UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 1. stopnja

Živa Mitar

Kopule

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Tomaž Košir

Ljubljana, 2010

Kazalo

Slike

Tabele

Povzetek

Kopule so funkcije, ki povezujejo večdimenzionalne porazdelitvene funkcije z njihovimi enodimenzionalnimi robnimi porazdelitvami. In kot take, omogočajo širok spekter uporabe na različnih področjih. Osrednja tema dela diplomskega seminarja je zato predstavitev (dvodimenzionalnih) kopul in njihove uporabe na področju financ. Na začetku dela spoznamo, kaj kopule sploh so, kako so definirane in katere so njihove poglavitvene lastnosti. Sledi najbolj bistven izrek, vezan na kopule in njihovo uporabo, t.j. Sklarjev izrek in njegov dokaz. V delu je nadaljnje obravnavana kopula preživetja, katera je pogosto uporabljena v financah, v svojem poglavju pa so predstavljene tudi najbolj bistvene družine kopul (eliptične, Marshall-Olkinove in arhimedske kopule) in njihove prednosti ter slabosti. Delo diplomskega seminarja je zaključeno z opisom uporabe kopul na finančnih področjih, natančnje na področju upravljanja s tveganjem.

Abstract

Copula functions are functions that link multivariate distibution functions to their onedimensional marginal distibutions. As such, they are used in a wide range of different areas. The main topic of this thesis is therefore the presentation of (bivariate) copula functions and their use in the field of finance. In the beginning, we introduce the concept of copulas, what they are and which are their basic properties. This is followed up by the theorem, which is central to the theory of copulas, i.e. Sklar's Theorem and its proof. Later on, we get to know the meaning of survival copula and then some of the most important copula families (elliptical, Marshall-Olkin's and Archimedean copulas) are presented in its own chapter. The thesis finishes with some descriptions how copulas can be used to solve different financial problems or to be more precise, how they are used in the field of finance called risk managment.

Math. Subj. Class. (2010): 60E05,62H20, 91B20, 91G40
Ključne besede: kopula, Sklarjev izek, mere odvisnosti za kopule, družine kopul, upravljanje tržnega tveganja, upravljanje kreditnega tveganja
Keywords: copula, Sklar's Theorem, copula's dependence structure, copula families, market risk management, credit risk management

Poglavje 1

Začetne definicije in osnovne lastnosti kopul

1.1 Uvod

Recimo, da z $\mathbb{R}$ označimo običajno realno os $(-\infty, \infty)$, z $\overline{\mathbb{R}}$ razširjeno realno os $[-\infty, \infty]$ in z $\overline{\mathbb{R}}^2$ ravnino $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$. Pravokotnik v $\overline{\mathbb{R}}^2$ je potem enak kartezičnemu produktu dveh zaprtih intervalov $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, kjer so točke (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) in (x_2, y_2) oglišča pravokotnika. Enotski kvadrat $\boldsymbol{I^2}$ je enak produktu $\boldsymbol{I^2} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{I}$, kjer je $\boldsymbol{I} = [0, 1]$. *2-dimenzionalna realna funkcija H* pa je funkcija, katere definicijsko območje Dom$H$ je podmnožica $\overline{\mathbb{R}}^2$, zaloga vrednosti Ran$H$ pa podmnožica $\mathbb{R}$.

Definicija 1. *Naj bosta S_1 in S_2 neprazni podmnožici $\overline{\mathbb{R}}$ in naj bo H taka dvodimenzionalna realna funkcija, da je Dom$H = S_1 \times S_2$. Naj bo $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ tak pravokotnik, da vsa njegova oglišča ležijo v DomH. Potem je* ***H-volumen pravokotnika B*** *oz. prostornina pravokotnika B glede na funkcijo H*

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1).$$

Definicija 2. *Dvodimenzionalna realna funkcija H je* ***2- naraščajoča***[1]*, če je $V_H(B) \geq 0$ za vsak pravokotnik B, čigar oglišča ležijo v DomH.*

Če je H 2-naraščajoča, potem lahko namesto H-volumna pravokotnika B uporabljamo tudi izraz ***H*-mera pravoktnika** B.

Lema 3. *Naj bosta S_1 in S_2 neprazni podmnožici $\overline{\mathbb{R}}$ in naj bo H 2-naraščajoča, Dom$H = S_1 \times S_2$. Potem je za poljubne $x_1, x_2 \in S_1$, $y_1, y_2 \in S_2$, $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$*

[1] Iz dejstva,da je H 2-naraščajoča še ne sledi, da je H nepadajoča v svojih argumentih.

funkcija $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ *nepadajoča na* S_1*, funkcija* $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ *pa nepadajoča na* S_2*.*

Dokaz. Da bi dokazali, da je funkcija $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ nepadajoča na S_1, moramo pokazati, da za poljubna $x_1, x_2 \in S_1$, $x_1 \leq x_2$ velja $t(x_1) \leq t(x_2)$.

$$t(x_2) - t(x_1) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)$$

Ker je H 2-naraščajoča, je to večje ali enako 0. S tem smo dokazali, da je $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ nepadajoča na S_1. Dokaz, da je funkcija $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ nepadajoča na S_2, je analogen. □

Za funkcijo H pravimo, da je **(navzdol) omejena**, če velja:

Naj bo a_1 najmanjši element iz S_1 in a_2 najmanjši element iz S_2. Potem je $H : S_1 \times S_2 \to R$ omejena, če je $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$ za vsak par (x, y) iz $S_1 \times S_2$.

Iz zgoraj povedanega sledi:

Lema 4. *Naj bosta* S_1 *in* S_2 *neprazni podmnožici* $\overline{\mathbb{R}}$*, naj bo* H *(navzdol) omejena 2-naraščajoča funkcija z domeno* $S_1 \times S_2$*. Potem je* H *nepadajoča v svojih argumentih.*

Dokaz. Naj bo a_1 najmanjši element množice S_1 in a_2 najmanjši element množice S_2. Če potem v lemi (3) nastavimo $x_1 = a_1$ in $y_1 = a_2$, dobimo na S_1 in S_2 nepadajoči funkciji $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, a_2)$ in $t \mapsto H(x_2, t) - H(a_1, t)$, zaporedoma. Upoštevamo $H(x, a_2) = 0$ in $H(a_1, y) = 0$ ter dobimo, da funcija $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, a_2)$ pravzaprav slika $t \mapsto H(t, y_2)$, funkcija $t \mapsto H(x_2, t) - H(a_1, t)$ pa slika $t \mapsto H(x_2, t)$. Iz tega sledi, da je H nepadajoča v svojih argumentih. □

Predpostavimo sedaj, da sta S_1 in S_2 tudi navzgor omejeni, torej, da obstaja največji elemet S_1, označimo ga z b_1, in da obstaja največji element S_2, označimo ga z b_2. Potem ima $H : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ **meji**. Meji H sta funkciji F in G:

$$Dom F = S_1 \text{ in } F(x) = H(x, b_2) \text{ za vse } x \text{ iz } S_1;$$

$$Dom G = S_2 \text{ in } G(x) = H(b_1, y) \text{ za vse } y \text{ iz } S_2.$$

Lema 5. *Naj bosta* S_1 *in* S_2 *neprazni podmnožici* $\overline{\mathbb{R}}$ *in naj bo* H *omejena 2-naraščajoča funkcija z mejama* F *in* G*, katere domena je* $S_1 \times S_2$*. Potem velja*

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Dokaz. Iz trikotniške neenakosti dobimo

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|.$$

Sedaj predpostavimo da $x_1 \leq x_2$. Ker je H omejena 2-naraščajoča funkcija z mejama, sledi iz lem (3) in (4) $0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq F(x_2) - F(x_1)$. Slednje drži, tudi če $x_1 \geq x_2$. Potemtakem za poljubna x_1, x_2 iz S_1 velja $|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |F(x_2) - F(x_1)|$. Podobno za poljubna y_1, y_2 iz S_2 dokažemo $|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |G(y_2) - G(y_1)|$. S tem je dokaz končan. □

1.2 Kopule in subkopule

Definicija 6. ***Dvodimenzionalna subkopula*** *(2-subkopula ali kar subkopula) je funkcija C' z lastnostmi:*

1. *$DomC' = S_1 \times S_2$, kjer sta S_1 in S_2 podmnožici $\boldsymbol{I}$, ki vsebujeta točki 0 in 1;*
2. *C' je (navzdol) omejena in 2-naraščajoča;*
3. *Za vsak $u \in S_1$ in za vsak $v \in S_2$,*

$$C'(u, 1) = u \text{ in } C'(1, v) = v. \tag{1.1}$$

Notacija: Za vsak $(u, v) \in DomC'$ velja $0 \leq C'(u, v) \leq 1$, torej je tudi RanC' podmnožica $\boldsymbol{I}$.

Definicija 7. ***Dvodimenzionalna kopula*** *(2-kopula ali kar kopula) je 2-subkopula C, katere domena je enaka $\boldsymbol{I^2}$.*

(Ekvivalentno) 2-kopula je funkcija C iz $\boldsymbol{I^2}$ v $\boldsymbol{I}$ z naslednjimi lastnostmi:

1. Za vsak u, v iz $\boldsymbol{I}$

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \tag{1.2}$$

in

$$C(u, 1) = u \text{ in } C(1, v) = v; \tag{1.3}$$

2. Za vse u_1, u_2, v_1, v_1 iz $\boldsymbol{I}$, kjer $u_1 \leq u_2$ in $v_1 \leq v_2$, velja

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \tag{1.4}$$

Ker velja $C(u, v) = V_C([0, u] \times [0, v])$, si lahko mislimo, da funkcija $C(u, v)$ vsakemu pravokotniku $[0, u] \times [0, v]$ v $\boldsymbol{I}$ priredi neko število. To število je po točki (1.4) zgornje definicije nenegativno.

Fréchet-Hoeffdingovi meji

Trditev 8. *Naj bo C' subkopula. Za vsak par* (u, v) *iz* $DomC'$ *velja*

$$max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq min(u, v). \tag{1.5}$$

Dokaz. Izberimo si poljubno točko $(u, v) \in DomC$. Potem je $C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u$ in $C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$, iz česar sledi $C'(u, v) \leq min(u, v)$. Dodatno iz $V_{C'}([u, 1] \times [v, 1]) \geq 0$ sledi $C'(u, v) \geq u + v - 1$. Ker velja še $C'(u, v) \geq 0$ dobimo na koncu $C'(u, v) \geq max(u + v - 1, 0)$. □

Ker je vsaka kopula subkopula, velja zgornja trditev tudi za kopule. Na tem mestu velja še pripomniti, da sta tudi meji v paru neenakosti (1.5) kopuli, običajno jih označimo z $M(u, v) = min(u, v)$ in $W(u, v) = max(u + v - 1, 0)$.

Zatorej za vsako kopulo C in vsako točko v $\boldsymbol{I^2}$ velja

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \tag{1.6}$$

Neenakostima (1.6) pravimo tudi **Fréchet-Hoeffdingovi meji** za kopule, M je Fréchet-Hoeffdingova zgornja meja, W pa Fréchet-Hoeffdingova spodnja meja. Poleg njiju je ena izmed pomembnejših kopul še produktna kopula $\Pi(u, v) = uv$.

Urejenost

Zgornji neenakosti pa že nakazujeta, da so kopule tudi urejene:

Definicija 9. *Če sta* C_1 *in* C_2 *kopuli, pravimo, da je* C_1 *manjša od* C_2 *(oz.* C_2 *večja od* C_1*) in pišemo* $C_1 \prec C_2$ *(oz.* $C_2 \succ C_1$*), če* $C_1(u, v) \leq C_2(u, v)$ *za vsak u, v iz* $\boldsymbol{I}$.

Poudariti pa moramo, da je to le delno točkovno urejanje, saj ne moremo primerjati poljubnega para kopul med sabo. Lahko se namreč zgodi, da je v primeru dveh poljubnih kopul, recimo jima C_1 in C_2, vrednost C_1 izvrednotena v eni točki večja, v drugi točki pa manjša od vrednosti C_2, izvrednotene v istih dveh točkah.

Simetrija

Definicija 10. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki in točka (a,b) poljubna točka iz* $\mathbb{R}^2$.

1. (X, Y) *je* ***marginalno simetričen*** *glede na* (a, b)*, če je X simetričen glede na a, Y pa glede na b.*

2. (X, Y) *je* ***radialno simetričen*** *glede na* (a, b), *če je skupna porazdelitvena funkcija* $(X-a, Y-b)$ *enaka kot skupna porazdelitvena funkcija* $(a-X, b-Y)$.

3. (X, Y) *je* ***skupno simetričen*** *glede na* (a, b), *če imajo pari slučajnih spremenljivk* $(a-X, b-Y)$, $(X-a, Y-b)$, $(a-X, Y-b)$ *in* $(X-a, b-Y)$ *enako skupno porazdelitveno funkcijo.*

Že takoj vidimo, da iz skupne simetričnosti sledi radialna in iz radialne marginalna simetričnost.

Trditev 11. *Naj bosta* X *in* Y *zvezni slučajni spremenljivki s skupno porazdelitveno funkcijo in robnimi porazdelitvami* F *in* G *ter kopulo* C. *Hkrati naj bo* X *simetričen glede na* a *in* Y *simetričen glede na* b. *Potem je* (X, Y) *radialno simetričen glede na* (a, b) *natanko tedaj, ko je*

$$C(u, v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v) \text{ za vsak } (u, v) \text{ iz } \boldsymbol{I^2}.^2 \tag{1.7}$$

Druga oblika simetrije pa je tudi **izmenljivost**: slučajni spremenljivki X in Y sta izmenljivi, če sta vektorja (X, Y) in (Y, X) enako porazdeljena.

Trditev 12. *Naj bosta* X *in* Y *zvezni slučajni spremenljivki porazdeljene s porazdelitvenima funkcijama* F *in* G *(zaporedoma), s skupno porazdelitveno funkcijo* H *in kopulo* C. X *in* Y *sta izmenljivi natanko tedaj, ko je* $F = G$ *in je* $C(u, v) = C(v, u)$ *za vsako točko* (u, v) *iz* $\boldsymbol{I^2}$.

Zveznost (sub)kopul

O zveznosti kopul oz. subkopul pa govori naslednja trditev, ki sledi iz leme (5).

Trditev 13. *Naj bo C' subkopula. Potem je za vsaka para* $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ *iz DomC'*

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \tag{1.8}$$

Torej je C' enakomerno zvezna na svoji domeni.

Dokaz. V lemi (5) upoštevamo $F(x) = C'(x, 1) = x$ in $G(y) = C'(1, y) = y$. S tem dokažemo neenakost (1.8). Zveznost sledi iz Lipschitzovega pogoja na $\boldsymbol{I^2}$. □

Definicija 14. *Naj bo* C *kopula, a poljubno število iz* $\boldsymbol{I}$.

Prečni prerez kopule C pri a *je funkcija iz* $\boldsymbol{I}$ *v* $\boldsymbol{I}$, *podana s* $t \mapsto C(t, a)$;

[2] Pozneje bomo videli, da ta pogoj pomeni, da je kopula C enaka svoji kopuli preživetja $\widehat{C}$.

Navpični prerez kopule C pri a *je funkcija iz* $\boldsymbol{I}$ *v* $\boldsymbol{I}$, *podana s* $t \mapsto C(a,t)$;

Diagonalni prerez kopule C pri a *je funkcija iz* $\boldsymbol{I}$ *v* $\boldsymbol{I}$, *definirana kot* $\delta_C(t) = C(t,t)$.

Posledica 15. *Prečni,navpični in diagonalni prerez kopule C pri a so nepadajoči in enakomerno zvezni na* $\boldsymbol{I}$.

