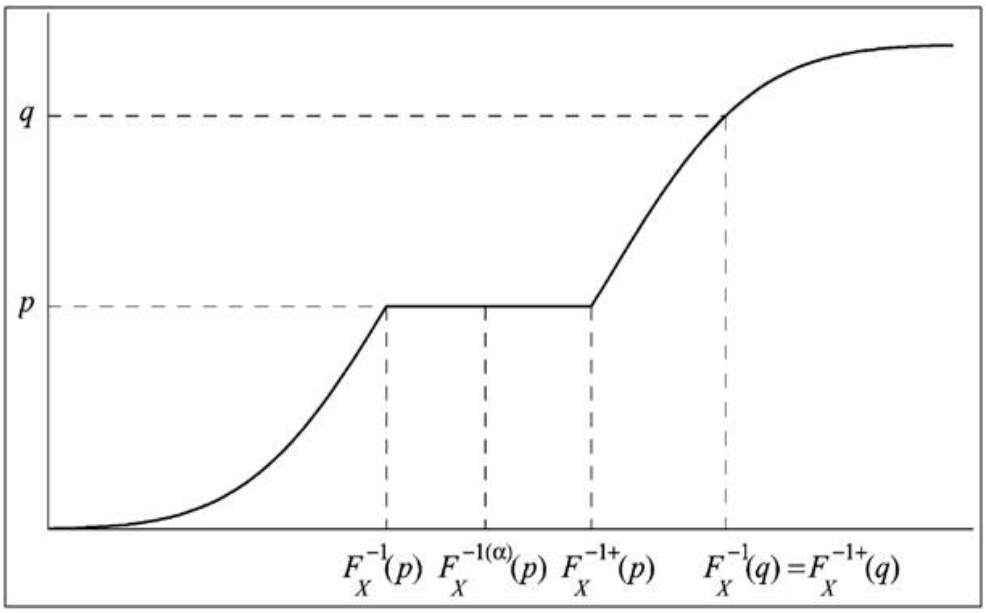
kjer je $p \in [0,1]$ poljuben in dodatno predpostavljamo $\sup \emptyset = -\infty$. Desno stran zgoraj zapisanega intervala pa definiramo kot $F_X^{-1+}(p)$, torej

$$F_X^{-1+}(p) = \sup\{x \in \mathbb{R} | F_X(x) \leq p\}, \qquad p \in [0,1]. \tag{3.3}$$

Zgornja funkcija je nepadajoča in z desne zvezna. Opazimo, da velja $F_X^{-1}(0) = -\infty$ in $F_X^{-1+}(1) = +\infty$, kar pomeni, da je vsa masa slučajne spremenljivke X skoncentrirana na intervalu $\big[F_X^{-1}(0), F_X^{-1+}(1)\big]$. $F_X^{-1}(p)$ in $F_X^{-1+}(p)$ sta torej končni za vse $p \in (0,1)$.

Inverz se torej lahko giblje med $F_X^{-1}(p)$ in $F_X^{-1+}(p)$ ter ga lahko definiramo tudi kot katerokoli konveksno kombinacijo teh dveh funkcij. Torej, za vsak $\alpha \in [0,1]$ definiramo še **α-mešano inverzno funkcijo** porazdelitvene funkcije:

$$F_X^{-1(\alpha)}(p) = \alpha F_X^{-1}(p) + (1-\alpha) F_X^{-1+}(p), \qquad p \in (0,1), \tag{3.4}$$



Slika 1: Grafični prikaz funkcij F_X^{-1}, F_X^{-1+} in $F_X^{-1(\alpha)}$ ([5])

ki je prav tako nepadajoča funkcija.

Zaradi konveksne kombinacije takoj ugotovimo, da za vsak $\alpha \in [0,1]$ velja

$$F_X^{-1}(p) \leq F_X^{-1(\alpha)}(p) \leq F_X^{-1+}(p), \qquad p \in (0,1). \tag{3.5}$$

Na morebitnem horizontalnem odseku porazdelitvene funkcije imajo $F_X^{-1}(p)$, $F_X^{-1+}(p)$ in $F_X^{-1(\alpha)}(p)$ različne vrednosti, kar prikazuje Slika 1.

Naj bo d tak, da velja $0 < F_X(d) < 1$. Potem sta $F_X^{-1}(F_X(d))$ in $F_X^{-1+}(F_X(d))$ končni. Če upoštevamo neenakosti (3.5) in lastnosti nepadajoče funkcije, dobimo $F_X^{-1}(F_X(d)) \leq d \leq F_X^{-1+}(F_X(d))$. Kar pomeni, da lahko za nek $\alpha_d \in [0,1]$ število d zapišemo kot $d = \alpha_d F_X^{-1}(F_X(d)) + (1-\alpha_d)F_X^{-1+}(F_X(d)) = F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d))$. Torej, za neko slučajno spremenljivko X in nek d, za katerega velja $0 < F_X(d) < 1$, obstaja $\alpha_d \in [0,1]$, da velja $F_X^{-1(\alpha_d)}(F_X(d)) = d$.

Naslednji izrek nam pove povezavo med inverzom porazdelitvene funkcije slučajne spremenljivke X in $g(X)$, kjer je g monotona funkcija.

Izrek 3.1. *Naj bo X realna slučajna spremenljivka in g funkcija na $\mathbb{R}$ in naj bo $p \in (0,1)$.*

(a) Če je g nepadajoča in z leve zvezna funkcija, potem velja

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1}(p)). \tag{3.6}$$

(b) Če je g nepadajoča in z desne zvezna funkcija, potem velja

$$F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1+}(p)). \tag{3.7}$$

(c) Če je g nenaraščajoča in z leve zvezna funkcija, potem velja

$$F_{g(X)}^{-1+}(p) = g(F_X^{-1}(1-p)). \tag{3.8}$$

(d) Če je g nenaraščajoča in z desne zvezna funkcija, potem velja

$$F_{g(X)}^{-1}(p) = g(F_X^{-1+}(1-p)). \tag{3.9}$$

Dokaz. Dokazali bomo točko (a), ostale dokažemo podobno. Naj bo $0 < p < 1$ in naj bo g nepadajoča in z leve zvezna funkcija. Za nek $x \in \mathbb{R}$ iz (3.2) sledi

$$F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_{g(X)}(x).$$

Ker je g z leve zvezna, velja

$$g(z) \leq x \Leftrightarrow z \leq \sup\{y|g(y) \leq x\}$$

za vsak $z \in \mathbb{R}$ in vsak $x \in \mathbb{R}$. Zgornja ekvivalenca nam pove, da je dogodek $g(X) \leq x$ ekvivalenten dogodku $X \leq \sup\{y|g(y) \leq x\}$, torej sta verjetnosti teh dveh dogodkov enaki. Zato lahko zapišemo

$$p \leq F_{g(X)}(x) \Leftrightarrow p \leq F_X[\sup\{y|g(y) \leq x\}].$$

Če ima $\sup\{y|g(y) \leq x\}$ končno vrednost, potem lahko uporabimo (3.2) in dobimo

$$p \leq F_X[\sup\{y|g(y) \leq x\}] \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq \sup\{y|g(y) \leq x\}.$$

V primeru neskončnih vrednosti (tako $+\infty$ kot $-\infty$) si ne moremo pomagati z (3.2), kljub temu pa zgornja ekvivalenca velja. če je supremum enak $-\infty$, dobimo $p \leq 0 \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq -\infty$, v primeru $+\infty$ pa velja $p \leq 1 \Leftrightarrow F_X^{-1}(p) \leq +\infty$.

Funkcija g je nepadajoča in z leve zvezna, zato lahko zapišemo

$$F_X^{-1}(p) \leq \sup\{y|g(y) \leq x\} \Leftrightarrow g(F_X^{-1}(p)) \leq g(\sup\{y|g(y) \leq x\}).$$

Torej dobimo

$$F_X^{-1}(p) \leq \sup\{y|g(y) \leq x\} \Leftrightarrow g(F_X^{-1}(p)) \leq x.$$

Združimo prvo in zadnjo ekvivalenco ter dobimo končni rezultat

$$F_{g(X)}^{-1}(p) \leq x \Leftrightarrow g(F_X^{-1}(p)) \leq x.$$

□

Za vse $\alpha \in [0,1]$ lahko dokažemo, da velja

$$X \stackrel{\mathrm{d}}{=} F_X^{-1}(U) \stackrel{\mathrm{d}}{=} F_X^{-1+}(U) \stackrel{\mathrm{d}}{=} F_X^{-1(\alpha)}(U), \tag{3.10}$$

kjer je U slučajna spremenljivka, porazdeljena enakomerno na $(0,1)$. Prva enakost takoj sledi iz (3.2). Funkcija $F_X(x)$ ima kvečjemu števno število horizontalnih odsekov, kar implicira, da se zadnje tri slučajne spremenljivke v (3.10) razlikujejo le v števno mnogih točkah na $(0,1)$, kar pa pomeni, da imajo spremenljivke enako porazdelitev.

4 Komonotonost

Naš cilj je poiskati zgornjo mejo za vsoto slučajnih spremenljivk $(X_1, \ldots, X_n)$, pri čemer ne poznamo skupne porazdelitve. Iščemo torej tako strukturo odvisnosti slučajnih spremenljivk X_i, ki bo prinašala največjo vsoto v smislu konveksne ureditve. Dokazali bomo, da največjo možno porazdelitev (v smislu ene od ureditev) dobimo v primeru, ko je slučajni vektor $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ komonoton.

4.1 Komonotone množice in slučajni vektorji

Najprej definirajmo komonotonost množice n-dimenzionalnih vektorjev. Oznaka $\underline{x}$ predstavlja n-dimenzionalni vektor $(x_1, \ldots, x_n)$, oznaka $\underline{x} \leq \underline{y}$, kjer sta $\underline{x}$ in $\underline{y}$ dva n-dimenzionalna vektorja, pa pomeni, da velja $x_i \leq y_i$ za vse $i = 1, \ldots, n$.

Definicija 4.1 (Komonotona množica)**.** *Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je komonotona, če za poljubna vektorja $\underline{x}$ in $\underline{y}$ iz A velja: $\underline{x} \leq \underline{y}$ ali $\underline{y} \leq \underline{x}$.*

Z drugimi besedami, množica je komonotona, če za poljubna $\underline{x}$ in $\underline{y}$ iz A velja: če je $x_i \leq y_i$ za katerikoli i, potem iz tega sledi, da velja $\underline{x} \leq \underline{y}$. Vsaka podmnožica komonotone množice je prav tako komonotona množica.

Definirajmo (i, j)-to projekcijo množice $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kot

$$A_{i,j} = \{(x_i, x_j) | \underline{x} \in A\}.$$

Lema 4.2. *Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je komonotona natanko tedaj, ko je množica $A_{i,j}$ komonotona za vse $i \neq j$ iz $1, 2, \ldots, n$.*

Dokaz. Če je množica A komonotona, to pomeni, da sta poljubna dva vektorja med seboj urejena po komponentah. Urejena po komponentah pa sta tudi 2-dimenzionalna vektorja iz $A_{i,j}$, saj imajo komponente iste lastnosti kot v množici A. Torej je $A_{i,j}$ komonotona za vse $i \neq j$ iz $1, 2, \ldots, n$.