Dokaz. Iz leme (4) sledi, da so nepadajoče, iz trditve (13) pa sledi enakomerna zveznost. □

Trditev 16. *Naj bo C kopula. Potem za poljuben v iz* $\boldsymbol{I}$ *za s.g. vsak u obstaja parcialni odvod* $\partial C(u,v)/\partial u$. *Za taka u,v velja:*

$$0 \leq \partial C(u,v)/\partial u \leq 1. \tag{1.9}$$

Podobno, za poljuben u iz $\boldsymbol{I}$ *za s.g. vsak v obstaja parcialni odvod* $\partial C(u,v)/\partial v$ *in za taka u, v velja:*

$$0 \leq \partial C(u,v)/\partial v \leq 1. \tag{1.10}$$

Dokaz. Parcialna odvoda $\partial C(u,v)/\partial u$ in $\partial C(u,v)/\partial v$ obstajata, ker sta prečni in navpični prerez nepadajoča in enakomerno zvezna na $\boldsymbol{I}$ ter potemtakem na $\boldsymbol{I}$ odvedljiva skoraj povsod. Neenakosti (1.9) in (1.10) pa dobimo, če v (1.8) vstavimo $v_1 = v_2$ in $u_1 = u_2$, zaporedoma. □

Trditev 17. *Naj bo C kopula. Če sta* $\partial C(u,v)/\partial v$ *in* $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v$ *zvezna na* $\boldsymbol{I}^2$ *in* $\partial C(u,v)/\partial u$ *obstaja za vsak* $u \in (0,1)$, *ko je* $v = 0$, *potem* $\partial C(u,v)/\partial u$ *in* $\partial^2 C(u,v)/\partial v \partial u$ *obstajata v* $(0,1)^2$ *in* $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v = \partial^2 C(u,v)/\partial v \partial u$.

Dokaz. Nelsen [9].

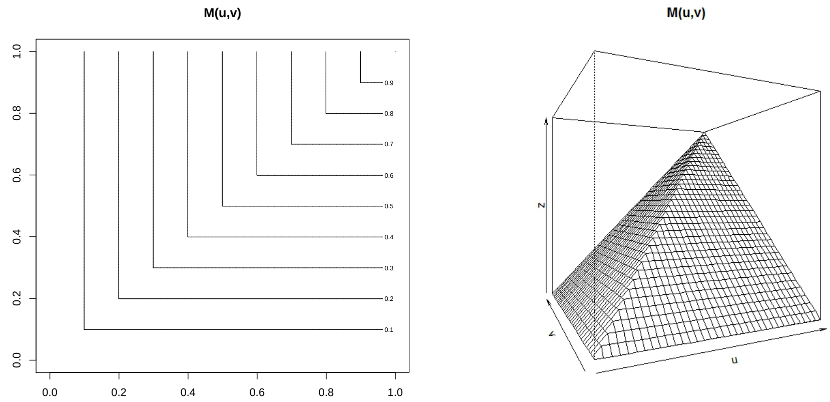
1.3 Grafi kopul

Že iz same definicije [3] kopule sledi, da je graf katerekoli kopule zvezna ploskev znotraj enotske kocke. Z upoštevanjem neenakosti (1.6), pa lahko graf še bolj omejimo.

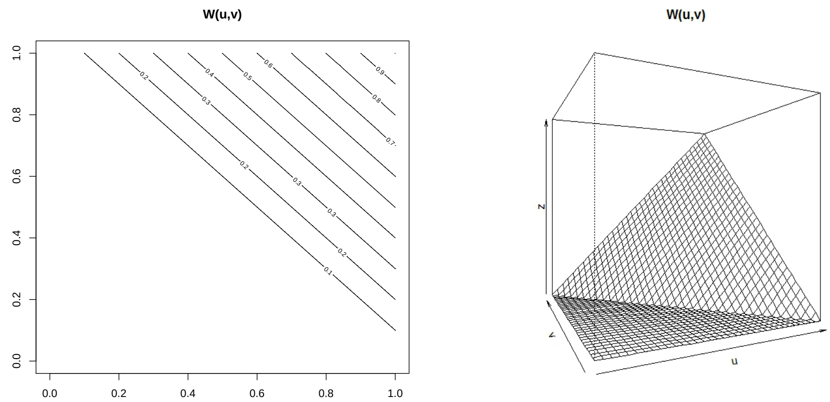
Kot posledica (14) dodatno velja še, da za poljubno kopulo C in poljubno točko t iz $\mathbf{I}$ množica točk oblike $\{(u,v) \in \boldsymbol{I}^2 | C(u,v) = t\}$ leži v trikotniku, omejenem z $M(u,v) = t$ in $W(u,v) = t$.

[3] Definicija (7) in trditev (13).

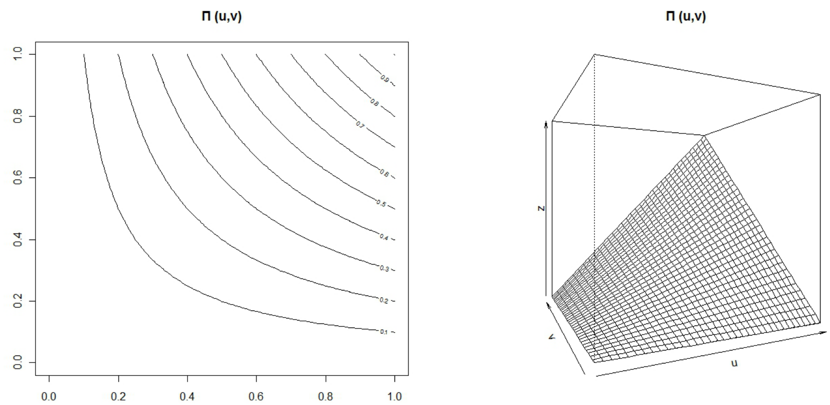
Slika 1.1: Konturni diagram in graf kopule M



Slika 1.2: Konturni diagram in graf kopule W



Slika 1.3: Konturni diagram in graf kopule Π



Poglavje 2

Sklarjev izrek

Definicija 18. ***Porazdelitvena funkcija*** *F je funkcija z definicijskim območjem $\overline{\mathbb{R}}$, za katero velja*

1. *F je nepadajoča,*

2. *$F(-\infty) = 0$ in $F(\infty) = 1$.*

Definicija 19. ***Skupna porazdelitvena funkcija*** *H je funkcija z definicijskim območjem $\overline{\mathbb{R}}^2$, za katero velja*

1. *H je 2-naraščajoča,*

2. *$H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ in $H(\infty, \infty) = 1$.*

Izrek 20. ***Sklarjev izrek***

Naj bo H porazdelitvena funkcija dveh spremenljivk z mejama F in G. Potem obstaja kopula C taka, da za vse x, y iz $\overline{\mathbb{R}}$ velja

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \tag{2.1}$$

Če sta F in G zvezni, potem je C enolično določena povsod na $\overline{\mathbb{R}}^2$, sicer pa le na $RanF \times RanG$.

Obratno: Če je C kopula, F in G porazdelitveni funkciji, potem je funkcija H, definirana na način (2.1)*, skupna porazdelitvena funkcija z mejama F in G.*

Zgoraj napisani izrek je leta 1959 prvič zapisal Sklar, ime kopula pa je bilo izpeljano iz ang. besede ”to couple”, z namenom poudariti funkcijo kopule. Kopula namreč združuje skupno porazdelitveno funkcijo z njenimi enorazsežnimi mejami. Dokažemo ga s pomočjo sledečih lem.

Lema 21. *Naj bo H skupna porazdelitvena funkcija z mejama F in G. Potem obstaja enolično določena subkopula C', za katero velja:*

1. *$DomC' = RanF \times RanG$*
2. *Za vsak x, y iz $\overline{\mathbb{R}}$, $H(x,y) = C'(F(x), G(y))$.*

Dokaz. Ker je H skupna porazdelitvena funkcija, s tem že zadosti vsem pogojem za funkcijo, napisanem v lemi (5), če za $S_1 = S_2 = \overline{\mathbb{R}}$. Zato za vsak (x_1, y_1) in (x_2, y_2) iz $\overline{\mathbb{R}}^2$ velja

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Če potem postavimo $F(x_1) = F(x_2)$ in $G(y_1) = G(y_2)$, iz tega sledi $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$. Zato množica točk

$$\Big\{((F(x), G(y)), H(x,y)) \mid x, y \in \overline{\mathbb{R}}\Big\}$$

definira 2-dimenzionalno realno funkcijo C', katere domena je $RanF \times RanG$. Da je ta funkcija subkopula, sledi direktno iz lastnosti funkcije H.

Prvi pogoj definicije (6) je izpolnjen, saj je $DomC' = RanF \times RanG$, obe zalogi sta podmnožici $\mathbf{I}$, ki vsebujeta 0 in 1. Ker je H porazdelitvena funkcija, je s tem izpolnjen tudi drugi pogoj iste definicije. Preostane nam le še pokazati zadoščanje enakosti (1.1). Za vsak $u \in RanF$ obstaja $x \in \overline{\mathbb{R}}$, takšen da $F(x) = u$. Potem je $C'(u, 1) = C'(F(x), G(\infty)) = H(x, \infty) = F(x) = u$. Enako pokažemo tudi $C'(1, v) = v$. □

Lema 22. *Naj bo C' subkopula. Potem obstaja kopula C taka, da $C(u,v) = C'(u,v)$ za vsak (u,v) iz DomC'; t.j. poljubno subkopulo lahko razširimo do kopule. Razširitev ni enolična.*

Dokaz. Naj bo $DomC' = S_1 \times S_2$. Z upoštevanjem enakomerne zveznosti supkopule C' na svoji domeni (trditev 13) lahko razširimo C' do funkcije C'', katere domena je enaka $\overline{S_1} \times \overline{S_2}$, kjer sta $\overline{S_1}$ in $\overline{S_2}$ zaprtji S_1 in S_2. Očitno je C'' tudi subkopula.

Sedaj moramo le še razširiti C'' do kopule C. Naj bo točka (a,b) poljubna točka iz $\boldsymbol{I^2}$. Naj bosta a_1, a_2 (odnosno) največji in najmanjši element S_1 takšna, da velja $a_1 \leq a \leq a_2$ in b_1, b_2 (odnosno) največji in najmanjši element S_2 takšna, da velja $b_1 \leq b \leq b_2$ [1]. Nato vpeljemo:

[1]Če je $a \in \overline{S_1}$, potem velja kar $a_1 = a = a_2$. Enako za $b \in \overline{S_2}$.

$$\lambda_1 = \begin{cases} (a-a_1)/(a_2-a_1), & \text{za } a_1 < a_2, \\ 1, & \text{za } a_1 = a_2. \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} (b-b_1)/(b_2-b_1), & \text{za } b_1 < b_2, \\ 1, & \text{za } b_1 = b_2. \end{cases}$$

Definiramo še

$$\begin{aligned} C(a,b) = &(1-\lambda_1)(1-\mu_1)C''(a_1,b_1) + (1-\lambda_1)\mu_1 C''(a_1,b_2) \\ &+ \lambda_1(1-\mu_1)C''(a_2,b_1) + \lambda_1\mu_1 C''(a_2,b_2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Najprej opazimo, da je $DomC = \boldsymbol{I^2}$ in da res velja $C(a,b) = C''(a,b)$ za poljubno točko (a,b) iz $DomC''$.

Prav tako se da hitro preveriti, da C zadošča lastnostima (1.2) in (1.3). Za točko $(u,0), u \in [0,1]$ je λ_1 odvisen od u, μ_1 pa enak 1. Potem je $C(u,0) = (1-\lambda_1)C''(a_1,0) + \lambda_1 C''(a_2,0)$. In ker je C'' subkopula in potemtakem omejena, velja $C''(a_1,0) = C''(a_2,0) = 0$ in $C(u,0) = 0$. Če pa izberemo poljubno točko oblike $(u,1), u \in [0,1]$, potem velja enako kot prej: λ_1 je odvisen od u, μ_1 je enak 1 in $C(u,1) = (1-\lambda_1)C''(a_1,1) + \lambda_1 C''(a_2,1)$. Z upoštevanjem definicije λ_1 in $C''(a_1,1) = a_1$, $C''(a_2,1) = a_2$ dobimo, da je

$$C(u,1) = \begin{cases} a_1 - \frac{u-a_1}{a_2-a_1}(a_2-a_1) = u, & \text{za } a_1 < u < a_2, \\ C(a_2,1) = a_2, & \text{za } a_1 = u = a_2. \end{cases}$$

Podobno za točke oblike $(0,v)$ in $(1,v), v \in [0,1]$.

Preostane nam le še pokazati, da je C 2-naraščajoča. Poleg točke (a,b) imamo sedaj še eno točko (c,d) iz $\boldsymbol{I^2}$. Naj zanjo velja $c \geq a$ in $d \geq b$. Analogno kot smo za (a,b) dobili $a_1, a_2, \lambda_1, b_1, b_2, \mu_1$, dobimo sedaj $c_1, c_2, \lambda_2, d_1, d_2, \mu_2$. Zanima nas $V_C(B)$, kjer je $B = [a,c] \times [b,d]$. Glede na to, ali obstaja točka iz $\overline{S_1}$, ki leži strogo med a in c in ali obstaja točka $\overline{S_2}$, ki leži strogo med b in d, ločimo več primerov.

Najbolj enostaven primer je, ko taka točka ne obstaja. Potem je namreč $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2$, $b_1 = d_1$ in $b_2 = d_2$. Potem je, ko izraz poenostavimo,

$$\begin{aligned} V_C(B) = V_C([a,c] \times [b,d]) &= C(c,d) - C(c,b) - C(a,d) + C(a,b) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)V_{C''}([a_1,a_2] \times [b_1,b_2]) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)V_C([a_1,a_2] \times [b_1,b_2]). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Člen $V_C([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$ je enak $V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2])$, ki pa je zato, ker je C'' subkopula, pozitiven. Iz pogojev $c \geq a$ in $d \geq b$ sledi, da sta pozitivna tudi člena $(\lambda_2 - \lambda_1)$ in $(\mu_2 - \mu_1)$. Potemtakem je $V_C(B) \geq 0$.

V najbolj zapletenem primeru pa take točke obstajajo in hkrati $a, c \notin \overline{S}_1$ in $b, d \notin \overline{S}_2$. Torej velja, $a < a_2 \leq c_1 < c$ in $b < b_2 \leq d_1 < d$. Tukaj je potem, ko nadomestimo člene $C(a, b), C(a, d), C(c, b)$ in $C(c, d)$ ter izraz uredimo,

$$\begin{aligned} V_C(B) = {} & V_C([a_2, c_1] \times [b_2, d_1]) + (1 - \lambda_1) V_C([a_1, a_2] \times [b_2, d_1]) \\ & + (1 - \lambda_1)\mu_2 V_C([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) + \mu_2 V_C([a_2, c_1] \times [d_1, d_2]) \\ & + \lambda_2 \mu_2 V_C([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) + \lambda_2 V_C([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) \\ & + \lambda_2 (1 - \mu_1) V_C([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]) + (1 - \mu_1) V_C([a_2, c_1] \times [b_1, b_2]) \\ & + (1 - \lambda_1)(1 - \mu_1) V_C([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Zgornji izraz je sestavljen iz devetih pozitivnih členov iz česar sledi, da je $V_C(B) \geq 0$. Podobno pokažemo, da je C 2-naraščajoča, tudi v ostalih primerih. $\square$

Dokaz. Sklarjev izrek

Obstoj kopule C, ki zadošča (2.1) sledi iz lem (21) in (22). Če sta F in G zvezni, potem je $RanF = RanG = \boldsymbol{I}$. Enolična subkopula iz (21) je potem kar kopula.

Obratno. C je kopula, F in G porazdelitveni funkciji. Ker je $H(x, y) = C(F(x), G(y))$, je potem H 2-naraščajoča. Velja tudi $H(x, -\infty) = C(F(x), G(-\infty)) = C(F(x), 0) = 0$ (upoštevamo, da je G porazdelitvena funkcija in C (navzdol) omejena). Enako naredimo za $H(-\infty, y) = 0$. Velja tudi $H(\infty, \infty) = C(F(\infty), G(\infty)) = C(1, 1) = 1$. $\square$

Definicija 23. *Naj bo F porazdelitvena funkcija. Potem je* ***kvazi-inverz*** *F funkcija $F^{(-1)}$ z domeno $\boldsymbol{I}$, za katero velja:*

1. *Če $t \in RanF$, potem je*
$$F(F^{(-1)}(t)) = t.$$

2. *Če $t \notin RanF$, potem je*
$$F^{(-1)}(t) = inf\{x | F(x) \geq t\} = sup\{x | F(x) \leq t\}.$$

Če je F strogo naraščajoča, potem je njen kvazi-inverz kar običajen inverz. Označimo ga s F^{-1}.

Posledica 24. *Naj bodo H, F, G in C' funkcije iz leme (21) in $F^{(-1)}$ in $G^{(-1)}$ kvazi-inverza F in G. Potem za poljuben par (u,v) iz DomC' velja*

$$C'(u,v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \tag{2.5}$$

Če sta F in G zvezni, velja posledica tudi za kopule.

Na tem mestu velja še pripomniti, da lahko z ustrezno razširitvijo definicijskega območja vsako kopulo razširimo do skupne porazdelitvene funkcije z mejami $U(0,1)$. Naj sedaj s C označimo kopulo in s H_C njeno razširitev na $\overline{\mathbb{R}}^2$, definirano kot

$$H_c(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ ali } y \leq 0, \\ C(x,y), & (x,y) \in \boldsymbol{I^2}, \\ x, & y > 1, x \in\mathbf{I}, \\ y, & x > 1, y \in\mathbf{I}, \\ 1, & y > 1 \text{ in } x > 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Potem je H_C porazdelitvena funkcija, katere obe meji sta enakomerni porazdelitvi na $[0,1]$.

Poglavje 3

Kopule in slučajne spremenljivke

3.1 Kopula dveh slučajnih spremenljivk

Za naše potrebe se bo termin slučajna spremenljivka nanašal predvsem na slednja "opisa". Slučajna spremenljivka X je spremenljivka,

- kateri lahko pri kateremkoli c pripišemo verjetnost, da bo njena vrednost manjša od c (Wald 1947);
- katere vrednost je odvisna od slučaja in za katero obstaja porazdelitvena funkcija (Gnedenko 1962).

Kot običajno, bomo slučajne spremenljivke označevali z velikimi tiskanimi črkami, npr. X in Y, z malimi tiskanimi črkami, npr. x in y, pa njihove vrednosti.

F je porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke, če za vsak x iz $\overline{\mathbb{R}}$ velja

$$F(x) = P[X \leq x]^1.$$

Izrek 25. ***Sklarjev izrek za slučajne spremenljivke.*** *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama F in G in skupno porazdelitveno funkcijo H. Potem obstaja kopula C, ki zadošča*

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)).$$

Če sta F in G zvezni, potem je C enolično določena (povsod), sicer je C enolična na $RanF \times RanG$.

Kopuli C iz zgornje trditve pravimo tudi ***kopula $\boldsymbol{X}$ in $\boldsymbol{Y}$***, označimo jo s $\boldsymbol{C_{XY}}$.

[1]Po tej definiciji je porazdelitvena funkcija iz desne zvezna, čeprav bi bile levo zvezne enakovredno uporabne, saj bomo uporabljali predvsem zvezne slučajne spremenljivke.

Zgled 1. *X in Y sta slučajni spremenljivki s skupno porazdelitveno funkcijo H:*

$$H(x,y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1},$$

za vsak x, y iz $\overline{\mathbb{R}}$. Potem je $F(x) = (1+e^{-x})^{-1}$ in $G(y) = (1+e^{-y})^{-1}$, kvazi-inverza pa sta enaka $F^{(-1)}(u) = -ln(\frac{1}{u} - 1)$ in $G^{(-1)}(v) = -ln(\frac{1}{v} - 1)$.

Kopula X in Y je potem enaka

$$\begin{aligned} H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)) &= \left(1 + e^{ln(1/u-1)} + e^{ln(1/v-1)}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - 1\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{v+u-uv}{uv}\right)^{-1} \\ &= \frac{uv}{u+v-uv} = C(u,v). \end{aligned}$$

Izrek 26. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki, katerima pripada kopula C_{XY}. Če sta α in β strogo naraščajoči (funkciji) na $RanX$ in $RanY$, zaporedoma, potem je $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$. Posledično rečemo, da je C_{XY} invariantna za strogo naraščajoče transformacije na X in Y.*

Podobno velja, ko imamo opravka s strogo padajočimi transformacijami.

Dokaz. Z F_1, G_1, F_2 in G_2 označimo porazdelitvene funkcije $X, Y, \alpha(X)$ in $\beta(Y)$, zaporedoma. Ker sta α in β strogo naraščajoči, $F_2(x) = P[\alpha(X) \leq x] = P[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x))$ in po enakem sklepu $G_2(y) = G_1(\beta^{-1}(y))$. Za poljubna x, y iz $\overline{\mathbb{R}}$ tako velja

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\ &= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\ &= C_{XY}(F_2(x), G_2(y)). \end{aligned}$$

□

Trditev 27. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki, katerima pripada kopula C_{XY}. Naj sta α in β (skoraj gotovo) strogo monotoni (funkciji) na $RanX$ in $RanY$, zaporedoma.*

1. *Če je α strogo naraščujoča in β strogo padajoča, potem*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) = u - C_{XY}(u, 1-v). \tag{3.1}$$

2. Če je α strogo padajoča in β strogo naraščajoča, potem

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) = v - C_{XY}(1-u,v). \tag{3.2}$$

3. Če sta α in β strogo padajoči, potem

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) = u + v - 1 - C_{XY}(1-u,1-v). \tag{3.3}$$

Dokaz. Pokazali bomo le enakost (3.1), enakosti (3.2) in (3.3) dokažemo podobno.

Enako kot prej, s F_1, G_1, F_2 in G_2 označimo porazdelitvene funkcije $X, Y, \alpha(X)$ in $\beta(Y)$, zaporedoma. Ker je α strogo naraščajoča, velja $F_2(x) = F_1(\alpha^{-1}(x))$ in ker je β strogo padajoča, velja $G_2(y) = P[\beta(Y) \leq y] = P[Y \geq \beta^{-1}(y)] = 1 - P[y < \beta^{-1}(y)] = 1 - G_1(\beta^{-1}(y))$.[2] Za poljubna x, y iz $\overline{\mathbb{R}}$ tako velja

$$\begin{aligned}
C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\
&= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \geq \beta^{-1}(y)] \\
&= P[X \leq \alpha^{-1}(x)] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y < \beta^{-1}(y)] \\
&= P[X \leq \alpha^{-1}(x)] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= F_1(\alpha^{-1}(x)) - C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
&= F_2(x) - C_{XY}(F_2(x), 1 - G_2(y)).
\end{aligned}$$

□

3.2 Kopula in mera

Vsaka skupna porazdelitvena funkcija H, preko $V_H((-\infty, x] \times (-\infty, y]) = H(x,y)$, inducira verjetnostno mero na $\mathbb{R}^2$. Glede na to, da lahko na kopule gledamo, če ustrezno razširimo njihovo definicijsko območje, kot na skupne porazdelitvene funkcije (2.6), potem tudi kopule preko $V_C([0,u] \times [0,y]) = C(u,v)$ inducirajo verjetnostno mero na $\boldsymbol{I^2}$.

Vsako kopulo C lahko razbijemo na dva dela,

$$C(u,v) = A_C(u,v) + S_C(u,v),$$

kjer je $A_C(u,v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s,t) \mathrm{d}t \mathrm{d}s$ in $S_C(u,v) = C(u,v) - A_C(u,v)$.

Če je $C \equiv A_C$ na $\boldsymbol{I^2}$, potem ima C, če jo obravnavamo kot skupno porazdelitveno funckijo, gostoto dano z $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v$. Rečemo, da je C *absolutno zvezna.* Ko pa

[2] Zadnji enačaj velja, ker je Y zvezna slučajna spremenljivka.

je $C \equiv S_C$ na $\boldsymbol{I^2}$, potem je $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v = 0$ s.g. povsod na $\boldsymbol{I^2}$, pravimo, da je C *singularna.*

Tudi pri kopuli lahko definiramo njen nosilec. Nosilec kopule je komplement unije vseh odprtih podmnožic $\boldsymbol{I^2}$ s "C-mero" 0. Ko ima nosilec kopule C Lebegue-ovo mero 0, je C singularna in obratno. Če pa je nosilec C enak $\boldsymbol{I^2}$, potem pravimo, da ima C "poln" nosilec, a v tem primeru ni nujno govora o absolutno zvezni kopuli. Mnoge kopule s polnim nosilcem imajo namreč obe komponenti, A_C in S_C.

3.3 Fréchet - Hoeffdingovi meji za skupne porazdelitvene funkcije

Vemo že, da sta Fréchet-Hoeffdingovi meji univerzalni za vse kopule (neenakosti (1.6)). Veljajo za vsako kopulo in potemtakem, zaradi Sklarjevega izreka, ju (neenakosti) lahko prenesemo tudi na skupno porazdelitveno funkcijo z mejama F in G.

Za vsak x, y iz $\overline{\mathbb{R}}$ velja

$$max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq H(x,y) \leq min(F(x), G(y)).$$

In ker sta W in M kopuli, potem sta meji v zgornjem paru neenakosti tudi skupni porazdelitveni funkciji. Sedaj nas bo zanimalo, kaj lahko povemo o porazdelitvi slučajnih spremenljivk X in Y, katerih skupna porazdelitvena funkcija je enaka bodisi $max(F(x) + G(y) - 1, 0)$ bodisi $min(F(x), G(y))$.

Definicija 28. ***S podmnožica*** $\overline{\mathbb{R}}^2$ ***je nepadajoča,*** *če za poljubna (x,y) in (u,v) iz S velja, da iz* $x < u$ *sledi* $y \leq v$. *Podobno je* ***S podmnožica*** $\overline{\mathbb{R}}^2$ ***je nenaraščajoča,*** *če za poljubna (x,y) in (u,v) iz S velja, da iz* $x < u$ *sledi* $y \geq v$.

Lema 29. *Naj bo S podmnožica* $\overline{\mathbb{R}}^2$. *Potem je S nepadajoča natanko tedaj, ko za vsak (x,y) iz* $\overline{\mathbb{R}}^2$ *velja bodisi*

1. *za vsak* $(u,v) \in S$, $u \leq x$ *implicira* $v \leq y$ *; ali*

2. *za vsak* $(u,v) \in S$, $v \leq y$ *implicira* $u \leq x$.

Dokaz. Naj bo S nepadajoča in naj ne velja niti prva niti druga točka zgornje leme. Potem obstajata točki (a,b) in (c,d) iz S taki, da $a \leq x$, $b > y$, $d \leq y$ in $c > x$. Potemtakem je $a < c$ in $b < d$. Toda to je v protislovju s tem, da točki ne veljata.

Naj sedaj za vse točke (x,y) iz S prva in druga točka zgornje leme veljata in naj S ne bo nepadajoča. Potem v S obstajata točki (a,b) in (c,d) taki, da velja $a < c$

in $b > d$. Toda potem za $(x, y) = ((a+c)/2, (b+d)/2)$ ne velja nobena izmed točk leme. $\square$

Lema 30. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s skupno porazdelitveno funkcijo H. Potem je H enaka Fréchet-Hoeffdingovi zgornji meji natanko tedaj, ko je za vsak (x,y) iz $\overline{\mathbb{R}}^2$ vsaj ena iz verjetnosti $P[X > x, Y \leq y]$, $P[X \leq x, Y > y]$ enaka 0.*

Dokaz. Enako kot prej, z F in G označimo meji porazdelitvene funkcije H. Potem je

$$\begin{aligned} F(x) &= P[X \leq x] = P[X \leq x, Y \leq y] + P[X \leq x, Y > y] \\ &= H(x,y) + P[X \leq x, Y > y] \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} G(y) &= P[Y \leq y] = P[X \leq x, Y \leq y] + P[X > x, Y \leq y] \\ &= H(x,y) + P[X > x, Y \leq y]. \end{aligned}$$

Če je $H(x,y)$ enaka $min(F(x), G(y))$, je potem nujno $min(P[X \leq x, Y > y], P[X > x, Y \leq y]) = 0$. Ko pa velja slednje, pa je enakost $H(x,y)$ in $M(F(x), G(y))$ očitna. $\square$

Kot posledica zgornje leme pa sledi:

Izrek 31. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s skupno porazdelitveno funkcijo H. Potem je H identično enaka svoji Fréchet-Hoeffdingovi zgornji meji natanko tedaj, ko je nosilec H nepadajoča podmnožica $\overline{\mathbb{R}}^2$.*

Dokaz. S S označimo nosilec H, (x,y) je poljubna točka $\overline{\mathbb{R}}^2$. Potem velja prva točka leme (29) natanko tedaj, ko je $\Big\{(u,v) | u \leq x \text{ in } v > y\Big\} \cap S = \varnothing$ oz. ko je, glede na H, $P[X \leq x, Y > y] = 0$. Druga točka iste leme pa velja natanko tedaj, ko je $\Big\{(u,v) | u > x, v \leq y\Big\} \cap S = \varnothing$ oz. ekivivalentno $P[X > x, Y \leq y] = 0$. Izrek potem velja zaradi lem (29) in (30). $\square$

Analogno lahko pridemo tudi do rezultata za Fréchet-Hoeffdingovo spodnjo mejo in naslednjega izreka:

Izrek 32. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki s skupno porazdelitveno funkcijo H. Potem je H identično enaka svoji Fréchet-Hoeffdingovi spodnji meji natanko tedaj, ko je nosilec H nenaraščajoča podmnožica $\overline{\mathbb{R}}^2$.*

Ko sta X in Y absolutno zvezni slučajni spremenljivki, pogosto rečemo, da sta X in Y, če je njuna kopula enaka M, ***komonotoni*** - Y je s.g. naraščajoča funkcija X - in , če je njuna kopula enaka W, ***kontramonotoni*** - Y je s.g. padajoča funkcija X.

V tem poglavju bom omenila še, kdaj je kopula slučajnih spremenljivk enaka produktni kopuli, čeprav le-ta ni Fréchet-Hoeffdingova meja.

Izrek 33. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki. Potem sta X in Y neodvisni natanko tedaj, ko je $C_{XY} = \Pi$.*

Dokaz. Naj bosta X in Y neodvisni zvezni slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama F in G, zaporedoma. Potem je njuna skupna porazdelitvena funckija $H_{XY}(x,y) = F(x)G(y)$. Obstoj kopule nam zagotavlja trditev (25), iz posledice (24) pa sledi, da je $C_{XY}(u,v) = uv$.

Če je $C_{XY} = \Pi$, potem po Sklarjevem izreku vemo, da je $H(x,y) = C(F(x),G(y)) = F(x)G(y)$. □

3.4 Kopula preživetja

Recimo, da imamo dve slučajni spremenljivki X in Y. Pri različnih aplikacijah na resnične probleme nas potem zanima verjetnost $P[X > x, Y > y]$.

Vemo, da za slučajni spremenljivki X in Y obstajata funkciji preživetja $\overline{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x)$ in $\overline{G}(x) = P[X > x] = 1 - G(x)$, skupna funkcija preživetja pa je $\overline{H}(x,y) = P[X > x, Y > y] = 1 - F(x) - G(y) + H(x,y)$. Kopula X in Y bo tokrat kar kopula C.

Potem je:

$$\begin{aligned}
\overline{H}(x,y) &= P[X > x, Y > y] = 1 - F(x) - G(y) + H(x,y) \\
&= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(F(x),G(y)) \\
&= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)).
\end{aligned}$$

Sedaj lahko definiramo funkcijo $\widehat{C}$, ki slika iz $\boldsymbol{I^2}$ v $\mathbf{I}$, s predpisom

$$\widehat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v). \tag{3.4}$$

Potem velja, da je $\overline{H}(x,y) = \widehat{C}(\overline{F}(x),\overline{G}(y))$ in $\widehat{C}$ je kopula. Pravimo ji **kopula preživetja**.

Dokaz. V dokazu želimo pokazati, da je $\widehat{C}$ kopula.