Obratno, množice $A_{i,j}$ so komonotone za vsak $i \neq j \in 1, 2, \ldots, n$. Če vzamemo 2 vektorja $\underline{x}$ in $\underline{y}$ iz A, bo zaradi komonotonosti $A_{i,j}$ veljalo: $(x_i, x_j) \leq (y_i, y_j)$ ali $(x_i, x_j) \geq (y_i, y_j)$ za vsak $i \neq j$. To pomeni, da iz $x_i \leq y_i$ (ali $x_i \geq y_i$) sledi $x_j \leq y_j$ (ali $x_j \geq y_j$) za vsak $i \neq j$. Torej velja $\underline{x} \leq \underline{y}$ (ali $\underline{x} \geq \underline{y}$). Ker sta $\underline{x}$ in $\underline{y}$ iz A, je množica A komonotona. □

V splošnem ne velja, da komonotonost $(i, i+1)$-projekcij $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ implicira tudi komonotonost celotne množice A. To lahko preprosto pokažemo z zgledom, ki sledi.

Zgled 1. Imejmo množico A, ki je definirana kot $A = \{(x_1, 1, x_3) | x_1 > 0, x_3 < 1\}$. Projekciji $A_{1,2}$ in $A_{2,3}$ sta komonotoni, vendar množica A ni, ker tudi projekcija $A_{1,3}$ ni komonotona.

Zgornji zgled in lema 4.2 nam torej povesta, da je potrebno preveriti vse pare projekcij, saj tranzitivnost ne velja.

Definicija 4.3 (Nosilec slučajnega vektorja)**.** *Naj bo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ najmanjša možna množica, za katero velja $\mathrm{P}[\underline{X} \in A] = 1$, kjer je $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ n-dimenzionalni slučajni vektor. Potem množico A imenujemo nosilec slučajnega vektorja $\underline{X}$.*

S pomočjo komonotone množice lahko tako definiramo komonoton slučajni vektor.

Definicija 4.4 (Komonotonost slučajnega vektorja)**.** *Slučajni vektor $\underline{X}$ je komonoton, če ima komonoton nosilec.*

Definicija nam pove, da je komonotonost zelo močna pozitivna struktura odvisnosti. Če sta $\underline{x}$ in $\underline{y}$ elementa komonotonega nosilca slučajnega vektorja $\underline{X}$, tj. $\underline{x}$ in $\underline{y}$ sta možni realizaciji vektorja $\underline{X}$, potem morata biti urejena po komponentah. S tem lahko pojasnemo tudi izraz komonotonost (*angl. comonotonicity*), ki nakazuje, da realizacije hkrati monotono naraščajo oz. padajo (višja vrednost ene komponente X_i je povezana z zvišanjem vrednosti katerekoli druge komponente).

Naslednji izrek nam pokaže, da ima komonoton vektor prav lepe lastnosti.

Izrek 4.5. *Slučajni vektor $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ je komonoton natanko tedaj, ko veljajo naslednje ekvivalentne trditve:*

(a) *$\underline{X}$ ima komonoton nosilec.*

(b) *Za vsak $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ velja*

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}. \tag{4.1}$$

(c) *Za slučajno spremenljivko $U \sim \mathrm{Uniform}(0,1)$ velja*

$$\underline{X} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U)). \tag{4.2}$$

(d) *Obstaja slučajna spremenljivka Z in nepadajoče funkcije f_i $(i = 1, \ldots, n)$, da velja*

$$\underline{X} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (f_1(Z), \ldots, f_n(Z)). \tag{4.3}$$

Dokaz. (a)$\Rightarrow$ (b): Vemo, da je $\underline{X}$ komonoton. Njegov komonoton nosilec označimo z B. Naj bo $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ in definiramo A_j kot

$$A_j = \{\underline{y} \in B | y_j \leq x_j\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ker je množica B komonotona, obstaja tak i, da je $A_i = \bigcap_{j=1}^n A_j$, saj jemljemo y iz množice B, slejkoprej pa bomo s presekom dobili množico, kjer bodo vse komponente medseboj urejene. Nadalje lahko izračunamo

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \mathrm{P}[\underline{X} \leq \underline{x}] = \mathrm{P}[\underline{X} \in \bigcap_{j=1}^n A_j] = \mathrm{P}[\underline{X} \in A_i] = F_{X_i}(x_i).$$

Če upoštevamo še $A_i \subset A_j \Rightarrow F_{X_i}(x_i) \leq F_{X_j}(x_j)$ za vsak j, potem velja

$$F_{X_i}(x_i) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}.$$

(b)$\Rightarrow$ (c): Vemo, da velja $F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \min\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}$. Po (3.2) sledi

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[F_{X_1}^{-1}(U) \leq x_1, \ldots, F_{X_n}^{-1}(U) \leq x_n] &= \mathrm{P}[U \leq F_{X_1}(x_1), \ldots, U \leq F_{X_n}(x_n)] = \\ &= \mathrm{P}[U \leq \min_{j=1,\ldots,n}\{F_{X_j}(x_j)\}] = \min_{j=1,\ldots,n}\{F_{X_j}(x_j)\} = F_{\underline{X}}(\underline{x})\end{aligned}$$

kar dokazuje, da sta enako porazdeljeni.

(c)$\Rightarrow$ (d): Velja $\underline{X} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U))$, kar pomeni, da obstajajo slučajna spremenljivka Z (v tem primeru spremenljivka U) in funkcije f_i, $i = 1, \ldots, n$ (vzamemo lahko inverze porazdelitvenih funkcij).

(d)$\Rightarrow$ (a): Predpostavimo, da obstajajo slučajna spremenljivka Z z nosilcem B in nepadajoče funkcije f_i $(i = 1, \ldots, n)$, tako da velja

$$\underline{X} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (f_1(Z), \ldots, f_n(Z)).$$

Možne realizacije slučajnega vektorja $\underline{X}$ so ravno $\{(f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)) | z \in B\}$, ki pa je očitno komonotona množica, saj so funkcije f_i nepadajoče. Torej je $\underline{X}$ komonoton. $\square$

Enačba (4.1) nam pove, da je za porazdelitev komonotonega vektorja dovolj poznati najmanj verjetni dogodek. Za katerikoli slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$, ne nujno komonoton, velja

$$\mathrm{P}[X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n] \leq \min\{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}. \tag{4.4}$$

Verjetnost, da se zgodijo vsi dogodki $X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n$ hkrati, je gotovo manjša od verjetnosti posameznega dogodka, kar pomeni, da je leva stran neenakosti (4.4) manjša od $P[X_i \leq x_i]$ za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$. Torej bo manjša tudi od $\min\{F_{X_1}(x_1), \ldots, F_{X_n}(x_n)\}$. Interpretacija je sledeča: V razredu vseh porazdelitev slučajnega vektorja $(X_1, \ldots, X_n)$ je verjetnost, da vsi X_i hkrati dosežejo majhno vrednost, maksimizirana v primeru komonotonega vektorja, kar ponovno nakazuje na to, da je komonotonost maksimalna struktura odvisnosti.

Slučajna vektorja $(F_{X_1}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U))$ in $(F_{X_1}^{-1(\alpha_1)}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1(\alpha_n)}(U))$ sta enaka z verjetnostjo 1, zato lahko komonoton vektor zapišemo tudi kot

$$\underline{X} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (F_{X_1}^{-1(\alpha_1)}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1(\alpha_n)}(U)), \tag{4.5}$$

kjer je $U \sim \mathrm{Uniform}(0, 1)$ in $\alpha_i \in [0, 1]$ realno število.
Če je $U \sim \mathrm{Uniform}(0, 1)$, potem velja $1-U \sim \mathrm{Uniform}(0, 1)$, zato lahko komonotonost vektorja $\underline{X}$ karakteriziramo kot

$$\underline{X} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (F_{X_1}^{-1}(1 - U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(1 - U)). \tag{4.6}$$

Zaradi zgornjega premisleka velja, da je vektor $\underline{X}$ komonoton natanko tedaj, ko obstaja slučajna spremenljivka Z in nenaraščajoče funkcije f_i $(i = 1, 2, ..., n)$, da velja

$$\underline{X} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (f_1(Z), \ldots, f_n(Z)).$$

Za slučajne vektorje velja rezultat analogen lemi 4.2.

Izrek 4.6. *Slučajni vektor $\underline{X}$ je komonoton natanko tedaj, ko je vektor (X_i, X_j) komonoton za vsak $i \neq j$ iz $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$): $\underline{X}$ je komonoton, kar pomeni, da ima komonoton nosilec. Vektorju (X_i, X_j) pripada nosilec $A_{i,j}$, ki pa je zaradi komonotonosti množice A tudi komonoton za vsak $i \neq j$ iz $\{1, 2, \ldots, n\}$. Iz tega sledi, da je (X_i, X_j) komonoton za vsak $i \neq j$ iz $\{1, 2, \ldots, n\}$.

($\Leftarrow$): Definirajmo $A \in \mathbb{R}^n$

$$A = \big\{(F_{X_1}^{-1}(p), F_{X_2}^{-1}(p), \ldots, F_{X_n}^{-1}(p)) | 0 < p < 1\big\},$$

kjer je (i, j)-ta projekcija definirana kot

$$A_{i,j} = \big\{(F_{X_i}^{-1}(p), F_{X_j}^{-1}(p)) | 0 < p < 1\big\}.$$

Dogodek $\underline{X} \in A$ je ekvivalenten dogodku $(X_i, X_j) \in A_{i,j}$ za vsak (i, j). Vemo, da je (X_i, X_j) komonoton, torej je $A_{i,j}$ komonotona za vsak par (i, j). Iz leme 4.2 sledi, da je tudi množica A komonotona. Ker velja

$$\mathrm{P}(\underline{X} \in A) = \mathrm{P}(\underline{X} \in (F_{X_1}^{-1}(p), F_{X_2}^{-1}(p), \ldots, F_{X_n}^{-1}(p))) = 1,$$

je množica A nosilec vektorja $\underline{X}$, torej je $\underline{X}$ komonoton. □

Zgled 2. Naj bosta slučajni spremenljivki U in V neodvisni in obe porazdeljeni enakomerno na intervalu $(0, 1)$. Imejmo slučajni vektor $(U, 1, V)$. Očitno je, da sta slučajna vektorja $(U, 1)$ in $(V, 1)$ komonotona, vendar vektor $(U, 1, V)$ ni komonoton zaradi nekomonotonosti vektorja (U, V).

Podobno kot smo videli v zgledu 1 nam zgornji zgled pokaže, da v splošnem iz komonotonosti parov (X_i, X_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, n-1$, ne sledi nujno tudi komonotonost vektorja $\underline{X}$.