Imamo kopulo C in poljubno točko $(u, v) \in \boldsymbol{I^2}$. Definirajmo funkcijo

$$K(u, v) = V_C([1-u, 1] \times [1-v, 1]).$$

Dokazujemo, da je K kopula. Za vsak $u \in \mathbf{I}$ velja

$$\begin{aligned} K(u, 0) &= V_C([1-u, 1] \times [1, 1]) \\ &= C(1, 1) - C(1-u, 1) - C(1, 1) + C(1-u, 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} K(u, 1) &= V_C([1-u, 1] \times [0, 1]) \\ &= C(1, 1) - C(1-u, 1) - C(1, 0) + C(1-u, 0) \\ &= 1 - (1-u) - 0 + 0 = u. \end{aligned}$$

Za poljuben pravokotnik $[a, b] \times [c, d] \in \boldsymbol{I^2}$ pa je

$$\begin{aligned} K(b, d) \,-\, & K(b, c) - K(a, d) + K(a, c) = \\ &= V_C([1-b, 1] \times [1-d, 1]) - V_C([1-b, 1] \times [1-c, 1]) \\ &\quad - V_C([1-a, 1] \times [1-d, 1]) + V_C([1-a, 1] \times [1-c, 1]) \\ &= C(1, 1) - C(1-b, 1) - C(1, 1-d) + C(1-b, 1-d) \\ &\quad - C(1, 1) + C(1-b, 1) + C(1, 1-c) - C(1-b, 1-c) \\ &\quad - C(1, 1) + C(1-a, 1) + C(1, 1-d) - C(1-a, 1-d) \\ &\quad + C(1, 1) - C(1-a, 1) - C(1, 1-c) + C(1-a, 1-c) \\ &= C(1-b, 1-d) - C(1-b, 1-c) - C(1-a, 1-d) + C(1-a, 1-c) \\ &= V_C([1-b, 1-a] \times [1-d, 1-c]). \end{aligned}$$

Ker je C kopula, je le-ta izraz vedno nenegativen in je K kopula. Velja še

$$\begin{aligned} K(u, v) &= V_C([1-u, 1] \times [1-v, 1]) \\ &= C(1, 1) - C(1-u, 1) - C(1-v, 1) + C(1, 1) \\ &= 1 - (1-u) - (1-v) + C(1-u, 1-v) \\ &= u + v - 1 + C(1-u, 1-v) = \widehat{C}(u, v), \end{aligned}$$

zato je kopula tudi funkcija $\widehat{C}$. $\square$

Poglavje 4

Odvisnost

Kopule nam omogočajo način raziskovanja in merjenja odvisnosti med slučajnimi spremenljivkami. Pri tem je dodatna lepa lastnost, da so lastnosti kopule invariantne za strogo padajoče oz. naraščajoče tranformacije. Med najbolj pogosto uporabljenimi koeficienti za merjenje odvisnosti je seveda Pearsonov korelacijski koeficient.

Pearsonov korelacijski koeficient

Definicija 34. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki z neničelno končno varianco. Potem je **(linearni) korelacijski koeficient** X in Y enak*

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}. \tag{4.1}$$

Toda, čeprav je korelacijski koeficient zelo priljubljen v praksi (ker je lahko izračunljiv in je ”naravno” povezan z eliptičnimi porazdelitvami), pa je pogosto zavajajoč. Niso namreč vse slučajne spremenljivke porazdeljene eliptično, niti nimajo vse (tudi eliptične) končnih drugih momentov. Dodatno, linearni korelacijski koeficient ni mera, ki bi temeljila na kopulah, zato je bolje, da pri računanjo odvisnosti s kopulami uporabljamo druge mere.

4.1 Mere povezanosti

4.1.1 Usklajenost

Naj imamo dan slučajen vektor (X,Y), $(x_i,y_i), (x_j,y_j)$ pa naj bosta dve opazovanji tega vektorja. Pravimo, da sta (x_i,y_i) in (x_j,y_j) **usklajena**, če $(x_i-x_j)(y_i-y_j) \geq 0$ in **neusklajena**, če $(x_i-x_j)(y_i-y_j) \leq 0$.

Preprosteje rečeno je par slučajnih spremenljivk usklajen, če so "velike" vrednosti ene "povezane" z "velikimi" vrednostmi druge in "male" vrednosti ene povezane z "malimi" vrednostmi druge.

Ene izmed bolj znanih mer usklajenosti sta Kendallov tau in Spearmanov rho. In zato, da bi lažje vpeljali vlogo kopul v ti meri usklajenosti, bomo najprej vpeljali **"funkcijo usklajenosti" Q** in pokazali, kako jo s kopulami izrazimo.

Trditev 35. *Naj bosta (X_1, Y_1) in (X_2, Y_2) neodvisna vektorja zveznih slučajnih spremenljivk s skupnima porazdelitvenima funkcijama H_1 in H_2 in mejama F (za X_1 in X_2) in G (za Y_1 in Y_2). Naj bosta C_1 in C_2 taki kopuli, da velja: $H_1(x,y) = C_1(F(x), G(y))$ in $H_2(x,y) = C_2(F(x), G(y))$. Naj bo*

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \tag{4.2}$$

Potem je

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \iint_{\boldsymbol{I^2}} C_2(u,v) \mathrm{d}C_1(u,v) - 1. \tag{4.3}$$

Dokaz. Slučajni spremenljivki zgornje trditve sta zvezni, zato velja $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] + P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 1$. Z upoštevanjem tega dobimo

$$Q = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1. \tag{4.4}$$

Velja pa tudi $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2]$, kar lahko izrazimo s pomočjo integralov.

$$\begin{aligned} P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= P[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1] \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} P[X_2 \le x, Y_2 \le y] \mathrm{d}C_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) \mathrm{d}C_1(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Po uvedbi transformacije $u = F(x)$ in $v = G(y)$ dobimo

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \iint_{\boldsymbol{I^2}} C_2(u,v) \mathrm{d}C_1(u,v).$$

Podobno

$$\begin{aligned} P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \iint_{\mathbb{R}^2} P[X_2 > x, Y_2 > y] \mathrm{d}C_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] \mathrm{d}C_1(F(x), G(y)) \\ &= \iint_{\boldsymbol{I^2}} [1 - u - v + C_2(u,v)] \mathrm{d}C_1(u,v) \\ &= \iint_{\boldsymbol{I^2}} [1 + C_2(u,v)] \mathrm{d}C_1(u,v) - \iint_{\boldsymbol{I^2}} u \mathrm{d}C_1(u,v) - \iint_{\boldsymbol{I^2}} v \mathrm{d}C_1(u,v). \end{aligned}$$

C_1 pa je skupna porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja (U, V), kjer sta U in V porazdeljena enakomerno na $[0, 1]$. Zato je $\iint_{\boldsymbol{I^2}} u \mathrm{d}C_1(u, v) = E(U) = \frac{1}{2}$, $\iint_{\boldsymbol{I^2}} v \mathrm{d}C_1(u, v) = E(V) = \frac{1}{2}$ in $\iint_{\boldsymbol{I^2}} \mathrm{d}C_1(u, v) = 1$.

Ko vse skupaj vstavimo v enakost (4.4), dobimo

$$\begin{aligned} Q &= 2(\iint_{\boldsymbol{I^2}} C_2(u, v)\mathrm{d}C_1(u, v) + 1 + \iint_{\boldsymbol{I^2}} C_2(u, v)\mathrm{d}C_1(u, v) - \frac{1}{2}) - 1 \\ &= 4 \iint_{\boldsymbol{I^2}} C_2(u, v)\mathrm{d}C_1(u, v) - 1. \end{aligned}$$

□

Posledica 36. *Naj bodo C_1, C_2 in Q dane kot v trditvi (35). Potem je*

1. *Q simetrična v svojih argumentih: $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$;*
2. *Q je nepadajoča v svojih argumentih: če je $C_1 \prec C_1'$ in $C_2 \prec C_2'$ za vsak (u,v) iz $\boldsymbol{I^2}$, potem je $Q(C_1, C_2) \leq Q(C_1', C_2')$.*
3. *Kopuli v Q sta lahko nadomeščeni s kopulami preživetja: $Q(C_1, C_2) = Q(\widehat{C_1}, \widehat{C_2})$.*

Funkcijo Q lahko v primeru kopul M, W in Π zlahka izračunamo. Če je naša kopula kopula $M = min(u, v)$, potem je njen nosilec enak premici $u = v$ za vsak u iz **I**. Vsak pravokotnik, ki v celoti leži nad ali pod to "diagonalo" ima namreč M-mero 0. Za poljubno integrabilno funkcijo g zato velja

$$\iint_{\boldsymbol{I^2}} g(u, v)\mathrm{d}M(u, v) = \int_0^1 g(u, u)\mathrm{d}u.$$

Podobno za kopulo W, katere nosilec je "diagonala" $v = 1 - u$, velja

$$\iint_{\boldsymbol{I^2}} g(u, v)\mathrm{d}W(u, v) = \int_0^1 g(u, 1 - u)\mathrm{d}u.$$

Z upoštevanjem teh dejstev dobimo

$$\begin{aligned} Q(M, M) &= 4 \iint_{\boldsymbol{I^2}} min(u, v)\mathrm{d}M(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u\mathrm{d}u - 1 = 2 - 1 = 1, \\ Q(M, W) &= 4 \iint_{\boldsymbol{I^2}} max(u + v - 1, 0)\mathrm{d}M(u, v) - 1 = 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 (2u - 1)\mathrm{d}u - 1 = 0, \\ Q(M, \Pi) &= 4 \iint_{\boldsymbol{I^2}} uv\mathrm{d}M(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u^2\mathrm{d}u - 1 = \frac{1}{3}, \\ Q(W, W) &= 4 \iint_{\boldsymbol{I^2}} max(u + v - 1, 0)\mathrm{d}W(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 0\mathrm{d}u - 1 = -1, \\ Q(W, \Pi) &= 4 \iint_{\boldsymbol{I^2}} uv\mathrm{d}W(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u(1 - u)\mathrm{d}u - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Glede na to, da je kopula Π kopula dveh neodvisnih slučajnih spremenljivk je

$$Q(\Pi, \Pi) = 4 \iint_{\boldsymbol{I^2}} uv\mathrm{d}\Pi(u,v) - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 uv\mathrm{d}u\mathrm{d}v - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Nasploh lahko Q vedno omejimo. Če je C poljubna kopula, potem je zato, ker je Q po definiciji razlika verjetnosti, $Q(C, C) \in [-1, 1]$. Posledica (36) pa nam da še dodatne omejitve:

$$Q(C, M) \in [0, 1], Q(C, W) \in [-1, 0] \text{ in } Q(C, \Pi) \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}].$$

Kendallov tau in Spearmanov rho

Recimo, da imamo dan slučajni vzorec n opazovanj slučajnega vektorja (X,Y): $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Par $(x_i, y_i), (x_j, y_j)$ lahko potem izberemo na $\binom{n}{2}$ načinov. Naj bo c število usklajenih parov in d število neusklajenih parov. Potem je Kendallov tau enak

$$t = \frac{c - d}{c + d}$$

.

Ekvivalentno, t je verjetnost, da je par usklajen minus verjetnost, da je par neusklajen. Enako lahko obravnavamo Kendallov tau na populaciji. Naj bosta (X_1, Y_1) in (X_2, Y_2) neodvisna, identično porazdeljena slučajna vektorja, vsak s skupno porazdelitveno funkcijo H. Potem je Kendallov tau enak:

$$\tau = \tau_{XY} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \tag{4.5}$$

Posledica 37. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki in C njuna kopula. Potem je populacijska različica Kendallovega tau za X in Y dana z*

$$\tau_C = \tau_{X,Y} = Q(C, C) = 4 \iint_{\boldsymbol{I^2}} C(u, v) u dC(u, v) - 1. \tag{4.6}$$

Sedaj opazujemo tri neodvisne slučajne vektorje (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) in (X_3, Y_3). Vsi imajo skupno porazdelitveno funkcijo H in robni porazdelitvi X in Y sta enaki F in G, zaporedoma. Potem je Spearmanov rho enak

$$\rho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0])^1. \tag{4.7}$$

Tu moramo biti sedaj pozorni, saj je porazdelitvena funkcija slučajnih vektorjev $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ enaka $H(x, y)$, medtem ko je porazdelitvena funkcija

[1]Prav tako bi lahko uporabili par (X_3, Y_2).

slučajnih vektorjev "tipa" (X_1, Y_2) enaka $F(x)G(y)$, saj sta X_1 in Y_2 neodvisni slučajni spremenljivki.

Če sledimo enakemu premisleku kot v dokazu trditve (35), opazimo, da $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]$ ni nič drugega kot $Q(C, \Pi)$.

Trditev 38. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s kopulo C. Tedaj je populacijska različica Spearmanovega rho za X in Y, podana z*

$$\begin{aligned}\rho_{X,Y} = \rho_C &= 3Q(C, \Pi) \\ &= 12 \iint_{\boldsymbol{I^2}} uv \, \mathrm{d}C(u,v) - 3 \\ &= 12 \iint_{\boldsymbol{I^2}} C(u,v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v - 3.\end{aligned}$$

Mera usklajenosti

Definicija 39. ***Numerična mera povezanosti*** $\boldsymbol{\kappa}$ *med dvema slučajnima spremenljivkama X in Y, katerih kopula je C, je* ***mera usklajenosti****, če zadošča naslednjim pogojem:*

1. *κ je definirana za vsak par X, Y zveznih slučajnih spremenljivk;*

2. *$-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1, \kappa_{X,X} = 1,$ in $\kappa_{X,-X} = -1$;*

3. *$\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$;*

4. *če sta X in Y neodvisni, potem $\kappa_{X,Y} = \kappa_\Pi = 0$;*

5. *$\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$*

6. *če sta C_1 in C_2 kopuli, $C_1 \prec C_2$, potem $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$;*

7. *če je (X_n, Y_n) zaporedje zveznih slučajnih vektorjev s kopulami C_n in če C_n konvergira po točkah k C, potem $\lim_{n\to\infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.*

Trditev 40. *Naj bo κ mera usklajenosti za zvezni slučajni spremenljivki X in Y. Potem velja, da če*

1. *je Y s.g. naraščajoča funkcija X, potem je $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$;*

2. *je Y s.g. padajoča funkcija Y, potem je $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$;*

3. *sta α in β s.g. strogo monotoni funkciji na $RanX$ in $RanY$, potem je $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$.*

Trditev 41. *Če sta X in Y zvezni slučajni spremenljivki in C njuna kopula, potem sta populacijski različici Kendallovega tau (4.6) in Spearmanovega rho (4.7) meri usklajenosti.*

Trditev 42. *Naj bosta X in Y zvezni slučaji spremenljivki s kopulo C in κ enaka bodisi Kendallovem tau ali Spearmanovemu rho. Potem velja slednje:*

1. $\kappa_{X,Y} = 1 \iff C = M$

2. $\kappa_{X,Y} = -1 \iff C = W$

Čeprav sta Kendallov tau in Spearmanov rho obe meri usklajenosti, pa sta pogosto precej različni. O zvezi med njima obstaja več trditev.

Trditev 43. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki in naj s τ in ρ označimo Kendallov tau in Spearmanov rho, definirana na način (4.6) in (4.7). Tedaj velja*

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1.$$

Trditev 44. *Naj bodo X, Y, τ in ρ definirani enako kot v prejšnji trditvi. Potem je*

$$\frac{1+\rho}{2} \geq (\frac{1+\tau}{2})^2$$

in

$$\frac{1-\rho}{2} \geq (\frac{1-\tau}{2})^2$$

Posledica 45. *Naj bodo X, Y, τ in ρ definirani enako kot v prejšnjih dveh trditvah. Potem je*

$$\frac{3\tau-1}{2} \leq \rho \leq \frac{1+2\tau-\tau^2}{2}, \ \tau \geq 0$$

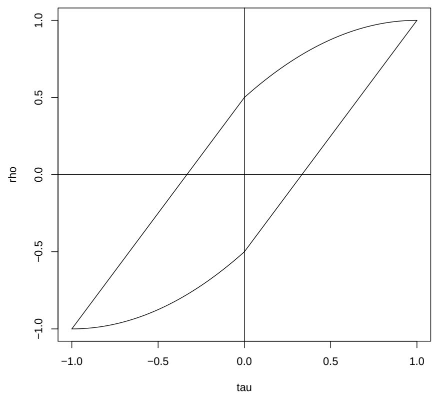
in

$$\frac{\tau^2+2\tau-1}{2} \leq \rho \leq \frac{3\tau+1}{2}, \ \tau \leq 0.$$

Na sliki (4.1.1) je prikazano t.i. "$\tau - \rho$ območje", ki je dobljeno z uporabo omejitev prejšnje posledice.

Ne glede na to, kako koristne so mere usklajenosti, pa imajo določene pomanjkljivosti. Ena izmed teh je, da iz $\kappa_{X,Y} = 0$ ne sledi, da je kopula X in Y produktna kopula oz. da sta X in Y neodvisni.

Slika 4.1: Območje $\tau - \rho :$ meje za τ in ρ za zvezne slučajne spremenljivke



4.1.2 Mera odvisnosti

Mere odvisnosti so mere povezanosti, ki pa ne temeljijo na usklajenosti vrednosti, marveč na oddaljenosti kopule slučajnih spremenljivk X in Y od produktne kopule.

Definicija 46. ***Numerična mera povezanosti $\boldsymbol{\delta}$*** *med dvema slučajnima spremenljivkama X in Y, katerih kopula je C, je* ***mera odvisnosti****, če zadošča naslednjim pogojem:*

1. *δ je definirana za vsak par X, Y zveznih slučajnih spremenljivk;*
2. *$\delta_{X,Y} = \delta_{Y,X}$;*
3. *$-1 \leq \delta_{X,Y} \leq 1$;*
4. *$\delta_{X,Y} = 0$ natanko tedaj, ko sta X in Y neodvisni;*
5. *$\delta_{X,Y} = 1$ natanko tedaj, ko sta X strogo monotona funkcija Y (oz. obratno);*
6. *če sta α in β s.g. strogo monotoni funkciji na $RanX$ in $RanY$, potem je $\delta_{\alpha(X),\beta(Y)} = \delta_{X,Y}$*
7. *če je (X_n, Y_n) zaporedje zveznih slučajnih vektorjev s kopulami C_n in če C_n konvergira po točkah k C, potem $\lim_{n\to\infty} \delta_{C_n} = \delta_C$.*

Ena izmed takšnih mer je $\boldsymbol{\sigma}$ **Schweizerja in Wolffa**, ki je enaka

$$\sigma_{X,Y} = \sigma_C = 12 \iint_{\boldsymbol{I^2}} |C(u,v) - uv| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

in temelji na L_1 razdalji med grafoma kopul C in Π. Druga taka mera pa je **indeks odvisnosti**, ki ga je vpeljal Hoeffding:

$$\Phi^2 = 90 \iint_{\boldsymbol{I^2}} |C(u,v) - uv|^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

4.2 Ostali koncepti odvisnosti

V tem odstavku se bom dotaknila le kvadratne in repne odvisnosti, čeprav je konceptov v resnici še veliko več (npr. repna monotonost, "likelihood ratio dependence"...).

4.2.1 Kvadratna odvisnost

Definicija 47. *Naj bosta X in Y slučajni spremenljivki. X in Y sta **pozitivno kvadratno odvisni** oz. **PQD**, če za vsak (x,y) iz $\mathbb{R}^2$ velja*

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x]P[Y \leq y]. \tag{4.8}$$

Ko je neenakost ravno obratna, pa pravimo, da sta X in Y negativno kvadratno odvisni oz. NQD.

PQD nam na nek način pove, ali je verjetnost, da sta slučajni spremenljivki X in Y hkrati veliki oz. hkrati mali večja (ali vsaj enako velika) kot bi bila, če bi bili X in Y neodvisni.

Sedaj bomo to prevedli v "jezik kopul". Naj imata X in Y skupno porazdelitveno funkcijo H z zveznima robnima porazdelitvama F in G in kopulo C. Potem (4.8) zapišemo kot

$$H(x,y) \geq F(x)G(y) \text{ za vsak } (x,y) \text{ iz } \mathbb{R}^2 \tag{4.9}$$

in

$$C(u,v) \geq uv \text{ za vsak } (u,v) \text{ iz } \boldsymbol{I^2}. \tag{4.10}$$

4.2.2 Repna odvisnost

Repna odvisnost je, kot pove že ime, mera odvisnosti med spremenljivkami v zgornjem delu desnega in spodnjem delu levega kvadranta. Pove nam verjetnost, da je vrednost ene spremenljivke ekstremna pri pogoju, da je vrednost druge spremeljivke že ekstremna.

Definicija 48. *Naj bosta X in Y zvezni slučajni spremenljivki s porazdelitvenima funkcijama F in G. Parameter zgornje repne odvisnosti* λ_U *je limita (če obstaja) pogojne porazdelitve, da je Y večji kot 100ti t-percentil od G, pri pogoju, da je X večji od 100tega t-percentila od F, ko gre t proti 1, t.j.*

$$\lambda_U = \lim_{t \nearrow 1} P[Y > G^{(-1)}(t) | X > F^{(-1)}(t)]. \tag{4.11}$$

Podobno je parameter spodnje repne odvisnosti λ_L *enak*

$$\lambda_L = \lim_{t \searrow 0} P[Y \leq G^{(-1)}(t) | X \leq F^{(-1)}(t)]. \tag{4.12}$$

Ko λ_U *oz.* λ_L *obstajata, sta elementa* $[0,1]$. *Če je* $\lambda_U \in (0,1]$, *potem C ima zgornjo repno odvisnost, pravimo tudi, da sta X in Y asimptotično odvisni v zgornjem repu. Če je* $\lambda_U = 0$, *potem sta X in Y asimptotično neodvisni v zgornjem repu oz. C nima repne verjetnosti.*

O tem, da ta mera pravzaprav izhaja iz kopul, govori naslednja trditev:

Trditev 49. *Naj bodo X, Y, F, G,* λ_U *in* λ_L *kot iz definicije (48) in naj bo C kopula X in Y. Če limiti iz (4.12) in (4.11) obstaja, potem*

$$\lambda_U = 2 - lim_{t \nearrow 1} \frac{1 - C(t,t)}{1 - t} \tag{4.13}$$

in

$$\lambda_L = lim_{t \searrow 0} \frac{C(t,t)}{t}. \tag{4.14}$$

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\lambda_U &= \lim_{t \nearrow 1} P[Y > G^{(-1)}(t) | X > F^{(-1)}(t)] \\
&= \lim_{t \nearrow 1} P[G(Y) > t | F(X) > t] \\
&= \lim_{t \nearrow 1} \frac{\overline{C}(t,t)}{1 - t} \\
&= \lim_{t \nearrow 1} \frac{1 - 2t + C(t,t)}{1 - t} \\
&= 2 - \lim_{t \nearrow 1} \frac{1 - C(t,t)}{1 - t}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_L &= \lim_{t \searrow 0} P[Y \leq G^{(-1)}(t) | X \leq F^{(-1)}(t)] \\
&= \lim_{t \searrow 0} P[G(Y) \leq t | F(X) \leq t] \\
&= \lim_{t \searrow 0} \frac{C(t,t)}{t}.
\end{aligned}$$

□

Poglavje 5

Vrste kopul

5.1 Eliptične kopule

Definicija 50. *Če je X n-dimenzionalen slučajen vektor in je za nek $\mu \in \mathbb{R}^n$ in neko $n \times n$ simetrično nenegativno definitno matriko Σ karakteristična funkcija $X-\mu$, $\varphi_{X-\mu}(t)$, funkcija oblike $\varphi_{X-\mu}(t) = \phi(t^T \Sigma t)$, kjer je funkcija ϕ karakteristični generator, potem rečemo, da ima X eliptično porazdelitev s parametri μ, Σ, ϕ. Pišemo tudi $X\ E_n(\mu, \Sigma, \phi)$.*

V enorazsežnem primeru so eliptične porazdelitve enake simetričnim.

Naj imamo $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$. Naj bo $0 < Var(X_i), Var(X_j) < \infty$. Potem je:

$$\rho(X_i, X_j) := Cov(X_i, X_j)/\sqrt{Var(X_i)(Var(X_j))} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$$

Sedaj vpeljemo matriko R, $R_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$, ki je kovariančna matrika X. Ker so eliptične porazdelitve enolično določene z μ, Σ in ϕ, je kopula nedegeneriranega (vse variance so pozitivne) eliptično porazdeljenega slučajnega vektorja enolično določena z R in ϕ.

Tu lahko omenimo še, da če je slučajni vektor eliptično porazdeljen (z generatorsko karakteristično funkcijo ϕ), potem so tudi njegove meje eliptične porazdelitve "iste" vrste (imajo isti ϕ). Sprva se nam to dejstvo zdi "lepo", žal pa to za modeliranje realnih multivariatnih porazdelitev ni vedno najboljše. Za to je primernejše izbrati eliptično kopulo z različnimi tipi mej (Ne nujno eliptičnimi!). Takrat R ne predstavlja več matrike linearne korelacije, ampak ga moramo iz podatkov dobiti preko Kendallovega tau.

5.1.1 Gaussova kopula

Gaussova n-razsežna kopula je podana s predpisom

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n; \mathbb{R}) = \Phi_n(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \dots, \Phi^{-1}(u_2); R), \tag{5.1}$$

kjer je R variančna-kovariančna matrika, Φ_n n-razsežna standarna normalna porazdelitev, Φ^{-1} pa inverz enorazsežne standardne normalne porazdelitve.

Dvorazsežna Gaussova kopula je dana s predpisom:

$$C(u, v; \rho) = \Phi_2(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v), \rho), \ -1 \leq \rho \leq 1 \tag{5.2}$$

Anologen zapis bi bil:

$$C(u, v; \rho) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{2(1-\rho^2)}\right) \mathrm{d}s\mathrm{d}t. \tag{5.3}$$

V primeru dvorazsežne Gaussove kopule je ρ kar "klasični" linearni koeficient.

Dodatna opomba pri Gaussovih kopulah je to, da nimajo lastnosti repne odvisnosti. [1]

5.1.2 t-kopula

Naj bo

$$X = \mu + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{S}} Z,$$

kjer je $\mu \in \mathbb{R}^n, S \sim \chi^2_\nu$ in $Z \sim N_n(0, \Sigma)$ pa sta neodvisni. Potem ima X n-razsežno t-porazdelitev z matematičnim upanjem μ (za $\nu > 1$) in kovariančno matriko $\frac{\nu}{\nu-2}\Sigma$ (za $\nu > 2$). Če je $\nu \leq 2$, slednja ni definirana, takrat interpretiramo Σ le kot parameter oblike t-porazdelitve.

Kopulo X-a lahko zapišemo kot

$$C(u, \nu, R) = t^n_{\nu,R}(t^{-1}_\nu(u_1), \dots, t^{-1}_\nu(u_n)), \tag{5.4}$$

kjer je $R_{ij} = \Sigma_{ij}/\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}$ za $i, j \in 1, 2, \dots, n$ in smo s $t^n_{\nu,R}$ označili Studentovo n-razsežno t-porazdelitev z ν prostorskimi stopnjami.

V dveh dimenzijah je t-kopula enaka

$$C(u, \nu, R) = \int_{-\infty}^{t^{-1}_\nu(u)} \int_{-\infty}^{t^{-1}_\nu(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R^2_{12}}} \left\{1 + \frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{\nu(1-R^2_{12})}^{-(\nu+2)/2}\right\} \mathrm{d}s\mathrm{d}t. \tag{5.5}$$

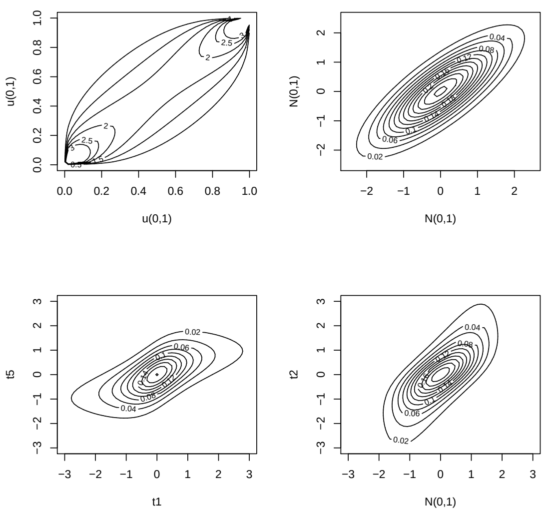
[1] Logično je, da nimajo niti spodnje niti zgornje, saj so radialno simetrične.

Za spremembo od Gaussove kopule, t-kopula ima spodnjo in zgornjo repno odvisnost. Za t-kopulo je

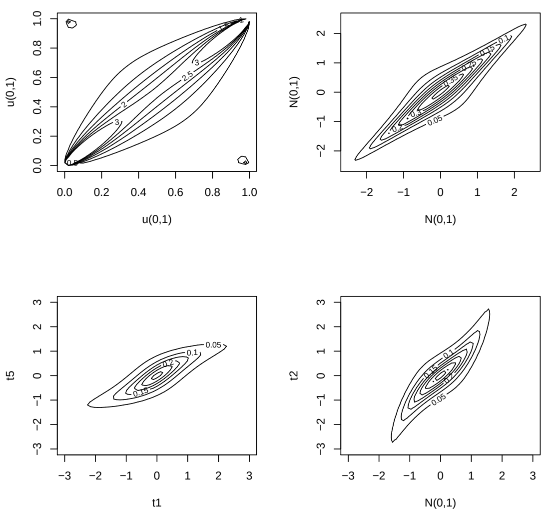
$$\lambda_U = 2\overline{t_{\nu+1}}(\sqrt{(\nu+1)(1-R_{12})}/\sqrt{1+R_{12}}).$$

Iz tega je razvidno, da odvisnost s povečevanjem stopenj prostosti pada, s povečevanjem R_{12} pa raste. In ravno to je prednost t-kopule pred Gaussovo, "zajame" odvisnost v repih, katere Gaussova ne.

Slika 5.1: Konturni diagrami gostot za normalno kopulo, $\rho = 0.8$



Slika 5.2: Konturni diagrami gostot za t-kopulo, $\nu = 1$, $\rho = 0.8$



5.2 Marshall-Olkinove kopule

Predstavljajmo si, da imamo sistem z dvema komponentama, ki je podvržen različnim šokom. Šok lahko vpliva bodisi le na eno komponentno, bodisi na obe.

Z X in Y bomo označevali življenjsko dobo komponent 1 in 2, zanimala pa nas bo predvsem verjetnost $P[X > x, Y > y] = \overline{H}(x, y)$. Šoki, katerim sta komponenti podvrženi, naj tvorijo Poissonov proces s (pozitivnimi) parametri $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$: indeks pri λ nam pove, ali šok "pokonča" komponento 1, 2 ali obe. Časi pojava teh šokov Z_1, Z_2 in Z_{12} so tako neodvisne, eksponentno porazdeljene slučajne spremenljivke s parametri λ_1, λ_2 in λ_{12}.

Potem sledi $X = min(Z_1, Z_{12})$, $Y = min(Z_2, Z_{12})$ in za $x, y \geq 0$ je

$$\begin{aligned}\overline{H}(x, y) &= P[Z_1 > x]P[Z_2 > y]P[Z_{12} > max(x, y)]\\ &= \exp[-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} max(x, y).\end{aligned}$$

Mejni funkciji preživetja sta $\overline{F}(x) = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})x)$ in $\overline{G}(y) = \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{12})y)$.

Sedaj le še izrazimo $\overline{H}(x, y)$ s funkcijama $\overline{F}(x), \overline{G}(y)$. Pri tem si pomagamo z dejstvom, da je $max(x, y) = x + y - min(x, y)$:

$$\begin{aligned}\overline{H}(x, y) &= \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})x - (\lambda_2 + \lambda_{12})y + \lambda_{12} min(x, y))\\ &= \overline{F}(x)\overline{G}(y) \min exp(\lambda_{12}x), exp(\lambda_{12}y).\end{aligned}$$

Sedaj postavimo $u = \overline{F}(x)$ in $v = \overline{G}(y)$, $\alpha = \lambda_{12}/(\lambda_1+\lambda_{12})$ in $\beta = \lambda_{12}/(\lambda_2+\lambda_{12})$. Potem je kopula preživetja dana z

$$\widehat{C}(u, v) = uv \min(u^{-\alpha}, v^{-\beta}) = \min(u^{1-\alpha}v, v^{1-\beta}u).$$

Tako dobimo kopule preživetja, ki tvorijo Marshall-Olkinovo družino kopul (v dveh dimenzijah). To je dvoparametrična družina, velja (ker so vse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}$ pozitivne) $0 < \alpha, \beta < 1$. Torej:

$$C_{\alpha,\beta}(u, v) = \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}) = \begin{cases} u^{1-\alpha}v, & \text{za } u^\alpha \geq v^\beta,\\ v^{1-\beta}u, & \text{za } u^\alpha \leq v^\beta.\end{cases} \tag{5.6}$$

Zanimivo pri teh kopulah pa je, da čeprav imajo te kopule poln nosilec (za $\alpha > 0$ in $\beta < 1$), niso niti absolutno zvezne niti singularne, ampak imajo obe komponenti.