V nadaljevanju bo oznaka $(X_1^c, \ldots, X_n^c)$ predstavljala komonoton slučajni vektor z enakimi robnimi porazdelitvami kot vektor $(X_1, \ldots, X_n)$. Iz enačbe (4.2) lahko vidimo, da je nosilec komonotonega vektorja $\underline{X}^c = (X_1^c, \ldots, X_n^c)$ enak

$$\big\{(F_{X_1}^{-1}(p), \ldots, F_{X_n}^{-1}(p)) | 0 < p < 1\big\}. \tag{4.7}$$

Zgornji nosilec ni nujno povezana krivulja, saj vsi horizontalni deli porazdelitvene

funkcije X_i vodijo do manjkajočih delov te krivulje. Lahko pa ga gledamo kot skupek urejenih povezanih krivulj. Če povežemo konce zaporednih krivulj s premico, dobimo povezano komonotono krivuljo v $\mathbb{R}^n$. Takšni množici rečemo povezan nosilec slučajnega vektorja $\underline{X}^c$. Lahko ga parametriziramo kot

$$\left\{(F_{X_1}^{-1(\alpha)}(p), \ldots, F_{X_n}^{-1(\alpha)}(p)) | 0 < p < 1, 0 \leq \alpha \leq 1\right\}. \tag{4.8}$$

4.2 Vsota komonotonih slučajnih spremenljivk

S pomočjo izreka 4.5 smo ugotovili, da za prirejen komonoton vektor $(X_1^c, \ldots, X_n^c)$, ki ima enake robne porazdelitve kot vektor $(X_1, \ldots, X_n)$, velja

$$(X_1^c, \ldots, X_n^c) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U)).$$

V nadaljevanju bo oznaka S^c predstavljala vsoto komponent prirejenega komonotonega vektorja $\underline{X}^c = (X_1^c, \ldots, X_n^c)$, torej

$$S^c = X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c. \tag{4.9}$$

Izrek 4.7. *Za α-inverzno porazdelitveno funkcijo $F_{S^c}^{-1(\alpha)}$, kjer je S^c vsota komonotonih slučajnih spremenljivk $(X_1^c, \ldots, X_n^c)$, velja*

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p), \qquad 0 < p < 1, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \tag{4.10}$$

Dokaz. Imamo vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ in pripadajoč komonoton vektor $(X_1^c, \ldots, X_n^c)$. Izrek 4.5 nam omogoča, da komonotono vsoto zapišemo kot

$$S^c = X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c \stackrel{\mathrm{d}}{=} g(U),$$

kjer je $U \sim \mathrm{Uniform}(0, 1)$ in g funkcija, definirana kot

$$g(u) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(u), \qquad 0 < u < 1.$$

Očitno je g nepadajoča in z leve zvezna funkcija (vsota nepadajočih in z leve zveznih funkcij je tudi takšna), zato lahko uporabimo točko (a) v izreku 3.1 in dobimo

$$F_{S^c}^{-1}(p) = F_{g(U)}^{-1}(p) = g(F_U^{-1}(p)), \qquad 0 < p < 1,$$

kar pomeni, da lahko inverzno porazdelitveo funkcijo S^c zapišemo kot

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p), \qquad 0 < p < 1.$$

Podobno iz točke (b) izreka 3.1 opazimo, da velja

$$F_{S^c}^{-1+}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(p), \qquad 0 < p < 1.$$

Zadnji dve enačbi pomnožimo z α in $(1-\alpha)$, seštejemo in dobimo enačbo (4.10). $\square$

Izrek nam torej pove, da lahko inverz porazdelitve komonotone vsote preprosto dobimo iz inverzov slučajnih spremenljivk X_i, kar nakazuje na to, da je iskanje porazdelitve komonotone vsote precej enostavnejše kot v primeru prvotne vsote S. Poleg tega nam še pove

$$S^c \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha)}(U). \tag{4.11}$$

S pomočjo zgornjega izreka lahko tako zapišemo povezan nosilec vsote S^c

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha)}(p) | 0 < p < 1, 0 \leq \alpha \leq 1 \Big\}.$$

Velja

$$F_{S^c}^{-1+}(0) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0), \tag{4.12}$$

$$F_{S^c}^{-1}(1) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1). \tag{4.13}$$

Torej je minimalna vrednost komonotone vsote enaka vsoti minimalnih vrednosti posameznih spremenljivk v vsoti. Podobno velja tudi za maksimalno vrednost. Vsota (4.12) je torej minimalna možna vrednost S^c, ki je lahko končna ali pa $-\infty$ (če je kakšen člen v vsoti enak $-\infty$), (4.13) pa je maksimalna možna vrednost S^c. Opazimo še

$$F_{S^c}^{-1+}(1) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(1) = +\infty,$$

$$F_{S^c}^{-1}(0) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(0) = -\infty,$$

saj v prvem primeru seštevamo samo člene z vrednostjo $-\infty$, v drugem pa z vrednostjo $+\infty$. Za nek $(X_1, \ldots, X_n)$ velja $S = X_1 + \ldots + X_n \geq \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0)$. Če seštejemo minimalne vrednosti spremenljivk X_i, bo to najmanjša možna vrednost, ki jo bo vsota S zavzela, zato neenakost drži. Zapisano malce drugače

$$F_S^{-1+}(0) \geq \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0). \tag{4.14}$$

Podobno lahko sklepamo za maksimalne vrednosti in tako dobimo

$$F_S^{-1}(1) \leq \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1). \tag{4.15}$$

Nosilec vsote $S = X_1 + \ldots + X_n$ je torej skoncentriran na intervalu

$$\Big[\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1+}(0), \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(1)\Big].$$

Minimalna vrednost S je večja ali enaka od minimalne vrednosti S^c (leva stran zaprtega intervala), kar pa je posledica komonotonosti, saj so v tem primeru vse komponente hkrati majhne.

Iz robnih porazdelitev X_i torej preprosto dobimo inverz komonotone vsote. Kako dobimo porazdelitveno funkcijo S^c, pa pove naslednja enačba

$$\begin{aligned} F_{S^c}(x) &= \sup\{p \in (0,1) | F_{S^c}(x) \geq p\} = \sup\{p \in (0,1) | F_{S^c}^{-1}(p) \leq\} = \\ &= \sup\Big\{p \in (0,1) | \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) \leq x\Big\}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

V nadaljevanju bo izraz "F_X je strogo naraščajoča pomenil", da je F_X strogo naraščajoča funkcija na $\big(F_X^{-1+}(0), F_X^{-1}(1)\big)$.

Za neko slučajno spremenljivko X veljata naslednji ekvivalenci:

$$F_X \text{ je strogo naraščajoča} \Leftrightarrow F_X^{-1} \text{ je zvezna na } (0,1),$$

$$F_X \text{ je zvezna} \Leftrightarrow F_X^{-1} \text{ je strogo naraščajoča na } (0,1).$$

Prva ekvivalenca je posledica dejstva, da horizontalni odseki porazdelitvene funkcije povzročijo nepovezanost krivulje inverza porazdelitvene funkcije. Torej bo v primeru, da je F_X strogo naraščajoča, inverz zvezen. Če je F_X zvezna funkcija, torej ne bo imela skoka, bo F_X^{-1} strogo naraščajoča, saj je ne bo potrebno povezati s horizontalnim odsekom.

Predpostavimo, da so robne porazdelitvene funkcije F_{X_i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, komonotonega vektorja $(X_1^c, \ldots, X_n^c)$ strogo naraščajoče in zvezne. Po zgornjih ekvivalencah sledi, da je vsaka inverzna porazdelitvena funkcija $F_{X_i}^{-1}$ zvezna na $(0,1)$, iz tega pa sledi, da je na $(0,1)$ zvezna tudi $F_{S^c}^{-1}$, saj velja $F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p)$ za $0 < p < 1$ (vsota zveznih funkcij je zvezna funkcija). Prva ekvivalenca nam nadalje zagotavlja, da je F_{S^c} strogo naraščajoča na $\big(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)\big)$. S podobnim razmislekom dobimo, da je F_{S^c} zvezna.

Torej je v primeru strogo naraščajočih in zveznih marginalnih porazdelitev verjetnost F_{S^c} enolično določena z enačbo $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x$ za nek $x \in \big(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)\big)$ oziroma

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x, \qquad F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1). \tag{4.17}$$

Če želimo dobiti $F_{S^c}(x)$, je dovolj rešiti zgornjo enačbo.

Naslednji izrek nam pove, kako izračunamo stop–loss premijo za S^c, če poznamo stop–loss premijo za spremenljivke X_i.

Izrek 4.8. *Stop–loss premija vsote S^c, kjer njene komponente sestavlja komonoton vektor $(X_1^c, \ldots, X_n^c)$, je enaka*

$$\mathrm{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[(X_i - d_i)_+], \qquad F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1), \tag{4.18}$$

kjer za d_i velja

$$d_i = F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.19}$$

in je $\alpha_d \in [0, 1]$ definiran kot

$$F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = d. \tag{4.20}$$

Dokaz. Naj bo $d \in \left(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)\right)$, kar pomeni, da velja $0 < F_{S^c}(d) < 1$. Definirajmo povezan nosilec $\underline{X}^c$ kot v enačbi (4.8). Ker je nosilec komonoton, je presečišče med njim in hiperravnino $\{\underline{x} | x_1 + \ldots + x_n = d\}$ ena sama točka, saj hiperravnina ne vsebuje več različnih točk $\underline{x}$ in $\underline{y}$, da bi veljalo $\underline{x} \leq \underline{y}$ ali $\underline{x} \geq \underline{y}$.

Dokažimo, da je vektor $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_n)$, definiran z (4.19), enolično določen s točko presečišča med nosilcem in omenjeno hiperravnino. Velja $0 < F_{S^c}(d) < 1$. V 3. poglavju smo pokazali, da obstaja $\alpha_d \in [0, 1]$, da zadosti pogoju (4.20). S pomočjo izreka 4.7 dobimo

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = F_{S^c}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) = d.$$

Torej, vektor $\underline{d}$, definiran z (4.19) in (4.20), je element povezanega nosilca $\underline{X}^c$ in hiperravnine $\{\underline{x} | x_1 + \ldots + x_n = d\}$, kar pomeni, da je d res presečišče med njima. Ker je tako presečišče samo eno, je d enolično določen.

Naj bo $\underline{x}$ element povezanega nosilca $\underline{X}^c$. Potem velja

$$(x_1 + ... + x_n - d)_+ \equiv (x_1 - d_1)_+ + ... + (x_n - d_n)_+,$$

saj sta $\underline{x}$ in $\underline{d}$ elementa povezanega komonotonega nosilca. Če obstaja tak j, da velja $x_j > d_j$, potem je $x_k \geq d_k$ za vsak k. Zgornja enakost potem velja, saj je $x_k - d_k \geq 0$ za vsak k. V primeru $x_j \leq d_j$ bosta obe strani enačbe enaki 0 in zgornja enakost prav tako velja.
Konstante v zgornji enačbi zamenjamo s pripadajočimi slučajnimi spremenljivkami in izračunamo matematično upanje

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(X_1^c + \ldots + X_n^c - d)_+] &= \mathrm{E}[(X_1^c - d_1)_+] + \ldots + \mathrm{E}[(X_n^c - d_n)_+] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[(X_i - d_i)_+] \end{aligned}$$

□

Izrek nam torej zagotavlja, da lahko premijo pri stop–loss zavarovanju za vsoto komonotonih slučajnih spremenljivk dobimo direktno iz stop–loss premij posameznih spremenljivk, ne da bi morali poznati porazdelitev vsote.

Iz formule (2.6) sledita naslednji enačbi

$$\mathrm{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] - d, \quad d \leq F_{S^c}^{-1+}(0), \tag{4.21}$$

$$\mathrm{E}[(S^c - d)_+] = 0, \quad d \geq F_{S^c}^{-1}(1). \tag{4.22}$$

Stop–loss premijo za komonotono vsoto S^c lahko izrazimo samo s standardnimi inverzi porazdelitvenih funkcij. Za $d \in \big(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)\big)$ lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\big[(X_i - F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)))_+\big] &= \mathrm{E}\big[(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+\big] - \\ &- (F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)) - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))(1 - F_{S^c}(d)). \end{aligned}$$

Obe strani zgornje enačbe seštejemo po vseh i, upoštevamo definicijo α_d kot prej in za $d \in \big(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)\big)$ dobimo

$$\mathrm{E}\big[(S^c - d)_+\big] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\big[(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+\big] - \big(d - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d))\big)(1 - F_{S^c}(d)). \tag{4.23}$$

Če so robne porazdelitve F_{X_i} strogo naraščajoče, lahko enačbo (4.23) reduciramo na

$$\mathrm{E}\big[(S^c - d)_+\big] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\big[(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)))_+\big], \qquad d \in \big(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)\big). \tag{4.24}$$

Če upoštevamo $\mathrm{E}[(X-d)_+] - \mathrm{E}[(d-X)_+] = \mathrm{E}[X] - d$ za S^c in X_i v enačbi (4.18), za spodnje repe vsote komonotonih slučajnih spremenljivk dobimo naslednjo enačbo

$$\mathrm{E}[(d - S^c)_+] = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{E}[(d_i - X_i)_+], \qquad F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1), \tag{4.25}$$

kjer je d_i definiran z (4.19) in (4.20).