5.3 Arhimedske kopule

Vse kopule, katere sem opisala do sedaj, so bile izpeljane iz porazdelitev preko Sklarjevega izreka. Tako so na primer eliptične kopule pridobljene iz večrazsežnih eliptičnih porazdelitev. Le-te so "ugodne" za simulacijo in zato tudi simulacija eliptičnih kopul ne povzroča bistvenih problemov. Imajo pa tudi slabe lastnosti: nimajo tako imenovane zaprte oblike in imajo problematično radialno simetričnost ($C = \widehat{C}$). V realnosti namreč opazimo, da je odvisnost ponavadi močnješa med slabimi kot pa med dobrimi dogodki. Ravno pri opisu takih asimetrij pa si lahko pomagamo z arhimedskimi kopulami. Obstaja zelo veliko različnih družin, ki s spreminjanjem parametrov omogočajo širok "razpon strukture odvisnosti". Toda zato, ker niso izpeljane preko Sklarjevega izreka, pa je včasih problematična njihova razširitev iz dvodimenzionalnega na večdimenzionalni prostor.

Definicija 51. *Naj bo φ zvezna, strogo padajoča funkcija iz $\boldsymbol{I}$ v $[0,\infty]$ taka, da $\varphi(1) = 0$. Pseudo-inverz φ je potem funkcija $\varphi^{[-1]} : [0,\infty] \to [0,1]$ dana s predpisom*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{če } 0 \le t \le \varphi(0), \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases}$$

$\varphi^{[-1]}$ je zvezna in nenaraščajoča na interalu $[0,\infty]$ in strogo padajoča na delu $[0,\varphi(0)]$. Velja tudi

$$\varphi\Big(\varphi^{[-1]}(t)\Big) = \begin{cases} t, & \text{če } 0 \le t \le \varphi(0) \\ \varphi(0), & \text{sicer.} \end{cases}$$

Torej, če je $\varphi(0) = \infty$, potem je $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Trditev 52. *Naj bo φ zvezna, strogo padajoča funkcija kot v definiciji (51) in $\varphi^{[-1]}$ njen psevdo-inverz. Naj bo C funkcija iz $\boldsymbol{I^2}$ v $\boldsymbol{I}$ dana s predpisom*

$$C(u,v) = \varphi_{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \tag{5.7}$$

C je kopula natanko tedaj, ko je φ konveksna.

Kopule oblike (5.7) imenujemo arhimedske kopule, funkciji φ pa pravimo generator kopule. Če je $\varphi(0) = \infty$, potem pravimo, da je φ strogi generator, kopula (generirana z njim) pa stroga arhimedska kopula.

Družin arhimedskih kopul je zelo veliko, ene bolj znanih družin pa so:

Gumbelova kopula:

$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta,\ \theta \ge 1$

$$C_\theta(u,v) = \exp\Big(- [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\Big)$$

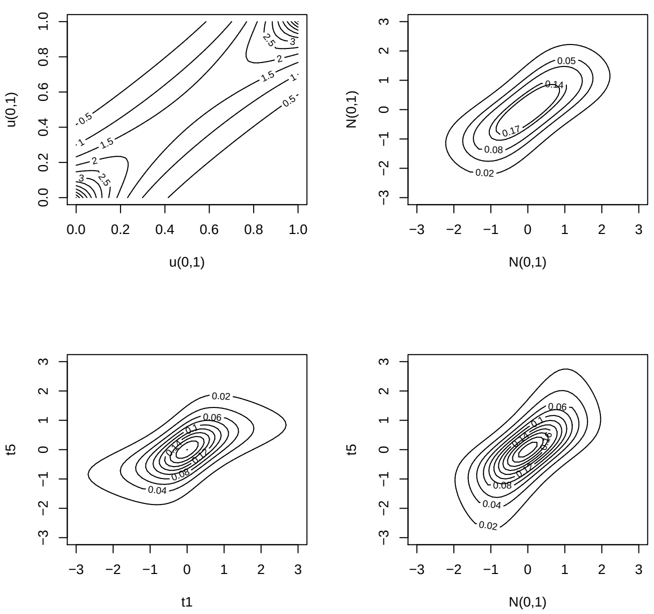
Claytonova kopula:
$\varphi(t) = (t^{-\theta}/\theta,\ \theta \in [-1, \infty)\backslash\{0\}$

$$C_\theta(u, v) = \max\Big(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0\Big)$$

Frankova kopula:
$\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1},\ \theta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

$$C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} ln\Big(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v})}{e^{-\theta} - 1}\Big)$$

Slika 5.3: Konturni diagrami gostot za Frankovo kopulo, $\theta = 6$



5.4 Empirične kopule

Definicija 53. *Empirične kopule je prvi "odkril" Deheuvels leta 1979. Naj bo $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^n$ vzorec velikosti n, vzet iz dvorazsežne zvezne porazdelitve. Empirična kopula je potem funkcija C_n, dana s predpisom:*

$$C_n\Big(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\Big) = \frac{\textit{število parov } (x, y) \textit{ v vzorcu, kjer je } x \le x_{(i)}, y \le y_{(j)}}{n},$$

kjer sta $x_{(i)}, y_{(j)}$, $1 \le i, j \le n$, vrstilni statistiki vzorca.

Frekvenca empirične kopule c_n pa je:

$$c_n\Big(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\Big) = \begin{cases} \frac{1}{n},\ (x_i,y_j) \text{ je element vzorca,} \\ 0,\ \text{sicer.} \end{cases}$$

Empirična kopula pravzaprav ni "vrsta kopule" na tak način, kot je vrsta kopule normalna ali arhimedska kopula. To je kopula, ki jo dobimo direktno iz podatkov in jo lahko uporabimo za to, da poiščemo "pravo" kopulo ali pa le, da ocenimo strukturo odvisnosti med slučajnimi spremenljivkami.

Trditev 54. *Naj bo C_n empirična kopula in c_n frekvenca empirične kopule za vzorec $\{(x_k,y_k)\}_{k=1^n}$. Če r in t označujeta vzorčni različici Spearmanovega rho in Kendallovega tau, zaporedoma, potem je*

$$r = \frac{12}{n^2-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big[C_n(\frac{i}{n},\frac{j}{n}) - \frac{ij}{n^2}\Big],$$

$$t = \frac{2n}{n-1}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{q=1}^{j-1}\Big[c_n(\frac{i}{n},\frac{j}{n})c_n(\frac{p}{n},\frac{q}{n}) - c_n(\frac{i}{n},\frac{q}{n})c_n(\frac{p}{n},\frac{j}{n})\Big].$$

Empirična kopula je le neparametrična ocena za kopulo slučajnih spremenljivk, obstajajo pa še parametrični načini (metoda največjega verjetja, metoda momentov), ko iščemo najboljše cenilke za parametre kopule.

Poglavje 6

Uporaba kopul v financah

Kopule so začeli uporabljati v financah šele pred kratkim (okoli leta 2000). Ker so splošno orodje, s pomočjo katerega lahko skonstruiramo večrazsežne porazdelitve in preučujemo razne strukture odvisnosti med slučajnimi spremenljivkami, pa so v financah lahko zelo uporabne.

Kopule lahko uporabimo pri kreditnem točkovanju (angl. *credit scoring*), modeliranju povračila sredstev (angl. *asset return modelling*), merjenju in upravljanju tveganja (angl. *risk measurement, risk management*)... Bolj podrobno si bomo v tem delu diplomskega seminarja pogledali prav delovanje kopul na zadnjem izmed naštetih področjih.

Eden izmed pomembnejših problemov na področju upravljanja tveganja je "združevanje" posameznih tveganj. Ta problem je lahko rešljiv v primeru, ko so slučajne spremenljivke, ki modelirajo individualnana tveganja, neodvisne, problem pa nastane, ko želimo modelirati odvisne slučajne spremenljivke, za katere ne vemo točno, kako so porazdeljene skupaj.

Uporaba kopul na področju upravljanja tveganj:

- kapitalska ustreznost (angl. *economic capital adequacy*),
- tržno tveganje (angl. *market risk*),
- kreditno tveganje (angl. *credit risk*),
- operativno tveganje (angl. *operational risk*),
- zavarovalniško tveganje (angl. *insurance risk*),
- ...

V sledečih razdelkih je natančnejše opisana uporaba kopul v povezavi z upravljanjem tržnega, zavarovalniškega in kreditnega tveganja.

6.1 Kopule in upravljanje tržnega tveganja

Naj imamo portfelj n vrednostnih papirjev, kjer je trenutna vrednost portfelja dana z

$$V_t = \sum_{i=1}^{n} \beta_i S_{i,t},$$

β_i je število enot i-tega vrednostnega papirja in $S_{i,t}$ njegova trenutna cena. Naj bo $\Delta_{t+1} = -(V_{t+1} - V_t)/V_t$ (negativna) relativna izguba v obdobju $(t, t+1]$ in naj bo to naše "združeno" tveganje. Potem je

$$\Delta_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i,t} \delta_{i,t+1},$$

kjer je $\gamma_{i,t} = \beta_i S_{i,t}/V_t$[1] in $\delta_{i,t+1} = -(S_{i,t+1} - S_{i,t})/S_{i,t}$ (negativna) relativna izguba v času $(t, t+1]$ vrednostnega papirja i.

Pri tržnem tveganju nas zanima predvsem učinek porazdelitve $\delta := (\delta_{1,t+1}, \ldots, \delta_{n,t+1})^T$ na skupno tveganje Δ_{t+1}. V uporabi je običajno privzeta porazdelitev za δ večrazsežna normalna, kar pa, razen lahke izračunljivosti, ni najbolj smiselno. Empirične porazdelitve namreč kažejo, da imajo robne porazdelitve δ večinoma težje repe kot pri normalni porazdelitvi. Poleg tega, pa so ekstremne izgube različnih vrednostnih papirjev pogosto povezane med sabo, t.j. se zgodijo hkrati. Če potem za modeliranje δ uporabimo Gaussovo kopulo, zato, ker le-ta nima lastnosti repne verjetnosti, tem dogodkom pripišemo premajhno verjetnost.

Zgled 2. *(Jouanin, Riboulet in Roncalli [7]) Izračun VaR*

Baza podatkov je baza podatkov London Metal Exchange, uporabljene pa so tržne vrenosti vrednostnih papirjev Aluminium Alloy (AL), Coper (CU), Nickel (NI), Lead(PB) in 15-mesečna terminska cena Aluminium Alloy (AL-15) za obdobje med leti 1988-2000. Iz teh vrednostnih papirjev sestavimo tri različne portfelje (negativna vrednost pomeni kratko pozicijo):

	AL	AL-15	CU	NI	PB
P_1	1	1	1	1	1
P_2	-1	-1	-1	1	1
P_3	2	1	-3	4	5

Za te tri portfelje predpostavimo, da so robne porazdelitve normalne, njihova kopula bo enkrat enaka Gaussovi, drugič pa t-kopuli.

[1] $\gamma_{i,t}$ nam pove kakšen delež vrednosti trenutnega portfelja "izvira" iz vrednostnega papirja i.

Tabela 6.1: Tabela korelacijskih koeficientov

	AL	AL-15	CU	NI	PB
AL	1.00	0.8193	0.44353	0.3628	0.3312
AL-15		1.00	0.3893	0.3358	0.2975
CU			1.00	0.3693	0.3121
NI				1.00	0.3089
PB					1.000

Sedaj nas bo zanimal VaR za te tri različne portfelje:

Tabela 6.2: VaR: Gaussova kopula

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
P_1	7.340	9.402	13.20	14.65	17.54
P_2	4.047	5.176	7.318	8.107	9.753
P_3	13.96	17.90	25.21	27.92	33.54

Tabela 6.3: VaR: t-kopula (ena stopinja prostosti)

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
P_1	5.797	8.121	13.36	15.65	20.15
P_2	3.812	5.531	9.801	11.65	16.34
P_3	13.45	19.32	34.15	40.77	54.95

Tabela 6.4: Zgodovinski VaR

	90%	95%	99%	99.5%	99.9%
P_1	6.627	9.023	14.43	16.52	29.56
P_2	3.434	5.005	8.946	11.28	16.24
P_3	12.24	17.32	31.77	36.09	50.02

Te tri tabele kažejo, kako izbira kopule vpliva na vrednosti in da VaR pridobljen preko Gaussove kopule podcenjuje tveganje za stopnje zaupanja večje od 95%.

Modeliranje VaR pa ni edina uporaba kopul na področju upravljanja s tržnim tveganjem, kopule se lahko npr. uporablja tudi pri testiranju izjemnih situacij.

6.2 Kopule in zavarovalniško tveganje

Zavarovalnica ima portfelj n-tveganj $X_1, X_2, \dots, X_n$. Vsak X_i, $i = 1, 2, \dots, n$, predstavlja zavarovalnici potencialno izgubo na (za zavarovalnico) različnih področjih poslovanja. Zavarovalnica se ne želi izpostaviti velikim hkratnim izgubam, zato se zavaruje pri pozavarovalnici. Recimo, da se zavaruje za presežne izgube. Če na področju poslovanja izguba zavarovalnice preseže nek znesek, t.j. $X_i > k_i$, in to velja za vsa v pogodbi naprej določena področja, t.j za vsak $i \in B \subseteq \{1, 2, \dots n\}$, potem je funkcija izplačil take pogodbe enaka

$$f((X_i, k_i); i \in B) = \Big(\Pi_{i \in B} \chi_{[X_i > k_i]}\Big)\Big(\sum_{i \in B}(X_i - k_i)\Big).$$

Vrednost pogodbe je nato enaka $E(f((X_i, k_i); i \in B))$. Brez škode za splošnost predpostavimo, da je $B = 1, 2, \dots, l, \quad l \leq n$. Če bi poznali skupno porazdelitveno funkcijo $X_1, X_2, \dots, X_l$, bi vrednost pogodbe zlahka določili. Ker pa je ne poznamo, bomo njihovo skupno porazdelitev ocenili s kopulami. Če so $F_1, F_2, \dots, F_l$ robne porazdelitve, pripadajoče $X_1, X_2, \dots, X_l$, je potem

$$\overline{H}(k_1, \dots, k_l) = \widehat{C}(\overline{F_1}(k_1), \dots, \overline{F_l}(k_l))^2.$$

Zgled 3. *(Embrechts, Lindskog in McNeil [5]) Predpostavimo, da imamo znane robne porazdelitve* $X_1, X_2, \dots, X_l$, $X_i \sim LN(0, 1)$, *njihove (paroma) medsebojne korelacijske koeficiente (naj bodo vsi enaki* 0.5*) in da je* k *enak za vse* $X_1, X_2, \dots, X_l$. *Zanimal nas bo vpliv izbire kopule na verjetnost izplačila in na vrednost pogodbe. Za ilustracijo bomo uporabili Gaussovo in Gumbelovo* ($\theta = 2$) *kopulo.*

Primer 1:

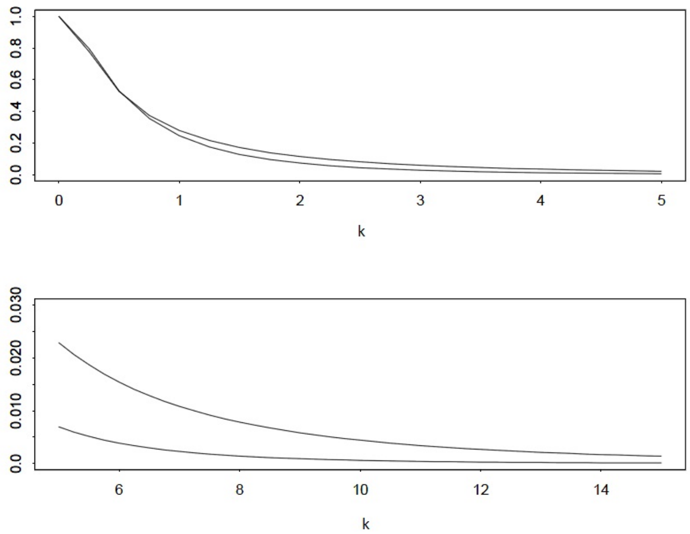
Naj bo $l = 5, k \in [0, 15]$.

Na sliki (3) vidimo, da v primeru ekstremnih dogodkov (ko je k velik), Gaussova kopula hkratnim izgubam pripisuje manjšo verjetnost kot Gumbelova. V primeru, da je resnična struktura odvisnosti med škodnimi dogodki dana z Gumbelovo kopulo, mi pa uporabimo Gaussovo, torej podcenimo verjetnost izplačila. Če fiksiramo

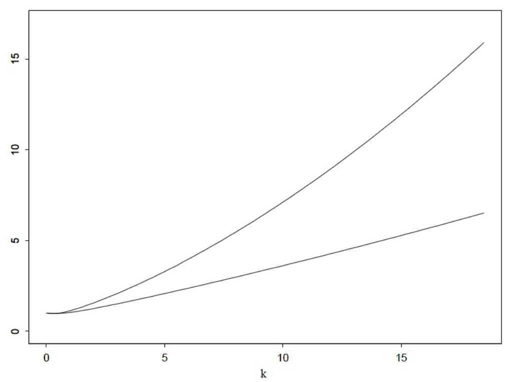
[2] Oznake so enake kot prej: $\overline{H}$ je skupna funkcija preživetja, $\widehat{C}$ pa kopula preživetja.