5 Konveksne meje za vsoto slučajnih spremenljivk

V tem poglavju bomo definirali spodnje in zgornje meje za porazdelitev vsote (1.1), kjer poznamo robne porazdelitve slučajnih spremenljivk X_i, $i = 1, \ldots, n$. Dobljene meje imenujemo konveksne meje, saj bomo slučajne spremenljivke razvrstili glede na konveksno ureditev.

5.1 Komonotona zgornja meja

Zgornjo mejo dobimo s pomočjo komonotonega vektorja in izkaže se, da je le-ta supremum v konveksnem smislu. Drugače povedano, največja možna vsota v konveksnem smislu bo ravno vsota slučajnih spremenljivk, ki so komonotone.

Izrek 5.1. *Za poljuben slučajni vektor* $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *velja*

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq_{cx} X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c. \tag{5.1}$$

Dokaz. Dovolj je preveriti stop–loss ureditev, saj sta očitno matematični upanji spremenljivk S in S^c enaki (imata enake robne porazdelitve). Dokazati moramo

$$\mathrm{E}[(X_1 + X_2 + \ldots + X_n - d)_+] \leq \mathrm{E}[(X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c - d)_+]$$

za vse odbitke d, za katere velja $d \in \left(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)\right)$. Če je $d = d_1 + \ldots + d_n$, lahko zapišemo

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n - d)_+ &= ((x_1 - d_1) + (x_2 - d_2) + \ldots + (x_n - d_n))_+ \\ &\leq (x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + \ldots + (x_n - d_n)_+.\end{aligned}$$

Konstante v zgornji neenačbi nadomestimo s slučajnimi spremenljivkami, upoštevamo linearnost matematičnega upanja in dobimo

$$\mathrm{E}[(X_1 + \ldots + X_n - d)_+] \leq \mathrm{E}[(X_1 - d_1)_+] + \ldots + \mathrm{E}[(X_n - d_n)_+] \tag{5.2}$$

za take d_i, da je $d = \sum_{i=1}^n d_i$. Desna stran pa je po izreku 4.8 enaka $\mathrm{E}[(S^c - d)_+]$ in s tem je izrek dokazan. □

Zgornji izrek nam torej pove, da vsota slučajnih spremenljivk doseže največjo vrednost (v konveksnem smislu), ko je slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$ komonoton. V tem primeru so slučajne spremenljivke med seboj maksimalno odvisne in vse komponente tega vektorja so funkcija iste slučajne spremenljivke.

Za vse $d \in \left(F_{S^c}^{-1+}(0), F_{S^c}^{-1}(1)\right)$, za katere velja $d = \sum_{i=1}^n d_i$, lahko s pomočjo izrekov 4.8 in 5.1 zapišemo neenačbo (5.2) kot

$$\mathrm{E}[(X_1 + \ldots + X_n - d)_+] \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{E}[(X_i - F_{X_i}^{-1(\alpha_d)}(F_{S^c}(d)))_+] \leq \sum_{i=1}^n \mathrm{E}[(X_i - d_i)_+]. \tag{5.3}$$

Torej je pri teh pogojih najmanjša zgornja meja za stop–loss premijo spremenljivke

S ravno komonotona zgornja meja.

V izreku 4.6 smo ugotovili, da je komonotonost slučajnega vektorja $(X_1, \ldots, X_n)$ ekvivalentna komonotonost vseh parov (X_i, X_j) za $\forall i \neq j$. Zato se zdi smiselno komonotonost parov (X_i, X_j) primerjati z znanim Pearsonovim koeficientom korelacije.

Definicija 5.2 (Pearsonov korelacijski koeficient)**.** *Za slučajni vektor (X, Y) je Pearsonov korelacijski koeficient enak*

$$\mathrm{r}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}}, \tag{5.4}$$

kjer je $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathrm{E}\big[(X - \mathrm{E}[X])(Y - \mathrm{E}[Y])\big]$ *kovarianca med X in Y ter* $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\big[(X - \mathrm{E}[X])^2\big]$ *varianca slučajne spremenljivke X.*

Lema 5.3. $\mathrm{r}(X, Y) = 1$ *natanko tedaj, kadar obstajata realni konstanti $a > 0$ in b, da je $Y = aX + b$.*

Če je $\mathrm{r}(X, Y) = 1$, je povezan nosilec premica, kar pa pomeni, da je (X, Y) komonoton (zvišanje ene komponente vodi do zvišanje druge). Obratno, če nosilec ni premica, bo vedno veljalo $\mathrm{r}(X, Y) < 1$, torej iz komonotonosti vektorja (X, Y) ne sledi $\mathrm{r}(X, Y) = 1$.

V primeru n-dimenzionalnega vektorja ugotovimo: če je $\mathrm{r}(X_i, X_j) = 1$ za $\forall i \neq j$, potem je $(X_1, \ldots, X_n)$ komonoton. Za obratno smer je potreben še dodaten pogoj, o čemer pa govori naslednji izrek.

Izrek 5.4. *Naj bo $\underline{X}$ slučajni vektor z robnimi porazdelitvami F_{X_i}, za katere velja, da obstajajo slučajna spremenljivka Y in realne konstante $a_i > 0$ ter b_i, tako da velja $X_i \overset{\mathrm{d}}{=} a_i Y + b_i$, $i = 1, \ldots, n$. Potem je $\underline{X}$ komonoton natanko tedaj, ko velja $\mathrm{r}(X_i, X_j) = 1$ za $\forall i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Dokaz. S pomočjo izreka 3.1 za slučajne spremenljivke X_i, definirane kot v izreku, ugotovimo, da velja

$$F_{X_i}^{-1}(p) = a_i F_Y^{-1}(p) + b_i, \qquad p \in (0, 1).$$

Če upoštevamo še izrek 4.5, ugotovimo, da je $\underline{X}$ komonoton natanko tedaj, ko velja $\underline{X} \overset{\mathrm{d}}{=} (a_1 F_Y^{-1}(p) + b_1, \ldots, a_n F_Y^{-1}(p) + b_n)$, kar pomeni, da komonotonost vektorja $\underline{X}$ implicira $\mathrm{r}(X_i, X_j) = 1$ za $\forall i \neq j$.

Obratno, če za vsak par (X_i, X_j), $i \neq j$, velja $\mathrm{r}(X_i, X_j) = 1$, potem je par (X_i, X_j) komonoton. Iz izreka 4.6 sledi, da je $\underline{X}$ komonoton. $\square$

Z upoštevanjem dejstva, da je komonotona vsota pri danih robnih porazdelitvah največja v konveksnem smislu, bomo dokazali, da je komonotonost ekvivalentna maksimalni korelaciji med vsemi pari (X_i, X_j). V pomoč nam bo naslednja lema.

Lema 5.5. *Za nek slučajni vektor (X, Y) in neko realno število d velja*

$$\mathrm{E}[(X+Y-d)_+] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] - d + \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X,Y}(x, d-x)\,\mathrm{d}\,x. \tag{5.5}$$

Dokaz. Velja $(X-d)_+ - (d-X)_+ = X - d$, zato lahko zapišemo

$$\mathrm{E}[(X+Y-d)_+] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] - d + \mathrm{E}[(d-X-Y)_+].$$

Pokazati moramo, da sta zadnja člena v zgornji enačbi in v (5.5) enaka. Če zamenjamo vrstni red integriranja, dobimo

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(d-X-Y)_+] &= \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{d-x} \int_{t=x}^{d-y} \mathrm{d}\,t\,\mathrm{d}\,F_{X,Y}(x,y) = \\
&= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{x=-\infty}^{t} \int_{y=-\infty}^{d-t} \mathrm{d}\,F_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\,x = \\
&= \int_{t=-\infty}^{+\infty} F_{X,Y}(t, d-t)\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}$$

In tako res dobimo enačbo (5.5). □

Izrek 5.6. *Slučajni vektor $\underline{X}$ je komonoton natanko tedaj, ko velja*

$$\mathrm{r}(X_i, X_j) = \mathrm{r}(X_i^c, X_j^c)$$

za vsak $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Dokaz. Ker je komonotonost vektorja $\underline{X}$ ekvivalentna komonotonosti parov (X_i, X_j), je zgornji izrek dovolj dokazati za 2-dimenzionalni vektor (X_i, X_j).

($\Rightarrow$): Vektorja (X_i, X_j) in (X_i^c, X_j^c) imata enaki robni porazdelitvi, zato sta korelacijska koeficienta enaka.

($\Leftarrow$): Najprej dokažimo, da je $\mathrm{r}(X_i, X_j) = \mathrm{r}(X_i^c, X_j^c)$ ekvivalentno $\mathrm{Var}[X_i + X_j] = \mathrm{Var}[X_i^c + X_j^c]$. Če velja $\mathrm{r}(X_i, X_j) = \mathrm{r}(X_i^c, X_j^c)$, potem je $\mathrm{Cov}[X_i, X_j] = \mathrm{Cov}[X_i^c, X_j^c]$, iz česar sledi $\mathrm{E}[X_i X_j] = \mathrm{E}[X_i^c X_j^c]$. Zato velja

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X_i + X_j] &= \mathrm{E}[(X_i + X_j)^2] - \mathrm{E}^2[X_i + X_j] = \\
&= \mathrm{Var}[X_i] + \mathrm{Var}[X_j] + 2\mathrm{E}[X_i X_j] - 2\mathrm{E}[X_i]\mathrm{E}[X_j] = \\
&= \mathrm{Var}[X_i^c] + \mathrm{Var}[X_j^c] + 2\mathrm{E}[X_i^c X_j^c] - 2\mathrm{E}[X_i^c]\mathrm{E}[X_j^c] = \\
&= \mathrm{Var}[X_i^c + X_j^c].
\end{aligned}$$

Za dokaz v obratni smeri naredimo podoben razmislek.

Dovolj je torej preveriti, da iz $\mathrm{Var}[X_i + X_j] = \mathrm{Var}[X_i^c + X_j^c]$ sledi komonotonost vektorja (X_i, X_j). Velja $X_i + X_j \leq_{cx} X_i^c + X_j^c$. Ker imata slučajni spremenljivki

$X_i + X_j$ in $X_i^c + X_j^c$ enaki varianci, velja $X_i + X_j \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_i^c + X_j^c$. Za vsak realen d torej velja

$$\mathrm{E}[(X_i + X_j - d)_+] = \mathrm{E}[(X_i^c + X_j^c - d)_+].$$

Uporabimo lemo 5.5 in dobimo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[F_{X_i^c, X_j^c}(x, d-x) - F_{X_i, X_j}(x, d-x)\right] \mathrm{d}\, x = 0.$$

Integrand v zgornji enačbi je nenegativen, zato velja

$$F_{X_i, X_j}(x, d-x) = F_{X_i^c, X_j^c}(x, d-x)$$

za $\forall x$. Ker mora veljati tudi za $\forall d$, je izrek dokazan. □

V zgornjem dokazu smo pokazali, da lahko izrek 5.6 zapišemo tudi kot: $\underline{X}$ je komonoton $\Leftrightarrow \mathrm{Var}[X_i + X_j] = \mathrm{Var}[X_i^c + X_j^c]$ za $\forall i \neq j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Po izreku 5.1 velja $X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq_{cx} X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c$, zato za poljuben slučajni vektor (X_i, X_j) velja

$$\mathrm{Var}[X_i + X_j] \leq \mathrm{Var}[X_i^c + X_j^c], \tag{5.6}$$

kar pa je ekvivalentno

$$\mathrm{r}(X_i, X_j) \leq \mathrm{r}(X_i^c, X_j^c). \tag{5.7}$$

Če (X_1, X_2) ni komonoton, velja stroga neenakost.