$k = F^{-1}(0.99) \approx 10.25$, kar pomeni, da pride do izplačila, če vseh pet izgub preseže 99%−kvantil, je verjetnost izplačila z uporabo Gaussove kopule kar za osemkrat manjša od verjetnosti, dobljene z Gumbelovo (slika (3)).

Slika 6.1: Verjetnost izplačila, $l = 5$, ko je struktura odvisnosti dana z Gaussovo kopulo (spodnja krivulja) in Gumbelovo kopulo (zgornja krivulja)



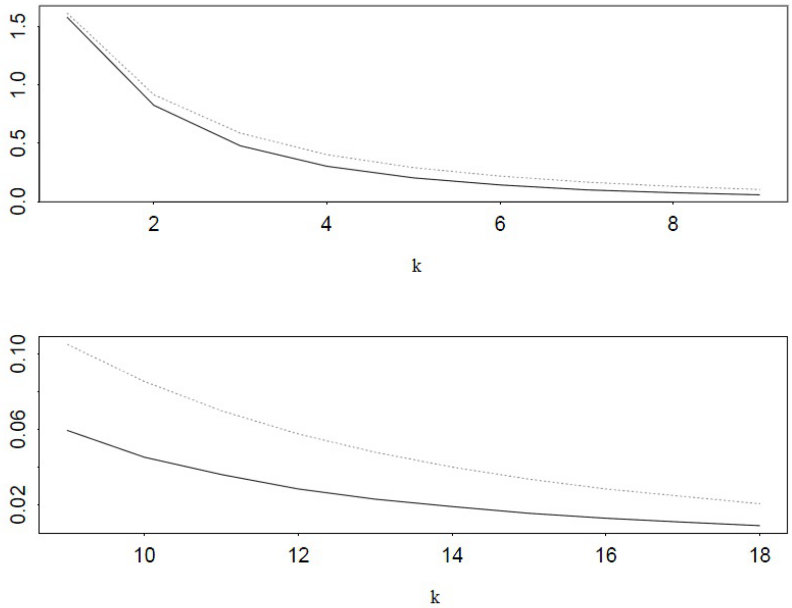
Slika 6.2: Razmerje med verjetnostmi izplačila (Gumbelova kopula/Gaussova kopula), $l = 5$



Primer 2:

Naj bo $l = 2, k = 1, 2, \ldots, 18$. *Ocenjujemo* $E(f(X_1, X_2, k))$.

Slika 6.3: $E(f(X_1, X_2, k))$ za Gaussovo (spodnja krivulja) in Gumbelovo kopulo (zgornja krivulja)



Enako kot prej, so pričakovana izplačila v primeru ekstremnih dogodkov bistveno manjša v primeru Gaussove kopule.

6.3 Upravljanje kreditnega tveganja in vrednotenje kreditnih derivativov

Glede na to, da je področje upravljanja kreditnega tveganje brez dvoma finančno področje, kjer je (bila) uporaba kopul najbolj prisotna, si zasluži svoje poglavje. V tem poglavju bomo povzeli zaključke, do katerih je leta 2000 prišel Li [8], čeprav je bilo o tem nasploh veliko napisanega.

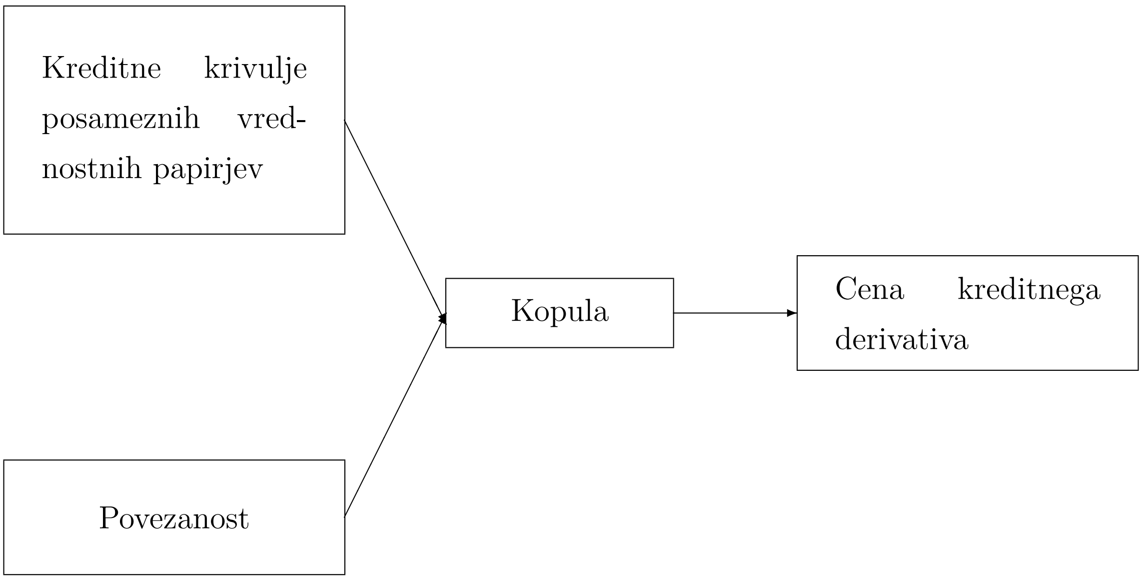
6.3.1 Kreditni derivativi

Na prelomu tisočletja je prišlo do velike rasti trga izvedenih finančnih instrumentov, poleg klasičnih, kot so terminske pogodbe, terminski posli, opcije in zamenjave, so se na trgu pojavili tudi kreditni izvedeni finančni instrumenti, t.i. kreditni derivativi. Le-ti naj bi omogočali razpršitev kreditne izpostavljenosti in posledično lažje upravljanje s kreditnim tveganjem.

Osnovni namen kreditnih izvedenih finančnih instrumentov je, da omogočajo izločitev in prenos kreditnega tveganja, ki ga poraja referenčno premoženje (angl. *refference asset/underlaying asset*) - vrednost kreditnega derivativa je tako odvisna od vrednosti in kreditnega tveganja le-tega. Njihov cilj je prenos kreditnega tveganja od kupca zaščite k prodajalcu zaščite, njihova prodaja oz. nakup pa ne povzroča nobenih sprememb v osnovnem kreditnem odnosu.

S kreditnimi izvedenimi finančimi instrumenti se trguje na neorganiziranih trgih, trgih OTC, kjer cene niso določene vnaprej, ampak je cena določena med samim kupcem in prodajalcem zaščite. Poleg njih na trgu sodelujejo še posredniki (investicijske banke, borzno posredniške hiše), katerih glavna naloga je zagotavljanje likvidnosti samega trga.

Kreditni derivativi so se prvič pojavili leta 1992, od takrat naprej pa je njihov trg do zdajšnje krize hitro rastel. Najprej so bile v rabi osnovne oblike, kot so **zamenjava kreditnega tveganja (angl. *credit default swap*), zamenjava celotnega donosa (angl.*total return swap*), opcije na kreditni razpon (angl. *credit spread option*),** kaj kmalu pa so se na trgu pojavili tudi v strukturirani obliki. Tako so najprej imeli predvsem "eno" referenčno premoženje, pozneje pa so nosili kreditna tveganja, povezana s portfelji vrednostih papirjev (npr. CDO, CBO).



Problem nastane, ko želimo kreditne derivative vrednotiti. To je problematično že pri preprosti zamenjavi kreditnega tveganja, kaj šele pri vrednotenju strukturiranih kreditnih derivativov. Vrednost je namreč odvisna od tega, kako se obnaša posamezen vrednosten papir in kako se obnašajo skupaj. Kako se obnaša posamezen vrednostni papir določimo tako, da poiščemo njegovo kreditno krivuljo, kako se obnašajo skupaj pa poskusimo določiti tako, da sklepamo o tem, kako so povezani in da nato poiščemo njihovo skupno porazdelitveno funkcijo. Li je predlagal, da jo poiščemo s kopulami.

Izpeljava kreditne krivulje za posamezni vrednostni papir

Imamo vrednostni papir A. Potem je slučajna spremenljivka T_A, v prihodnje jo bomo imenovali le T, " čas preživetja" zvezna slučajna spremenljivka, ki meri, koliko časa preteče od danes pa do trenutka, ko vrednostni papir propade[3]. Naj bo $F(t)$ njena porazdelitvena funkcija [4]

$$F(t) = Pr[T \leq t] \text{ za } t \geq 0$$

in $S(t)$ njena funkcija preživetja

$$\overline{F}(t) = S(t) = 1 - F(t) = P[T > t] \text{ za } t \geq 0.$$

$S(t)$ nam pove verjetnost, da A preživi do časa t.

Za zvezno slučajno spremenljivko T pa lahko definiramo tudi gostoto porazdelitve kot

$$f(t) = F'(t) = -S'(t) = lim_{\Delta \searrow 0} \frac{Pr[t < T \leq t + \Delta]}{\Delta}.$$

Ker pa nas bo zanimalo tudi, kaj lahko povemo o T, če vemo, da je A "preživel" že x let, vpeljemo še

$$_tq_x = Pr[T - x \leq t \mid T > x], \qquad t \geq 0,$$

$$_tp_x = 1 - {_tq_x} = Pr[T - x > t \mid T > x], \qquad t \geq 0.$$

Če je $t = 1$, je potem $q_x = Pr[T - x \leq 1 \mid T > x]$ in $p_x = 1 - {_tq_x} = Pr[T - x > 1 \mid T > x]$. Simbol q_x ponavadi imenujemo **robna verjetnost propada**. Kreditna krivulja je potem v diskretnem primeru preprosto definirana kot zaporedje $q_0, q_1, \ldots, q_n$.

[3]Tokrat za nas samo vprašanje, kaj je propad ni pomembno, je pa opredelitev propada bistvena pri dejanskih raziskavah.

[4]Predpostavimo še, da je $F(0) = 0$ in zato $S(0) = 1$.

Zaradi praktičnosti pa včasih namesto vpeljave kreditne krivulje raje uporabimo **funkcijo stopnje tveganja**. Le-ta nam za določen vrednosti papir takoj vrne verjetnost propada vrednostnega papirja, po tem, ko je le-ta že dosegel starost x.

$$\begin{aligned} Pr[x < T \leq x + \Delta x \mid T > x] &= \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &\approx \frac{f(x)\Delta x}{1 - F(x)}. \end{aligned}$$

Funkcija stopnje tveganja $h(x)$ je potem

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = -\frac{S'(x)}{S(x)}.$$

Zanjo velja:

$$S(t) = e^{-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s},$$

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t h(s+x)\mathrm{d}s},$$

$${}_tq_x = 1 - e^{-\int_0^t h(s+x)\mathrm{d}s}.$$

Gostota porazdelitve T je nato

$$f(t) = S(t)h(t).$$

Tipična predpostavka je, da je stopnja tveganja h konstantna tekom nekega obdobja, npr. na intervalu $[x, x+1]$. Takrat je $f(t) = he^{-ht}$, kar pomeni, da je čas preživetja porazdeljen eksponentno s parametrom h. To omogoča tudi skrčitev na čas krajši od enega leta. Za $0 < t \leq 1$ je potem

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s} = e^{-ht} = (p_x)^t,$$

kjer je p_x verjetnost propada po tem, ko je vrednostni papir že dosegel starost eno leto.

Modeliranje funkcije stopnje tveganje je koristno, ker nam vrne informacijo o "zdajšnji" verjetnosti propada, omogoča "učinkovitejše" primerjanje na skupini posameznikov, poleg tega pa se jo da preprosto prilagoditi raznim modelom. Hkrati je uporabna tudi zato, ker je podobna kratkoročni obrestni meri in jo tako lahko, z nekaj prilagoditvami le-teh, uporabimo v t.i. kratkoročih modelih.

Zadnje vprašanje, ki nastopi pri modeliranju kreditne krivulje pa je, kje dobimo podatke, iz katerih krivuljo dejansko skonstruiramo:

- **Pretekli podatki bonitetnih hiš.**
  Bonitetne hiše poleg rednih objav letnih stopenj propada objavljajo tudi večletne. Iz le-teh potem lahko izpeljemo funkcijo stopnje tveganja.

- **Mertonov model, Delianedis in Geske.**

- **Preko tržnih cen ali tržnih razponov.**
  (Li[1998]) Imamo zaporedje obveznic z dospelostjo $1, 2, \ldots, n$ let, ki so izdane s strani istega podjetja, imajo enako seniornost in so dostopne na trgu - imajo tržno ceno. Njihove donose do dospetja potem primerjamo z donosi do dospetja zakladnih menic. Iz razkoraka med donosi obveznic podjetja in donosi zakladnih menic, ob upoštevanju stopnje povračila, seniornosti in ocene obveznic, lahko izpeljemo kreditno krivuljo.

Skupna porazdelitvena funkcija

Imamo vrednostna papirja A in B, s q_A, q_B označimo verjetnosti, da A oz. B propade v enem letu. Najprej si bomo pogledali pristop, ki so ga opisali Gupton, Finger in Bathia ter ga nato primerjali z uporabo kopul.

Najprej poiščemo Z_A in Z_B taka, da velja

$q_A = Pr[Z < Z_A]$ in

$q_B = Pr[Z < Z_B]$,

kjer je Z standardno normalno porazdeljena slučajna spremenljivka. Poiščemo korelacijski koeficient med vrednostnimi obeh vrednostnih papirjev, označimo ga z ρ. Potem izračunamo skupno porazdelitveno funkcijo kot

$$\begin{aligned} Pr[Z < Z_A, Z < Z_B] &= \int_{-\infty}^{Z_A} \int_{-\infty}^{Z_B} \phi_2(x, y \mid \rho) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \\ &= \Phi_2(Z_A, Z_B, \rho), \end{aligned} \tag{6.1}$$

kjer smo s $\phi_2(x, y \mid \rho)$ označili dvorazsežno standardno normalno gostoto porazdelitve s korelacijskim koeficientom ρ, Φ_2 pa je dvorazsežna standardna normalna porazdelitvena funkcija.

Če si sedaj pogledamo dvorazsežno normalno kopulo s korelacijskim parametrom γ in označimo čase preživetja vrednostnih papirjev A in B s T_A in T_B, potem je

$$Pr[T_A < 1, T_B < 1] = \Phi_2(\Phi^{-1}[F_A(1)], \Phi^{-1}[F_B(1)], \gamma), \tag{6.2}$$

kjer sta F_A in F_B porazdelitveni funkciji pripadajočih časov preživetja.

Sedaj opazimo enakosti:

$$q_A = Pr[T_A < 1] = F_A(1),\ q_B = Pr[T_B < 1] = F_B(1),$$

$$Z_A = \Phi^{-1}(q_A) \text{ in } Z_B = \Phi^{-1}(q_B).$$

Če velja še $\rho = \gamma$, je potem (6.1) enako kot (6.2). Zato lahko zaključimo, da postopek, uporabljen s strani Guptona, Fingerja in Bhatie ni nič drugačen od pristopa z normalno kopulo, kjer za korelacijski parameter uporabimo kar korelacijski koeficient med vrednostmi A in B.

6.3.2 Diskretni korelacijski koeficient propada in korelacijski koeficient časov preživetja

Čeprav je v financah veliko "tveganja", pa korelacijski koeficient propada ni zelo dobro definiran. Prvi, diskreten pristop, ki si ga bomo pogledali, je razvil Lucas[1995].