Slučajno spremenljivko S smo aproksimirali s S^c. Komonoton vektor $(X_1^c, \ldots, X_n^c)$ smo dobili iz inverzov marginalnih porazdelitev, torej

$$(X_1^c, \ldots, X_n^c) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (F_{X_1}^{-1}(U), \ldots, F_{X_n}^{-1}(U)).$$

Spremenljivki imata enaki matematični upanji, saj so komponente obeh vsot enako porazdeljene. Pokazali smo, da je porazdelitveno funkcijo S^c lažje najti kot porazdelitveno funkcijo S, saj bi v tem primeru morali poznati strukturo odvisnosti vektorja $(X_1, \ldots, X_n)$. Dokazali smo tudi, da lahko stop–loss premijo za spremenljivko S^c konzervativno ocenimo, ne da bi poznali njeno porazdelitveno funkcijo, kar olajša delo aktuarja.

Zgled 3. Imamo slučajni vektor $(X_1, \ldots, X_n)$, kjer so spremenljivke X_i porazdeljene lognormalno in velja $\ln(X_i) \sim \mathrm{Normal}(\mu_i, \sigma_i^2)$. S pomočjo momentno rodovne funkcije normalno porazdeljene spremenljivke dobimo

$$\mathrm{E}[X_i] = e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)}, \tag{5.8}$$

$$\mathrm{Var}[X_i] = e^{2\mu_i + \sigma_i^2}(e^{\sigma_i^2} - 1). \tag{5.9}$$

Slučajno spremenljivko X_i lahko zapišemo kot $X_i = e^{\mu_i + \sigma_i Z}$, kjer je $Z \sim \text{Normal}(0,1)$. S pomočjo izreka 3.1 lahko inverz porazdelitvene funkcije spremenljivke X_i zapišemo kot

$$F_{X_i}^{-1}(p) = e^{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(p)}, \quad 0 < p < 1. \tag{5.10}$$

Opazimo, da je produkt n lognormalno porazdeljenih komonotonih slučajnih spremenljivk tudi lognormalno porazdeljen, saj velja

$$\Pi_{i=1}^n F_{X_i}^{-1}(U) \stackrel{\mathrm{d}}{=} e^{\sum_{i=1}^n \mu_i + \sum_{i=1}^n \sigma_i \Phi^{-1}(U)}. \tag{5.11}$$

Naj bo $Z_i \sim \text{Normal}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Stop–loss premijo za spremenljivko X_i lahko zato zapišemo kot

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(X_i - d_i)_+] &= \mathrm{E}[(e^{Z_i} - d_i)_+] = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{z_i} - d_i)_+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(z_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \,\mathrm{d}\, z_i = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \int_{\ln(d_i)}^{\infty} (e^{z_i} - d_i) e^{-\frac{(z_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \,\mathrm{d}\, z_i = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \int_{\ln(d_i)}^{\infty} e^{z_i} e^{-\frac{(z_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \,\mathrm{d}\, z_i - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} d_i \int_{\ln(d_i)}^{\infty} e^{-\frac{(z_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \,\mathrm{d}\, z_i.
\end{aligned}$$

Z uvedbo nove spremenljivke in upoštevanjem lastnosti porazdelitvene funkcije normalno porazdeljene spremenljivke dobimo

$$\mathrm{E}[(X_i - d_i)_+] = e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \Phi(d_{i,1}) - d_i \Phi(d_{i,2}), \quad d_i > 0, \tag{5.12}$$

kjer sta $d_{i,1}$ in $d_{i,2}$ definirana kot

$$d_{i,1} = \frac{\mu_i + \sigma_i^2 - \ln(d_i)}{\sigma_i}, \quad d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma_i. \tag{5.13}$$

Za spodnje repe s podobnim razmislekom kot zgoraj dobimo

$$\mathrm{E}[(d_i - X_i)_+] = -e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \Phi(-d_{i,1}) + d_i \Phi(-d_{i,2}), \quad d_i > 0, \tag{5.14}$$

kjer sta $d_{i,1}$ in $d_{i,2}$ definirana kot prej.

Naj bo $S = X_1 + \ldots + X_n$. Pripadajočo komonotono vsoto S^c definiramo kot $S^c = F_{X_1}^{-1}(U) + \ldots + F_{X_n}^{-1}(U)$. Potem velja $S \leq_{cx} S^c$. Robne porazdelitvene funkcije so strogo naraščajoče in zvezne, zato po enačbi (4.17) velja, da je $F_{S^c}(x)$ implicitno določena z enačbo $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x$ oziroma

$$\sum_{i=1}^n e^{\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(F_{S^c}(x))} = x, \qquad F_{S^c}^{-1+}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1). \tag{5.15}$$

S pomočjo (4.24), (5.12) in (5.15) dobimo stop–loss premijo za S^c

$$\mathrm{E}[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \Phi(\sigma_i - \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))) - d(1 - F_{S^c}(d)) \tag{5.16}$$

za vse $F_{S^c}^{-1+}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)$. Iz (5.14) pa lahko izračunamo še spodnji rep

$$\mathrm{E}[(d - S^c)_+] = -\sum_{i=1}^{n} e^{\mu_i + (\sigma_i^2/2)} \Phi(-\sigma_i + \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))) - dF_{S^c}(d). \tag{5.17}$$

5.2 Izboljšana zgornja meja

Oceno $S \leq_{cx} S^c$ pa se da izboljšati, če poznamo dodatne informacije o slučajnih spremenljivkah. Predpostavimo, da obstaja slučajna spremenljivka Λ z dano porazdelitveno funkcijo. V praksi je potrebno za Λ izbrati takšno slučajno spremenljivko, ki bo čim bolje aproksimirala iskano. Kar pomeni, da za Λ lahko vzamemo prvih nekaj členov Taylorjeve vrste, v katero razvijemo slučajne spremenljivke X_i. Npr. gibanje cene delnice dobro opisuje Brownovo gibanje, zato lahko z njim simuliramo dodatno spremenljivko, ki bo dovolj blizu gibanju delnice. Na kakšen način pri delnicah izbiramo slučajno spremenljivko Λ je bolj podrobno predstavljeno v 6. poglavju.

Izrek 5.7. *Naj bo U slučajna spremenljivka, porazdeljena enakomerno na $(0,1)$, ki je neodvisna od slučajne spremenljivke Λ. Potem velja*

$$X_1 + \ldots + X_n \leq_{cx} F_{X_1|\Lambda}^{-1}(U) + \ldots + F_{X_n|\Lambda}^{-1}(U), \tag{5.18}$$

kjer je $F_{X_i|\Lambda}(p)$ pogojna porazdelitvena funkcija spremenljivke X_i glede na Λ.

Dokaz. Za konveksno funkcijo v velja

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[v(X_1 + \ldots + X_n)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}[v(X_1 + \ldots + X_n)|\Lambda = \lambda] \,\mathrm{d}\, F_\Lambda(\lambda) \leq \\
&\leq \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}[v(f_1(U,\lambda) + \ldots + f_n(U,\lambda))] \,\mathrm{d}\, F_\Lambda(\lambda) = \\
&= \mathrm{E}[v(f_1(U,\Lambda) + \ldots + f_n(U,\Lambda))],
\end{aligned}$$

kjer je $f_i(u,\lambda) = F_{X_i|\Lambda=\lambda}^{-1}(u)$. Funkcija $\max(x,0)$ je konveksna, zato za zgornji slučajni spremenljivki velja stop–loss ureditev. Za dokaz konveksne ureditve je

potrebno pokazati še, da imata spremenljivki enaki matematični upanji.

$$\begin{aligned} F_{X_i}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}[X_i \leq x | \Lambda = \lambda] \,\mathrm{d}\, F_\Lambda(\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}[F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(U) \leq x] \,\mathrm{d}\, F_\Lambda(\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}[f_i(U,\lambda) \leq x] \,\mathrm{d}\, F_\Lambda(\lambda) = \mathrm{P}[f_i(U,\Lambda) \leq x]. \end{aligned}$$

Zgornji račun pokaže, da ima slučajni vektor $(F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U), \ldots, F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U))$ enake robne porazdelitve kot $(X_1, \ldots, X_n)$, torej sta matematični upanji obeh vsot enaki. S tem pa je dokazana konveksna ureditev. □

Izrek 5.1 nam da

$$F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U) \leq_{cx} F^{-1}_{X_1}(U) + \ldots + F^{-1}_{X_n}(U). \tag{5.19}$$

Definirajmo S in S^u

$$S = X_1 + \ldots + X_n, \tag{5.20}$$

$$S^u = F^{-1}_{X_1|\Lambda}(U) + \ldots + F^{-1}_{X_n|\Lambda}(U). \tag{5.21}$$

Za oceno "kvalitete" izboljšane zgornje meje primerjajmo njeno varianco z $\mathrm{Var}[S]$. V pomoč nam bo formula o popolni disperziji, ki pravi

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{E}\big[\mathrm{Var}[X|Y]\big] + \mathrm{Var}\big[\mathrm{E}[X|Y]\big] \tag{5.22}$$

za poljubni slučajni spremenljivki X in Y. Vemo, da velja

$$\mathrm{Var}\big[\mathrm{E}[S^u|\Lambda]\big] = \mathrm{Var}\big[\mathrm{E}[S|\Lambda]\big].$$

Iz (5.22) ugotovimo, da velja $\mathrm{Var}[S^u] = \mathrm{Var}[S] \Leftrightarrow \mathrm{E}\big[\mathrm{Var}[S^u|\Lambda]\big] = \mathrm{E}\big[\mathrm{Var}[S|\Lambda]\big]$.

Slučajna spremenljivka S^u je vsota komonotonih slučajnih spremenljivk, če poznamo $\Lambda = \lambda$, zato lahko zapišemo

$$F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(p) = \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p), \qquad p \in (0,1). \tag{5.23}$$

Z dano $\Lambda = \lambda$ je porazdelitvena funkcija S^u enaka

$$F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x) = \sup\Big\{p \in (0,1) | \sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(p) \leq x\Big\}. \tag{5.24}$$

Porazdelitev S^u potem dobimo kot

$$F_{S^u}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x) \mathrm{F}_\Lambda(\lambda). \tag{5.25}$$

Če so robne porazdelitve $F_{X_i|\Lambda=\lambda}$ strogo naraščajoče in zvezne, potem $F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)$ lahko dobimo, če rešimo enačbo

$$\sum_{i=1}^{n} F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)) = x, \qquad F^{-1+}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0) < x < F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1). \tag{5.26}$$

Zgornjo enačbo dobimo na ekvivalenten način kot enačbo (4.17). V tem primeru lahko iz enačbe (4.24) za $d \in \big(F^{-1+}_{S^u|\Lambda=\lambda}(0), F^{-1}_{S^u|\Lambda=\lambda}(1)\big)$ dobimo premijo

$$\mathrm{E}\big[(S^u - d)_+|\Lambda = \lambda\big] \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\big[(X_i - F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(F_{S^u|\Lambda=\lambda}(x)))_+|\Lambda = \lambda\big]. \tag{5.27}$$

5.3 Spodnja meja

Naj bo $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ slučajni vektor z znanimi marginalnimi porazdelitvami. Ponovno predpostavljamo, da obstaja neka slučajna spremenljivka Λ (izbiramo na podoben način kot prej) z znano porazdelitveno funkcijo, tako da poznamo pogojne porazdelitvene funkcije za X_i pri pogoju Λ. S pomočjo tega dejstva bomo pokazali, kako dobimo spodnjo mejo za $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ pod pogojem slučajne spremenljivke Λ. Spodnja meja, ki preprosto povedano predstavlja bolj privlačno slučajno spremenljivko v konveksnem smislu, nam bo pomagala ugotoviti, za koliko smo precenili našo spremenljivko S, ko smo jo aproksimirali s S^u ali S^c.

Pogojno matematično upanje slučajne spremenljivke je vedno manjše ali enako v konveksnem smislu od slučajne spremenljivke same. To dejstvo uporabimo pri simuliranju spodnje meje.

Lema 5.8. *Naj bosta X in Λ poljubni slučajni spremenljivki. Potem velja*

$$\mathrm{E}[X|\Lambda] \leq_{cx} X. \tag{5.28}$$

Dokaz. Matematični upanji sta enaki, saj po formuli o popolnem matematičnem upanju velja $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\Lambda]] = \mathrm{E}[X]$. Z uporabo Jensenove neenakosti za poljubno konveksno funkcijo v dobimo

$$\mathrm{E}\big[v(\mathrm{E}[X|\Lambda])\big] \leq \mathrm{E}\big[\mathrm{E}[v(X)|\Lambda]\big] = \mathrm{E}\big[v(X)\big].$$

Funkcija $(x-d)_+$ je konveksna, kar pomeni, da lahko uporabimo Jensenovo neenakost in tako dobimo stop–loss ureditev. Skupaj z dejstvom, da sta matematični upanji enaki, dobimo konveksno ureditev. □

Izrek 5.9. *Za poljuben slučajni vektor $\underline{X}$ in poljubno slučajno spremenljivko Λ velja*

$$\mathrm{E}[X_1|\Lambda] + \mathrm{E}[X_2|\Lambda] + \ldots + \mathrm{E}[X_n|\Lambda] \leq_{cx} X_1 + X_2 + \ldots + X_n. \tag{5.29}$$

Dokaz. Po Jensenovi neenakosti za poljubno konveksno funkcijo v velja naslednja neenačba

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\big[v(X_1+X_2+\ldots+X_n)\big] &= \mathrm{E}\Big[\mathrm{E}\big[v(X_1+X_2+\ldots+X_n)|\Lambda\big]\Big] \geq \\
&\geq \mathrm{E}\Big[\big[v(\mathrm{E}[X_1+X_2+\ldots+X_n|\Lambda])\big]\Big] = \\
&= \mathrm{E}\Big[\big[v(\mathrm{E}[X_1|\Lambda]+\ldots+\mathrm{E}[X_n|\Lambda])\big]\Big].
\end{aligned}$$

Podobno kot pri prejšnjem dokazu, je funkcija $(x-d)_+$ konveksna, zato lahko uporabimo Jensenovo neenačbo in dobimo konveksno ureditev, saj sta matematični upanji očitno enaki. □

Naj bo S defniran kot v (5.20) in naj s S^l označimo

$$S^l = \mathrm{E}[S|\Lambda]. \tag{5.30}$$

Matematični upanji $\mathrm{E}[X_i|\Lambda]$ in X_i sta enaki, vendar po formuli o popolni varianci velja $\mathrm{Var}[\mathrm{E}[X_i|\Lambda]] < \mathrm{Var}[X_i]$, razen če je $\mathrm{E}[\mathrm{Var}[X_i|\Lambda]] = 0$. To dejstvo nam pove, da v splošnem vektor $(\mathrm{E}[X_1|\Lambda],\ldots,\mathrm{E}[X_n|\Lambda])$ ne bo imel enake marginalne porazdelitve kot vektor $\underline{X}$. Če najdemo takšno slučajno spremenljivko Λ, da bo $\mathrm{E}[X_i|\Lambda]$ nenaraščajoča (ali nepadajoča) funkcija spremenljivke Λ, bo spodnja meja S^l vsota komonotonih slučajnih spremenljivk.

Kakšna je kvaliteta spodnje meje $\mathrm{E}[S|\Lambda]$, ocenimo z njeno varianco. Če želimo, da je čim bližje $\mathrm{Var}[S]$, moramo minimizirati $\mathrm{E}[S|\Lambda=\lambda]$ (sledi iz (5.22)). Kar pomeni, da bo najboljša spodnja meja tista, kjer si bosta S in Λ najbolj "podobni", zato se v praksi res izbirajo takšne spremenljivke.

Naj bo Λ taka slučajna spremenljivka, da so vse funkcije $g_i(\lambda) \equiv \mathrm{E}[X_i|\Lambda=\lambda]$ nenaraščajoče in zvezne funkcije Λ. Če upoštevamo točko (d) izreka 3.1, dobimo

$$\begin{aligned}
F_{S^l}^{-1}(p) &= \sum_{i=1}^{n} F_{\mathrm{E}[X_i|\Lambda]}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{g_i(\Lambda)}^{-1}(p) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i|\Lambda = F_{\Lambda}^{-1}(1-p)], \qquad p\in(0,1).
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Porazdelitvena funkcija S^l je potem

$$F_{S^l}(x) = \sup\Big\{p\in(0,1)|\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[X_i|\Lambda = F_{\Lambda}^{-1}(1-p)] \leq x\Big\}. \tag{5.32}$$

Predpostavimo, da so porazdelitvene funkcije slučajnih spremenljivk $\mathrm{E}[X_i|\Lambda]$ strogo naraščajoče in zvezne. Potem je takšna tudi porazdelitvena funkcija spremenljivke S^l in po enačbi (4.17) je S^l za vse $x\in\big(F_{S^l}^{-1+}(0), F_{S^l}^{-1}(1)\big)$ določena z enačbo

$$\sum_{i=1}^{n} F_{\mathrm{E}[X_i|\Lambda]}^{-1}(F_{S^l}(x)) = x. \tag{5.33}$$

Stop–loss premijo za S^l lahko definiramo kot v (4.24)

$$\mathrm{E}\big[(S^l - d)_+\big] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}\big[(\mathrm{E}[X_i|\Lambda] - \mathrm{E}[X_i|\Lambda = F_\Lambda^{-1+}(1 - F_{S^l}(d))])_+\big] \tag{5.34}$$

za vse $d \in \big(F_{S^l}^{-1+}(0), F_{S^l}^{-1}(1)\big)$.

6 Vrednotenje azijskih opcij s pomočjo koncepta komonotonosti

6.1 Azijske opcije

Azijske opcije so med najbolj popularnimi eksotičnimi opcijami. Hitreje so se začele razvijati v devetdesetih letih prejšnjega stoletja, saj navadne opcije niso več zadovoljile finančnih trgov, ki so postajali vse bolj kompleksni. Finančne institucije so začele iskati alternativne oblike opcij, ki bi zadovoljile specifične potrebe strank in bi hkrati povečale obseg trgovanja z njimi. Sprva so jih oblikovali z linearnimi kombinacijami navadnih opcij, kar je bilo pogosto predrago, zato so nastali novi produkti, ki so temeljili na originalnih teorijah vrednotenja opcij in so omogočili boljše zavarovanje pred tveganji tudi na bolj nestanovitnih trgih. Hkrati pa so eksotične opcije postale cenejše v primerjavi z različnimi kombinacijami navadnih opcij. Danes so eksotične opcije pomembni gradniki mednarodnih finančnih trgov. Pogosto se uporabljajo na trgih dobrin, deviznih trgih, trgih vrednostnih papirjev ipd.

Vedno znova nastajajo nove vrste eksotičnih opcij, saj uporabniki eksotičnih izvedenih finančnih instrumentov nenehno težijo k čim večji prilagodljivosti instrumentov lastnim potrebam. V grobem lahko eksotične opcije delimo na 3 skupine:

- opcije, odvisne od celotne poti oz. gibanja osnovnega instrumenta,
- opcije, ki so napisane na več instrumentov,
- druge eksotične opcije.

V prvo skupino spadajo tudi azijske opcije in za razliko od navadnih opcij je njihova cena odvisna tudi od gibanja vrednosti osnovnega instrumenta v življenjski dobi opcije in ne samo od vrednosti instrumenta od dospetju. V primeru azijskih opcij za dodatno spremenljivko vzamemo kar povprečno vrednost cene osnovnega instrumenta v opazovanem obdobju in glede na vrsto povprečja tako ločimo tri vrste azijskih opcij:

- **aritmetične azijske opcije**,
- **geometrijske azijske opcije**,
- opcije, kjer je dodatna spremenljivka definirana kot **tehtano** povprečje.

Za vse zgoraj definirane opcije lahko vzamemo diskretni ali zvezni vzorec vrednosti, vendar se zvezno vzorčenje ne uporablja predvsem zaradi praktičnih razlogov. V povprečja namreč težko vključimo vsako kotirano ceno osnovnega instrumenta, saj so podatki lahko nezanesljivi, prav tako pa natančen čas posamezne kotacije ni nujno znan. Običajno se zato uporabljajo le ključne cene, npr. zaključni tečaji.

Doba, v kateri izračunamo povprečje, je lahko enaka, krajša ali daljša od življenjske dobe opcije.

V nadaljevanju se bomo omejili na aritmetične azijske opcije, predstavljeni bodo računi samo za nakupne opcije in opcije evropskega tipa, kar pomeni, da je izvršitev opcije možna samo ob času zapadlosti. Naj bo $A(t)$ vrednost osnovnega instrumenta v trenutku t, s K označimo izvršilno ceno in s T čas zapadlosti opcije. Izplačilo ob dospetju je dano z $(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) - K)_+$, pri čemer smo se zaradi enostavnosti pisave omejili na ekvidistantne časovne točke.

Če želimo vrednotiti aritmetične azijske opcije, moramo znati določiti porazdelitveno funkcijo povprečja $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)$, kjer so sumandi med seboj odvisne slučajne spremenljivke. Vrednotenja se lahko lotimo s pomočjo binomskih dreves ali Monte Carlo metode, lahko pa uporabimo teoretične rezultate, predstavljene v prejšnjih poglavjih, saj je povprečje ravno vsota nekih slučajnih spremenljivk.

6.2 Vrednotenje opcij v Black–Scholesovem modelu

Privzeli bomo, da slučajni proces $\{A(t), t \geq 0\}$ sledi Black–Scholesovemu modelu, kar pomeni, da je

$$A(t) = A(0)e^{\mu t + \sigma B(t)}, \tag{6.1}$$

kjer $A(0) > 0$, μ donosnost osnovnega instrumenta, σ nestanovitnost in $\{B(t), t \geq 0\}$ standardno Brownovo gibanje, tj. slučajni proces z neodvisnimi in stacionarnimi prirastki, za katere velja, da je slučajna spremenljivka $B(t)$ porazdeljena normalno z upanjem 0 in varianco t, prav tako pa velja $B(0) = 0$.

Po splošni teoriji Black–Scholesovega modela [2] lahko vsako opcijo vrednotimo tako, da izračunamo matematično upanje njene vrednosti ob dospetju, pri čemer μ nadomestimo z $(\delta - \frac{\sigma^2}{2})$, kjer je δ netvegana obrestna mera za zvezno obrestovanje. Če definiramo

$$A(t) = A(0)e^{(\delta - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t)}, \quad t \geq 0, \tag{6.2}$$

je cena azijske opcije enaka

$$\mathrm{AC}(n, K, T) = e^{-\delta T}\mathrm{E}\Big[\big(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) - K\big)_+\Big]. \tag{6.3}$$

Iz enačbe (6.2) sledi, da so slučajne spremenljivke $A(T-i)$ porazdeljene lognormalno s parametroma $(\delta - \frac{\sigma^2}{2})$ in $t\sigma^2$. Porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke $A(t)$ je definirana kot

$$F_{A(t)}(x) = \mathrm{P}\big[A(0)e^{(\delta - \frac{\sigma^2}{2})t + \sqrt{t}\sigma\Phi^{-1}(U)} \leq x\big], \tag{6.4}$$

kjer je U slučajna spremenljivka, porazdeljena enakomerno na $(0, 1)$, $\Phi(x)$ pa označuje porazdelitveno funkcijo standardizirane normalne slučajne spremenljivke.