Imamo dva dolžniška vrednostna papirja, A in B. Naj bo E_A dogodek, ko v enem letu propade A in E_B dogodek, ko znotraj enega leta propade B. Potem je **diskretni korelacijski koeficient propada** enak

$$\rho = \frac{Cov(\chi_{E_A}, \chi_{E_B})}{\sigma(\chi_{E_A})\sigma(\chi_{E_B})},$$

kjer je

$$\chi_{E_A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - Pr[E_A] & Pr[E_A] \end{pmatrix} \qquad \text{in} \qquad \chi_{E_B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - Pr[E_B] & Pr[E_B] \end{pmatrix}.$$

Če je $q_A = Pr[E_A]$ verjetnost propada vrednostnega paprija A v enem letu, $q_B = Pr[E_B]$ verjetnost propada vrednostnega papirja B v enem letu in $q_{AB} = Pr[E_A E_B]$ verjetnost, da znotraj enega leta propadeta oba, je potem

$$Cov(\chi_{E_A}\chi_{E_B}) = E[\chi_{E_A}\chi_{E_B}] - E[\chi_{E_A}]E[\chi_{E_B}] = q_{AB} - q_A q_B,$$

$$\sigma(\chi_{E_A}) = \sqrt{q_A(1 - q_A)},$$

$$\sigma(\chi_{E_B}) = \sqrt{q_B(1 - q_B)}$$

in

$$\rho = \frac{q_{AB} - q_A q_B}{\sqrt{q_A(1 - q_A)q_B(1 - q_B)}}. \tag{6.3}$$

Izbira časovnega intervala enega leta je poljubna, ni pa vedno najbolj primerna. Najbolj očitna pomankljivost je, da je propad sam po sebi namreč povezan s časom in prav tako to velja za korelacijski koeficient propada. Tako je npr. verjetnost, da oseba, rojena leta 2000 umre znotraj enega leta bisteveno manjša kot verjetnost, da umre tekom stotih let. In tako je "korelacijski koefiecient smrti obeh oseb" za eno leto blizu ničle, za 100 let pa skoraj ena. Poleg tega nas v financah lahko zanimajo obnašanja dolgoročnih vrednostih papirjev, ne samo kratkoročnih.

Zato na podoben način definiramo **korelacijski koeficient časov preživetja:**

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{Cov(\chi_{T_A}, \chi_{T_B})}{\sqrt{Var(T_A)Var(T_B)}} \\ &= \frac{E(T_A T_B) - E(T_A)E(T_B)}{\sqrt{Var(T_A)Var(T_B)}}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Korelacijski koeficient oblike (6.4) je bolj splošen. Če poznamo $f(s,t)$, gostoto porazdelitve časov preživetja T_A in T_B, ga lahko prevedemo na diskretni korelacijski koeficient propada:

$E_A = \{T_A < 1\}$, $E_B = \{T_B < 1\}$

in

$q_A = \int_0^1 f_A(s)\mathrm{d}s$,

$q_B = \int_0^1 f_B(t)\mathrm{d}t$,

$q_{AB} = \int_0^1 \int_0^1 f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$.

Podobno lahko naredimo za katerikoli poljubni intrval $[0,t]$, ne pa samo za obdobje enega leta.

Zgled 4. *Sedaj bomo naredili konkreten primer, kako lahko iz kreditnih krivulj za posamezne vrednostne papirje preko uporabe korelacijskega koeficienta za njihove vrednosti izpeljemo korelacijski koeficient časov preživetja.*

Imamo dolžniška vrednostna papirja A in B s pripadajočimi funkcijami stopnje tveganja: $h_A = 0.06$ *in* $h_B = 0.10$. *Predpostavimo, da so robne porazdelitve porazdeljene normalno. Namesto, da bi uporabili skupno porazdelitveno funkcijo, bomo uporabili kopulo teh dveh vrednostnih papirjev, predpostavimo, da je enaka Gaussovi dvorazsežni kopuli. Hkrati naj bo korelacijski koeficient vrednosti enak* $\rho = 0.1$.

Sedaj znamo za oba vrednostna papirja izračunati ${}_tq_0$*:*

$${}_tq_0^A = Pr[T_A < t] = 1 - e^{-0.06t},$$

$${}_tq_0^B = Pr[T_B < t] = 1 - e^{-0.10t}.$$

Poznamo pa tudi $Pr[T_A < t, T_B < t] = C({}_tq_0^A, {}_tq_0^B)$.
Tako je npr. za $t = 0.5$*:*

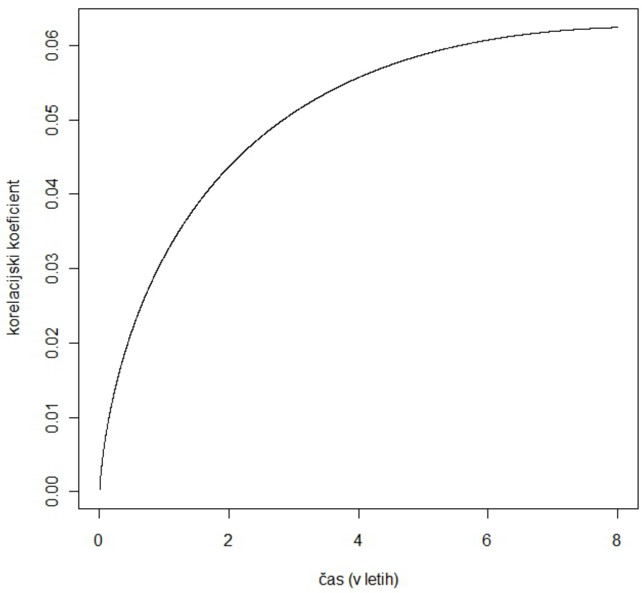
${}_tq_A = 0.0296$, ${}_tq_B = 0.0488$, $C({}_tq_0^A, {}_tq_0^B) = 0.0022$ *in*

$\rho = 0.0217$.

Tabela 6.5: Korelacijski koeficient časov preživetja

Leto	1	2	3	4	5	6	7	8
${}_tq_A$	0.0582	0.1131	0.1647	0.2134	0.2592	0.3023	0.3430	0.3812
${}_tq_B$	0.0952	0.1813	0.2592	0.3297	0.3935	0.4512	0.5034	0.5507
$C({}_tq_0^A, {}_tq_0^B)$	0.0077	0.0258	0.0510	0.0811	0.1146	0.1503	0.1873	0.2250
ρ	0.0317	0.0437	0.0510	0.0557	0.0588	0.0608	0.0619	0.0630

Slika 6.4: Graf odvisnosti korelacijskega koeficienta časov preživetja od časa (Gaussova kopula, $\rho = 0.1$)



6.3.3 Vrednotenje pogodbe, vezane na prvi propad

Predpostavimo, da imamo portfelj z n-dolžniškimi vrednostmi papirji. Za vsakega poznamo njegovo kreditno krivuljo oz. funkcijo stopnje tveganja za njegov čas preživetja T_i, čigar porazdelitvena funkcija je enaka $F_i(t)$. Če uporabimo Gaussovo kopulo, potem lahko dobimo porazdelitev skupnih časov preživetja kot

$$H(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \Phi_n(\Phi^{-1}(F_1(t_1)), \Phi^{-1}(F_2(t_2)), \ldots, \Phi^{-1}(F_n(t_n)); R)^5.$$

Da lahko simuliramo korelirane čase preživetja, vpeljemo zaporedje spremenljik $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$. Le-te so take, da je njihova kovariančna matrika enaka matriki R in da za vsak $i = 1, 2, \ldots, n$ velja:

$$Y_i = \Phi^{-1}(F_i(T_i)).$$

Potem obstaja bijektivna preslikava med Y in T. Torej je simulacija $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ekvivalentna simulaciji $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.

1. Zgeneriramo zaporedje $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$.
2. Preko $T_i = F_i^{-1}[\Phi(Y_i)]$ za vsak $i = 1, \ldots, n$ dobimo $T_1, T_2, \ldots T_n$.

Zgled 5. *Kako sedaj to povežemo z vrednotenjem pogodbe, vezane na prvi propad? Denimo, da imamo portfelj n-dolžniških vrednostnih papirjev. Vsak izmed njih ima konstantno funkcijo stopnje tveganja* $h = 0.1$ *za* $0 < t < \infty$. *Že prej smo pokazali, da je gostota porazdelitve za čas preživetja teh vrednostnih papirjev enaka* he^{-ht}, *torej, da so časi preživetja porazdeljeni eksponentno s parametrom h in je njihovo matematično upanje enako* $1/h$. *Predpostavimo tudi, da je za vsak par vrednostnih papirjev korelacijski koeficent vrednosti enak* σ^6. *Sedaj kupimo pogodbo, ki nam izplača evro, če se zgodi propad kateregakoli vrednostnega papirja iz portfelja v obdobju dveh let. Dodatno, naj bo obrestna mera* $r = 0.1$.

Sedaj iščemo porazdelitev slučajnega vektorja $T = min\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$. *Če so vrednostni papirji med seboj neodvisni, potem je*

$$\begin{aligned} P[T \leq t] = 1 - P[T > t] = 1 - P[T_1 > t, T_2 > t, \ldots, T_n > t] = \\ (n.e.p) = 1 - P[T_1 > t]^n = 1 - e^{-nht}, \end{aligned} \tag{6.5}$$

kar je ravno porazdelitvena funkcija ekosponentno s parametrom nh porazdeljene slučajne spremenljivke. Če je $T < 2$, *potem je vrednost naše pogodbe enaka* $1e^{-rT}$.

[5] R je kovariančna matrika.

[6] Da je R pozitivno definitna, mora zadoščati pogoju $\sigma > -1/(n-1)$.

Ob upoštevanju porazdelitve T dobimo

$$\begin{aligned} V(0,2) &= \int_0^2 e^{-rt} nhe^{-nt}\mathrm{d}t = \int_0^2 nhe^{-t(r+nh)} \\ &= \frac{nh}{r+nh}(1-e^{-2(r+nh)}). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Za konkreten n, npr. $n = 6$, potem dobimo:

Izračun (vrednost glede na (6.5)): 0.645774.

Simulacija Monte Carlo (10.000 poskusov): 0.6479022.

Simulacija Monte Carlo (50.000 poskusov): 0.6451579.

Opomba 1. Komentar zgleda (5).

Pri vrednotenju kreditnih derivativov je naše tveganje povezano s tem, ali bodo dolgovi poplačani ali ne. Ravno propad kredita pa običajno opišemo s funkcijami preživetja $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ in s kopulo preživetja $(\widehat{C})$.

$$S(t_1, t_2 \ldots, t_n) = \widehat{C}(S_1(t_1), S_2(t_2), \ldots, S_n(t_n))$$

Pri vrednotenju pogodbe, vezane na prvi propad, nas bo zanimala porazdelitev $\tau = min\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$. Nelsen [9] je pokazal, da je funkcija preživetja za τ enaka diagonalnemu prerezu kopule preživetja.

Funkcija preživetja za τ je potem enaka

$$S_\tau(t) = \widehat{C}(S_1(t), S_2(t), \ldots, S_n(t)), \tag{6.7}$$

gostota njegove porazdelitve, pa je enaka

$$f_{tau}(t) = -\partial S_\tau(t)/\partial t. \tag{6.8}$$

V primeru, ko je kopula C radialno simetrična (taka je npr. Gaussova kopula), lahko $\widehat{C}$ v (6.7) in (6.8) nadomestimo kar s C.

Vrednost pogodbe, vezane na prvi propad, ki nam, če prvi izmed n-vrednostnih papirjev v portfelju propade pred časom t, izplača $\varpi\tau$:

$$\begin{aligned} V(t_0, t) &= E[\varpi(\tau)e^{-r(\tau)}\chi_{[\tau<t]}] \\ &= \int_{t_0}^{t} \varpi(s)e^{-r(s)} f_\tau(s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{6.9}$$

6.4 Kritika uporabe kopul v financah

Čeprav so kopule na področju financ prisotne le malo časa, so že sprožile veliko polemik o primernosti njihove uporabe. Veliko ljudi je namreč za krivce sedanje krize razglasilo prav njih, natančneje Gaussovo kopulo. Tako je npr. preteklo leto Felix Salmon članek o kopulah naslovil kar z "Recipe for Disaster : The Formula That Killed Wall Street" (Wired Magazine, 23. februar 2009).[7] V njem je kopulo označil za uničevalno orožje:

"And Li's Gaussian copula formula will go down in history as instrumental in causing the unfathomable losses that brought the world financial system to its knees.[8]" (Felix Salmon [11], 1)

To je deloma res, toda bolje, kot pošiljati kopule v pozabo, bi bilo poučiti ljudi o tem, kako se pravilno uporabljajo in da izbira Gaussove kopule mogoče ni vedno najbolj primerna.

"It is the usage of a model, where it should not be used and the ignorance of that fact which caused the problems.[9]" (Rachev, Stein in Sun [10], 6)

In čeprav je mogoče, da včasih kompleksen, nelinearen problem, zaradi lažje izračunljivosti s pomočjo predpostavk prevedemo na linearen problem, bi se morali zavedati omejitev tega početja, t.j., da bodo modeli, ki so poenostavili problem, delovali le znotraj primernih predpostavk. Ljudje, ki so uporabljalji Gaussovo kopulo, so zanemarili, da ekstremnim dogodkom pripiše premajhno verjetnost, saj se jim pojav le-teh zdel preveč "oddaljen". Poleg tega so pozabili, da običajen (Pearsonov) korelacijski koeficient, ki se pojavlja v enačbi za Gaussovo kopulo, meri samo linearno odvisnost med spremenljivkami in da njegova velikost ni najboljši pokazatelj, kako velika je dejanska odvisnost (Primer hkratnih kriz na trgih, ki med sabo niso visoko korelirani.).

Če upoštevamo vse zgoraj našteto, lahko pridemo do zaključka, da je od razprave o tem, "koliko" krive so kopule, pomembnejša razprava o tem, kako jih pravilno uporabljati v prihodnje. O tem je bilo sicer že veliko napisanega, a žal so temu ljudje pred krizo posvečali premalo pozornosti.

---

[7] Recept za katastrofo: Enačba, ki je uničila Wall Street.

[8] In Li-jeva Gaussova kopula se bo v zgodovino zapisala kot instrument, ki je povročil neizmerne izgube, ki so svetovni finančni sistem spravile na kolena.

[9] Uporaba modela, kjer ne bi smel biti uporabljen in ignoriranje tega dejstva, je bilo tisto, kar je povzročilo ptobleme.

Literatura

[1] E. Bouyé, V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet in T. Roncalli, *Copulas for Finance - A Reading Guide and Some Applications* (online) (7. marec, 2000). Dostopno na SSRN: http://s.srn.com/abstract=1032533.

[2] E. Bouyé, V. Durrleman, A. Nikeghbali, G. Riboulet in T. Roncalli, *Copulas: An Open Field for Risk Management* (online) (23. marec, 2001). Dostopno na SSRN: http://ssrn.com/abstract=1032557.

[3] M. Dorey, Joubert P. *Modelling dependencies: An overview* (online) (28. julij, 2005). Dostopno na naslovu: http://www.actuaries.org.uk.

[4] V. Durrelman, A. Nikeghbali in T. Roncalli, *Which copula is the right one?* (online) (25. avgust, 2000). Dostopno na SSRN: http://ssrn.com/abstract=1032545.

[5] P. Embrechts, F. Lindskog in A. McNeil, *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management.* V: Rachev, S.T. (ur.): Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, North Holland: Elsevier (2003), 329–384. ISBN-13: 978-0-444-50896-6.

[6] Free exchange, *In defense of the Gaussian copula* (online) (29. april, 2009). Dostopno na naslovu: http://www.economist.com/blogs/freeexchange/2009/04/in_defense_of_copula.

[7] J.F. Jouanin, G. Riboulet, T. Roncalli, *Financial Applications of Copula Functions.* V: Szego, G. (ur.): Risk Measures for the 21st Century, New York: John Wiley and Sons (2004), 273–300. ISBN: 978-0-470-86154-7.

[8] D.X. Li, *On Default Correlation: A Copula Function Approach*, Journal of fixed income 9(4) (2000) 43–54.

[9] R.B. Nelsen, *An Introduction to Copulas.* 2. izdaja. New York: Springer, Springer Series in Statistics (2006). ISBN-13: 978-0387-28659-4.

[10] S.T. Rachev, M. Stein in W. Sun, *Copula Concepts in Financial Markets* (online) (6. april, 2009). Dostopno na naslovu: http://www.finanalytica.com/uploads/Copula_Concepts_in_Financial_Markets.pdf

[11] F. Salmon, *Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street* (online) (23. februar, 2009). Dostopno na naslovu: http://www.wired.com/techbiz/it/magazine/17-03

[12] A. Sklar, *Random Variables, Distribution Functions, and Copulas: A Personal Look Backward and Forward.* V: L. Rüschendorf, B. Schweizer, M.D. Taylor (ur.): Distributions with Fixed Marginals and Related Topics, Hayward, CA: Institute of Mathematical Statistics (1996), 1–14. ISBN: 0-940600-40-4.