Zgornjo mejo za $\mathrm{AC}(n,K,T)$ lahko skonstruiramo s pomočjo cene evropske nakupne opcije, ki je definirana kot

$$\mathrm{EC}(K,T) = e^{-\delta T}\mathrm{E}\big[(A(T)-K)_+\big]. \tag{6.5}$$

Opazimo, da je vrednost evropske nakupne opcije enaka vrednosti azijske opcije za $n=1$, torej velja $\mathrm{EC}(K,T) = \mathrm{AC}(1,K,T)$.

Za vse odbitke K_i in K, tako da velja $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$ lahko zaradi Jensenove neenakosti zapišemo

$$\begin{aligned}
\mathrm{AC}(n,K,T) &= \frac{e^{-\delta T}}{n}\mathrm{E}\Big[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) - nK\Big)_+\Big] \leq \\
&\leq \frac{e^{-\delta T}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{E}\big[(A(T-i)-nK_i)_+\big] = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\delta i}\mathrm{EC}(nK_i, T-i),
\end{aligned} \tag{6.6}$$

kjer smo predpostavili, da je doba, v kateri računamo povprečje, krajša od življenjske dobe opcije. Z zgornjim postopkom smo sicer dobili zgornjo mejo za ceno azijske opcije evropskega tipa, vendar nam teorija komonotosti omogoča najti boljšo.

Definiramo komonotono vsoto kot v četrtem poglavju, torej $S^c = \sum_{i=0}^{n-1} F^{-1}_{A(T-i)}(U)$, kjer je U enakomerno porazdeljena slučajna spremenljivka. Zaradi izreka 5.1 velja

$$\mathrm{AC}(n,K,T) \leq \frac{e^{-\delta T}}{n}\mathrm{E}\big[(S^c - nK)_+\big] \tag{6.7}$$

S pomočjo izreka (4.8) lahko za vse K, za katere velja $F^{-1+}_{S^c}(0) < nK < F^{-1}_{S^c}(1)$, zapišemo

$$\begin{aligned}
\frac{e^{-\delta T}}{n}\mathrm{E}\big[(S^c-nK)_+\big] &= \frac{e^{-\delta T}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{E}\big[(A(T-i) - F^{-1(\alpha)}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)))_+\big] = \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\delta i}\mathrm{EC}\big(F^{-1(\alpha)}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)), T-i\big),
\end{aligned} \tag{6.8}$$

kjer je α definiran kot

$$F^{-1(\alpha)}_{S^c}(F_{S^c}(nK)) = nK. \tag{6.9}$$

Torej je zgornja meja za ceno azijske opcije $\mathrm{AC}(n,K,T)$ z $F^{-1+}_{S^c}(0) < nK < F^{-1}_{S^c}(1)$ enaka

$$\mathrm{AC}(n,K,T) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\delta i}\mathrm{EC}\big(F^{-1(\alpha)}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)), T-i\big). \tag{6.10}$$

Iz enačbe (5.3) za K_i in K, tako da velja $K = \sum_{i=1}^{n} K_i$, sledi

$$\frac{e^{-\delta T}}{n}\mathrm{E}\big[(S^c - nK)_+\big] \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\delta i}\mathrm{EC}(nK_i, T-i), \tag{6.11}$$

saj komonotona vsota predstavlja najmanjšo možno zgornjo mejo.

Če velja ali $nK \leq F_{S^c}^{-1+}(0)$ ali $nK \geq F_{S^c}^{-1}(1)$, potem je cena azijske opcije določena glede na enačbi (4.21) in (4.22). V prvem primeru velja, da je izvršilna cena K manjša od cene delnice na trgu v času dospetja in se nam opcijo splača izvršiti. Drugi primer pa nakazuje na ravno obratno situacijo, zato se opcije ne splača izvršiti.

Zgornji izračuni veljalo za $T-n+1 > 0$. Sedaj predpostavimo, da velja $T-n+1 \leq 0$, kar pomeni, da so v povprečje cen delnice vključene tudi cene v času, ko opcija še ni bila podpisana. Poznamo cene $A(T-n+1), A(T-n+2), \ldots, A(0)$, cene $A(1), \ldots, A(T)$ pa so slučajne. Velja

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}(n,K,T) &= \frac{e^{-\delta T}}{n}\mathrm{E}\Bigg[\Big(\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) - nK\Big)_+\Bigg] = \\ &= \frac{e^{-\delta T}}{n}\mathrm{E}\Bigg[\Big(\sum_{i=0}^{T-1} A(T-i) - \Big(nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i)\Big)\Big)_+\Bigg]. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Ponovno lahko uporabimo isto metodo kot zgoraj. Definiramo komonotono vsoto kot $S^c = \sum_{i=0}^{T-1} F_{A(T-i)}^{-1}(U)$. Za $F_{S^c}^{-1+}(0) < nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i) < F_{S^c}^{-1}(1)$ lahko zapišemo

$$\mathrm{AC}(n,K,T) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{T-1} e^{\delta i}\mathrm{EC}\Bigg[F_{A(T-i)}^{-1(\alpha)}\Big(F_{S^c}\Big(nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i)\Big)\Big), T-i\Bigg], \tag{6.13}$$

kjer je α definiran kot

$$F_{S^c}^{-1(\alpha)}\Bigg[F_{S^c}\Big(nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i)\Big)\Bigg] = nK - \sum_{i=T}^{n-1} A(T-i). \tag{6.14}$$

Zgornji postopek nam torej vrne zgornjo mejo za ceno azijske nakupne opcije. Za prodajno opcijo bi ponovno lahko uporabili koncept komonotonosti, saj je njena cena ravno simetrična glede na nakupno opcijo. Velja

$$\mathrm{AC}(n,K,T) = e^{-\delta T}\mathrm{E}\Bigg[\Big(K - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)\Big)_+\Bigg]. \tag{6.15}$$

S pomočjo enačbe (4.25) pridemo do podobnih rezultatov kot pri nakupni opciji.

Slučajni proces $\{A(t), t \geq 0\}$ sledi Black–Scholesovemu modelu, kar pomeni, da so $A(t)$ porazdeljene lognormalno. S pomočjo (5.12) in (5.13) lahko zapišemo

$$\mathrm{EC}(K,T) = A(0)\Phi(d_1) - Ke^{-\delta T}\Phi(d_2), \tag{6.16}$$

kjer sta d_1 in d_2 definirana kot

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{A(0)}{K}) + (\delta + \frac{\sigma^2}{2}T)}{\sigma\sqrt{T}} \tag{6.17}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma T. \tag{6.18}$$

Enačba (6.16) se imenuje **Black–Scholesova formula** za ceno evropske nakupne opcije. Z njeno bomo definirali zgornjo in spodnjo mejo za azijske opcije. Predpostavimo, da trenutna cena delnice še ni vključena v povprečje. Če upoštevamo enačbi (6.7) in (5.16), dobimo komonotono zgornjo mejo za azijsko nakupno opcijo

$$\mathrm{AC}(n,K,T) \leq \frac{A(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i}\Phi\big[\sigma\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))\big] - e^{-\delta T}K\big(1 - F_{S^c}(nK)\big) \tag{6.19}$$

za vse $K > 0$, kjer $F_{S^c}(nK)$ zadošča enačbi

$$\sum_{i=0}^{n-1} F^{-1}_{A(T-i)}(F_{S^c}(nK)) = nK \tag{6.20}$$

oz. ekvivalentno iz (6.2) in izreka 3.1 velja

$$A(0)\sum_{i=0}^{n-1}\exp\left[\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-i) + \sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))\right] = nK. \tag{6.21}$$

Za spodnjo mejo cene azijske opcije najprej potrebujemo dodatno spremenljivko Λ. Poiskati moramo čim boljšo, torej tisto, ki bo iskani slučajni spremenljivki čim bližja. Dobra aproksimacija gibanja osnovnega instrumenta je Brownovo gibanje, zato za Λ vzamemo

$$\Lambda = \sum_{j=0}^{n-1} e^{(\delta - \frac{\sigma^2}{2})(T-j)}B(T-j). \tag{6.22}$$

Iz enačbe (6.2) dobimo

$$\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i) = A(0)\sum_{i=0}^{n-1} e^{(\delta - \frac{\sigma^2}{2})(T-i) + \sigma B(T-i)}. \tag{6.23}$$

Torej je Λ linerna transformacija $\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)$. Varianco spremenljivke Λ dobimo s pomočjo enačbe $\mathrm{Var}\big[\sum_{i=1}^{n} X_i\big] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Cov}(X_j, X_k)$ in je enaka

$$\sigma_\Lambda^2 = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} e^{(\delta-\frac{\sigma^2}{2})(2T-j-k)} \min(T-j, T-k). \tag{6.24}$$

Slučajni vektor $(B(T-n+1), B(T-n+2), \ldots, B(T))$ ima multivariatno normalno porazdelitev. Kar pomeni, da je slučajna spremenljivka $B(T-i)$ z dano informacijo $\Lambda = \lambda$ normalno porazdeljena z matematičnim upanjem $r_{T-i}(\frac{\sqrt{T-i}}{\sigma_\Lambda})\lambda$ in varianco $(T-i)(1-r_{T-i}^2)$, kjer je

$$r_{T-i} = \frac{\mathrm{Cov}(B(T-i), \Lambda)}{\sigma_\Lambda\sqrt{T-i}} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} e^{(\delta-\frac{\sigma^2}{2})(T-j)} \min(T-i, T-j)}{\sigma_\Lambda\sqrt{T-i}}. \tag{6.25}$$

Definiramo spodnjo mejo S^l

$$S^l = \mathrm{E}\left[\sum_{i=0}^{n-1} A(T-i)|\Lambda\right] = A(0)\sum_{i=0}^{n-1} e^{(\delta-(\frac{\sigma^2}{2})r_{T-i}^2)(T-i)+\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(U)}, \tag{6.26}$$

kjer je U enakomerno porazdeljena slučajna spremenljivka. Iz izreka 5.9 in s pomočjo dejstva, da je S^l vsota lognormalno porazdeljenih spremenljivk, dobimo spodnjo mejo za ceno azijske opcije

$$\mathrm{AC}(n,K,T) \geq \frac{A(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-\delta i}\Phi\big[\sigma r_{T-i}\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))\big] - e^{-\delta T}K(1-F_{S^l}(nK)) \tag{6.27}$$

za vse $K > 0$. Pri tem velja

$$A(0)\sum_{i=0}^{n-1}\exp\left[\left(\delta - \frac{\sigma^2}{2}r_{T-i}^2\right)(T-i) + \sigma r_{T-i}\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{S^l}(nK))\right] = nK. \tag{6.28}$$

6.3 Numerična ilustracija

Predstavili bomo nekaj numeričnih rezultatov vrednotenja azijske opcije in primerjali spodnjo in zgornjo mejo, izračunani glede na (6.19) in (6.27), z rezultati, ki jih vrne Monte Carlo metoda. Še prej pa si na kratko oglejmo, kako deluje ta metoda.

Monte Carlo metoda je numerična metoda, kjer ceno osnovnega instrumenta ponovno simuliramo z geometrijskim Brownovim gibanjem, ki ga zapišemo v diskretni obliki. Življenjsko dobo opcije razdelimo na N kratke časovne intervale dolžine Δt. Diskretna različica aproksimacijske enačbe (6.2) je potem

$$A(t + \Delta t) = A(t)e^{(\delta - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\Phi^{-1}(U)\sqrt{\Delta t}}. \tag{6.29}$$

Vrednotenje azijskih opcij s pomočjo Monte Carlo metode se lotimo v naslednjem zaporedju:

1. S pomočjo enačbe (6.29) simuliramo gibanje delnice v nekem obdobju, začnemo z današnjo ceno $A(0)$.
2. Izračunamo vrednost opcije od dospetju.
3. Ponavljamo koraka 1. in 2.
4. Izračunamo povprečje dobljenih vrednosti opcij ob dospetju in dobimo oceno pričakovane vrednosti azijske opcije ob dospetju.
5. Vrednost iz točke 4. diskontiramo z netvegano obrestno mero in dobimo ceno azijske opcije.

Število simulacij mora biti veliko, če želimo imeti zadovoljive rezultate.

Za izračune, ki so predstavljeni v tabelah 1, 2 in 3, smo vzeli naslednje podatke: časovna enota je 1 dan, $A(0) = 100$, netvegana obrestna mera je enaka 9%, 3 različne vrednosti letne nestanovitnosti $(0.2, 0.3, 0.4)$ in 5 vrednosti izvršilne cene K $(80, 90, 100, 110, 120)$. Število simulacij pri Monte Carlo metodi je 50.000.

Tabela 1 prikazuje rezultate za čas dospetja $T = 120$ in $n = 30$. Monte Carlo metoda nam vrne 95% interval zaupanja, kar pomeni, da ne moremo z gotovostjo trditi, da se cena opcije res nahaja na tem intervalu, na drugi strani pa interval [LB,UB] zagotovo vsebuje pravo vrednost opcije. Kljub velikemu številu simulacij je interval zaupanja širši kot [LB,UB] v 10-ih od 15-ih primerov. Monte Carlo približek preseže spodnjo mejo v 6-ih primerih, kar lahko nakazuje, da je LB verjetno zelo blizu prave vrednosti. Vsa našteta dejstva potrjujejo, da s pomočjo mej, ki smo jih določili s konceptom komonotonosti, pridemo do boljših ocen za ceno azijske opcije.

V Tabeli 2 so prikazani rezultati, kjer smo spremenili čas dospetja na $T = 60$, ostali paramateri pa so ostali enaki. Interval zaupanja je v tem primeru širši od [LB,UB] v 6-ih primerih, vendar Monte Carlo preseže spodnjo mejo sedemkrat. Torej spodnja meja mora biti zelo blizu pravi vrednosti.

Tabela 1: *Spodnja (LB) in zgornja (UB) meja za ceno azijske opcije za* $T = 120$ *in* $n = 30$ *v primerjavi z Monte Carlo metodo s standardnim odklonom (S.E.)* ([6])

σ	K	LB	UB	MC(S.E)
0.2	80	21.9212	21.9269	21.9233 (0.0468)
	90	12.6768	12.7204	12.6714 (0.0432)
	100	5.4609	5.5557	5.4726 (0.0329)
	110	1.6252	1.7072	1.6114 (0.0183)
	120	0.3317	0.3673	0.3336 (0.0080)
0.3	80	22.2332	22.2720	22.2651 (0.0684)
	90	13.8521	13.9512	13.8473 (0.0609)
	100	7.4787	7.6229	7.4395 (0.0484)
	110	3.4826	3.6214	3.5405 (0.0346)
	120	1.4125	1.5105	1.4003 (0.0219)
0.4	80	22.9646	23.0525	22.9694 (0.0880)
	90	15.3589	15.5115	15.3927 (0.0788)
	100	9.5113	9.7041	9.5987 (0.0665)
	110	5.4794	5.6720	5.5574 (0.0517)
	120	2.9608	3.1222	2.9519 (0.0377)

Tabela 2: *Spodnja (LB) in zgornja (UB) meja za ceno azijske opcije za* $T = 60$ *in* $n = 30$ *v primerjavi z Monte Carlo metodo s standardnim odklonom (S.E.)* ([6])

σ	K	LB	UB	MC(S.E)
0.2	80	20.7841	20.7845	20.7839 (0.0297)
	90	11.0273	11.0599	11.0205 (0.0287)
	100	3.2013	3.3443	3.1984 (0.0196)
	110	0.3373	0.4080	0.3383 (0.0064)
	120	0.0116	0.0185	0.0128 (0.0011)
0.3	80	20.8122	20.8268	20.8055 (0.0441)
	90	11.4929	11.6017	11.5160 (0.0410)
	100	4.5063	4.7221	4.4711 (0.0289)
	110	1.1516	1.3134	1.1458 (0.0150)
	120	0.1915	0.2503	0.1945 (0.0059)
0.4	80	20.9708	21.0309	20.9719 (0.0581)
	90	12.2468	12.4384	12.2183 (0.0514)
	100	5.8157	6.1038	5.8711 (0.0393)
	110	2.2082	2.4582	2.2224 (0.0248)
	120	0.6783	0.8223	0.6802 (0.0135)

Tabela 3 prikazuje rezultate za čas dospetje $T = 120$, spremenili pa smo število dni na $n = 10$. V tem primeru se izkaže, da je simulacija zelo slaba, saj je interval zaupanja širši v vseh primerih. Monte Carlo preseže spodnjo mejo sedemkrat.

Tabela 3: *Spodnja (LB) in zgornja (UB) meja za ceno azijske opcije za* $T = 120$ *in* $n = 10$ *v primerjavi z Monte Carlo metodo s standardnim odklonom (S.E.)* ([6])

σ	K	LB	UB	MC(S.E)
0.2	80	22.1712	22.1735	22.1718 (0.0495)
	90	13.0085	13.0232	13.0219 (0.0460)
	100	5.8630	5.8934	5.8793 (0.0351)
	110	1.9169	1.9442	1.9411 (0.0211)
	120	0.4534	0.4665	0.4517 (0.0098
0.3	80	22.5656	22.5795	22.5524 (0.0720)
	90	14.3149	14.3475	14.2825 (0.0644)
	100	8.0101	8.0563	8.0009 (0.0522)
	110	3.9475	3.9928	3.9788 (0.0382)
	120	1.7297	1.7633	1. 7322 (0.0250)
0.4	80	23.4194	23.4493	23.4137 (0.0933)
	90	15.9549	16.0045	15.9191 (0.0833)
	100	10.1735	10.2354	10.1853 (0.0705)
	110	6.1019	6.1643	6.0895 (0.0563)
	120	3.4683	3.5220	3.4844 (0.0431)

Zgornja meja je boljša v primeru, ko je $n = 10$ kot pa v $n = 30$. Kar potrjuje, da so slučajne spremenljivke $A(T - i)$ bolj komonotone, če so točke $T - i$ bolj skupaj.

7 Sklep

Delo diplomskega seminarja predstavlja metodo, ki rešuje pogost problem, s katerim se soočajo zavarovalnice in banke, tj. iskanje porazdelitvene funkcije vsote slučajnih spremenljivk. Prednost te metode je v tem, da ne zanemarja strukture odvisnosti slučajnega vektorja $(X_1, \ldots, X_n)$, zato se tudi v praksi izkaže za zelo dobro.

Glavna lastnost, na kateri temelji predstavljen koncept, je lastnost komonotonosti, kar pomeni, da so slučajne spremenljivke med seboj maksimalno odvisne. Iskano vsoto S smo aproksimirali s pripadajočo komonotono vsoto S^c in ugotovili, da je porazdelitvena funkcija komonotone vsote eno-dimenionalna, saj je odvisna samo od ene slučajne spremenljivke U, kar nam je olajšalo iskanje porazdelitvene funkcije vsote S^c. V primeru komonotone vsote se poenostavi tudi računanje stop–loss premije, tj. premija, ki jo določi pozavarovalnica pri pozavarovanju letnega presežka škod. Izkaže se, da je stop–loss premija spremenljivke S^c enaka kar vsoti stop–loss premij sumandov X_i.

S pomočjo lastnosti komonotonih slučajnih spremenljivk smo definirali spodnjo in zgornjo mejo in tako dobili območje, v katerem se iskana vsota S giba. Pokazali smo, da je zgornja meja v konveksnem smislu ravno komonotona vsota S^c, hkrati pa dokazali, da lahko s pravilno izbranimi odbitki najdemo najmanjšo zgornjo mejo in se zato bolj približamo iskani spremenljivki. Mejo lahko še izboljšamo, če poznamo še dodatne informacije o vsoti S. V praksi za dodatno spremenljivko vzamemo tisto, ki je iskani najbližja. S pomočjo dodatne slučajne spremenljivke smo definirali tudi spodnjo mejo.

Teorijo smo podkrepili s primerom azijskih opcij, saj se vrednotenje teh opcij izkaže za ekvivalenten problem, ki ga rešuje koncept komonotonosti. Izračunali smo zgornjo in spodnjo mejo ter ju numerično primerjali z rezultati, ki jih vrne Monte Carlo metoda. Pokazali smo, da se v tem primeru koncept komonotonosti izkaže za boljšo metodo.

Literatura

[1] A. Ahčan, G. Darkiewicz, M. Goovaerts, T. Hoedemakers, *Computation of convex bounds for present value functions of random payments*, Journal of Computational and Applied Mathematics **186** (2006) 23–42.

[2] N. A. Chriss, *Black-Scholes and Beyond: Option Pricing Models*, McGraw-Hill Professional 1996.

[3] A. Čič, *Vrednotenje katastrofnih izvedenih finančnih instrumentov v zavarovalništvu*, magistrsko delo, EF, 2009.

[4] M. Denuit, J. Dhaene, M. van Wouwe, *The economics of insurance : A review and some recent developments*, Bulletin of the Swiss Association of Actuaries (1999) 137–175.

[5] J. Dhaene, M. Denuit, M. J. Goovaerts, R. Kaas, D. Vyncke, *The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Theory*, Insurance: Mathematics and Economics **31(1)** (2002) 3–33.

[6] J. Dhaene, M. Denuit, M. J. Goovaerts, R. Kaas, D. Vyncke, *The Concept of Comonotonicity in Actuarial Science and Finance: Applications*, Insurance: Mathematics and Economics **31(2)** (2002) 133—161.

[7] R. Kaas, J. Dhaene, D. Vyncke, M. J. Goovaerts, M. Denuit, *A simple geometric proof that comonotonic risks have the convex-largest sum*, ASTIN Bulletin **32(1)** (2002) 71–80.

[8] M. Kalan, *Pozavarovanje*, specialistično delo, EF, 2004.

[9] J. Kapetan, *Azijske opcije*, diplomsko delo, EF, 2002.

[10] B. Medvešek, *Opcija kot osnovna komponenta delniških derivativov*, magistrsko delo, EPF, 2007.

[11] M. Stjepanović, *Pozavarovanje naravnih katastrof*, magistrsko delo, EF, 2006.

[12] A. Tomažin, *Modeli stohastičnih obrestnih mer pri vrednotenju življenjskih zavarovanj*, magistrsko delo, EF, 2006.

[13] S. Vanduffel, *Comonotonicity: From Risk Measurement to Risk Management*, doktorska disertacija, 2005.

[14] S. Vanduffel, Z. Shang, L. Henrard, J. Dhaene, E. A. Valdez *Analytic bounds and approximations for annuities and Asian options*, Insurance: Mathematics and Economics **42(3)** (2008) 1109–1117.

[15] D. Vyncke, M. Goovaerts, J. Dhaene, *Convex upper and lower bounds for present value functions*, Applied Stochastic Models in Business and Industry **17** (2001) 149—164.